Р. Малчески, А. Малчески,

ПРЕСЛИКУВАЊА ВО РАМНИНА ПРЕКУ КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ II

(Продолжение!)

2.3. Нека е дадена права (p) со својата автокоњугирана равенка (1) и точка z_0. Ако равенката (1) ја запишеме во обликот $z=-\frac{B}{A}\overline{z}-\frac{C}{A}$, тогаш комплексниот аглов коефициент на произволна права, нормална на (p), е $\eta'=\frac{B}{A}$. Значи, равенката на правата (q) која минува низ точката z_0 и е нормална на правата (p) е $z-z_0=\frac{B}{A}(\overline{z}-\overline{z_0})$, односно

$$Az-B\overline{z}-z_0A+\overline{z_0}B=0. \qquad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2), тогаш за пресечната точка на правите (p) и (q), т.е. за проекцијата на z_0 врз правата (p) добиваме $2Az'=Az_0-B\overline{z_0}-C$, односно $z'=\frac{Az_0-B\overline{z_0}-C}{2A}$. Според тоа,

$$z_0-z'=\frac{Az_0+B\overline{z_0}+C}{2A},$$

па затоа **растојанието** од точката z_0 до правата (p), зададена со нејзината автокоњугирана равенка (1) е

$$d(z_0,(p))=\frac{|Az_0+B\overline{z_0}+C|}{|2A|}.$$

3. РАВЕНКА НА КРУЖНИЦА

3.1. Како што знаеме $|z-z_0|=R$ е равенка на кружница со центар во точката S, со афикс z_0, и радиус R. Во овој параграф подетално ќе се осврнеме на кружницата во комплексната рамнина.

3.2. Пример. Нека P_1 и P_2 се произволни точки во комплексната рамнина со афикси z_1 и z_2, соодветно. Докажете дека кружницата опишана над отсечката P_1P_2, како над дијаметар има равенка

$$|2z-z_1-z_2|=|z_1-z_2|. \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи радиусот на кружницата опишана над P_1P_2, како над дијаметар, е $R=\frac{|z_1-z_2|}{2}$, а нејзиниот центар P_0 е средина на отсечката P_1P_2, со афикс $z_0=\frac{z_1-z_2}{2}$, добиваме дека равенката на разгледуваната кружница е $|z-\frac{z_1+z_2}{2}|=\frac{|z_1-z_2|}{2}$. Ако последната равенка ја помножиме со 2 ја добиваме еквивалентната на неа равенка (1). ♦

3.3. Пример. Нека A,B и C се три различни точки во рамнината. Најдете го геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од точките A,B и C.

Решение. Нека афиксите на точките A,B и C се a,b и c, соодветно. Според пример 1.10 геометриското место на точки еднакво оддалечени од точките A и B, B и C, A и C, се симетралите на отсечките AB,BC и CA чии равенки се

$$z-\frac{a+b}{2}=-\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\left(\overline{z}-\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}\right) \qquad (2)$$

$$z-\frac{b+c}{2}=-\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}\left(\overline{z}-\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}\right) \qquad (3)$$

$$z-\frac{a+c}{2}=-\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}\left(\overline{z}-\frac{\overline{a}+\overline{c}}{2}\right) \qquad (4)$$

соодветно. Ќе разгледаме два сучаи.

а) Ако точките A,B и C се колинеарни, тогаш од последица 1.3 следува дека симетралите на отсечките AB,BC и CA имаат еднакви комплексни аглови коефициенти, а од последица 1.8 следува дека тие се паралелни. Но, точките A,B и C се различни, па затоа и средините на отсечките AB,BC и CA се различни, што значи дека не постои точка која ги задоволува условите на задачата.

б) Ако точките A,B и C не се колинеарни, тогаш симетралите на отсечките AB,BC и CA се сечат две по две. Ако од равенката (2) ја извадиме равенката (3) за афиксот o на пресечната точка O на симетралите на отсечките AB и BC добиваме

$$o=\frac{a\bar{a}(c-b)+b\bar{b}(a-c)+c\bar{c}(b-a)}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1\\ b & \bar{b} & 1\\ c & \bar{c} & 1\end{vmatrix}}.$$

Со непосредна проверка се докажува дека точката O лежи на правата CA. Според тоа, бараното геометриско место е точката O со афикс o. ♦

3.4. Забелешка. Во претходниот пример, всушност докажавме дека низ три неколинеарни точки A, B и C минува една и само една кружница со центар во точката O и радиус $R=|a-o|$, односно докажавме дека околу произволен триаголник може да се опише кружница чиј центар се наоѓа во пресекот на симетралите на неговите страни.

3.5. Пример. Ако z_j, $j=1,2,3,4$ се последователни темиња на тетивен четириаголник, тогаш

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}>0 \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}&|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|=\\ &=|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_1-z_4|\cdot|z_2-z_3|\end{aligned} \qquad (6)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека центарот на опишаната кружница се совпаѓа со координатниот почеток, а радиусот на кружницата е r. (зошто?). Тогаш,

$$z_j=re^{i\varphi_j},\ \ j=1,2,3,4.$$

Исто така, можеме да претпоставиме дека последователноста на темињата е еквивалентна со условот

$$\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4<\varphi_1+2k\pi. \qquad (7)$$

При направените претпоставки важи:

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\frac{(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2})(e^{i\varphi_3}-e^{i\varphi_4})}{(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_4})(e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_3})}$$

$$=\frac{(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}})(e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}})}{(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}})(e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}})}$$

$$=\frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}}{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}>0$$

бидејќи според (7), секоја величина под знакот на синусот е од интервалот $(0,\pi)$. Со тоа е докажано неравенството (5).

Од неравенството (5) следува

$$\begin{aligned}&|(z_1-z_2)(z_3-z_4)|+|(z_1-z_4)(z_2-z_3)|\\ &\quad=|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)|\\ &\quad=|-z_1z_4-z_2z_3+z_1z_2+z_3z_4|\\ &\quad=|(z_1-z_3)(z_2-z_4)|\end{aligned}$$

т.е. равенството (6) е исполнето. ♦

3.6. Забелешка. Равенството (6) всушност е познатата **теорема на Птоломеј**: *Производот на должините на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков на збирот од производите на должините на спротивните страни.*

3.7. Како што рековме равенката на кружницата со центар во точката z_0 и радиус R е $|z-z_0|=R$. Меѓутоа, од практични причини пожелно е да се знае обликот на равенката на кружницата сличен на оној на автокоњугираната равенка на права. Ќе докажеме дека

$$z\bar{z}+\bar{A}z+A\bar{z}+B=0,\ B\in\mathbf{R},\ A\in\mathbf{C},\ |A|^2-B>0 \qquad (8)$$

е равенка на кружница.

Навистина, ако земеме $z_0=-A$ и $R^2=z_0\overline{z_0}-B=|A|^2-B>0$, и ако замениме во равенката (8) ја добиваме равенката $z\bar{z}-z_0\bar{z}-z\overline{z_0}+z_0\overline{z_0}=R^2$, т.е. равенката $|z-z_0|=R$, која е равенка на кружница со центар во z_0 и радиус R. Според тоа, равенката (8) е равенка на кружница со центар во z_0 и радиус $R=\sqrt{|A|^2-B}$.

3.8. Забелешка. Во следниот пример ќе дадеме еден аргумент кој ни дава за право правите и кружниците во комплексната рамнина да ги нарекуваме кружници, а кружниците да ги нарекуваме вистински кружници.

3.9. Пример. (Аполониева кружница). Нека A и B се произволни точки во рамнината. Геометриското место на точката M со својство

$$\overline{MA}:\overline{MB}=k,\ (k>0,\ k\neq 1)$$

е кружница. Докажете!

Решение. Ќе го разгледаме случајот $k>1$. Поставуваме координатен систем xOy таков што $x-$оската се совпаѓа со правата AB, а координатниот почеток се совпаѓа со средината на отсечката AB. Имаме $A(a,0)$ и $B(-a,0)$, т.е. точките A и B имаат афикси $z_1=a$ и $z_2=-a$, соодветно. Ако точката M од разгледуваното геометриско место има афикс z, тогаш од условот на задачата следува дека $k=\frac{|z-a|}{|z+a|}$, односно

$$z\overline{z}+a\frac{k^2+1}{k^2-1}(z+\overline{z})+a^2=0. \qquad (9)$$

Константите $A=a\frac{k^2+1}{k^2-1}, B=a^2$ го задоволуваат условот $|A|^2-B>0$, па затоа (9) е равенка на кружница со центар во $z_0=-a\frac{k^2+1}{k^2-1}$ и радиус $R=\sqrt{|A|^2-B}=\frac{2ak}{k^2-1}$.

Случајот $0<k<1$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.10. Заемен однос на права и кружница. Дадени се права (p) и кружница (K) чии равенки се $z-z_0=\eta(\overline{z}-\overline{z_0})$ и $|z-z_1|=R$, соодветно. Во центарот на кружницата чиј афикс е z_1 повлекуваме права (p') нормална на правата (p). Нејзината равенка е $z-z_1=-\eta(\overline{z}-\overline{z_1})$. Ако ги собереме равенките на правите (p) и (p') го добиваме афиксот на пресечната точка на овие две прави $z^*=\frac{\eta(\overline{z_1}-\overline{z_0})+z_1+z_0}{2}$. Според тоа, за растојанието од центарот на кружницата до правата (p) добиваме

$$d(z^*,z_0)=|z^*-z_0|=\frac{|\eta(\overline{z_1}-\overline{z_0})+z_1-z_0|}{2}.$$

Од досега изнесеното следува:

- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1}-\overline{z_0})+z_1-z_0|}{2}=R$, тогаш правата (p) е тангента на кружницата (K) и допирната точка има афикс z^*;

- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1}-\overline{z_0})+z_1-z_0|}{2}<R$, тогаш правата (p) и кружницата (K) се сечат во две точки; и

- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1}-\overline{z_0})+z_1-z_0|}{2}>R$, тогаш правата (p) и кружницата (K) немаат заеднички точки.

3.11. Пример. Определете го заемниот однос на правата (p) и кружницата (K) чии равенки се

$$z=\overline{z}+3i \text{ и } |z+4-2i|=3,$$

соодветно.

Решение. Од равенката на правата (p) добиваме $z_0=\frac{3i}{2}$, а од равенката на кружницата (K) наоѓаме $z_1=-4+2i$ и $R=3$. Затоа

$$d=\frac{|\eta(\overline{z_1}-\overline{z_0})+z_1-z_0|}{2}=\frac{|(-4-2i+\frac{3i}{2})+(-4+2i-\frac{3i}{2}|}{2}$$

$$=\frac{|-8|}{2}=4>3=R$$

што според 3.10 значи дека правата правата (p) и кружницата (K) немаат заеднички точки. ♦

3.12. Пример. Нека е дадена кружница $(K): |z-z_0|=R$ и точка z_1 на неа. Да се состави равенката на тангентата на кружницата (K) која минува низ точката z_1.

Решение. Равенката на правата (p) која минува низ точките z_0 и z_1 гласи $z-z_0=\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}(\overline{z}-\overline{z_0})$. Според тоа, равенката на тангентата (p') на (K) повлечена во точката z_1 е $z-z_1=-\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}(\overline{z}-\overline{z_1})$. ♦

3.13. Забелешка. а) Ако $(K): |z|=1$ е единичната кружница и z_1 е точка на неа, тогаш равенката на тангентата на (K) повлечена во z_1 гласи $z+z_1^2\overline{z}=2z_1$.

б) Ако A,B,C и D се точки од единичната кружница $(K): |z|=1$, со афикси a,b,c и d, соодветно, тогаш $\overline{a}=a^{-1}$, $\overline{b}=b^{-1}, \overline{c}=c^{-1}$ и $\overline{d}=d^{-1}$. Според последица 1.8 тетивите AB и CD се паралелни ако и само ако

$$(b-a)(\overline{d}-\overline{c})=(\overline{b}-\overline{a})(d-c),$$

што значи ако и само ако $ab=cd$. Аналогно се добива дека тетивите AB и CD се заемно нормални ако и само ако $ab+cd=0$.

в) Ако A, B, C и D се точки од единичната кружница (K): $|z|=1$, со афикси a, b, c и d, соодветно, и $AB \cap CD = \{S\}$. Равенките на правите AB и CD се

$$z + ab\overline{z} = a + b \text{ и } z + cd\overline{z} = c + d,$$

соодветно. Ако од последните две равенки го елиминираме $\overline{z}$, за афиксот s на пресечната точка S добиваме

$$s = \frac{(a+b)cd-(c+d)ab}{cd-ab}.$$

г) Нека A и B, со афикси a и b, се точки од единичната кружница, такви што AB не е дијаметар. Според а) равенките на тангентите (t_A) и (t_B) се $z + a^2\overline{z} = 2a$ и $z + b^2\overline{z} = 2b$, соодветно. Ако од последните две равенки го елиминираме $\overline{z}$ за афиксот s на пресечната точка S добиваме $s = \frac{2ab}{a+b}$.

д) Нека правата (p) ја сече единечната кружница во точките A и B, со афикси a и b, и нека M, со афикс m, е произволна точка од рамнината. Лесно се докажува дека афиксот c на ортогоналната проекција C на точката M врз правата (p) е зададен со формулата

$$c = \frac{a+b+m-ab\overline{m}}{2}.$$

4. ДИРЕКТНИ СЛИЧНОСТИ

4.1. Дефиниција. Пресликувањето $S: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ дефинирано со

$$w = S(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0 \qquad (1)$$

го нарекуваме **директна сличност**.

4.2. Теорема. Множеството директни сличности $\boldsymbol{DS}$ во однос на операцијата композиција на пресликување е група.

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{DS}$, тогаш

$$S_1(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0 \text{ и}$$

$$S_2(z) = cz + d, \quad c, d \in \mathbf{C}, d \neq 0.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz+d) = a(cz+d) + b =$$
$$= (ac)z + (ad+b), \quad ac, ad+b \in \mathbf{C}, ac \neq 0$$

т.е. $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{DS}$. Значи, множеството $\boldsymbol{DS}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Нека $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{DS}$. Со непосредна проверка се докажува дека

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3)(z) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3)(z),$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, па затоа

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3)$$

т.е. важи асоцијативниот закон.

Пресликувањето $E(z) = z$, за секој $z \in \mathbf{C}$ припаѓа на $\boldsymbol{DS}$ и притоа

$$E \circ S = S \circ E = S \text{, за секој } S \in \boldsymbol{DS}.$$

Нека $S(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ е произволна директна сличност. Пресликувањето $S_1(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ е директна сличност и притоа важи $S(S_1(z)) = S_1(S(z))$, за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. $S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{DS}$. ♦

4.3. Теорема. Секоја директна сличност е еднозначно определена со два пара придружени точки.

Доказ. Нека S е произволна директна сличност за која важи $S(z_1) = w_1$ и $S(z_2) = w_2$. Тогаш $S(z) = az + b,$ каде $a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ се непознати коефициенти кои треба да ги определиме. Според теорема 4.2 секоја директна сличност е биекција, па затоа од $z_1 \neq z_2$ следува $w_1 \neq w_1$. Со замена во $S(z) = az + b$ добиваме

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + b \\ w_2 = az_2 + b \end{cases} \qquad (2)$$

Решавајќи го системот (2) по непознати a и b добиваме $a = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2}$, $a = \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2}$ и $a \neq 0$, т.е. коефициентите a и b на директната сличност $S(z) = az + b$ се наполно определени со два пара придружени точки $(z_1, S(z_1))$ и $(z_2, S(z_2))$. ♦

4.4. Теорема. а) Слика на права (p) при директна сличност е права (p').

б) Паралелни прави при директна сличност се пресликуваат во паралелни прави.

в) Нормални прави при директна сличност се пресликуваат во нормални прави.

Доказ. а) Нека е дадена директната сличност (1) и правата (p) со равенка $z = \eta\overline{z} + c$. Од (1) имаме $z = \frac{w-b}{a}$ и ако замениме во равенката на правата добиваме

$w=(\frac{\bar{a}}{a}\eta)\bar{w}+ac+b-\frac{a\bar{b}}{a}\eta$. Сега од $|\frac{\bar{a}}{a}\eta|=1$ следува дека слика на права (p) при директна сличност е права (p') чиј комплексен аглов коефициент е $\frac{\bar{a}}{a}\eta$.

Тврдењата под б) и в) непосредно следуваат од а) и последица 1.8. ♦

4.5. Теорема. Слика на кружница (K) при директна сличност е кружница (K').

Доказ. Нека е дадена директната сличност (1) и кружница (K) чија равенка е $|z-c|=R$. Од (1) имаме $z=\frac{w-b}{a}$ и ако замениме во равенката на кружницата добиваме $|w-(ac+b)|=|a|R$, што значи дека сликата на кружницата (K) при дадената сличност (1) е кружница (K'), чиј центар има афикс $ac+b$ и истиот е слика на центарот на кружницата (K), а нејзиниот радиус е еднаков на $|a|R$. ♦

4.6. Теорема. Ако A,B се произволни различни точки и A',B' се нивните слики при директната сличност (1) и ако $a=re^{i\varphi}$, тогаш $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$ и правите AB и $A'B'$ формираат ориентиран агол φ.

Доказ. Нека z_1,z_2,w_1,w_2 се афиксите на точките A,B, A',B', соодветно. Тогаш $z_2-z_1=\overline{AB}e^{i\alpha}$ и $w_2-w_1=\overline{A'B'}e^{i\alpha_1}$, каде α и α_1 се аглите кои ги зафаќа реалната оска со векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, соодветно. Од равенствата $w_1=az_1+b$ и $w_2=az_2+b$ го добиваме равенството $w_2-w_1=a(z_1-z_2)$, т.е. равенството $\overline{A'B'}e^{i\alpha_1}=r\overline{AB}e^{i(\alpha+\varphi)}$, од што следува $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$ и $\varphi=\alpha_1-\alpha$. ♦

Реалниот број r го нарекуваме **коефициент на директната сличност** (1), а аголот φ го нарекуваме **агол на директната сличност** (1).

4.7. Дефиницвија. За две фигури ќе велиме дека се **директно слични** ако постои директна сличност која едната од нив ја пресликува во другата.

4.8. Последица. Ако ABC и $A'B'C'$ се директно слични триаголници, тогаш $\overline{A'B'}:\overline{A'C'}=\overline{AB}:\overline{AC}$ и $\angle A'B'C'=\angle ABC$. ♦

4.9. Теорема. Нека точките A,B,C,A' B',C' имаат афикси z_1,z_2,z_3, w_1,w_2,w_3, соодветно. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се директно слични ако и само ако

$$z_1(w_2-w_3)+z_2(w_3-w_1)+z_3(w_1-w_2)=0 \quad (3)$$

Доказ. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ако и само ако постои директна сличност (1) за која важи $w_i=az_i+b$, за $i=1,2,3$. Од последните равенства ги добиваме равенствата

$w_1-w_2=a(z_1-z_2)$ и $w_1-w_3=a(z_1-z_3)$.

Ако ги поделиме овие две равенства го добиваме равенството $\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ кое е еквивалентно со равенството (3). ♦

4.10. Дефиниција. За точката z ќе велиме дека е **неподвижна** за директната сличност (1) ако го задоволува условот $z=az+b$.

Јасно, ако $a\neq 1$, тогаш директната сличност (1) има единствена неподвижна точка чиј афикс е $z_1=\frac{b}{1-a}$, а ако $a=1$, тогаш $b=0$, т.е. директната сличност (1) е идентичното пресликување и сите точки од комплексната рамнина се неподвижни.

Точката C со афикс $c=\frac{b}{1-a}$ ја нарекуваме **центар** на директната сличност $S(z)=az+b$.

5. ДВИЖЕЊА

5.1. Во претходнот параграф ги разгледавме директните сличности и докажавме неколку нивни својства. Во овој параграф ќе се осврнеме наедна важна класа на директни сличности и ќе дадеме класификација на овие директни сличности.

5.2. Дефиниција. Директната сличност $S(z)=az+b, |a|=1$ ја нарекуваме **движење**.

5.3. Теорема. Множеството движења $\boldsymbol{D}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е подгрупа од групата директни сличности $\boldsymbol{DS}$.

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{D}$, тогаш

$$S_1(z) = az+b, S_2(z) = cz+d, |a| = |d| = 1.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz+d) = a(cz+d)+b$$
$$= (ac)z + (ad+b), |ac| = 1,$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{D}$. Значи множеството $\boldsymbol{D}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{D}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{DS}$, па затоа $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$, т.е. важи асоцијативниот закон.

Ако ставиме $a = 1, b = 0$ добиваме дека $1 \cdot z + 0 = E(z) \in \boldsymbol{D}$.

Нека $S(z) = az+b, |a| = 1$ е произволно движење. Пресликувањето

$$S_1(z) = \tfrac{1}{a} z - \tfrac{b}{a}, \ \left|\tfrac{1}{a}\right| = \tfrac{1}{|a|} = 1$$

е движење и притоа важи

$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z$, за секој $z \in \mathbf{C}$,

т.е. $S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{D}$. ♦

5.4. Дефиниција. Движењето

$$S(z) = z + b$$

го нарекуваме **транслација**.

5.5. Теорема. Транслација која не е идентичното пресликување нема неподвижни точки.

Доказ. Непосредно следува од 4.10. ♦

5.6. Теорема. Множеството транслации $\boldsymbol{T}$ во однос на операцијата композиција на на пресликувања е комутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$.

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{T}$, тогаш

$$S_1(z) = z+b, S_2(z) = z+d.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z+d) = (z+d)+b = z+(d+b),$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{T}$. Значи множеството $\boldsymbol{T}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{T}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{D}$, па затоа $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$, т.е. важи асоцијативниот закон.

Нека $S_1, S_2 \in \boldsymbol{T}$, тогаш $S_1(z) = z+b$ и $S_2(z) = z+d$. Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z+d) = (z+d)+b = (z+b)+d$$
$$= S_2(z+b) = S_2(S_1(z))$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. важи комутативниот закон.

Ако ставиме $b = 0$ добиваме дека $1 \cdot z + 0 = E(z) \in \boldsymbol{T}$.

Нека $S(z) = z+b$ е произволна транслација. Пресликувањето $S_1(z) = z-b$ е транслација и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z,$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. $S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{D}$. ♦

5.7. Дефиниција. Директната сличност со коефициент 1 и агол π ја нарекуваме **централна симетрија**.

Според тоа,

$$S(z) = az+b, \ a, b \in \mathbf{C}, \ a \neq 0$$

е централна симетрија ако $a = -1$, што значи дека централната симетрија има облик $S(z) = b - z$. Од 4.10 следува дека централната симетрија $S(z) = b - z$ има центар со афикс $c = \frac{b}{2}$. Во натамошните разгледувања множеството централни симетрии ќе го означуваме со $\boldsymbol{CS}$.

5.8. Теорема. а) Композиција на две централни симетрии е транслација.

б) Композиција на централна симетрија и и транслација е централна симетрија.

Доказ. а) Нека

$S_1(z) = b - z$ и $S_2(z) = d - z$, $b, d \in \mathbf{C}$

се произволни централни симетрии. Тогаш,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(d-z) = b-(d-z) = z+(b-d)$$

што значи дека композицијата $S_1 \circ S_2$ е транслација за вектор $b - d$.

б) Нека $S_1(z) = b - z$ и $S_2(z) = z + d$, $b, d \in \mathbf{C}$ се произволна централна симетрија и транслација, соодветно. Тогаш,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z+d) = b-(z+d) = b-d-z$$
$$S_2(S_1(z)) = S_2(b-z) = d+(b-z) = b+d-z$$

т.е. $S_1 \circ S_2$ и $S_2 \circ S_1$ се централни симетрии со центри $\frac{b-d}{2}$ и $\frac{b+d}{2}$, соодветно. ♦

5.9. Дефиниција. За пресликувањето $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ќе велиме дека е **инволуторно**

ако тоа е инверзибилно, т.е. постои S^{-1} и ако $S^{-1}=S$.

5.10. Теорема. Директната сличност, која не е идентитет, е инволуторна ако и само ако таа е централна симетрија.

Доказ. Од теорема 4.2 следува дека директната сличност е инволуторна ако и само ако $az+b=\frac{z-b}{a}$, за секој $z\in\mathbf{C}$, односно ако и само ако $a=\frac{1}{a}$ и $b=-\frac{b}{a}$. Последните две равенства се исполнети ако и само ако $a=-1$, па затоа S е инволуторна ако и само ако е централна симетрија. ♦

5.11. Последица. Множеството $\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{CS}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 4.2, 5.6 и 5.8. ♦

5.12. Дефиниција. Движењата кои не се транслации ги нарекуваме **ротации**.

Бидејќи за ротацијата $S(z)=az+b,$ $|a|=1$ важи $a\neq 1$ заклучуваме дека секоја ротација има центар C со афикс $c=\frac{b}{1-a}$. Ако ротацијата има центар C и агол α, тогаш ќе велиме дека тоа е ротација околу C за агол α. Во натамошните разгледувања множеството ротации ќе го означуваме со $\boldsymbol{R}$. Јасно, централните симетрии се ротации за агол π, па затоа $\boldsymbol{CS}\subset\boldsymbol{R}$.

Нека $S(z)=az+b, |a|=1,\ a\neq 1$ е ротација околу C за агол α. Тогаш, инверзното пресликување S^{-1} дефинирано со $S^{-1}(z)=\bar{a}z-\bar{a}b$ е ротација околу C за агол $-\alpha$.

5.13. Теорема. а) Композиција на две ротации е ротација или транслација.

б) Композиција на ротација и транслација е ротација.

Доказ. а) Нека $S_1(z)=az+b, |a|=1$, $a\neq 1$ и $S_2(z)=cz+d, |c|=1,\ c\neq 1$ се две ротации. Тогаш

$$\begin{aligned}S_1(S_2(z)) &= S_1(cz+d)=a(cz+d)+b\\ &=(ac)z+(ad+b)\end{aligned}$$

Јасно, ако $ac=1$, тогаш $S_1\circ S_2$ е транслација, а ако $ac\neq 1$ таа е ротација околу C чиј афикс е $\frac{ad+b}{1-ac}$ за агол $\alpha_1+\alpha_2$ каде α_1 и α_2 се аглите на ротациите S_1 и S_2.

б) Нека $S_1(z)=z+b$ и $S_2(z)=cz+d$ $|c|=1,\ c\neq 1$ се произволна транслација и ротација соодветно. Тогаш, од

$$S_1(S_2(z))=S_1(cz+d)=cz+(d+b)$$

следува дека $S_1\circ S_2$ е ротација околу C чиј афикс е $\frac{d+b}{1-c}$ за агол α_2 на S_2.

Понатаму, од

$$S_2(S_1(z))=S_2(z+b)=cz+(d+bc)$$

следува дека $S_2\circ S_1$ е ротација околу C чиј афикс е $\frac{d+bc}{1-c}$ за агол α_2 на S_2. ♦

5.14. Последица. Множеството $\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{R}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$

Доказ. Непосредно следува од 5.12 и теоремите 4.2, 5.6 и 5.13. ♦

5.15. Пример. Дадени се точките $M_k, k=1,2,3,4$ со афикси $z_k, k=1,2,3,4$, соодветно. Докажете дека

$$z_2-z_1=\pm i(z_4-z_3) \qquad (1)$$

ако и само ако

$$\overline{M_1M}_2=\overline{M_3M}_4 \text{ и } M_1M_2\perp M_3M_4 \qquad (2)$$

Решение. Од условот (1) имаме $|z_2-z_1|=|z_4-z_3|$, што значи дека $\overline{M_1M}_2=\overline{M_3M}_4$. Исто така

$$z_2-z_1=\pm i(z_4-z_3)=e^{\pm i\frac{\pi}{2}}(z_4-z_3),$$

што значи дека бројот z_2-z_1 се добива со ротација на бројот z_4-z_3 околу координатниот почеток за агол $\pm\frac{\pi}{2}$. Тоа значи $M_1M_2\perp M_3M_4$. Според тоа, условот (2) следува од условот (1).

Обратно, од

$$\overline{M_1M}_2=|z_2-z_1|,\ \overline{M_3M}_4=|z_4-z_3| \text{ и}$$

$$\overline{M_1M}_2=\overline{M_3M}_4$$

следува $z_2-z_1=re^{it}$, $z_4-z_3=re^{is}$, т.е.

$$z_2-z_1=e^{i(t-s)}(z_4-z_3). \qquad (3)$$

Сега од втората релација во (2) следува дека $t-s=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. Со замена во (3) добиваме $z_2-z_1=\pm i(z_4-z_3)$. Според тоа, условот (1) следува од условот (2). ♦

6. ХОМОТЕТИЈА

6.1. Дефиниција. Директната сличност со агол 0 или π, која не е транслација ја нарекуваме **хомотетија**.

Според тоа, директната сличност

$$S(z)=az+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0$$

е хомотетија ако и само ако $a\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$. Под коефициент на хомотетијата ќе го подразбираме реалниот број $a,(a\neq 0,1)$, а не бројот a како кај општите директни сличности. Јасно, централните симетрии се хомотетии со коефициент -1. Од теорема 4.2 следува дека инверзното пресликување на хомотетија со коефициент a е хомотетија со коефициент $\frac{1}{a}$. Во натамошните разгледувања множеството хомотетии ќе го означуваме со $\boldsymbol{H}$.

6.2. Теорема. а) Композиција на две хомотетии е хомотетија или транслација.

б) Композиција на хомотетија и транслација е хомотетија.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z)=a_1z+b_1,\ a_1\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\} \text{ и}$$

$$S_2(z)=a_2z+b_2,\ a_2\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$$

се две хомотетии. Тогаш,

$$S_2(S_1(z))=a_1a_2z+a_2b_1+b_2.$$

Јасно, ако $a_1a_2=1$, тогаш $S_2\circ S_1$ е транслација за вектор $a_2b_1+b_2$, а ако $a_1a_2\neq 1$, тогаш $S_2\circ S_1$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_2b_1+b_2}{1-a_1a_2}$ и коефициент a_1a_2.

б) Нека се дадени хомотетијата $S_1(z)=a_1z+b_1, a_1\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ и транслацијата $S_2(z)=z+b_2$. Од $S_2(S_1(z))=a_1z+b_1+b_2$, $a_1\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ следува дека $S_2\circ S_1$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{b_1+b_2}{1-a_1}$ и коефициент a_1. Од

$$S_1(S_2(z))=a_1z+b_1+a_1b_2,\ a_1\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$$

следува дека $S_1\circ S_2$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_1b_2+b_1}{1-a_1}$ и коефициент a_1. ♦

6.3. Последица. Множеството $\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{H}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата директни сличности $\boldsymbol{DS}$.

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 6.1 и теоремите 4.2, 5.6 и 6.2. ♦

6.4. Теорема. Било кои две хомотетии и нивната композиција, ако таа не е транслација, имаат колинеарни центри.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z)=a_1z+b_1,\ a_1\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\} \text{ и}$$

$$S_2(z)=a_2z+b_2,\ a_2\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$$

се две хомотетии чии центри се C_1 и C_2, со афикси $c_1=\frac{b_1}{1-a_1}$ и $c_2=\frac{b_2}{1-a_2}$, соодветно, и нека $S_2(S_1(z))=a_1a_2z+a_2b_1+b_2$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_2b_1+b_2}{1-a_1a_2}$. Тогаш,

$$\frac{c_2-c}{c_1-c}=\frac{\frac{b_2}{1-a_2}-\frac{a_2b_1+b_2}{1-a_1a_2}}{\frac{b_1}{1-a_1}-\frac{a_2b_1+b_2}{1-a_1a_2}}=\frac{a_1a_2-a_2}{1-a_2}\in\mathbf{R}$$

што според последица 1.4 значи дека точките C_1, C_2 и C се колинеарни. ♦

6.5. Теорема. Директната сличност $S(z)=az+b$ правата (p) ја пресликува во паралелна права (p') ако и само ако таа е хомотетија или транслација.

Доказ. Ако правата (p) има комплексен аглов коефициент η, тогаш нејзината слика (p') при директната сличност $S(z)=az+b$ има комплексен аглов коефициент $\eta\frac{a}{\bar{a}}$. Правите (p) и (p') се паралелни ако и само ако $\eta\frac{a}{\bar{a}}=\eta$, т.е. ако и само ако $a=\bar{a}$, што значи ако и само ако $a\in\mathbf{R}$. Значи, директната сличност $S(z)=az+b$ правата (p) ја пресликува во паралелна права (p') ако и само ако таа е хомотетија или транслација. ♦

(Продолжува!)