

XXXIV олимпијада

1. Нека $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, каде $n > 1$ е природен број. Докажи дека $f(x)$ не може да се претстави како производ на два полиноми со целобројни коефициенти со степени поголеми или еднакви на 1.

Решение. Да претпоставиме дека $f(x) = g(x)h(x)$, каде $g(x)$ и $h(x)$ се полиноми со ненулти степени и со целобројни коефициенти. Од $3 = f(0) = g(0)h(0)$ следува дека еден од броевите $|g(0)|$, $|h(0)|$ е еднаков на 1. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$|g(0)| = 1 \text{ и } g(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k.$$

Ќе докажеме дека $k > 1$. Навистина, ако $k = 1$, тогаш $g(x) = x + a$ и како $|g(0)| = 1$, имаме $a = \pm 1$, т.е. $g(x) = x \pm 1$ и $f(\mp 1) = 0$ што противречи на $f(1) = 9$ и $f(-1) = 7$ или $f(-1) = -1$, во зависност од парноста на n .

Нека $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ се корените на полиномот $g(x)$. Тогаш,

$$g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k)$$

и $|g(0)| = |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| = 1$. Во равенката $f(x) = 0$ ставаме $x = \alpha_i$ и добиваме

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5) = -3, \text{ за } i = 1, \dots, k.$$

Ако ги помножиме овие равенства добиваме

$$|(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5) \dots (\alpha_k + 5)| = 3^k \quad (1)$$

Од равенствата

$$|g(-5)| = |\alpha_1 + 5| \cdot |\alpha_2 + 5| \cdot \dots \cdot |\alpha_k + 5| \text{ и } 3 = f(-5) = g(-5)h(-5),$$

бидејќи коефициентите на $g(x)$ и $h(x)$ се целобројни добиваме

$$|(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5) \dots (\alpha_k + 5)| = 3 \text{ или } 1.$$

Но, ова противречи на (1), бидејќи $k > 1$, па затоа $f(x)$ не може да се запише во облик $g(x)h(x)$.

2. Нека D е внатрешна точка во остроаголниот $\triangle ABC$ таква што

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ \text{ и } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

а) Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$.

б) Докажи дека тангентите во точката C повлечени на кружниците опишани околу триаголниците ACD и BCD се заемно нормални.

Решение. б) Нека $DE \perp DB$, $\overline{DE} = \overline{DB}$ и CT и CU се тангентите во точката C на кружниците опишани околу триаголниците ACD и BCD , соодветно.

Лема. Ако во точката M на $\triangle KLM$ е повлечена тангента MT на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш $\angle TML = \angle MKL$.

Доказ. Низ точката M повлекуваме дијаметар MK_1 . Тогаш, $\angle MKL = \angle MK_1L$, како агли над ист лак во кружница. Понатаму, аглиите MK_1L и TML се агли со нормални краци, па затоа $\angle TML = \angle MK_1L$. Сега тврдењето на лемата следува од претходните две равенства. ■

Од претходната лема следува

$$\angle TCD = \angle CAD \text{ и } \angle DCU = \angle DBC.$$

Според тоа

$$\angle EDA + \angle DAB + \angle ABD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Од условот на задачата следува

$$\angle EDA + 90^\circ = \angle BCA + 90^\circ, \text{ т.е. } \angle EDA = \angle BCA.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \angle CAD + \angle DBC &= 180^\circ - (\angle BCA + \angle DAB + \angle ABD) \\ &= 180^\circ - (\angle EDA + \angle DAB + \angle ABD) = 90^\circ \end{aligned}$$

Сега од $\angle TCD + \angle DCU = \angle CAD + \angle DBC = 90^\circ$ следува дека тангентите CT и CU се заемно нормални.

а) *Прв начин.* Од условите на задачата следува дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

Од б) имаме $\angle EDA = \angle BCA$, па затоа $\triangle EDA \sim \triangle BCA$, (должините на страните кај еднаквиот агол се пропорционални). Затоа,

$$\angle CAB = \angle DAE \text{ и } \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}},$$

од што следува

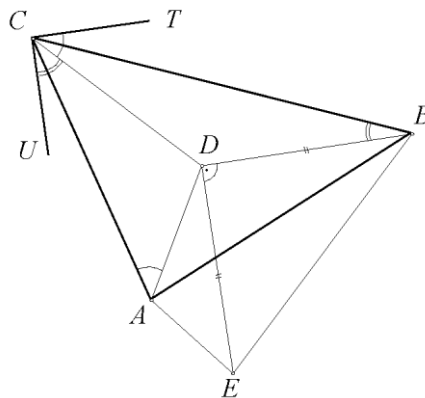
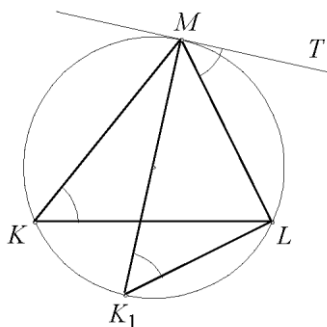
$$\begin{aligned} \angle CAD &= \angle CAB - \angle DAB \\ &= \angle DAE - \angle DAB = \angle BAE. \end{aligned}$$

Од исти причини и триаголниците CAD и BAE се слични, па затоа

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CD}}{\sqrt{2} \cdot \overline{BD}}, \text{ бидејќи триаголникот } BDE \text{ е рамнокрак правоаголен.}$$

$$\text{Конечно, } \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \sqrt{2}.$$

Втор начин. Нека $\alpha = \angle DAC$, $\beta = \angle DBC$, $\delta_1 = \angle ADC$ и $\delta_2 = \angle CDB$ (види цртеж). Збирот на аглиите во четириаголникот $ADBC$ е 360° , па користејќи дека $\angle ADB = 90^\circ + \angle ACB$, добиваме дека $\alpha + \beta = 90^\circ$. Со $\chi_{A,k}$ да означиме



хомотетија со центар во точката A и коефициент k , а со $\rho_{A,\varphi}$ да означиме ротација за агол φ со центар во точката A . Тогаш за $k_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ и $k_2 = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ важи:

$$(\chi_{D,k_1} \circ \rho_{D,\delta_1})(D) = D,$$

$$(\chi_{D,k_1} \circ \rho_{D,\delta_1})(C) = A,$$

$$(\chi_{D,k_2} \circ \rho_{D,-\delta_2})(D) = D,$$

$$(\chi_{D,k_2} \circ \rho_{D,-\delta_2})(C) = B.$$

Нека $(\chi_{D,k_1} \circ \rho_{D,\delta_1})(B) = E$, што

така $\angle BDE = \delta_1$ и $\frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} = k_1$ и не-

ка $(\chi_{D,k_2} \circ \rho_{D,-\delta_2})(A) = E_1$, така

што $\angle ADE_1 = \delta_2$ и $\frac{\overline{DE_1}}{\overline{DA}} = k_2$. Точките D, E и E_1 се колинеарни и притоа

важи $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ и $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE_1}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, од каде што следува $\overline{DE_1} = \overline{DE}$, односно $E \equiv E_1$.

Освен тоа $\angle BEA = \alpha + \beta = 90^\circ$. Значи, $\triangle BED \sim \triangle CAD$ од каде што следува $\overline{BE} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{CD}$, т.е.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BE} \cdot \overline{CD}. \quad (1)$$

Од $\triangle ADE \sim \triangle CDB$ следува $\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{CD} : \overline{BC}$, т.е.

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{CD}. \quad (2)$$

Од равенствата (1) и (2) следува

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}^2 &= \overline{BE}^2 \cdot \overline{CD}^2 + \overline{AE}^2 \cdot \overline{CD}^2 \\ &= \overline{CD}^2 (\overline{BE}^2 + \overline{AE}^2) = \overline{CD}^2 \cdot \overline{AE}^2. \end{aligned}$$

Сега, бидејќи $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ добиваме

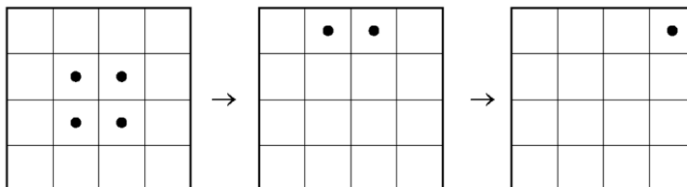
$$2\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 \cdot \overline{AE}^2, \text{ т.е. } \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \sqrt{2}.$$

Забелешка. Задачата може да се реши и со користење на инверзија со центар во точката D .

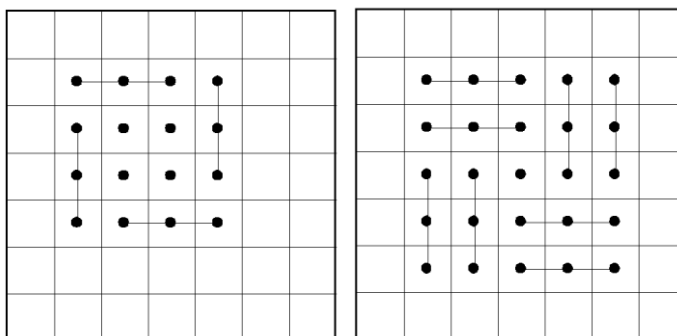
3. На бесконечна шаховска табла се игра следната игра. На почеток, n^2 жетони се поставени на полиња на $n \times n$ квадрат и тоа по еден жетон на секое поле. Во оваа игра, „потез“ е скок во хоризонтална или вертикална насока преку зафатено на слободно поле кое е непосредно до него. Жетонот преку кој се скока се отстранува.

Опреди ги сите вредности n за кои играта може да се заврши само со еден жетон на таблата.

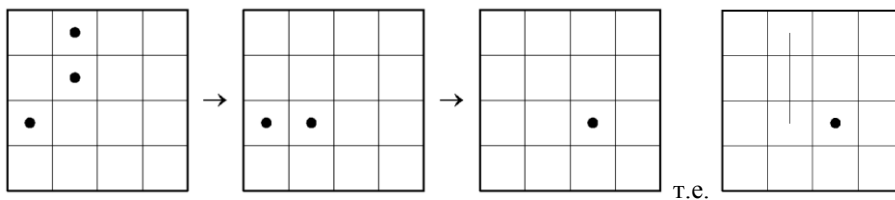
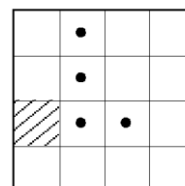
Решение. а) За $n = 1$ играта е завршена. Ако $n = 2$, тогаш играта може да заврши со еден жетон на таблата, како што е прикажано на долниот цртеж.



б) Ако $n = 4$ или $n = 5$, тогаш исто така играта може да заврши само со еден жетон на таблата, како што е прикажано на долните два цртежи.



Имено, секои четири жетони распоредени како на цртежот десно, каде штрафираното поле е слободно, со последователна примена на опишаните чекори прикажани на долните цртежи можеме да ги сведеме на поедноставен облик, каде со цртата се обележени полињата од кои се отстранети жетоните.



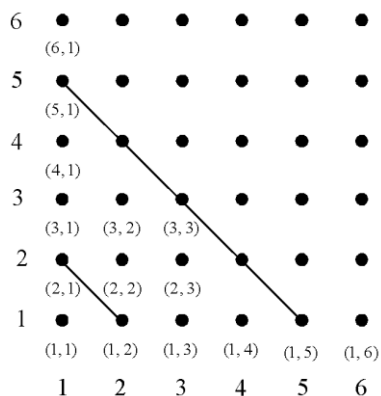
т.е.

в) Нека $n \geq 7$ и $3 \nmid n$. Сега, со примена на претходно опишаните постапки можеме да ги отстраниме сите жетони кои се наоѓаат надвор од квадратот $(n-6) \times (n-6)$ и постапката ја повторуваме онолку пати колку што тоа е потребно. На крајот проблемот се сведува на еден од случаите $n = 1, 2, 4$ или 5 и во секој случај играта може да заврши со само еден жетон на таблата.

г) Сега да го разгледаме случајот $n = 3p$. Да ги нумерираме редовите и колоните како што е прикажано на долниот црте. На секој жетон кој се наоѓа на полето (i, j) му го придружуваме бројот $i + j$ и сите жетени да ги поделиме на три групи S_0, S_1, S_2 така да во групата S_k за кои важи

$$i + j \equiv k \pmod{3}, k = 0, 1, 2.$$

Ако еден жетон го прескокне соседниот и премине на ново поле, тогаш во две групи бројот на жетоните се намалува за еден, а во третата се зголемува за еден, што значи дека парноста на бројот на жетоните во секој чекор се менува во секоја група. Да определиме колку жетонин има на почетокот во секоја група.



$$|S_0| = 2 + 5 + \dots + (n-1) + (n-2) + (n-5) + \dots + 4 + 1$$

$$= (1 + 2 + \dots + n) - 3(1 + 2 + \dots + \frac{n}{3})$$

$$= \frac{3p(3p+1)}{2} - \frac{3p(p+1)}{2} = 3p^2$$

$$|S_1| = 3 + 6 + \dots + (n-3) + n + (n-3) + \dots + 6 + 3$$

$$= 3(1 + 2 + \dots + p) + 3(1 + 2 + \dots + (p-1))$$

$$= \frac{3p(p+1)}{2} + \frac{3p(p-1)}{2} = 3p^2$$

$$|S_2| = (3p)^2 - |S_0| - |S_1| = 3p^2$$

Броевите $|S_0|, |S_1|, |S_2|$ на почетокот се со иста парност и парноста ја задржуваат по секој чекор, па затоа не е можно на крајот два од нив да се еднакви на 0, а еден да е еднаков на 1.

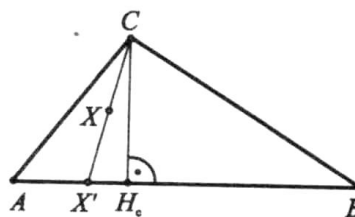
4. За три точки P, Q и R бројот $m(PQR)$ е еднаков на најмалата должина од висините на триаголникот PQR (притоа $m(PQR) = 0$ ако P, Q и R се колинеарни). Нека A, B и C се дадени точки во рамнината π .

Докажи дека за секоја точка $X \in \pi$ важи:

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

Решение. Можни се следниве три случаи.

а) Точката X лежи во внатрешноста или на страните на $\triangle ABC$. Нека $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$. Ќе докажеме дека за секој од триаголниците ABX , BCX и CAX , најдолгата страна не е подолга од $\max\{a, b, c\}$.



Нека точката $X' \equiv CX \cap AB$ се наоѓа меѓу A и подножјето H_c на висината повлечена од темето C (црт десно). Од

$$\overline{CA}^2 - \overline{CX}^2 = (\overline{CH_c}^2 + \overline{AH_c}^2) - (\overline{CH_c}^2 + \overline{X'H_c}^2) = \overline{AH_c}^2 - \overline{X'H_c}^2 \geq 0$$

добиваме

$$\overline{CX} \leq \overline{CX'} \leq b.$$

Ако точката X' лежи меѓу подножната точка H_c и B , тогаш важи $\overline{CX} \leq a$.
 Значи, во секој случај важи $\overline{CX} \leq \max\{a, b\}$, а оттука $\overline{CX} \leq \max\{a, b, c\}$. Според тоа, во секој од триаголниците ABX , BCX и ACX најголемата страна е помала или еднаква на $\max\{a, b, c\}$.

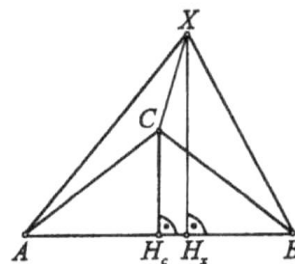
Од $h_c c = h_a a = h_b b = 2P = 2P_{\triangle ABC}$ следува $m(ABC) = \frac{2P}{\max\{a, b, c\}}$. Сега,

$$P_{\triangle ABX} + P_{\triangle ACX} + P_{\triangle BCX} = P_{\triangle ABC},$$

па затоа

$$\begin{aligned} m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) &\geq \frac{2P_{\triangle ABX}}{\max\{a, b, c\}} + \frac{2P_{\triangle ACX}}{\max\{a, b, c\}} + \frac{2P_{\triangle BCX}}{\max\{a, b, c\}} \\ &= \frac{2P_{\triangle ABC}}{\max\{a, b, c\}} = m(ABC). \end{aligned}$$

б) Нека X е надвор од $\triangle ABC$ и притоа ниту една од полуправите AX, BX и CX не сече ниту една од страните на $\triangle ABC$. Еден од триаголниците ABX, ACX, BCX го содржи $\triangle ABC$ и најмалата висина во $\triangle ABC$ е помала или еднаква на најмалата висина во тој триаголник. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека темето C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни (цртеж десно). Ако $m(ABX)$ е висината над страната AB , тогаш



$$m(ABX) \geq \overline{XH_x} \geq \overline{CH_c} \geq m(ABC),$$

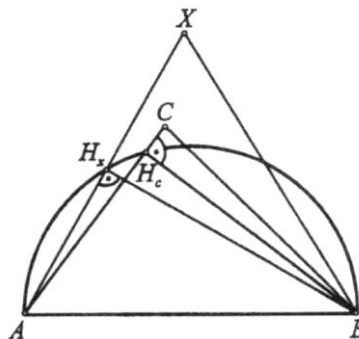
каде што H_x и H_c се проекциите на точките X и C врз правата AB . Најмалата висина во триаголникот е висина повлечена кон најдолгата страна, а пак таа лежи наспроти најголемиот агол. Затоа, ако $m(ABX)$ е висина на страната AX , тогаш $\angle ABX \geq \angle XAB$, бидејќи

$$2\angle XAB \leq \angle XAB + \angle ABX < 180^\circ$$

и $\angle XAB$ е остар. Бидејќи C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни и $\angle XAB \geq \angle CAB$ добиваме $\overline{BH_x} \geq \overline{BH_c}$, ($\angle BH_x A = \angle BH_c A = 90^\circ$ и $\overline{BH_x}$ е тетива над поголем периферен агол, цртеж десно). Според тоа,

$$m(ABX) = \overline{BH_x} \geq \overline{BH_c} \geq m(ABC),$$

и ако земеме предвид дека



$$m(ACX) \geq 0 \text{ и } m(BCX) \geq 0$$

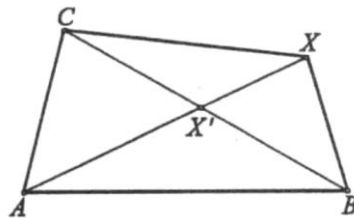
добиваме:

$$m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) \geq m(ABC),$$

в) Нека една од полуправите AX , BX и CX сече некоја од страните на $\triangle ABC$. Без губење на општоста можеме да земеме дека полуправата AX ја сече страната BC и нека $BC \cap AX \equiv X'$. Од б) следува дека

$$m(ABX) \geq m(ABX')$$

$$m(ACX) \geq m(ACX').$$



Понатаму, од а) следува

$$\begin{aligned} m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) &\geq m(ABX') + m(ACX') \\ &= m(ABX') + m(ACX') + m(BCX') \\ &\geq m(ABC). \end{aligned}$$

5. Дали постои функција $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ таква што

(i) $f(1) = 2$

(ii) $f(f(n)) = f(n) + n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и

(iii) $f(n) < f(n+1)$, за секое $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ е едно од решенијата на квадратната равенка $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. За функцијата $g(x) = \alpha x$, важи

$$g(g(n)) - g(n) - n = 0, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Ќе докажеме дека функцијата $f(n) = \lfloor g(n) + \frac{1}{2} \rfloor$ ги задоволува условите на задачата.

Од $\alpha > 1$ и $g(n+1) > g(n) + 1$ следува дека функцијата f строго расте. Понатаму, од $2 < \alpha + \frac{1}{2} < 3$ следува $f(1) = 2$. Од дефинициите на функциите f и g следува $|f(n) - g(n)| < \frac{1}{2}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Равенството $f(f(n)) = f(n) + n$ следува од фактот дека f е целобројна функција и оценката

$$\begin{aligned} |f(f(n)) - f(n) - n| &= |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| \\ &= |g(g(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\ &= |g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\ &= |(\alpha - 1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n))| \\ &\leq \alpha - 1 \cdot |g(n) - f(n)| + |g(f(n)) - f(f(n))| \\ &= \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} < 1. \end{aligned}$$

6. Нека $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. На кружница се поставени n светилки L_0, L_1, \dots, L_{n-1} , во овој редослед. Секоја светилка е запалена или изгасната. На почетокот сите светилки се запалени. Се прават чекори $S_0, S_1, \dots, S_j, \dots$. Во чекорот S_j ако светилката L_{j-1} е запалена, тогаш се менува состојбата на L_j и тоа од запалена во изгасната и обратно, а ако светилката L_{j-1} е изгасната тогаш состојбата на светилката L_j не се менува. Во чекорот S_j состојбата на останатите светилки не се менува. Светилките се означени по $\text{mod } n$, т.е. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ итн.

Докажи дека

а) Постои природен број $M(n)$ таков што после $M(n)$ чекори сите светилки ќе бидат запалени.

б) Ако n е од облик 2^k тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - 1$ чекори.

в) Ако n е од облик $2^k + 1$ сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - n + 1$ чекори.

Решение. а) Чекорите ќе ги поделиме во групи и тоа така што првите n чекори во првата група, вторите n во втората група итн.

По секој чекор можеме да ја констатираме состојбата пред него: ако по i -от чекор светилката на местото $i-1$ била запалена, тогаш i -тата светилка ја променила својата состојба, а ако светилката на местото $i-1$ била изгасена, тогаш состојбата на i -тата светилка не се променила. На ваков начин можеме да ја констатираме состојбата пред произволно многу чекори.

Бидејќи имаме конечно многу комбинации за состојбите на светилките, по конечно многу чекори мора да се појави периода. Да земеме дека состојбата по k чекори е еднаква на состојбата по m чекори, $k > m$. Состојбите по k и m чекори се еднакви, па затоа и состојбите по $k-1$ и $m-1$ чекори се еднакви. Исто така и состојбите по $k-2$ и $m-2$ чекори се еднакви итн, за на крајот да се еднакви состојбите по $m-m=0$ и $k-m$ чекори. Според тоа, по $k-m$ чекори ја добиваме почетната состојба во која сите светилки се запалени.

б) Бројот 1 нека означува запалена, а 0 изгасната светилка. Чекорите ги запишуваме во табела со помош на низа од нули и единици. Кога ќе стигнеме до првата светилка продолжуваме да запишуваме во следниот ред. Со (x, y) да ја означиме состојбата на светилката на местото y во x -от ред. Низата $(x, i), \dots, (x, j)$ ги означува состојбите на светилките од i -то до j -то место во x -от, а низата $(i, y), \dots, (j, y)$ состојбата на светилките од i -то до j -то место во колоната y . Конечно,

$$\begin{matrix} (i, x) & (i, y) \\ (j, x) & (j, y) \end{matrix}$$

ја означува состојбата од i – от до j – от ред и од x – тата до y – тата колона.

На пример:

Почетна состојба	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1
2. ред	1	0	0	1
3. ред	0	0	0	1
4. ред	1	1	1	

Ќе докажеме дека за $n = 2^k$ сите табели се од овој облик. Навистина:

- полињата $(n, 1), \dots, (n, n-1)$ имаат вредност 1 (последниот ред),
- полињата $(n-1, 1), \dots, (n-1, n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследниот ред),
- полињата $(1, n), \dots, (n-1, n)$ имаат вредност 1 (последната колона), и
- полињата $(1, n-1), \dots, (n-1, n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследната колона).

Ако сите табели се од овој облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - 1$ чекори. Последното тврдење може да се докаже со индукција. Детали-те ги оставаме на читателот.

с) Аналогно се докажува тврдењето за $n = 2^k + 1$. Во овој случај сите табели се од обликот

Почетна состојба	1	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1	0
2. ред	0	1	1	0	0
3. ред	0	1	0	0	0
4. ред	0	1	1	1	1
5. ред	1				

- полињата $(1, 1), \dots, (n-1, 1)$ имаат вредност 0 (прва колона),
- полињата $(1, 2), \dots, (n-1, 2)$ имаат вредност 1 (втора колона),
- полињата $(n-1, 2), \dots, (n-1, n)$ имаат вредност 1 (претпоследен ред),
- полињата $(n-2, 3), \dots, (n-2, n)$ имаат вредност 0 (претпретпоследен ред),
- полињата $(1, n), \dots, (n-2, n)$ имаат вредност 0 (последна колона), и
- полето $(n, 1)$ има вредност 1.

Јасно, ако сите табели имаат ваков облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$ чекори. Последното тврдење може да се докаже со индукција. Деталите ги оставаме на читателот.