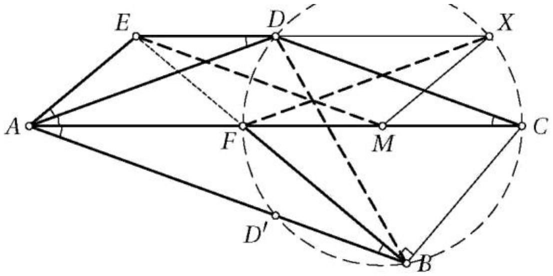
LVII олимпијада

1. Нека BCF е правоаголен триаголник со прав агол во темето B. Нека A е точка на правата CF таква што $\overline{FA}=\overline{FB}$, при што точката F е меѓу точките A и C. Точката D е таква што $\overline{DA}=\overline{DC}$ и правата AC го полови $\measuredangle DAB$, а точката E е таква што $\overline{EA}=\overline{ED}$ и правата AD го полови $\measuredangle EAC$. Нека M е средина на отсечката CF, а X точка таква што четириаголникот $AMXE$ е паралелограм ($AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Докажи дека правите BD, FX и ME се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин*. Да означиме $\measuredangle BAC=\measuredangle CAD=\measuredangle DAE=x$. Бидејќи $\overline{DA}=\overline{DC}$ и $\measuredangle ADC=180^\circ-2x=360^\circ-2\measuredangle ABC$, точката D е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, па затоа $\overline{DB}=\overline{DA}$.



Точката M е центар на опишаната кружница γ околу $\triangle BCF$. Ако кружницата γ по вторпат ја сече правата AB во точката D', тогаш

$$\measuredangle D'AC=\measuredangle D'BF=\measuredangle DAC=x,$$

па затоа точките D и D' се симетрични во однос на правата AC. Според тоа, $D\in\gamma$. Од $\measuredangle EDA=\measuredangle DAC$ следува $ED \parallel AC$. Нека правата ED по втор пат ја сече кружницата γ во точката X'. Тогаш $\measuredangle X'FC-\measuredangle DFC=\measuredangle DAC$, па затоа четириаголникот $AFX'D$ е паралелограм и оттука $\overline{AF}=\overline{DX'}$. Но, истотака $\overline{FM}=\overline{MX}=\overline{AE}=\overline{ED}$, па следува дека четириаголниците $DEFM$ и $AMX'E$ се паралелограми, што значи дека $X=X'\in\gamma$.

Сега од $\measuredangle AFE=\measuredangle AMD=2x=\measuredangle BFC$ следува дека точките B, E и F се колинеарни. Бидејќи $\overline{BD}=\overline{AD}=\overline{FX}$, четириаголникот $BXDF$ е рамнокрак трапез и неговите дијагонали BD и FX се сечат на оската на симетрија, а тоа е правата ME.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање, D е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Следува, $\measuredangle ABD=90^\circ-\measuredangle ACB=2x=180^\circ-\measuredangle AED$, што значи дека точките A, B, D, E лежат на иста кружница ω. Тогаш важи $\measuredangle ABE=\measuredangle ADE=\measuredangle ABF$, што значи дека точките B, F, E се колинеарни. Притоа важи $\measuredangle AFE=2x$, па затоа $\overline{EA}=\overline{EF}$, од каде што следува дека четириаголникот $EFMX$ е рамнокрак трапез. Според тоа, точките E, F, M, X припаѓаат на некоја кружница Ω.

Понатаму, бидејќи ротационата хомотетија со центар A го пресликува $\triangle ADC$ во $\triangle AFD$, важи $\triangle ADF \sim \triangle ACB$, па затоа $\measuredangle AFD = \measuredangle ABC = 90^\circ + x$, од каде следува $\measuredangle FDC = 90^\circ$, т.е. D припаѓа на опишаната кружница γ на $\triangle BFC$ со центар M. Сега, $\measuredangle DBM = 90^\circ - \measuredangle DCB = x = \measuredangle DAM$, па затоа $M \in \omega$. Исто така, од $\measuredangle MXD = \measuredangle AMD = 2x$ следува $X \in \gamma$.

Сега BD, FX и ME се радикалните оски на трите пара кружници формирани од γ, Ω и ω, од каде што следува тврдењето на задачата.

2. Определи ги сите природне броеви *n* за кои е можно во секое поле на $n \times n$ табела да се запише една од буквите *I*, *M* и *O* така што се исполнети следниве услови:

- во секој ред и секоја колона, една третина од запишаните букви се *I*, третина се *M* и третина се *O*;
- на секоја дијагонала на која бројот на запишаните букви е делив со три, една третина ја сочинуваат буквите *I*, третина буквите *M* и третина буквите *O*.

Напомена. Редовите и колоните на $n \times n$ табелата се означни со броевите од 1 до n на вообичаениот начин. На секое поле соодветствува пар природни броеви (i, j), $1 \le i, j \le n$ За $n > 1$, табелата има $4n - 2$ дијагонали од два вида. Дијагонала од првиот вид се состои од сите полиња (i, j) за кои збирот $i + j$ е константен, додека дијагонала од вториот вид се састои од сите полиња (i, j) за кои разликата $i - j$ е константна.

Решение. Пример за $n = 9$ е прикажан на цртежот десно. Со сложување на така пополнети квадрати во квадрат со страна $9k$ може да се добие пример за било кој *n* делив со 9.

I	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*
M	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*
O	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*
I	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*
M	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*
O	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*
I	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*
M	*M*	*M*	*O*	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*
O	*O*	*O*	*I*	*I*	*I*	*M*	*M*	*M*

Да претпоставиме дека табела $n \times n$ е пополнета на саканиот начин. Јасно, $3 \mid n$, т.е. $n = 3k$ за $k \in \mathbb{N}$. *Среќни полиња* ги нарекуваме сите полиња (i, j) за кои $i \equiv j \equiv 2 (mod\ 3)$, а *среќни линии* сите редови, колони и дијагонали кои садржат барем едно среќно поле. Секоја среќна дијагонала има број полиња делив со 3. На два начина ќе го преброиме бројот N на парови (ℓ, c), каде ℓ е среќна линија, а *c* е поле на неа кое ја содржи буквата *M*.

Секој од 2*k* среќни редови и колони содржи по *k* букви *M*. Исто така, на среќните дијагонали од секој тип вкупно има по

$$\tfrac{1}{3}(3+6+....+n+...+6+3)=k^2$$

букви M. Според тоа, $N=4k^2$. Од друга страна, секоја од $3k^2$ букви M лежи на точно една или четири срeќни линии, па затоа $N\equiv 3k^2 (\mathrm{mod}\, 3)$. Според тоа, $3\,|\,4k^2$, па затоа $3\,|\,k$, т.е. $9\,|\,n$.

Втор начин. Да претпоставиме дека за некој $n=3k$ бараното пополнување е можно. За $i,j\in\{1,2,3\}$ со a_{ij} да го означиме вкупниот број букви M во полињата (x,y) со $x\equiv i$ и $y\equiv j(\mathrm{mod}\ 3)$. Според условот на задачата важи:

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{22}+a_{13}=k^2, \qquad (1)$$

$$a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{13}+a_{23}+a_{33}=k^2. \qquad (2)$$

Со собирање на равенствата (1) и одземање на равенствата (2) добиваме $3a_{22}=k^2$, па затоа $3\,|\,k$, т.е. $9\,|\,n$. Пример за $9\,|\,n$ се прави како во првиот начин на решавање.

3. Во рамнината е даден конвексен многуаголник $\mathrm{P}=A_1A_2...A_k$. Темињата $A_1,A_2,...,A_k$ имаат целобројни кординати и лежат на иста кружница. Нека S е плоштината на многуаголникот P. Непарниот природен број n е таков што квадратите на должините на сите страни на многуаголникот P се природни броеви деливи со n. Докажи дека $2S$ е природен број делив со n.

Решение. Според Пиковата теорема бројот $2S$ е природен. Јасно, доволно е да го разгледаме случајот $n=p^r$, каде $p>2$ е природен број и $r\ge 1$.

Тврдењето за $k=3$ е едноставно. Навистина, ако се $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ страните на триаголникот P и $n\,|\,a,b,c$, според Хероновата формула имаме

$$(4S)^2=2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2, \qquad (1)$$

па како десната страна на (1) е делива со n^2 заклучуваме дека $n\,|\,4S$. Но, n е непарен број, па затоа $n\,|\,2S$.

За $k\ge 4$ тврдењето ќе го докажеме со индукција. Ако постои дијагонала чиј квадрат на должината е делив со n, тогаш таа го дели многуаголникот P на два помали многуаголници на кои може да се примени индуктивната претпоставка. Затоа да претпоставиме дека таква дијагонала не постои. Со $v_p(x)$ го означуваме експонентот на простиот број p во каноничното разложување на бројот x.

Лема. За $i=2,3,...,k-1$ важи $v_p(\overline{A_1A_{i+1}}^2)\le v_p(\overline{A_1A_i}^2)$.

Доказ. Случајот $i=2$ е тривијален, бидејќи по претпоставка е $p^r \mid \overline{A_1A_2}^2$ и $p^r \nmid \overline{A_1A_3}^2$.

Нека $i \geq 3$ и

$\overline{A_1A_{i-1}}^2 = a$, $\overline{A_1A_i}^2 = b$, $\overline{A_1A_{i+1}}^2 = c$, $\overline{A_iA_{i+1}}^2 = x$, $\overline{A_{i-1}A_{i+1}}^2 = y$ и $\overline{A_{i-1}A_i}^2 = z$.

Од теоремата на Птоломеј следува $\sqrt{ax}+\sqrt{cz}=\sqrt{by}$, па со квадрирање добиваме

$$ax+cz-2\sqrt{acxz}=by .$$

Оттука следува дека $2\sqrt{acxz}$ е природен број. Според индуктивната претпоставка $v_p(x), v_p(z) \geq r > v_p(y)$ и $s = v_p(b) < v_p(a)$. Да претпоставиме дека $v_p(c) \geq s$. Тогаш броевите ax, cz и $2\sqrt{acxz}$ се деливи со p^{r+s}. Но, $p^{r+s} \nmid by$, што не е можно. ■

Од лемата непосредно следува контрадикцијата

$$r > v_p(\overline{A_1A_3}^2) > v_p(\overline{A_1A_4}^2) > \ldots > v_p(\overline{A_1A_k}^2) = r .$$

4. Множеството природни броеви го нарекуваме *убаво* ако содржи најмалку два елементи и секој негов елемент има заеднички прост делител со барем еден од преостанатите елементи. Нека $P(n)=n^2+n+1$. Определи ја најмалата вредност на природниот број b за која постои ненегативен цел број a таков што множеството

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

е убаво.

Решение. На почетокот да забележиме дека $P(n)$ е непарен број за секој $n \in \mathbb{N}$. Понатаму, ако простиот број $p > k$ е делител на $P(n)$ и $P(n+k)$, тогаш $p \mid P(n+k)-P(n) = k(2n+k+1)$, па затоа $2n \equiv -k-1 (\mathrm{mod}\, p)$ и оттука $4P(n) \equiv (k+1)^2 - 2(k+1)+4 = k^2+3 (\mathrm{mod}\, p)$, па затоа $p \mid k^2+3$. Според тоа:

1) $\mathrm{NZD}(P(n), P(n+1)=1$,
2) $\mathrm{NZD}(P(n), P(n+2)) \in \{1,7\}$, и притоа $\mathrm{NZD}(P(n), P(n+2)) = 7$ ако и само ако $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$,
3) $\mathrm{NZD}(P(n), P(n+3)) \in \{1,3\}$, и притоа $\mathrm{NZD}(P(n), P(n+3)) = 3$ ако и само ако $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$,
4) $\mathrm{NZD}(P(n), P(n+4)) \in \{1,19\}$, и притоа $\mathrm{NZD}(P(n), P(n+4)) = 19$ ако и само ако $n \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 19)$.

Пример на убаво множество за $b=6$ може да се добие ако земеме број a

таков што

$$a \equiv 2 \pmod 3,\ a \equiv 6 \pmod 7 \text{ и } a \equiv 5 \pmod{19},$$

што се сведува на $a \equiv 62 \pmod{399}$, бидејќи тогаш

$$3 \mid P(a+1), P(a+4),\ 7 \mid P(a+3), P(a+5) \text{ и } 19 \mid P(a+2), P(a+6).$$

Нека претпоставиме дека постои убаво множество за $b \le 5$. Бидејќи $P(a+2)$ е заемно прост со $P(a+1)$ и $P(a+3)$, мора да важи $b \ge 4$. Понатаму, $P(a+3)$ е заемно прост со $P(a+2)$ и $P(a+4)$, па мора да важи

$$\mathrm{NZD}(P(a+3), P(a+1)) > 1$$

(случајот $\mathrm{NZD}(P(a+3), P(a+5)) > 1$ е аналоген). Значи, $a \equiv 1 \pmod 7$, но тогаш $\mathrm{NZD}(P(a+2), P(a+4)) = 1$. Затоа $P(a+2)$ и $P(a+4)$ може да имаат заеднички прост делител само со $P(a+5)$ и $P(a+1)$, соодветно. Но, тогаш $3 \mid a+1, a+2$, што не е можно.

5. На таблата е запишана равенката

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016)$$

со по 2016 линеарни множители на секоја страна. Која е најмалата вредност на k за која може да се избришат точно k множители од овие 4032 линеарни множители така што на секоја страна ќе остане најмалку еден множител и притоа добиената равенка ќе нема реални решенија?

Решение. Бидејќи ниту еден множител не смее да се појави од двете страни на равенката, мораме да избришеме најмалку 2016 множители.

За да докажеме дека 2016 множители се доволни, од левата страна ќе ги избришеме множителите $x-k$ за $k \equiv 2,3 \pmod 4$, а од десната страна ќе ги избришеме множителите $x-l$ за $l \equiv 0,1 \pmod 4$. Ја добиваме равенката $A(x) = B(x)$ каде

$$A(x) = \prod_{i=0}^{503} (x-4i-1)(x-4i-4) \text{ и } B(x) = \prod_{i=0}^{503} (x-4i-2)(x-4i-3).$$

Тврдиме дека оваа равенка нема реални решенија.

1) Ако $x = 1, 2, \dots, 2016$, тогаш едната страна на равенката е еднаква на нула, а другата е различна од нула.
2) Ако $2k-1 < x < 2k$ за некој $k = 1, 2, \dots, 1008$, тогаш $A(x) < 0 < B(x)$.
3) Нека $x < 1$ или $x > 2016$ или $4k < x < 4k+1$ за некој $k = 1, 2, \dots, 503$. Тогаш важи

$$0 < (x-4i-1)(x-4i-4) < (x-4i-2)(x-4i-3) \text{ за } i = 0, 1, \dots, 503,$$

па со множење на овие неравенства добиваме $0 < A(x) < B(x)$.

4) Нека $4k+2 < x < 4k+3$ за некој $k = 0, 1, 2, \dots, 503$. Тогаш важи

$$(x-1)(x-2016) < (x-2)(x-2015) < 0 \text{ и}$$
$$(x-4i)(x-4i-1) > (x-4i+1)(x-4i-2) > 0 \text{ за } i = 1, 2, ..., 503,$$

а со множење на овие неравенства добиваме $A(x) < B(x) < 0$.

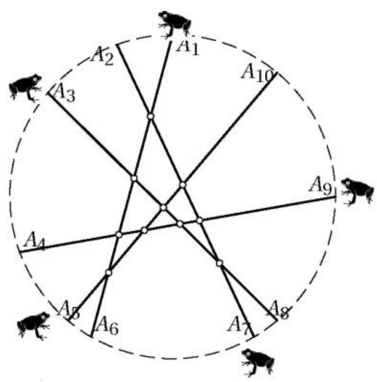
Со ова сите случаи се испитани. Значи, одговорот на задачата е 2016.

6. Во рамнита се дадени $n \geq 2$ отсечки така што секои две отсечки се сечат во внатрешна точка и никои три не се сечат во една точка. Ѓорѓи треба да избере по еден крај на секоја отсечка и на него да постави жаба свртена кон другиот крај на отсечката. Потоа тој ќе плесне со рацете $n-1$ пати. Секој пат кога ќе плесне со рацете, секоја жаба одма скокнува напред во следната пресечна точка на својата отсечка. Жабите никогаш не ја менуваат насоката во која скокаат. Ѓорѓи сака да ги постави жабите така што ниту во еден момент две жаби нема да се најдат во иста пресечна точка.

а) Ако n е непарен, докажи дека Ѓоѓжи секогаш може да ја постигне целта.

b) Ако n е парно, докажи дека Ѓорѓи никогаш не може да ја постигне целта.

Решение. Разгледуваме голема кружница која ги содржи сите отсечки и да ги продолжиме отсечките на двете страни до пресекот со кружницата. Пресечните точки да ги означиме со $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ во насока на движењето на стрелките на часовникот. Дадените отсечки лежат на правите $A_i\ A_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$.



а) Ќе докажеме дека Ѓорѓи ја постигнува целта ако жабите ги постави во точките $A_1, A_3, A_5, ..., A_{2n-1}$. Ги разгледуваме жабите во точките A_i и A_j, каде i и j се непарни броеви и $i < j < n+i$ (индексите се по модул $2n$). Нека X е пресечната точка на отсечките A_iA_{n+i} и A_jA_{n+j}. На лакот $A_iA_{i+1}A_j$ има непарен број означени точки, а секоја отсечка со еден крај во овие точки сече точно една од отсечките A_iX и A_jX. Сите останати отсечки ги сечат или двете отсечки A_iX и A_jX, или ниту една. Следува дека на отсечките A_iX и A_jX вкупно има непарен број пресечни точки, па затоа овие две жаби нема да се судрат.

b) Ако n е парен, некои две жаби на Ѓорѓи ќе бидат во соседни точки на кружницата, да кажеме во A_i и A_{i+1}. Нека отсечките со краеви во овие две точки се сечат во точката X. Бидејќи секоја отсечка која сече една од отсечките A_iX и $A_{i+1}X$, мора да ја сече и другата, на отсечките A_iX и $A_{i+1}X$ има еднаков број пресечни точки. Затоа овие две жаби ќе се судрат во точката X.