Девятый Турнир, 1987-1988

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 22 ноября 1987 г.

7-8 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Докажите, что предпоследняя цифра любой степени числа три чётна.
В. Плачко

Задача 2.(5)
Внутри ромба ABCD найти геометрическое место точек M таких, что
$\angle AMB+\angle CMD=180^o$.
Фольклор

Задача 3.(5)
Двое играющих по очереди увеличивают натуральное число так, чтобы при каждом увеличении разность между новым и старым значениями числа была бы больше нуля, но меньше старого значения. Начальное значение числа равно 2. Выигравшим считается тот, в результате хода которого получится 1987. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?
Фольклор

Задача 4.(5)
Дана выпуклая фигура, ограниченная дугой AC окружности и ломаной ABC, так что дуга и ломаная лежат по разные стороны хорды AC.
Через середину дуги AC провести прямую, делящую площадь фигуры пополам.
Фольклор

Задача 5.(3+2+2)
Даны три неотрицательных числа a, b, c. Про них известно, что
$a^4+b^4+c^4\leq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.
а)(3) Докажите, что каждое из них не больше суммы двух других.
б)(2) Докажите, что $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$.
в)(2) Следует ли из неравенства пункта б) исходное неравенство?
В. Сендеров

Задача 6.(8)
2000 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин.
Доказать, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.
А. Разборов

Задача 7.(*)
Три треугольника - белый, зеленый и красный - имеют общую внутреннюю точку M.
Докажите, что можно выбрать по одной вершине из каждого треугольника так, чтобы точка M находилась внутри или на границе треугольника, образуемого выбранными вершинами.
Imre Barani, Венгрия

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 22 ноября 1987 г.

9-10 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)

Из вершины A квадрата ABCD со стороной 1 проведены два луча, пересекающие квадрат, так что вершина C лежит между лучами. Угол между лучами равен U. Из вершин B и D проведены перпендикуляры к лучам.

Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.

Фольклор

Задача 2.(5)

В центре квадратного бассейна находится мальчик, а в вершине на берегу стоит учительница. Максимальная скорость мальчика в воде в три раза меньше максимальной скорости учительницы на суше. Учительница плавать не умеет, а на берегу мальчик бегает быстрее учительницы.

Сможет ли мальчик убежать?

Фольклор

Задача 3.(5)

Доказать, что существует бесконечно много пар натуральных чисел a и b таких, что a^2+1 делится на b, а b^2+1 делится на a.

Фольклор

Задача 4.(5)

Из точки M внутри треугольника ABC опукаются перпендикуляры на высоты. Оказалось, что отрезки высот от вершин до оснований этих перпендикуляров равны между собой.

Докажите, что в этом случае они равны диаметру вписанной в треугольник окружности.

Фольклор

Задача 5.(5)

Рассматриваются всевозможные пары различных натуральных чисел (a,b), где $a < b$. Некоторые пары объявляются чёрными, остальные - белыми. Можно ли это сделать так, чтобы для любой тройки чисел a, a+d, a+2d ($d > 0$) среди пар (a,a+d), (a,a+2d), (a+d,a+2d) встречались и чёрные, и белые?

Фольклор

Задача 6.(8)

Правильный треугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам, на равные между собой правильные треугольники. Один из маленьких треугольников чёрный, остальные - белые. Разрешается перекрашивать одновременно все треугольники, пересекаемые прямой, параллельной любой стороне исходного треугольника.

Всегда ли можно с помощью нескольких таких перекрашиваний добиться того, чтобы все маленькие треугольники стали белыми?

Фольклор

Задача 7.(8)

Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии - улицы, клеточки - кварталы). На одной улице через каждые 100 кварталов на перекрестках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (местонахождение его неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции - увидеть бандита. Есть ли у милиции способ (алгоритм) наверняка достигнуть своей цели? (Максимальные скорости милиции и бандита какие-то конечные, но не известные нам величины, милиция видит вдоль улиц во все стороны на бесконечное расстояние).

А. Анджанс

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Тренировочный тур. Весна 1988 г.

7-8 кл.

Задача 1.
Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятерок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася - пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?
С. Фомин

Задача 2.
Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, диагональ AC которого делит среднюю линию MN (M середина BC, N - середина AD) пополам.
Докажите, что треугольники ABC и ACD равновелики.
Фольклор

Задача 3.
а) Вершины правильного 10-угольника закрашены чёрной и белой краской через одну. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит отрезок, соединяющий вершины одинакового цвета. Эти отрезки не должны иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер?
б) Тот же вопрос для 12-угольника.
В. Иванов

Задача 4.
В клетки шахматной доски записаны числа от 1 до 64 (первая горизонталь нумеруется слева направо числами от 1 до 8, вторая от 9 до 16 и т. д.). Перед некоторыми числами поставлены плюсы, перед остальными - минусы, так что в каждой горизонтали и в каждой вертикали по 4 плюса и по 4 минуса. Докажите, что сумма всех чисел равна 0.
Фольклор

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Тренировочный тур 21 февраля 1988 г.

9-10 кл.

Задача 1.
Можно ли подобрать такие два натуральных числа X и Y, что Y получается из X перестановкой цифр, и X+X=99...9 (всего 1111 девяток) ?
Фольклор

Задача 2. (Москва)
Можно ли подобрать четыре непрозрачных попарно непересекающихся шара таких, чтобы ими можно было загородить точечный источник света?
Задача из Ленинграда

Задача 2. (Кроме Москвы)
В окружность вписаны две равнобочные трапеции так, что каждая сторона одной трапеции параллельна некоторой стороне другой.
Докажите, что диагонали одной трапеции равны диагоналям другой.
Фольклор

Задача 3. (Москва)
Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, параллельная стороне квадрата и пересекающая не меньше четырёх окружностей.
Д. Фомин

Задача 3. (Кроме Москвы)
Среди десятизначных чисел каких больше: тех, которые можно представить как произведение двух пятизначных чисел, или тех, которые нельзя так представить?
С. Фомин

Задача 4.
На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвёртое, так что они образуют квадратную сетку.
Докажите, что шахматный конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.
Из старых задач А. Толпыго

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 20 марта 1988 г.

7-8 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(5)
A, B и C - целые числа. Докажите, что если A=B+C, то $a^4+b^4+c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.
Фольклор

Задача 2.(5)
Дан треугольник ABC. Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K.
Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной около треугольника ABC окружности.
В. Протасов

Задача 3.(5)
Решите систему уравнений:
$(x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1$
$(x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2$
$(x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3$
$(x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4$
$(x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5$
Л. Тутеску

Задача 4.(5)
В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г, ... (все степени числа 2), причём среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны.
Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.
Фольклор

Задача 5.(5)
Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы через каждую точку проходило ровно 1988 окружностей? (Точку окружностью не считаем. - *Примечание редактора*)
Н. Васильев

Задача 6.(8)
Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла "вертикальные" и "горизонтальные" ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?
В. С. Шевелев

Задача 7.(8)
Рассматривается последовательность слов из букв "A" и "B". Первое слово - "A", второе - "B". K-тое получается приписыванием к (K-2)-му слову справа (K-1)-ого (так что начало последовательности имеет вид: "A", "B", "AB", "BAB", "ABBAB", ...).
Может ли в последовательности встретиться "периодическое" слово, т. е. слово, состоящее из нескольких (по меньшей мере двух) одинаковых кусков, идущих друг за другом, и только из них? (Например, слово "BABBBABB" - периодическое, а слово "ABABBBABB" - нет).
А. Анджанс

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 20 марта 1988 г.

9-10 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(5)
При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой 6 точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают 5 равных отрезков?
Э. Г. Готман

Задача 2.(5)
Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла ("вертикальные" и "горизонтальные" ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?
В. С. Шевелев

Задача 3.(5)
P(x) - многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что найдётся коэффициент, который меньше -1.
Фольклор

Задача 4.(5)
Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно - одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого ученика? (Укажите число и докажите, что оно минимальное.)
Предостережение: учеников не обязательно 30.
Фольклор

Задача 5.(8)
Куб 20*20*20 составлен из 2000 кирпичей размером 2*2*1.
Докажите, что его можно проткнуть иглой так, чтобы игла прошла через две противоположные грани и не уткнулась в кирпич.
А. Анджанс

Задача 6.(4+4)
Рассматривается последовательность слов, состоящих из букв "A" и "B". Первое слово в последовательности - "A", K-е слово получается из (K-1)-го с помощью следующей операции: каждое "A" заменяется на "AAB", каждое "B" - на "A". Легко видеть, что каждое слово является началом следующего, тем самым получается бесконечная последовательность букв: AABAABAAABAABAAAB...
а)(4) На каком месте в этой последовательности встретится 1000-ая буква "A"?
б)(4) Докажите, что эта последовательность - непериодическая (периодическая - значит начиная с некоторого места повторяется одна и та же комбинация букв).
В. Гальперин