Републички натпревар 1989

I година

1. Ако $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

тогаш меѓу нив постојат два броја чиј збир е еднаков на нула. Докажи!

Решение. Даденото равенство можеме да го запишеме во обликот

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0.$$

За левата страна L на ова равенство имаме

$$\begin{aligned}L&=a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a-abc\\&=(a^2b+a^2c)+(ab^2+abc)+(abc+ac^2)+(b^2c+bc^2)\\&=a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)\\&=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)\\&=(b+c)[a(a+b)+c(a+b)]\\&=(a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

Значи, $(a+b)(b+c)(c+a)=0$, од каде следува тврдењето на задачата.

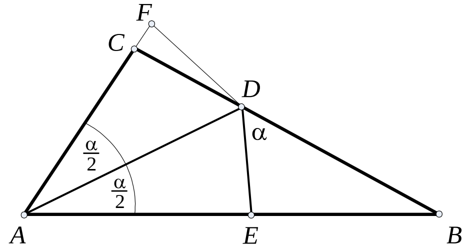
2. Да се пресмета збирот на сите четирицифрени броеви во кои цифрата 0 не се јавува и сите цифри се различни.

Решение. Бројот на сите такви броеви е $9\cdot8\cdot7\cdot6=3024$. На секој број $\overline{abcd}$ му го придружуваме бројот $\overline{(10-a)(10-b)(10-c)(10-d)}$. Збирот на овие два броја е 11110, па збирот на сите броеви е

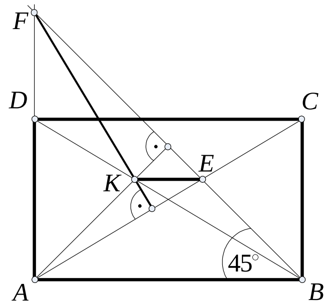
$$\frac{3024}{2}\cdot11110=16789320.$$

3. Во триаголникот ABC симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точката D. Нека E е точка од правата AB така што $\measuredangle BDE=\measuredangle BAC$. Да се докаже дека $\overline{DC}=\overline{DE}$.

Решение. Нека F е точка на страната AC, така што $\overline{AF}=\overline{AE}$ (види цртеж). Тогаш $\overline{FD}=\overline{DE}$. Бидејќи $\measuredangle BDE=\alpha$, следува дека $\measuredangle BED=\gamma=\measuredangle BCA$. Од друга страна имаме $\measuredangle CFD=\measuredangle BED$, па, значи, $\measuredangle FCD=\measuredangle BCA=\measuredangle BED=\measuredangle CFD$, т.е. триаголникот FCD е рамнокрак со основа FC. Следствено $\overline{CD}=\overline{FD}=\overline{DE}$.



4. Во правоаголникот $ABCD$, симетралата на аголот кај темето B ги сече правите AC и AD во точки E и F соодветно. Низ E е конструирана права паралелна со AB, која ја сече дијагоналата BD во точка K. Да се докаже дека $FK \perp AC$.



Решение. Според признакот ССС, следува дека $\triangle BEK \cong \triangle AKE$, па, значи, $\measuredangle BAK = 45^\circ$ (види цртеж), т.е. правата AK е нормална на правата EF. Бидејќи и правата EK е нормална на правата AF, следува дека точката K е ортоцентар на триаголникот AEF, т.е. $FK \perp AE$.

II година

1. Еден трговец имал 4 тегови со целобројни тежини. Со нив може да се измери било која масда од $1\,kg$ до $40\,kg$. Кои се масите на теговите, ако сите се различни и збирот им е 40?

Решение.Имаме

$$40 = 1+3+9+27 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3,$$

па $40 = 1111_3$ (во систем со основа 3). Секој број од 1 до 40 може да го претставиме во систем со основа 3 користејќи ги 0,1 и 2 како цифри. Бидејќи $2 = -1$, следува дека секој број може да се претстави како број со цифри 1 и 0 или како разлика на броеви со цифри 1 и 0. Јасно е дека бројот на цифрите на секој број помал од 40 е најмногу 4.

Следствено, масите на теговите биле: $1\,kg$, $3\,kg$, $9\,kg$ и $27\,kg$.

2. Да се најде најмалата вредност на изразот $\frac{1+x^2}{1+x}$, за $x \geq 0$.

Решение. Ако $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{x^2-1+2}{1+x} = (x-1) + \frac{2}{x+1} = ((x+1) + \frac{2}{x+1}) - 2$. Користејќи го неравенството $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, добиваме

$$f(x) \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{2}{x+1}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2,$$

т.е. најмала вредност за изразот $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ е $2(\sqrt{2}-1)$ и таа се добива за $x = \sqrt{2} - 1$.

3. За кои вредности на a, за произволно b постои барем едно c, така што системот

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$$

да има барем едно решение?

Решение. Имаме: $\Delta = 4 - b^2$ и $\Delta_x = 2ac^2 + 2c - bc + b$.

Ако $\Delta \neq 0$, т.е. $b \neq \pm 2$, тогаш системот има единствено решение за кои било a и c.

Ако $\Delta = 0$, тогаш за системот да има решение треба да биде и $\Delta_x = 0$. За $b = 2$ добиваме $ac^2 = -1$, па оваа равенка има решение по c за секое $a \in (-\infty, 0)$. За $b = -2$ ја добиваме равенката $ac^2 + 2c - 1 = 0$, којшто има решение по c за секое $a \in [-1, +\infty)$.

Следствено, дадениот систем има барем едно решение за произволно b и некое c ако и само ако $a \in [-1, 0]$.

4. Даден е квадар со рабови a, b, c; да го означиме со A. Нека

$$B = \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, d(X, A) \leq 1\}$$

претставува геометриско место на точки X од просторот за кои постои барем една точка од квадарот A која е на растојание не поголемо од 1 од точката X. Да се определи волуменот V_B со помош на a, b, c.

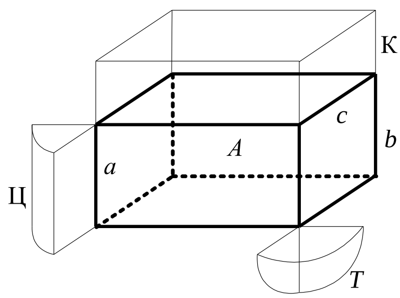
Решение. Геометриското место B на точки се состои од:

- квадарот A;

- квадари со висина 1 над секој од ѕидовите на A;

- четвртини цилиндри со радиус 1 и висина секој од рабовите на A.

- осмини топки со радиус 1 и центри во секое теме на A (види цртеж)



Според тоа,

$$V_B = V_A + V_k + V_ц + V_т = abc + 2(ab + bc + ca) + \pi(a + b + c) + \tfrac{4\pi}{3}.$$

III година

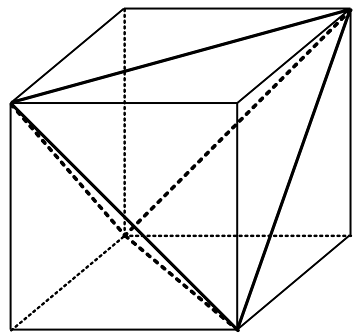
1. Низ секој раб на еден тетраедар поставена е рамнина паралелна со спротивниот раб.

а) Каков полиедар определува делот од просторот ограничен со тие рамнини?

б) Да се најде односот на волуменот на добиениот полиедар со волуменот на тетраедарот.

Решение. а) Тетраедарот има три пара спротивни рабови, па, значи, се повлечени три пара паралелни рамнини, т.е. телото ограничено со рамнините е паралелопипед. Рабовите на тетраедарот се дијагонали од ѕидовите од паралелопипедот, па паралелопипедот е составен од дадениот тетраедар и четири пирамиди со основи половина од основата на паралелопипедот и висини колку и висината на паралелопипедот.

б) Нека V е волуменот на паралелопипедот, H неговата висина, B плоштина на неговата основа, $V_т$ волуменот на тетраедарот и нека $V_\circ$ е волуменот на една од останатите пирамиди. Тогаш



$$V = BH\,,\ V_\circ = \frac{1}{3}\frac{B}{2}H = \frac{BH}{6}$$

$$V = V_т + 4V_\circ = V_т\,\frac{2}{3}V\,, V_т = \frac{1}{3}V\,,$$

т.е. $V : V_т = 3:1$.

2. Да се докаже дека: ако сумата

$$a_1\cos(x+\alpha_1)+a_2\cos(x+\alpha_2)+...+a_n\cos(x+\alpha_n)$$

при $x=0$ и $x=x_1\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ е еднаква на нула, тогаш таа е нула за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Од условот на задачата, за $x=0$, добиваме

$$a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+...+a_n\cos\alpha_n=0 \qquad (1)$$

Нека $x_1\neq k\pi$; тогаш имаме

$$\begin{aligned}
&a_1\cos(x_1+\alpha_1)+a_2\cos(x_1+\alpha_2)+...+a_n\cos(x_1+\alpha_n)=\\
&\quad=(a_1\cos\alpha_1+...+a_n\cos\alpha_n)\cos x_1-(a_1\sin\alpha_1+...+a_n\sin\alpha_n)\sin x_1\\
&\quad=-(a_1\sin\alpha_1+...+a_n\sin\alpha_n)\sin x_1=0
\end{aligned}$$

Но $\sin x_1\neq 0$, од каде добиваме

$$a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+...+a_n\sin\alpha_n=0\,. \qquad (2)$$

Сега, за произволен реален број x, ќе имаме

$$\begin{aligned}
&a_1\cos(x+\alpha_1)+...+a_n\cos(x+\alpha_n)=\\
&\quad=(a_1\cos\alpha_1+...+a_n\cos\alpha_n)\cos x-(a_1\sin\alpha_1+...+a_n\sin\alpha_n)\sin x=0.
\end{aligned}$$

3. Да се реши равенката

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4\,,$$

каде што $3x+7$ и $2x+3$ се позитивни реални броеви и различни од 1.

Решение. Од $3x+7>0$, $2x+3>0$, $3x+7\neq 1$, $2x+3\neq 1$ следува дека решение на равенката може да биде реален број $x\in(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,+\infty)$. Бидејќи

$$9+12x+4x^2=(2x+3)^2$$

$$6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7)\,,$$

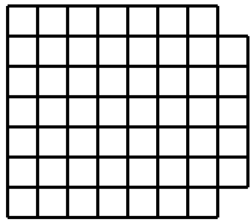
дадената равенка може да се запише во обликот

$$2[\log_{3x+7}(2x+3)]^2-3\log_{3x+7}(2x+3)+1=0$$

од каде што добиваме

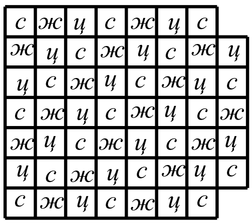
$$\log_{3x+7}(2x+3)=1, \qquad 2\log_{3x+7}(2x+3)=1,$$

т.е. $x_1=-4, x_2=-2$ и $x_3=-\frac{1}{4}$. Бидејќи $x\in(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,+\infty)$, следува дека решение на равенката е $x_3=-\frac{1}{4}$.



4. Да се докаже дека следната фигура која е составена од 54 единечни квадрати, не може да се препокрие со правоаголници чии страни се 3 и 1.

Решение. Да претпоставиме дека дадената фигура може да се покрие со правоаголници чии страни се 3 и 1.



Секое поле на ова фигура го биоме со една од боите: сина, жолта и црвена како што е покажано на цртежот. На секој правоаголник ќе има едно сино, жолто и црвено поле. Значи, на фигурате ќе има 18 сини, 18 жолти и 18 црвени полиња. Со непосредно броење на полињата се гледа дека има 19 сини, 17жолти и 18 црвени полиња, што претставува противречност.

IV година

1. Да се најде бројот на сите различни решенија на равенката

$$x_1+x_2+...+x_n=k$$

(k и n се дадени броеви) во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Јасно е дека треба да биде $n\le k$. За $n=k$ равенката има единствено решение $x_1=x_2=x_3=...=x_n=1$. Затоа, да препоставиме дека $n<k$ и да ставиме

$$\underbrace{1+1+1+...+1}_{k}=k\,.$$

На секој знак + да му придружиме еден симбол. Бидејќи имаме $k-1$ знаци +, на тој начин го добиваме множеството

$$A=\{a_1,a_2,...,a_{k-1}\}\,.$$

На секое подмножество B од A со $n-1$ елемент му одговара едно решение на дадената равенка, т.е. ако избришеме $n-1$ знака + ќе добиеме едно решение. Следствено, бројот на сите решенија на равенката е еднаков со бројот на сите подмножества од A со $n-1$ елемент, а тој број е $\binom{k-1}{n-1}$.

На пример, да ја разгледаме равенката $x_1+x_2+x_3=5$. Имаме:

$$1+1+1+1+1=5\,.$$

Бришејќи по два знака, добиваме

$$1,1,1+1+1\,;\ 1,1+1,1+1;\ 1,\ 1+1+1,1\,;\ 1+1,\ 1,1+1;\ 1+1,1+1,1\,;\ 1+1+1,1,1,$$

т.е. решенија на равенката се тројките

$$(1,1,3),(1,2,2),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,1).$$

Нивниот број е 6 кој е еднаков со $\binom{4}{2}$.

2. Даден е триаголник $A_1B_1C_1$ со агли $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$. Со симетралите на надворешните агли е конструиран нов триаголник $A_2B_2C_2$ со агли $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$. На ист начин од триаголникот $A_2B_2C_2$ е конструиран триаголник $A_3B_3C_3$ со агли $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$, итн. Да се докаже дека $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\frac{\pi}{3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\frac{\pi}{3}$.

Решение. Доволно е да докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{3}$. Направи цртеж и согледај дека

$$\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\alpha_1-\frac{\pi}{3}).$$

Според тоа, имаме $\alpha_n=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\alpha_{n-1}-\frac{\pi}{3})$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи, низата $\alpha_1-\frac{\pi}{3}$ $\alpha_2-\frac{\pi}{3}$, $\alpha_3-\frac{\pi}{3},...,\alpha_n-\frac{\pi}{3}$, ... е геометриска прогресија со прв член $\alpha_1-\frac{\pi}{3}$ и коефициент $-\frac{1}{2}$, па имаме $\alpha_n=\frac{\pi}{3}+(-\frac{1}{2})^n(\alpha_1-\frac{\pi}{3})$, од каде што добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{3}$.

3. Да се докаже дека единствено решение на системот

$$\begin{cases} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & = & 0\\ a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & = & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1987} & + & a_{1988} & + & a_{1989} & + & a_1 & = & 0\\ a_{1988} & + & a_{1989} & + & a_1 & + & a_2 & = & 0\\ a_{1989} & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 0 \end{cases}$$

е $a_1=a_2=...=a_{1989}=0$.

Решение. Собирајќи ги сите равенки добиваме

$$a_1+a_2+...+a_{1989}=0, \tag{1}$$

т.е.

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+...+(a_{1985}+a_{1986}+a_{1987}+a_{1988})+a_{1989=0}$$

од каде што следува дека $a_{1989}=0$. Равенката (1) можеме да ја запишеме во облик

$$(a_{1989}+a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+...+(a_{1984}+a_{1985}+a_{1986}+a_{1987})+a_{1988}=0$$

од каде што добиваме $a_{1988}=0$. На сличен начин добиваме дека

$$a_1=a_2=...=a_{1989}=0$$

4. Иста како задача 4 од трета година.