Ристо Малчески

МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ II

Во минатиот број на НУМЕРУС се запознавме со методот на инваријанти и неговата примена при решавањето на некои карактеристични задачи. Во овој број, во врска со покривање на табли со различна димензија ќе разгледаме уште три примери и ќе дадеме неколку задачи за самостојна работа.

Пример 9*. Една 9×10 табла е покриена со 2×1 домина, а потоа домината се измешани. Докажи дека таблата не може повторно да се покрие со овие домина, така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање е во вертикална положба и обратно.

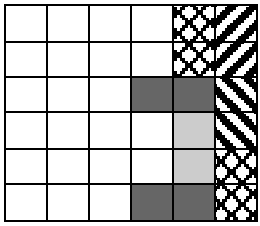
Решение. Да претпоставиме дека таблата е поставена така што има 10 (хоризонтални) редици и 9 (вертикални) колони. Вертикалните домина од првата колона покриваат парен број полиња, па затоа и бројот на полињата покриени со хоризонталните домина е парен. Според тоа, хоризонталните домина покриваат парен број полиња од втората колона. Бидејќи и вертикалните домина од втората колона покриваат парен број полиња, добиваме дека остануваат парен број полиња кои се покриени од домина кои “преминуваат” и на третата колона. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека вкупниот број хоризонтални домина е парен. Но, вкупно имаме 45 домина, па затоа вкупниот број вертикални домина е непарен.

Од претходните разгледувања следува, дека при секое покривање парноста на вкупниот број хоризонтални домина и непарноста на вкупниот број вертикални домина се инваријанти, па затоа второто покривање во кое хоризонталните домина стануваат вертикални, а вертикалните хоризонтални не е можно. ♦

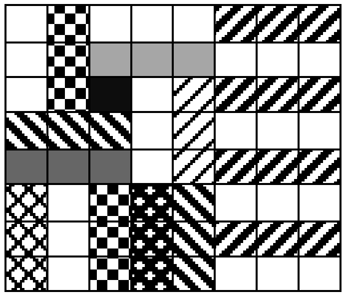
Пример 10. Една табла со димензија 6×6 е покриена со 18 домина со димензија 2×1. Докажи дека таблата може да се подели по хоризонтала или по вертикала при што ниту едно од домината нема да биде пресечено.

Решение. Да земеме една произволна вертикала која таблата ја дели на два дела. Полињата на секој од двата дела, да кажеме десниот дел, на таблата ги делиме на две класи и тоа:

- полиња кои се покриени со домина кои не ги сече вертикалата и
- полиња кои се покриени со домина кои ги сече вертикалата (на пример види цртеж).



Понатаму, бидејќи бројот од полињата во првата класа е парен (зошто?), и на секоја страна имаме парен број полиња заклучуваме дека и бројот на полињата од втората класа е парен. Според тоа, ако вертикалата сече едно домино, тогаш таа мора да сече барем уште едно домино, т.е. најмалку две домина. Со аналогни размислувања се заклучува, дека ако хоризонтала сече едно домино, тогаш таа сече барем уште едно домино, т.е. најмалку две домина. Последното значи, дека ако бараната поделба не постои, тогаш сите вертикали и сите хоризонтали, ги има вкупно 10 треба да сечат најмалку $10 \times 2 = 20$ домина, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата. ♦



Пример 11. Дали може табла со димензии 8×8 да се покрие со 21 правоаголник со димензии 3×1 и еден квадрат со димензии 1×1?

Решение. Може. Едно такво покривање е дадено на цртежот десно. ♦

Во претходните примери покажавме како може методот на инваријанти да се искористи за решавање на некои видови математички задачи. На крајот, ќе наведеме неколку задачи кои се решаваат на аналоген начин. Обиди се истите самостојно да ги решиш.

Задача 1. Лист хартија се сечи на 5 делови. Потоа се зема определен број од овие делови и секој од нив се сечи на 5 делови итн. Дали може со повторување на оваа операција да се добијат точно 2000 делови?

Задача 2. На таблата се запишани броевите: $0, 0, 1$ и 0. Дозволена е да се изберат два броја и секој од нив да се зголеми за 1. Дали може со повторување на оваа операција да добијат четири еднакви броеви?

Задача 3. На таблата во редица се запишани три броеви: a, b и c. Во втората редица, под нив, се запишани разликите: $a-b, b-c$ и $c-a$. Според истото правило, со помош на броевите од втората редица, се формираат броевите од третата редица итн.

а) Докажи дека во ниту една редица, подолу од третата, не може да се добие бројот 2005.

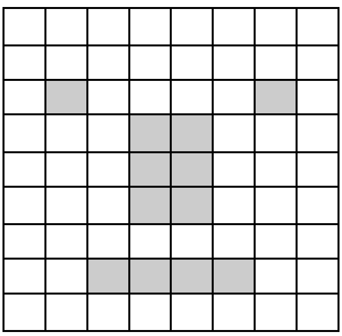
б) Докажи дека во ниту една редица, подолу од седмата, не може да се добие бројот 2007.

Задача 4. Во компјутерската игра “Стоглавиот змеј”, со притискање на соодветни татстери можеме на змејот кој на почетокот има 100 глави да му отсечеме една, $11, 15$ или 27 глави, после што на змејот му израснуваат, во првиот случај 10, во вториот 8, во третиот ниедна и во четвртиот 36 глави. Змејот е победен ако остане без ниту една глава. Дали може змејот да биде победен со опишаната постапка?

Задача 5*. Во низа се запишани сите природни броеви од 1 до 2000000, а потоа секој од овие броеви се заменува со збирот на неговите цифри. На така добиената низа од 2000000 броеви се применува истата постапка, која се повторува се додека не се добие низа од 2000000 едноцифрени броеви. Дали во добиената низа има повеќе единици или двојки?

Задача 6*. Формираме низа броеви на следниов начин: првиот член на низата е бројот 3^{2005}, а секој нареден член е еднаков на збирот на цифрите на претходниот. Одреди кој број во вака формираната мниза стои на 2005-то место.

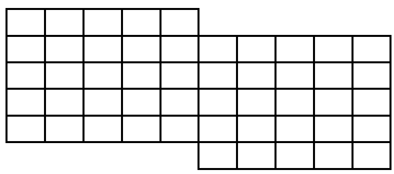
Задача 7. Дали може “шаховска” 10×10 табла да се покрие со правоаголници со димензии 4×1?



Задача 9. Од шаховска табла отстрането е едно аголно поле. Дали преостанатиот дел на таблата може да се покрие со правоаголници составени од по 3 полиња?

Задача 10. Од правоаголна табла која се состои од 9×8 единечни квадратчиња исечени се 12 квадратчиња (на цртежот десно истите се обоени). Докажи дека вака добиената фигура од 60 квадратчиња не може да се покрие со правоаголници составени од по три кавдратчиња.

Задача 11. Дали две плочи со димензии 5×5 прилепени една до друга како што е прикажано на цртежот десно, можат да се покријат со домина со дименизи 2×1 (едно домино покрива две соседни полиња)?



Литература

1. Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.: *Занимлива математика*, МММ, Скопје, 1994
2. Tošić, R.: *Invarijante – varijacije na temu*, ALEF, Novi Sad, 1996

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ