КУРЕПА — ШКРЕБЛИН — МУТАБЏИЈА

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

ЗА IV КЛАС ГИМНАЗИЈА

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 1959

ГЛАВА I.

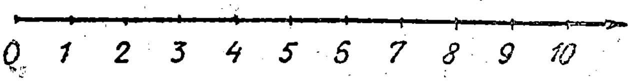
УВОД ВО АНАЛИТИЧКАТА ГЕОМЕТРИЈА

§ 1. БРОЈНА ЛИНИЈА И КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

1. Поим за бројна линија — апсциса на точка

Уште како деца, најнапред се запознавме со природните броеви (1, 2, 3......) Во нашето школување рачунската операција вадење не́ доведе до проширување на бројната област и ја воведовме нулата и негативните броеви. Рачунската операција делење не́ доведе до понатамошно проширување на бројната област и ги воведовме дробните броеви Множеството на сите дотогашни броеви ги викавме *„рационални броеви“*. Понатаму, рачунската операција коренување не́ присили, одново да ја прошируваме областа и да ги воведеме ирационалните броеви. Множеството на сите рационални и ирационални броеви ги викаме *„реални броеви“*. (На крајот со коренувањето ја проширивме бројната област и на имагинарните броеви, па дојдовме до комплексните броеви, кои сочинуваат многу широк поим на бројот).

На сите основни појмови во областа на реалните броеви и нивните операции одговараат аналогни поими и операции со отсечки и тоа ни го овозможува мерењето на отсечки и нивното обележување со броеви.

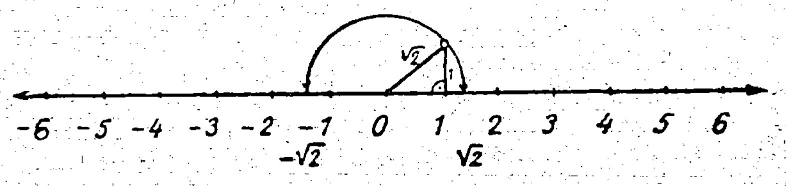


Сл. 1

Кога сакавме очигледно да покажеме како природните броеви идат еден по друг ја земавме бројната линија на природните броеви (Гл. ја сл. 1.), на која што постојано одмерувавме еднакви отсечки.

Бидејќи целите рационални броеви 0, ± 1, ± 2, ... се наредени по големина, ги претставувавме на *бројната ли-*

нија, на којашто одбравме произволна точка што ја означивме со O (по латински origo = почеток). На двете страни нанесовме отсечки една до друга, а нивните крајни точки ги обележувавме од едната страна (обично на десно) со $+1, +2, +3, \ldots,$ а на симетричната страна (обично на лево) со $-1, -2, -3, \ldots$ (гледај ја сл. 2).



Сл. 2

Тоа беше бројната линија на целите рационални броеви. И дробниот број има своја слика, своја точка на бројната линија. Но со рационалните броеви не се опфатени сите точки од правата. На неа се наоѓаат и сликите на ирационалните броеви (на пр. $\pm\sqrt{2}$ и др.).

Бројната линија е темел на целата аналитичка геометрија.

На секој број можеме да му доделиме наполно определена точка од бројната линија и да ја означиме со тој број. Но и обратно: на секоја точка T од бројната линија одговара наполно определен број — *апсциса* на точката T — која ни покажува, **колку пати единицата мерка се наоѓа во отсечката OT.** Апсцисата како однос на две отсечки е неименуван број и се става обично во загради на пр. A (4). Накусо: *бројната линија или координатната оска е која да е права на којашто се означени две точки (0), (1).*

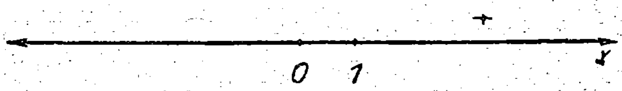
Со тоа е овозможено следното: *1) на секоја точка од правата можеме да и доделиме определен број т. н. апсциса на точката, и 2) на секој број можеме да му доделиме точка од бројната линија, на којашто тој број е токму апсцисата.*

Бројната линија овозможува премин од точките на броеви и обратно од броеви на точки, па се зборува за точките (0), (4), (—3) од бројната линија или броевите $A, B, \ldots,$ каде што се $A, B, \ldots$ определени точки на бројната линија.

Јазот, што ги делеше точките на линијата како геометриски предмети од броевите како аритметички предмети, се загубува со воведувањето на бројната линија.

Својства на бројната линија. Со почетокот O бројната линија е разделена на три дела и тоа: почеток, потоа на онаа полуправа, на којашто се наоѓа *единичната точка (1)* т.е. позитивната страна на правата или позитивната полуоска

$+x$ и на крајот на преостанатата полуправа т. е. негативната оддана на правата или негативната полуоска $-x$ (Сл. 3).



Сл. 3

Позитивниот и негативниот дел од правата меѓусебно се симетрични спрема O како кон центар на симетријата.

Која да е точка т. нар. општа точка од правата ја обележуваме со $T(x)$, а повеќе општи точки ги разликуваме по индексите, на пр. (x_1), (x_2), $(x)_3$, ... или (x'), (x''), (x''')....

Вежби: 1. Да се нацрта бројната линија. Да се заврти оваа околу почетокот O за 30^0. Дали новата линија е пак бројна линија?

2. Дали со поместување на координатната оска добиената линија е бројна линија?

3. На дадена бројна линија да се земат неколку точки и им се измерат апсциситe.

4. Нацртај ги и опиши со зборови положбите на точките (-4), $\left(\frac{7}{2}\right)$, $(-2d)$ каде што d е дијагоналата на квадратот со страна 3 см, $\left(\frac{3}{2}h\right)$ каде што h е висината на разностраниот триаголник со страна 4 см, $(-2\sqrt{3})$, $(3\sqrt{2})$.

5. Нека денот се сфати како дел од бројната линија, на којашто O е полноќ, а единицата еден час. Дали со тоа се служиме во обикновениот живот? (бележењето на температурата на болни, термографи, барографи, сеизмографи и др.).

6. Да се определи меѓусебното растојание на точките:

$$a)\ A(-3),\ B(-4),\quad b)\ C\left(3\frac{1}{2}\right),\ D(-7),\quad c)\ M(3a+2b),$$

$$N(7a-b)\quad d)\ A_1(\sin x),\ A_2(\cos x).$$

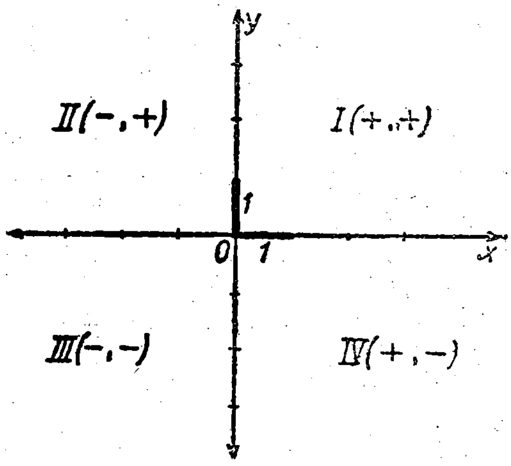
7. За точките: $A_1(7)$, $A_2\left(\frac{3}{2}\right)$, $A_3(-6)$, $A_4\left(-\frac{9}{2}\right)$ да се определат симетричните точки по однос на координатниот почеток.

8. Колку отсечки определуваат четирите точки од преѓешната задача?

9. Да се најде односот во којшто координатниот почеток ја дели секоја од отсечките од задачата 6.

2. Координатен систем во рамнината

Точка во рамнината не е определена со еден број. За да ја определиме се служиме со координатни системи. Со помошта на овие системи определуваме секоја точка од рамнината, но со два броја — со два податока. Од сите можни координатни системи ќе запознаеме само два и тоа: правоаголен координатен систем и поларен координатен систем.



Сл. 4

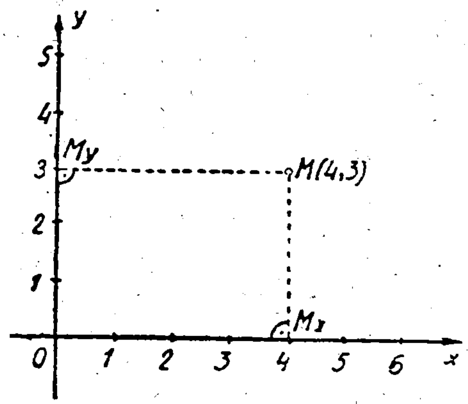
а) *Декартов или (Картезијев) правоаголен координатен систем.* Тоа се две бројни линии (Сл. 4) меѓусебно нормални, коишто имаат заеднички почеток O. На секој од овие прави линии позитивниот смер е од O кон 1. Првата права т.е. правата повлечена од лево на десно се вика *апсцисна оска* или x-оска (што ги носи x-овите), другата се вика *ординатна оска* или y-оска (што ги носи y-ите). Апсцисната и ординатната оска се викаат заедно координатни оски. Координатните оски определуваат во рамнината четири полиња или 4 квадранта. Првиот квадрант е меѓу $+x$ и $+y$, вториот меѓу $-x$ и $+y$, третиот меѓу $-x$ и $-y$, а четвртиот квадрант меѓу $+x$ и $-y$.

За да ја определиме положбата на некоја точка во рамнината, го цртаме правоаголниот координатен систем и ги спуштаме од таа точка M нормалите MMx и MMy на координатните оски (Сл. 5).

Бројот 4 што ја претставува отсечката OMx е *апсциса* на точката M, а бројот 3 што ја претставува отсечката OMy е *ордината* на точката M. Дека точката M има апсциса 4 и ордината 3 го означуваме вака: $M(4, 3)$.

Апсцисата и ординатата на точката M се викаат заедно координати на таа точка.

Во даден координатен систем xy, секоја точка од рамнината има определена апсциса x и определена ордината y коешто се означува вака: M (x, y) т.е. во заградата се пишува најнапред апсцисата x, а потоа ординатата y од разгледаната точка, а пред заградата може да се стави и геометриската ознака M на соодветната точка; но таа ознака M може да биде изоставена и зборуваме напросто за точката (x, y) од рамнината.



Сл. 5

И обратно: на секој пар од една апсциса x и една ордината y ѝ припаѓа наполно определена точка т.е. точката (x, y) од рамнината. Од кажаното разбираме, дека во првиот квадрант апсцисата и ординатата се позитивни, во другиот апсцисата е негативна а ординатата позитивна, во третиот и апсцисата и ординатата се негативни и во четвртиот апсцисата е позитивна а ординатата негативна (Сл. 4).

По таков начин т.е. со воведување на координатниот систем ја воспоставуваме врската меѓу точките од рамнината како геометриски предмети и броевите како аритметички предмети.

б) *Поларен координатен систем.* Во поларниот координатен систем, дадена е постојаната точка O која се вика *пол* (Сл. 6) и постојаната полуправа OX, што поаѓа од O и се вика *поларна оска.*

Гй имаме значи формулите

(1) $$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b \end{aligned}}$$

или

(1') $$\boxed{\begin{aligned} x' &= \cancel{x} - a \\ y' &= y - b \end{aligned}}$$

кои ни ја даваат меѓусебната врска меѓу координатите на стариот и новиот координатен систем.

Овие формули важат независно од тоа каде е земен новиот координатен почеток.

Пример. 1. Со транслација на координатниот систем XOY во $X'O'Y'$ којшто го има почетокот O' (3, — 5), точката T(7, 9) добива нови координати $x' = 7 - 3 = 4$, $y' = 9 - (-5) = 14$ а со тоа и ново име (4,14); со истата трансформација равенката $2x + 3y - 1 = 0$ преминува во равенката $2(x' + 3) + 3(y' - 5) - 1 = 0$, а $y^2 = 3x$ станува $(y' - 5)^2 = 3(x' + 3)$.

Задачи: 1. Новиот почеток O' има со оглед на прееѓешниот почеток O координати $a = 4$, $b = 3$. Кои се координатите на точките A, B, C, во новиот систем, ако координатите во преѓешниот систем се: $A(-5, 6)$, $B(3, -7)$, $C(-9, -4)$, а новите оски паралелни на преѓешните оски.

2. Истата задача за $a = -2$, $b = -5$, $A(4,1)$, $B(-5,2)$ $C(3, -8)$.

3. Кои се координатите на некоја точка во правоаголниот координатен систем ако во поларниот координатен систем координатите й се: *a*) $r = 1$, $\varphi = 120°$; *b*) $r = 2$, $\varphi = 60°$; *c*) $r = 6$, $\varphi = 135°$, *d*) $r = 5$, $\varphi = 0°$.

4. Кои се координатите на некоја точка во поларниот координатен систем ако во правоаголниот кординатен систем й се:

a) $x = 2$, $y = 2$; *b*) $x = 5$, $y = 0$, *c*) $x = 4$, $y = -4$.

Резултати:

1. $A(-9,3)$, $B(-1, -10)$, $C(-13, -7)$.

2. $A(6,6)$, $B(-3,3)$ $C(5, -3)$.

3. *a*) $x = r\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $y = r\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; *b*) $x = 1$, $y = \sqrt{3}$; *c*) $x = -3\sqrt{2}$, $y = 3\sqrt{2}$; *d*) $x = 5$, $y = 0$.

4. *a*) Од $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ излегува $r = 2\sqrt{2}$; од $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ злегува $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$; *b*) $r = 5$, $\varphi = 0$; c) $r = 4\sqrt{2}$, $\varphi = 315°$.

Приготвување за понатамошниот материјал.

1. Да се нацрта во правоаголниот координатен систем линеарната функција $y = 2x - 3$.

2. Да се реши графички: *a*) равенката $3x - 6 = 0$, *b*) системот равенки: $x + y = 6$, $x - y = 2$.

3. Да се нацрта графиконот на квадратните функции: ~~*a*) $y = -3x^2$~~, *b*) $y = 2x^2 - 3$; *c*) $y = x^2 - 5x - 14$.

4. Да се реши графички по двата начина равенката: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

5. Да се нацртаат графиците на функциите:
   a) $y = \log_2 x$, $y = 2^x$,
   b) $y = \log x$, $y = 10^x$.

6. Да се претстават во интервалот $0 - 2\,\Pi$ следните функции:
   ~~*a*) $y = \sin x$; *b*) $y = \cos x$;~~
   c) $y = \operatorname{tg} x$; *d*) $y = \operatorname{ctg} x$.

§ 3. БИТНОСТ НА АНАЛИТИЧКАТА МЕТОДА И ЗАДАЧА НА АНАЛИТИЧКАТА ГЕОМЕТРИЈА

Со помошта на координатен систем знаеме да ги нацртаме графиците на линеарните функции, на квадратните функции, на експоненцијалните, логаритамските и тригонометриските функции и знаеме графички да ги решаваме линеарните и квадратните равенки итн.

Со координатниот систем во рамнината ја добивме врската меѓу аритметичко-алгебарските изрази и геометриските фигури во рамнина.

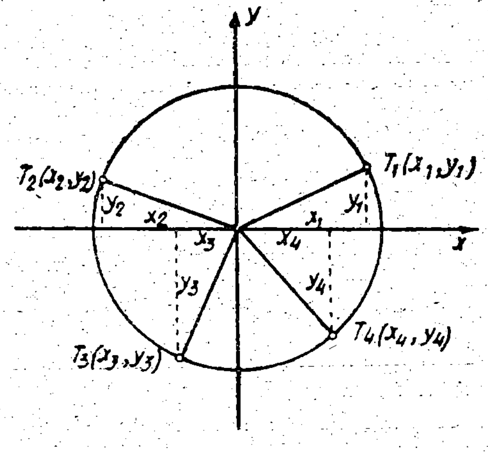
Таа врска е ваква:

Што е алгебарски	Тоа е геометриски
1. (x, y) т.н. подреден пар од броеви т.е. се знае кој е првиот, кој е вториот.	1. Точка
2. Равенка со 2 променливи.	2. Крива — геометриско место.
3. Апсцисата x и ординатата y на точката T (x, y) прават едно решение на равенката на кривата k.	3. Точката T лежи на кривата или k минува низ точката T.
4. Решение на систем од 2 равенки со 2 непознати.	4. Пресек на две криви во рамнината.

На горе споменатите примери видовме, како од алгебарски изрази се доаѓа до нивните геометриски слики и тоа е една од задачите на аналитичката геометрија.

Од равенката на кривата можеме да ги најдеме нејзините геометриски својства и да ја изведеме нејзината конструкција, но за тоа ќе стане подоцна збор.

Втора задача на аналитичката метода е од познатите својства на една крива да ја изведеме нејзината равенка служејќи се со координатните оски. Како тоа се работи, еве пример:



Сл. 9

1. Да се изведе равенката на кругот, на којшто седиштето е во почетокот на координатниот систем и радиусот е r.

Знаеме дека кругот е геометриско место на точки еднакво оддалечени од една стална точка што се вика центар на кругот. Постојаната должина се вика радиус на кругот.

По Питагоровото правило, за секоја точка од нацртаните точки на кругот имаме дека е (сл. 9)

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \qquad x_3^2 + y_3^2 = r^2,$$
$$x_2^2 + y_2^2 = r^2, \qquad x_4^2 + y_4^2 = r^2.$$

Слично можеме да заклучиме, дека за која било точка (x, y) од кругот е

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

а тоа е *централна равенка на кругот.*

(Со зборови: *збирот од квадратите на апсцисите и ординатите на секоја точка од кругот е еднаков на квадратот од неговиот полупречник).*

На пример: $x^2+y^2=9$ е круг околу почетокот со $r=3$. Круг околу почетокот со $r=5$ ја има равенката $x^2+y^2=25$.

И обратно, ако координатите на некоја точка $T(x, y)$ во рамнината го задоволуваат условот $x^2+y^2=r^2$, тоа значи дека растојанието на таа точка од координатниот почеток е константно и равно на r т.е. таа лежи на кругот околу почетокот со полупречник r.

Задачата на аналитичката геометрија во рамнина е:

а) Од равенката со две променливи да се најде геометриската слика што ѝ припаѓа.

б) Да се најдат равенките на дадените криви, од нивните познати геометриски особини.

в) Со помошта на равенката т.е. со сметање да се најдуваат особините на кривите.

Треба да се запамети дека аналитичката геометрија не е одделена со некој ѕид од другите геометрии и треба да ја сфатиме повеќе како аналитичка метода во геометријата т.е. примена на алгебрата во геометријата.

Вежби: 1. Дали точките $T_1(4, 3)$ $T_2(3, -1)$ лежат на кривата $x^2+y^2=25$?

2. Да се определат на кривата $x^2+y^2=25$ координатите на една точка од III и една од IV квадрант.

3. Да се најде ординатата на точката од кривата $y^2=2x$, на којашто апсцисата е $x=4$.

4. Да се најдат координатите на пресечните точки од кривите $y=3x^2$ и $y=2x^2+4$.

5. Да се најде равенката на геометриското место на точките што се еднакво оддалечени од координатните оски.

6. Како може од координатите на точката $T(x, y)$ да се дознае дека таа лежи

а) во кругот $x^2+y^2=r^2$

b) надвор од кругот $x^2+y^2=r^2$.

Резултати:

1. T_1 лежи, T_2 не лежи.

2. Во III квадрант на пр. $A(-3, -4)$, а во IV на пр $B(3, -4)$

3. $y=32$.

4. $S_1(2, 12)$, $S_2(-2, 12)$.

5. $y=x$, $y=-x$.

6. *а*) За $x_1^2+y_1^2-r_1^2<0$, T е во кругот,

b) за $x_1^2+y_1^2-r_1^2>0$, T е надвор од дадениот круг

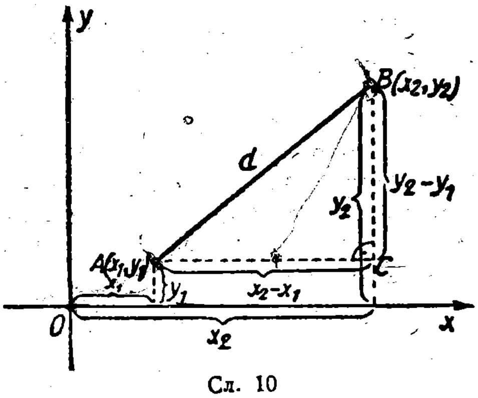
ГЛАВА II

ТОЧКА

§ 4. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ

Нека се дадени двете точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Се прашаме како може да им се определи меѓусебното растојание со помошта на нивните координати?

Низ точките A и B повлекуваме паралели со ординатната оска, а воедно низ точката A паралела со апсцисната оска до пресекот C. Како што се гледа од сликата 10, добиениот триаголник ACB е правоаголен, со катети y_2-y_1 и x_2-x_1, а хипотенузата е токму бараното растојание меѓу точките A и B.



Сл. 10

По Питагоровото правило имаме

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

или

$$(1) \qquad \boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Со зборови: *Растојанието или оддалеченоста меѓу две точки е рамно на квадратниот корен од збирот на ква-*

драйите од разликайа на айсцисийе и разликайа на ординайийе на дадениийе йочки.

Растојанието d на некоја точка $T(x, y)$ од координатниот почеток ќе биде

(1a) $$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

бидејќи координатите на почетокот се (0, 0).

Направи ја сликата!

Вежби: 1. Да се определи растојанието меѓу точките $A(5, 2)$, $B(1, -1)$. Со замена на координатите $A(5 = x_1, 2 = y_1)$ и $B(1 = x_2, -1 = y_2)$ во формулата (1) добиваме

$$d = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-2)^2} = 5.$$

2. Да се најде растојанието на точката $M(8, 6)$ од координатниот почеток.

По формулата (1*a*) имаме

$$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Задачи: 1. Колкаво е растојанието на координатниот почеток од точката *a*) $M(4, 3)$; *b*) $N(-5, 12)$; *c*) $P(6, -8)$; *d*) $T(\cos\alpha, \sin\alpha)$; *e*) $A(1, \operatorname{tg}\alpha)$.

2. Да се најде растојанието меѓу точките $M_1(8, 4)$ и $M_2(5, 0)$.

3. Иста задача за точките *a*) $M_1(7, 9)$, $M_2(10, 3)$; *b*) $M_1(-4, -5)$, $M_2(3, -4)$; *c*) $M_1(\cos\alpha, 0)$, $M_2(\sin\alpha, \sqrt{\sin 2\alpha})$.

4. Темињата на еден триаголник се $A(3, 6)$, $B(9, -2)$, $C(-3, 3)$. Колкави се страните на тој триаголник, и кои се средните точки на неговите страни?

5. Истата задача за триаголникот $A(-2, 5)$, $B(5, 2)$, $C(-4, 6)$.

6. Колкав е обемот на триаголникот чии темиња се $A(3, 4)$, $B(-2, 4)$, $C(2, 2)$?

Да се најдат должините на тежишните линии на тој триаголник.

7. Да се докаже дека триаголникот со темиња $A(-3, -2)$, $B(1, 4)$, $C(-5, 0)$ е рамнокрак.

8. Да се докаже дека триаголникот со $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$, $C(-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ е рамностран.

9. Докажи, дека четириаголникот со $A(1, 3)$, $B(3, 6)$, $C(0, 5)$, $D(-2, 2)$ е паралелограм. Најди го средиштето на симетријата на овој четириаголник.

10. Докажи дека триаголникот со темиња $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$, $C(-1, -3)$ е правоаголен.

11. Да се испитаат видовите на четириаголниците, чии што темиња се:

a) $A(1, 3)$, $B(2, 1)$, $C(5, 2)$, $D(4, 4)$;
b) $A(1, 1)$, $B(6, 1)$, $C(5, 4)$, $D(2, 4)$;
c) $A(2, 3)$, $B(3, 0)$, $C(0, -1)$, $D(-1, 2)$;
d) $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(-a, 0)$, $D(0, -a)$;
e) $A(a, b)$, $B(b, a)$, $C(-a, b)$ $D(b, -a)$.

12. Темињата на триаголникот се $A(-7, 2)$ $B(4, -4)$, $C(-1, 8)$. Колкави се аглите на тој триаголник. *(Херонови формули)?*

Резултати:

1. *a*) 5); *b*) 13; *c*) 10; *d*) 1; *e*) $\frac{1}{\cos\alpha}$.

2. 5. **3.** *a*) $\sqrt{45}$; *b*) $\sqrt{50}$; *c*) 1.

4. 10, $\sqrt{45}$, 13; (6, 2), $\left(0, \frac{9}{2}\right)$, $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

5. $7\sqrt{2}$; $\sqrt{125}$, $\sqrt{97}$, $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, (6, 2).

6. $5+3\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$, $\frac{1}{2}\sqrt{85}$, $\frac{5}{2}$.

7. $AB = BC = 2\sqrt{13}$. **8.** $AC = BC = AD = 2\sqrt{2}$.

9. $AB = CD = \sqrt{13}$, $AD = BC = \sqrt{10}$; $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

10. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

11. *a*) Паралелограм со страни $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$; дијагоналите се $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$ па е ромбоид; *b*) рамнокрак трапез: $a=5$, $b=d=\sqrt{10}$, $c=3$. *c*) Квадрат $a=b=c=d=\sqrt{10}$; $e=f=2\sqrt{5}$; *d*) Квадрат, секоја страна $e = a\sqrt{2}$, $e=f=2a$; *e*) рамнокрак трапез $AB = (a-b)\sqrt{2}$,

$CD = (a+b)\sqrt{2}$, $AD = BC = \sqrt{2(a^2+b^2)}$, $AC = BD = 2a$.

12. $\alpha = 73^\circ 36' 38''$, $\beta = 38^\circ 46' 13''$, $\gamma = 67^\circ 37' 10''$.

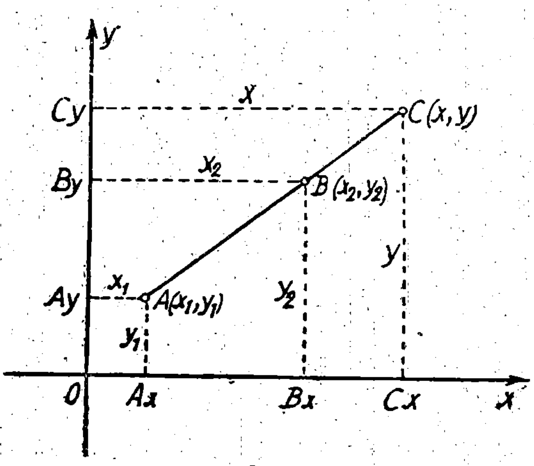
§ 5. ДЕЛЕЊЕ НА ОТСЕЧКА ВО ДАДЕН ОДНОС

Од планиметријата знаеме:

Отсечката AB разделена е со која било своја точка C во односот на растојанијата од таа точка до краевите на отсечката. Делбата е *внатрешна* ако точката C е меѓу A и B и *надворешна* ако точката C е на продолжението од AB. Количникот на односот не секогаш е цел број, ами може да биде и дропка или ирационален број.

За внатрешна делба количникот е негативен затоа што растојанијата на точката C до крајните точки на отсечката, се со противен смер а за надворешната делба количникот е позитивен.

Нашата задача е:



Сл. 11

Да се пресметаат координатите x, y на точката $C(x, y)$ што ја дели отсечката A (x_1, y_1) B (x_2, y_2) во односот $AB : BC = \lambda$.

Од сликата 11 гледаме дека е

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AxCx} : \overline{BxCx} \text{ или } (x - x_1) : (x - x_2) = \lambda$$

од каде е

$$x - x_1 = \lambda x - \lambda x_2$$
$$x(1 - \lambda) = x_1 - \lambda x_2$$
$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}.$$

Исто така од

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AyCy} : \overline{ByCy} \text{ или } (y - y_1) : (y - y_2) = \lambda$$

и оттука

$$y - y_1 = \lambda y - \lambda y_2$$
$$y(1 - \lambda) = y_1 - \lambda y_2$$
$$y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Добивме, дека координатите на точката што ја дели дадената отсечка $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ во односот λ, се добиваат со формулите:

$$\boxed{x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}} \tag{2}$$

Средината S на отсечката ја дели оваа во односот $\lambda = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = -1$, (оти е $\overline{AS} = -\overline{BS}$). Внесена оваа вредност за λ во (2) ни ги дава формулите порано изведени

$$(2a) \qquad \boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Вежби: 1. Да се определи точка $C(x, y)$, што ја дели отсечката $A(2, 5)$, $B(7, 8)$, во односот *a*) 2; *b*) —3. Спрема дадените податоци $A(2 = x_1, \ 5 = y_1)$, $B(7 = x_2, \ 8 = y_2)$. Со замена во формулата (2) добиваме:

a) $x = \frac{2 - 2 \cdot 7}{1 - 2} = 12, \quad y = \frac{5 - 2 \cdot 8}{1 - 2} = 11$; точката е $C(12, 11)$;

b) $x = \frac{2 - (-3)7}{1 - (-3)} = 5\frac{3}{4}, \ y = \frac{5 - (-3)8}{1 - (-3)} = 7\frac{1}{4}$, точката е $C\left(5\frac{3}{4}, \ 7\frac{1}{4}\right)$.

2. Да се определат координатите на тежиштето на триаголникот $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Од сликата 12 гледаме дека отсечката $A(x_1, y_1)$ и $S\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ треба да се раздели со точката T во односот

$$\overline{AT} : \overline{ST} = 2 : (-1) = -2 = \lambda.$$

Со замена на координатите на крајните точки A и S и вредноста за λ во формулата (2) имаме:

$$x = \frac{x_1 - (-2)\frac{x_2 + x_3}{2}}{1 - (-2)} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 - (-2)\frac{y_2 + y_3}{2}}{1 - (-2)} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

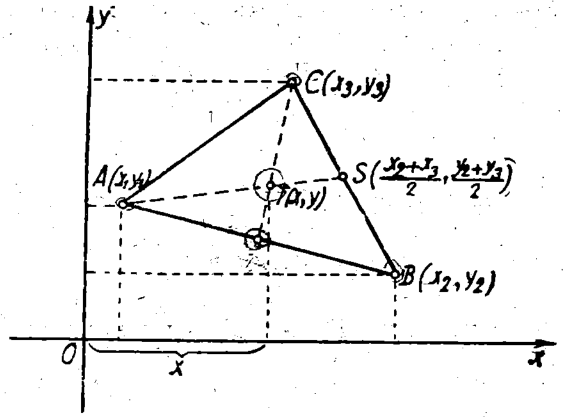
Формулата за преместување координатите на тежиштето на триаголник од координатите на темињата му гласи:

$$(3) \qquad \boxed{T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)}$$

(Кажи ја со зборови!)

На пр. тежиштето на триаголникот $A(3, 7)$, $B(4, 1)$, $C(2, 7)$, ги има координатите:

$$x = \frac{3+4+2}{3} = 3, \quad y = \frac{7+1+7}{3} = 5 \text{ или } T(3, 5).$$



Сл. 12

Задачи: 1. Да се разделат во односот 3 : 4 однатре и однадвор отсечките: *a*) $A(3, 5)$ $B(4, 7)$ *b*) $M(-3, 4,)$ $N(3, 5)$.

2. Да се располоват отсечките:

a) $A(3, 4)$ $B\left(\frac{1}{2}, -3\right)$; *b*) $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $B(-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

3. Да се определат координатите на точката што отсечката $A(-3, 1)$ $B(2, 5)$ ја дели во односот *a*) $\lambda = -3$; *b*) $\lambda = 3$.

4. Да се најдат координатите на тежиштата на триаголниците: *a*) $A(2, 3)$ $B(3, 4)$ $C(-8, 2)$; *b*) $A(-5,2)$, $B(-1, -6)$ $C(3, 4)$.

5. Отсечката меѓу точките $A(3, -6)$, $B(10, 18)$ е разделена со точките C, D, E и F на 5 еднакви делови. Кои им се координатите?

6. Да се најдат координатите на четвртото теме на паралелограмот, на кој што се познати три темиња: *a*) $A(1, 2)$, $B(-5, -3)$, $C(7, -6)$; *b*) $A(-10, 7)$, $B(5, -13)$, $C(14, 7)$.

7. Отсечката $AB = d$ со крајни точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ да се продолжи преку B за a. Кои се координатите на новите крајни точки?

8. До која точка C треба отсечката што ги сврзува точките $A(1, -1)$ $B(4, 5)$ да се продолжи во смерот AB, за да се утростручи?

Резултати:

1. *a*) $T_1\left(\frac{24}{7}, \frac{41}{7}\right)$, $T_2(0, -1)$; *b*) $T_1\left(-\frac{3}{7}, \frac{31}{7}\right)$, $T_2(-21, 1)$.

2. *a*) $S\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$, *b*) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha-45^0); \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(45^\circ-\alpha)\right]$.

3. *a*) $T\left(\frac{3}{4}, 4\right)$; *b*) $T\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$.

4. *a*) $T(-1, 3)$, *b*) $T(-1, 0)$.

5. $C\left(\frac{22}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, $D\left(\frac{29}{5}, \frac{18}{5}\right)$, $E\left(\frac{36}{5}, \frac{42}{5}\right)$, $F\left(\frac{43}{5}, \frac{66}{5}\right)$.

6. *a*) $D(13, -1)$, *b*) $D(-1, 27)$.

7. $x = x_2 + \frac{a}{d}(x_2 - x_1)$, $y = y_2 + \frac{a}{d}(y_2 - y_1)$.

8. $C(10, 17)$.

§ 6. ПОВРШИНА НА ТРИАГОЛНИКОТ

Три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2\ y_2)$, $C(x_3\ y_3)$ ако не лежат на иста права, определуваат триаголник. Познати ни се многу задачи за триаголниците. Така на пр. за определување површината на триаголник познати ни се формулите

$$P = \frac{aha}{2} = \frac{bhb}{2} = \frac{chc}{2} \text{ или } P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{или } P = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{ac}{2}\sin\beta = \frac{bc}{2}\sin\alpha.$$

Ако ни е даден триаголник со координатите на темињата, можеме да ги најдеме должините на неговите страни, па потоа да се послужиме со Хероновата формула за наоѓање површината или пак да ги пресметаме аглите од познатите страни и тогај да примениме една од последните формули.

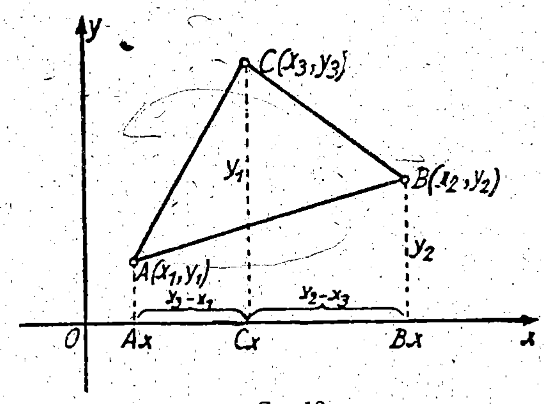
Се прашаме сега: има ли аналитичката геометрија специјална формула за површината на триаголник и како директно од координатите на темињата да се пресмета таа површина? Ќе покажеме како станува тоа.

Површината на триаголник ќе ја определиме со помошта на трапези, што ги прават ординатите на темињата од триаголникот со неговите страни и апсцисната оска. Сл. 13.)

1. Трапезот $A_x C_x C A$ има за основа y_1 и y_3 и висина $x_3 - x_1$, па му е површината $\frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$.

2. Трапезот $C_x B_x B C$ има за основи y_3 и y_2 и висина $x_2 - x_3$, неговата површина е $\frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)$.

3. Трапезот $A_x B_x B A$ има основи $y_1 + y_2$ и висина $x_2 - x_1$ и неговата површина е $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$.



Сл. 13

Од сликата излегува за површината на триаголникот

$$P = A_x C_x C A + C_x B_x B C - A_x B_x B A \text{ или}$$

$$P = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) -$$
$$- \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1).$$

од каде е

$$2P = (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) -$$
$$- (y_1 + y_2)(x_2 - y_1).$$

Десната страна измножена и подредена ни дава

$$2P = x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_3 y_2$$

или

$$(4) \qquad \boxed{2P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}$$

$P = \frac{1}{2}$

Ова е формулата за определување површината на триаголник од координатите на неговите темиња.

Со зборови: двојната површина на еден триаголник се пресметува така што апсцисата на секое теме се помножува со разликата на ординатите на следните две темиња одејќи секогаш во ист смер и добиените производи се соберат.

Горната формула за површината на триаголник важи без оглед на тоа, во кој квадрант се наоѓаат точките A, B, C. Ова може лесно да се разбере ако се изведе транслација на почетокот $O'(a, b)$ така што триаголникот ABC во новата положба да биде целиот во првиот квадрант.

Од формулите за транслација

$$x_1 = x'_1 + a, \; y_1 = y'_1 + b \text{ итн.}$$

излегува

$$2P = x'_1(y'_2 - y'_3) + x'_2(y'_3 - y'_1) + x'_3(y'_1 - y'_2),$$

т. е. токму површината на триаголник во системот $X'O'Y'$.

Вежби: 1. Колкава е површината на триаголникот, на којшто координатите на темињата се: $A(1, 2)$, $B(10, 8)$, $C(3, 12)$?

Од координатите $A(1 = x_1, 2 = y_1)$ $B(10 = x_2, 8 = y_2)$, $C(3 = x_3, 12 = y_3)$ со замена во формулата (4) добиваме $2P = 1(8 - 12) + 10(12 - 2) + 3(2 - 8) = 78$, $P = 39$.

2. Колкава е површината на четириаголникот на којшто координатите на темињата се $A(2, 4)$, $B(10, 2)$, $C(14, 9)$, $D(6, 12)$?

Со дијагоналата $\overline{AC}$ го делиме четириаголникот на триаголниците ABC и ACD. Ги наоѓаме површините на поодделните триаголници и собираме.

За површината на триаголникот ABC имаме:

$$2P_1 = 2(2 - 9) + 10(9 - 4) + 14(4 - 2) = 64 \text{ или } P = 32.$$

За површината на триаголникот ACD имаме:

$$2P_2 = 2(9 - 12) + 14(12 - 4) + 6(4 - 9) = 76 \text{ или } P = 38.$$

Површината на четириаголникот е

$$P = P_1 + P_2 = 70.$$

Забелешка. 1. Ако површината излезе негативна, ништо не ни пречи, бидејќи нас не́ интересира апсолутната вредност на површината. Негативниот резултат за површината се добива од другиот распоред на темињата при трапезот, т. е. нив ги обиколуваме во негативен смер односно во смерот на вртењето на сказалката од саатот.

2. Формулата за површината на триаголник лесно се помни бидејќи од првиот член $x_1(y_2 - y_3)$ се добиваат другите два члена, ако индексите циклично ги замениме. Циклична замена значи место 1 доаѓа 2, место 2 доаѓа 3, а место 3 доаѓа 1.

Зборот циклично доаѓа од грчкиот збор „κύκλος“, што значи круг. Ако ги означиме темињата на рамностран триаголник впишан во круг со 1, 2, 3, па кругот го завртиме за 120°, триаголникот преминува во триаголникот 2, 3, 1 и уште за 120° во 3, 1, 2. Оваа замена многу често се применува во математиката.

Задачи. 1. Да се определи површината на триаголникот, чии што темиња се:

$a)$ $A(1,0)$, $B(3,1)$, $C(0,2)$
$b)$ $A(-3,2)$, $B(3,5)$, $C(1,-3)$
$c)$ $A(-4,-3)$, $B(5,1)$, $C(-3,5)$
$d)$ $A(a,0)$, $B(a+b,a)$, $C(0,b)$

2. Да се определи површината на четириаголникот со темиња:

$a)$ $A(2,3)$, $B(-3,4)$, $C(-1,-4)$ $D(3,1)$,
$b)$ $A(-1,-2)$, $B(5,4)$, $C(0,5)$, $D(-2,3)$.

3. Да се определи површината на петаголникот со темиња:

$A(1,4)$, $B(7,1)$, $C(14,3)$, $D(11,12)$, $E(3,10)$.

Упатство. Раздели го на три триаголника.

4. Темињата на триаголникот се: $A(3,5)$, $B(12,2)$, $C(8,12)$. Да се најдат: $a)$ должините на страните и обемот; $b)$ средните точки на страните и координатите на тежиштето; $c)$ должината на тежишните линии: $d)$ површината.

5. $A(-2,-1)$, $B(0,2)$, $C(4,y_3)$ се темиња на триаголникот ABC, чија површина е $P=7$. Колкава е y_3?

Резултати:

1. $a)\ \frac{5}{2}$, $b)\ -21$, $c)\ 34$, $d)\ \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

2. $a)\ P=28{,}5$ $b)\ P=24$.

3. $P_1=\frac{33}{2}$, $P_2=57$, $P_3=22$, $P=95\frac{1}{2}$.

4. $a)\ \overline{AB}=\sqrt{90}$, $\overline{BC}=\sqrt{116}$, $\overline{AC}=\sqrt{74}$, $= 8{,}6$ 10,6

9,5 $O=\sqrt{90}+\sqrt{116}+\sqrt{74}.$ $= 28{,}86$

$b)\ S_{AB}\left(\frac{15}{2},\frac{7}{2}\right)$, $S_{AC}\left(\frac{11}{2},\frac{17}{2}\right)$, $S_{BC}(10,7)$, $T\left(\frac{23}{3},\frac{19}{3}\right)$.

7,28 $c)\ t_A=\sqrt{53}$, $t_B=\frac{1}{2}\sqrt{338}$, $t_C=\frac{1}{2}\sqrt{290}$; $=\frac{17}{2}$ 18,38

$d)\ P=39$.

5. $y_3=15$.

§. 7. УСЛОВ, ТРИ ТОЧКИ ДА ЛЕЖАТ НА ЕДНА ПРАВА

Три различни точки во општ случај определуваат три прави. Посебен случај имаме, кога трите точки лежат на една права и определуваат само една права. Да го побараме условот што треба да биде задоволен за да лежат три точки на една права.

Три точки затвораат триаголник. Ако тие лежат на една права, површината на триаголникот изчезнува, т. е. рамна е на нула.

Условот којшто треба да биде исполнет е

$$(5) \quad \boxed{x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0}$$

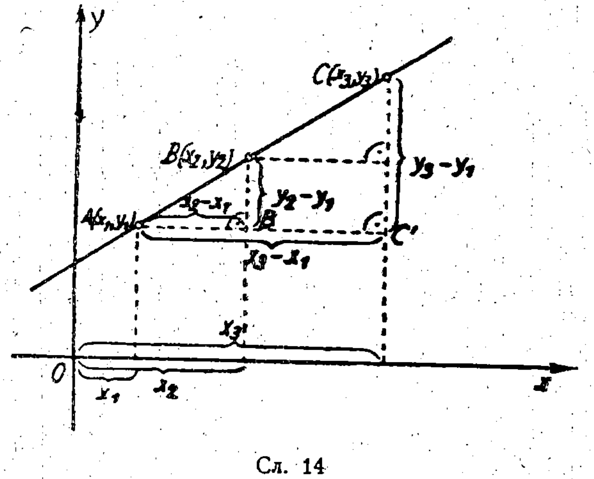
На пр. Дали точките A (2, 2), B (6, 3), C (10, 4) лежат на една права?

Да ги внесеме од A ($2 = x_1$, $2 = y_1$), B ($6 = x_2$, $3 = y_2$), C ($10 = x_3$, $4 = y_3$) координатите во формулата (5). Добиваме:

$$2 (3 - 4) + 6 (4 - 2) + 10 (2 - 3) = 0.$$

Добиваме дека условот е исполнет, бидејќи површината на триаголникот што го затвораат трите точки е нула, а тоа значи дека дадените точки лежат на една права. Спомнатиот услов може да се постави и по следниот начин. Од сличноста на триаголниците ABB' и ACC' (Сл. 14) излегува дека е

$$(6) \quad \boxed{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \text{ a) или } \boxed{\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}} \text{ b)}$$



Сл. 14

Секоја од тие равенки е потребен и доволен услов за точките (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) да лежат на една права.

За горните три точки $A(2, 2)$, $B(6, 3)$, $C(10, 4)$ излегува по формулата (6*a*) $\frac{4-2}{10-2}=\frac{3-2}{6-2}=\frac{1}{4}$, а по формулата (6*b*) $\frac{6-2}{10-2}=\frac{3-2}{4-2}=\frac{1}{2}$. Добиените идентитети покажуваат дека условот три точки да лежат на една права е исполнет.

Забелешка. Од формулите 6*a* и 6*b* по ослободување од дропките и по другите трансформации може да се изведе формулата (5). Обратно, од формулата (5) можат исто така да се изведат формулите (6*a*) и (6*b*).

Задачи: 1. Да се испита, дали лежат на иста права точките: *a*) $A(5, 4)$, $B(3, 2)$, $C(2, 1)$; *b*) $A(1, 1)$, $B(-2, 6)$, $C(5, -4)$; *c*) $A(7, 9)$ $B(-8, 18)$, $C(27, -3)$.

2. Да се определи ординатата на точката $A(5, y)$ така A да падне на истата права на која што се $B(10, 3)$ и $C(-5, -9)$.

3. На правата определена со $A(12, 12)$, $B(-12, 2)$ лежи точката $C(x, -3)$. Да се најде апсцисата x.

Резултати.

1. *a*) лежи, *b*) не лежи, *c*) лежи. **2.** $y=1$. **3.** $x=-24$.

Задачи за повторување од досега земениот материјал.

1. Координатите на темињата на еден четириаголник се $A(2, 7)$, $B(16, 10)$, $C(5, 3)$, $D(1, 2)$. Да се определи *a)* обемот *b*) површината *c*) должините на дијагоналите.

2. Растојанието меѓу две точки е 13. Едната од нив ги има координатите $(-3, 10)$ а другата ја има апсцисата 2; Да се најде ординатата на другата точка.

3. Точките $A(3, 5)$, $B(-3, 3)$, $C(4, y)$ се темиња на рамнокрак триаголник со теме во C. Да се определи y.

4. Дадена отсечка разделена е на три еднакви дела. Ако едната крајна точка има за координати $A(3, 8)$, а поблиската разделена точка $B(4, 13)$, да се најдат координатите на другата крајна точка.

5. Дадени се точките $A(-5, 1)$ и $B(3, 4)$. Да се определи површината на триаголникот *a*) ABO; *b*) BAO. Што забележуваш?

6. Да се пресмета површината на триаголникот

$$A\left(-\frac{3}{2}, \frac{22}{5}\right),\ B(-5, -4),\ C(3, 2)$$

и добиениот резултат да се провери со Хероновата формула.

7. На триаголникот $A(3, 5)$, $B(-3, 3)$, $C(-7, 25)$ сврзани се средните точки со прави. Колкава е површината на впишаниот триаголник? Колку пати таа е помала од површината на дадениот триаголник?

8. Да се најдат должините на страните на триаголникот од координатите на темињата $A(3, 7)$ $B(4, 1)$ и координатите на тежиштето $T(3, 5)$.

9. Средните точки на страните на четириаголникот $A(-4, -2)$, $B(-7, 2)$, $C(5, 7)$, $D(8, 3)$ се темиња на впишан четириаголник. Да му се најде обемот и површината.

10. Четириаголникот $ABCD$ разделен е со дијагоналата AC во триаголниците ABC и ACD.

Да се докаже дека равенката

$$2P = x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3).$$

е во сила. Кое правило важи за индексите?

Резултати.

1. a) $d_{AB} = \sqrt{205} = 14,31800$, $d_{BC} = \sqrt{170} = 13,03840$, $d_{CD} = \sqrt{17} = 4,12311$, $d_{DA} = \sqrt{26} = 5,09902$; затоа е $O = 36,57853$;

b) $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = 32\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} = 42.$

c) $d_{AC} = 5$, $d_{BD} = 17$.

2. $y_1 = 22$, $y_2 = -2$. **3.** $y = -8$. **4.** $x = 6$, $y = 23$.

5. $P_{ABO} = -\frac{23}{2}$, $P_{BAO} = \frac{23}{2}$. **6.** $P = 23\frac{1}{10}$. **7.** $P = 17\frac{1}{2}$ (4 пати). $\approx 6{,}08$

8. $d_{AB} = \sqrt{37}$, $d_{AC} = 1$, $a_{BC} = \sqrt{40}$. $\approx 6{,}32$

9. Координатите на средните точки се:

$\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$, $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{13}{2}, 5\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, затоа е

$O = 9\sqrt{2} + \sqrt{226}$, $P = \frac{63}{2}$. $= 31{,}5$

10. Обележи ги по ред темињата $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$ и $D(x_4, y_4)$ и постави ја формулата за површината на триаголниците ABC и ACD. Собери ги и извади заедничките фоктори x_1 и x_3.

12,73
15,03
27,76

ГЛАВА III

ПРАВА

Учејќи во претешните класови за линеарната функција и нејзиното графичко претставување, ние научивме нешто од аналитичката геометрија на правата. Уште повеќе знаевме од аналитичката геометрија на правата, кога научивме графички да решаваме линеарна равенка со една непозната и систем на две линеарни равенки со две непознати. На ова место, систематски ќе ја учиме аналитичката геометрија на правата и покрај познатите видови на равенката на права ќе земеме уште некои.

Да се присетиме уште дека правата е определена со две свои точки, или со една точка и даден смер.

§ 8. ЕКСПЛИЦИТЕН ВИД НА РАВЕНКАТА НА ПРАВА

Положбата на правата спрема координатниот систем може да биде определена со аголот што таа го зафаќа со позитивниот смер на апсцисната оска и точката во која оваа права ја сече ординатната оска (значи правата е определена со дадена точка и даден смер). Од кажаното ќе го изведеме експлицитниот облик на равенката на правата.

Задачата е: Дадена е правата p со точката B на ординатната оска (со кои е определена *отсечката* b што ја чини правата на таа оска) и аголот α, што го склучува правата со позитивниот смер и оската x. Да се определи равенката на правата.

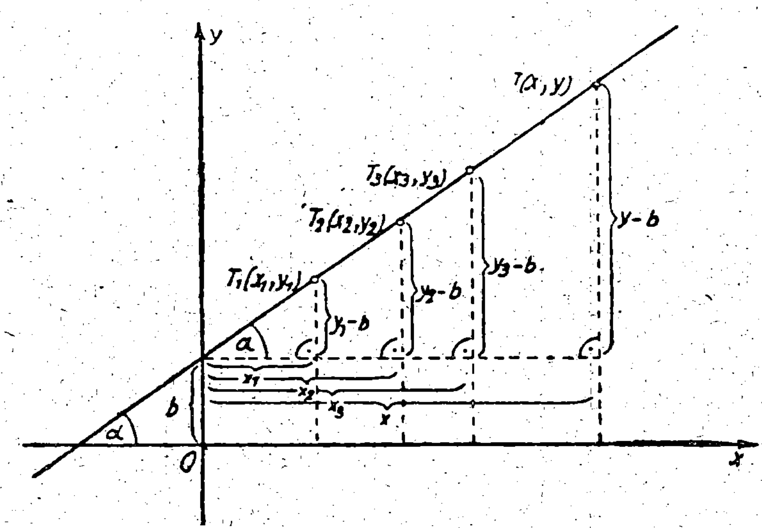
Како што гледаме на сл. 15 низ точката B повлековме паралела со оската x и на правата p ги одбравме точките T_1, T_2, T_3.... (општо која да е точка T) и ги нацртавме под ред нивните ординати y_1, y_2, y_3... (општо y).

Во добиените слични правоаголни триаголници, катетите до аголот α се подред x_1, x_2, x_3... (општо x), а катетите спротив аголот α се подред $(y_1 - b)$, $(y_2 - b)$, $(y_3 - b)$... (општо $y - b$).

Од дефиницијата на функцијата тангенс излегува

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{y_2 - b}{x_2} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{y_3 - b}{x_3} = \operatorname{tg}\alpha \ldots \text{ или}$$

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg}\alpha + b, \quad y_2 = x_2 \operatorname{tg}\alpha + b, \quad y_3 = x_3 \operatorname{tg}\alpha + b \ldots$$



Сл. 15

Наместо $\operatorname{tg}\alpha$ обележуваме накусо a, и горните равенки го добиваат обликот

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b, \quad y_3 = ax_3 + b \ldots$$

Гледаме, дека за произволна точка $T(x, y)$ од правата е

$$\frac{y - b}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

или

$$\boxed{y = ax + b} \tag{7}$$

Ваквата линеарна равенка во Картезиевите координати x и y е *експлицитен* или *главен* вид на равенката на правата. Нејзината карактеристика е во тоа, што од едната страна е само y со коефициентот $+1$, а од другата членот со x и слободниот член.

Во равенката се јавуваат 4-те величини x, y, a и b. Величините a и b ја определуваат правата; a се вика *коефициент на правецот на правата;* се обележува исто така и со *коеф. р.* Со него е определен тангенсот на аголот што оваа го заклучува со $+x$, а b е отсечката што ја чини правата на ординатната оска y. Координатите x, y се променливи координати на произволна точка од правата.

Обратно, секоја равенка од облик $y = ax + b$, какви и да се вредностите на a и b, претставува права, затоа што секогаш може да се нацрта права, што има произволен коефициент на правецот a и која било отсечка b на ординатната оска. Равенката на таа права ќе биде $y = ax + b$ и според тоа идентична е со горната равенка на правата.

Вежби. 1. Да се напише равенката на правата што ја отсечува на ординатната оска отсечката 5 и гради со позитивниот смер на оската x агол од 45^0.

Според задачата: $b = 5, \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45^0 = 1 = a$ и со замена во (7) излегува

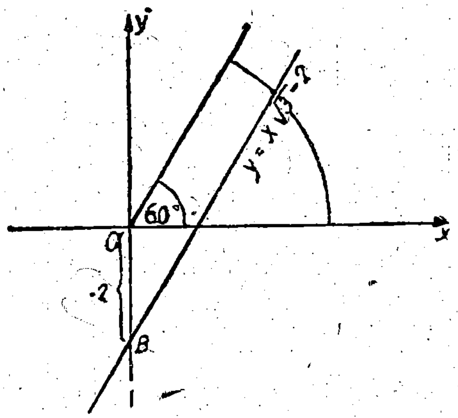
$$y = x + 5.$$

Ова е бараната равенка на правата.

2. Од дадената равенка на правата $y = x\sqrt{3} - 2$ да се нацрта правата.

Од задачата имаме $b = -2$, $a = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha = 60^0$.

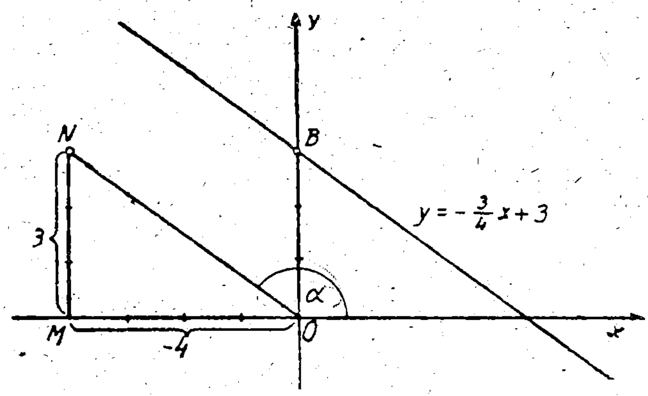
Правата ја има сликава: на оската y одмеруваме -2 и ја добиваме точката B, па низ неа под агол од 60^0 спрема оската $+x$ ја повлекуваме правата (сл. 16).



Сл. 16

3. Да се нацрта правата $y = -\frac{3}{4}x + 3$, и определи големината на аголот спрема оската $+x$. Од равенката гледаме, дека е $a = -\frac{3}{4} = \operatorname{tg}\alpha$, а $b = 3$.

Одмеруваме на оската y отсечката 3. Ја добиваме точката B. Смерот на правата го добиваме од правоаголниот триаголник MON, од којшто се гледа веднаш дека е $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ (сл. 17).



Сл. 17

Бараната права е паралелна со хипотенузата низ точката B.

За да ја определиме величината на аголот во степени постапуваме по следниот начин:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$$

$\log 3 = 0{,}47712$ $180^\circ - \alpha = 36^\circ 52' 11''$
$\log 4 = 0{,}60206$ $\alpha = 143^\circ 7' 49''$
$\log \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = 9{,}87506 - 10$

Задачи. 1. Да се нацрта права и напише нејзината равенка, ако таа на оската y ја сече отсечката 4, а коефициентот на правецот ѝ е

$a)\ -3;\quad b)\ \frac{4}{3};\quad c)\ -\frac{3}{5};\quad d)\ 3,1;\quad e)\ -0{,}03.$

2. Да се нацрта права и напише нејзината равенка, ако коефициентот на правецот е $a = \frac{2}{3}$ а на y — оската ја отсечува отсечката

$a)\ -5;\quad b)\ 1;\quad c)\ -1;\quad d)\ 0.$

3. Да се нацртаат со помошта на a и b графиците на правите:

$a)\ y=\frac{2}{5}x+4;\quad b)\ y=-\frac{4}{5}x+2;$

$c)\ 5y=-6x-5;\quad d)\ y=5x-3.$

4. Кој агол формираат со позитивниот смер на x оската правите:

$a)\ y=2x+3;\quad b)\ y=-\frac{1}{3}x+4;\quad c)\ y=-\frac{22}{7}x+5?$

Резултати:

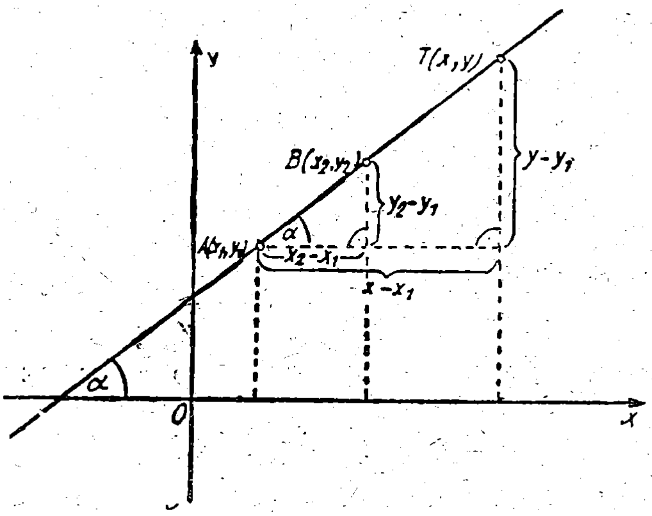
4. $a)\ \alpha=63^{\circ}26'6'';\quad b)\ \alpha=161^{\circ}33'54'';\quad c)\ \alpha=107^{\circ}39'1''.$

§ 9. ПРАВА НИЗ ДВЕ ТОЧКИ

Дадени се точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Да се најде равенката на правата определена со овие две точки.

Низ точките A и B да повлечеме права (Сл. 18). Од сликата гледаме дека е

(1) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=a.$$



Сл. 18

Ако земеме една произволна точка $T(x, y)$ на правата и во врска со точката A ќе имаме:

(2) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y-y_1}{x-x_1}=a.$$

Бидејќи аголот α е ист, можеме да напишеме дека (2) е равно на (1), т.е.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

или по множење на оваа равенка со $(x - x_1)$, добиваме:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \tag{8}$$

што претставува равенка на права низ две точки.

x_1, y_1 и x_2, y_2 се координатите на дадените точки, а x и y координати на која и да е точка од правата.

До горната равенка може да се дојде и по следниот начин.

Дадени се точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Бидејќи точката $A(x_1, y_1)$ лежи на правата

(1) $$y = ax + b$$

Нејзините координати мораат да ја задоволуваат равенката; затоа мора да биде:

(2) $$y_1 = ax_1 + b$$

Истото важи и за точката $B(x_2, y_2)$, па е

(3) $$y_2 = ax_2 + b.$$

Извадиме ли (2) од (1) добиваме

(4) $$y - y_1 = ax - ax_1 \text{ или}$$
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Ако од (3) извадиме (2) имаме

(5) $$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \text{ или}$$
$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Оттука имаме

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ако ја внесеме најдената вредност за a во равенката (4), добиваме:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Вежби. 1. Да се определи равенката на правата што минува низ точките $A(2, 3)$ и $B(8, 7)$.

Во равенката (8) ако ставиме 2 наместо x_1, 3 наместо y_1, 8 наместо x_2, 7 наместо y_2, добиваме

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{8 - 2}(x - 2) \text{ или}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Оваа права има коефициент на правецот $\frac{2}{3}$, а отсечката на y оската е $\frac{5}{3}$. Точноста на резултатот се утврдува со проверување дали дадените точки со своите координати ја задоволуваат равенката на правата. На пр. за точката $A\,(2,\ 3)$ равенката добива облик:

$$3 = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} \text{ или } 3 = 3,$$

кое покажува дека точката A лежи на правата, односно правата минува низ точката.

2. Да се најде на триаголникот $A\,(2,\ 3)$, $B\,(-4,\ 1)$, $C\,(2,\ -3)$ равенката на a) страната AB; b) тежишната линија низ темето A.

а) Равенката на страната AB ќе ја добиеме по формулата (8) од $A\,(2 = x_1,\ 3 = y_1)$, $B\,(-4 = x_2,\ 1 = y_2)$

$$AB \equiv y - 3 = \frac{1-3}{-4-2}(x-2) \text{ или}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

b) Бараната тежишна линија минува низ точката A и средната точка S на страната BC, што има координати (пресметани со формулите $2a$ од координатите на точките B и C) $x = -1$, $y = -1$ т.е. $S\,(-1,\ -1)$.

Со замена во формулата (8) на $A\,(2 = x_1,\ 3 = y_1)$ и $S\,(-1 = x_2,\ -1 = y_2)$ се добива

$$y - 3 = \frac{-1-3}{-1-2}(x-2) \text{ или } y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Ова е равенката на тежишната линија низ темето A.

§ 10. ПРАВА НИЗ ЕДНА ТОЧКА

За да ја определиме равенката на права што минува низ една точка и на којашто коефициентот на правецот е a, постапуваме по следниот начин.

Равенката на правата е

$$y = ax + b.$$

Тука a е познато, но отсечката на ординатната оска b не е позната. Таа може да се определи од условот, правата да минува низ точката T.

Бидејќи правата $y = ax + b$ минува низ T, мора да биде

$$y_1 = ax_1 + b,$$

од каде $b = y_1 - ax_1$. Внесувајќи ја оваа вредност во $y = ax + b$ излегува

$$y = ax + y_1 - ax_1 \text{ или}$$
$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Ова е равенката на правата, што минува низ дадена точка и на којашто коефициентот на правецот е a.

Ако пак ни е дадена само точката T а бројот a е непознат, тогаш равенката

$$\boxed{y - y_1 = a\ (x - x_1)}$$

го означува множеството на сите прави што минуваат низ точката T или снопот на прави низ T. Бројот a може да означува кој да е број од $-\infty$ до $+\infty$.

Вежби. Да се определи равенката на правата што минува низ точката $A(4, 5)$ и со позитивниот смер на оската x прави агол од 45°.

Решение: По формулата (9) од $a = \text{tg } 45° = 1$, $x_1 = 4$ $y_1 = 5$ излегува

$$y - 5 = 1\ (x - 4) \text{ или } y = x + 1.$$

Ова е равенката на бараната права.

Задачи. 1. Како гласи равенката на правата, што минува низ точките: *a*) $A(2, 3)$, $B(3, 2)$; *b*) $A(1, 4)$, $B(-1, -2)$; *c*) $A\left(2, -\frac{1}{2}\right), B\left(-3, \frac{1}{3}\right)$; *d*) $M_1(-4, -3)$, $M_2(1, 3)$; *e*) $N_1(5, 6)$, $N_2(6, -1)$?

✓**2.** Координатите на темињата на триаголникот се $A(2, 7)$, $B(1, 1)$, $C(3, 6)$. Кои се равенките на страните од триаголникот?

3. Координатите на темињата на триаголникот се $A(5, 6)$ $B(-2, 4)$ $C(6, -1)$. Да се определат равенките на страните.

4. Координати на темињата на триаголникот се $A(5,-7)$, ✓$B(1, 11)$, $C(-4, 13)$. Да се определат равенките на тежишните линии на триаголникот.

5. Координатите на темињата на четириаголникот се $A(1, 3)$, $B(2, 1)$, $C(5, 2)$ $D(4, 4)$. Кои се равенките на страните? А кои равенките на дијагоналите?

6. Точката $A(1, 0)$ е едно теме на оној правилен *a*) петаголник *b*) шестаголник, на којшто почетокот (0, 0) е центар: да се најдат равенките на дијагоналите на таа фигура.

7. Координатите на темињата на еден триаголник се *a*) $A(5, 5)$, $B(-2, 4)$, $C(6, -1)$, *b*) $A_1(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$, $B \cos\varphi_2$,

$\sin\varphi_2$), $C(\cos\varphi_3, \sin\varphi_3)$. Да се најдат страните на триаголникот и коефициентите на правецот на тежишните линии.

8. Да се напише равенката на правата што минува низ точката $A(2, 3)$ и со позитивниот смер на x оската прави агол од a) 45^0; b) 135^0; c) 30^0; d) 60^0.

9. Да се напише равенката на правата, што минува низ точката $M(3, 4)$, а коефициентот на правецот и е a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\sin 37^0 45'$ d) $m^2 - n^2$.

10. Истата задача за точката $A(1, 1)$.

11. Да се најдат равенките на страните на фигурата од задачата 6. Дали има и паралелни страни?

12. Да се определи равенката на правата што минува низ точката $M(3, 2)$ а површината на триаголникот што таа го затвора со координатните оски е $\frac{27}{2}$.

13. Низ точката $M(7, 2)$ да се повлече права така што отсечката на позитивниот дел од x оската да се однесува спрема ординатата на точката M како $5:3$. Да се определи равенката на оваа права.

14. Да се определи равенката на правата, на којашто коефициентот на правецот е 4 а отсечката на x оската е 5.

Резултати. 1. a) $y = -x + 5$; b) $y = 3x + 1$; c) $y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$; d) $6x - 5y + 9 = 0$; e) $7x + y - 41 = 0$.

2. $y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$, $y = -x + 9$, $y = 6x - 5$.

3. $2x - 7y + 32 = 0$, $7x + y - 41 = 0$, $5x + 8y - 22 = 0$.

4. $38x + 13y - 99 = 0$, $16x - y - 5 = 0$, $11x + 7y - 47 = 0$.

5. $y = -2x + 5$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $y = -2x + 12$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$, $4y + x - 13 = 0$, $2y - 3x + 4 = 0$.

6. Координатите на темињата на петаголникот се $A(1, 0)$, $B(\cos 72^0, \sin 72^0)$, $C(-\cos 36^0, \sin 36^0)$, $D(-\cos 36^0, -\sin 36^0)$, $E(\cos 72^0, -\sin 72^0)$, од каде можат направо да се определат равенките на дијагоналите.

Координатите на темињата на шестаголникот се

$$A(1, 0)\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ D(-1, 0),$$

$$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

7. *a*) $8y+5x-22=0$, $y+6x-35=0$, $7y-x-30=0$, коеф. на правците на тежишните линии се

$$\frac{7}{6}, -\frac{4}{15}, -\frac{11}{9}. \text{ Слично } b).$$

8. *a*) $y=x+1$, *b*) $y=x-5$, *c*) $y\sqrt{3}-x+2-3\sqrt{3}=0$, *d*) $y-x\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3=0$, *e*) $y\sqrt{3}+x-3\sqrt{3}-2=0$.

9. *a*) $4y-3x-7=0$, *b*) $2y-x-5=0$, *c*) $y-4=0{,}58425\,(x-3)$, *d*) $y-4=(m^2-n^2)\,(x-3)$.

10. Аналогно како во 9.

11. Од координатите на темињата лесно можат да се напишат равенките на страните. При правилниот шестаголник страните две по две се паралелни.

12. $4x+3y-18=0$, $x+3y-9=0$.

13. $6x-11y-20=0$. **14.** $y=4x-20$.

§ 11. ОПШТ ВИД НА РАВЕНКАТА НА ПРАВА

Општата равенка од прв степен меѓу x и y е $Ax+By+C=O$. При тоа A и B не се едновремено еднакви на нула.

Дека таа равенка означува права се гледа од ова. Таа може да биде напишана во вид $By=-Ax-C$ и при претпоставка $B\neq 0$ излегува:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Значи, тоа е равенка на права, на којашто коефициентот на правецот е $-\frac{A}{B}$ а отсечката на y оската $-\frac{C}{B}$.

И обратно можеме да докажеме. Правата е претставена со равенка од прв степен, со две непознати од облик

$$Ax+By+C=0.$$

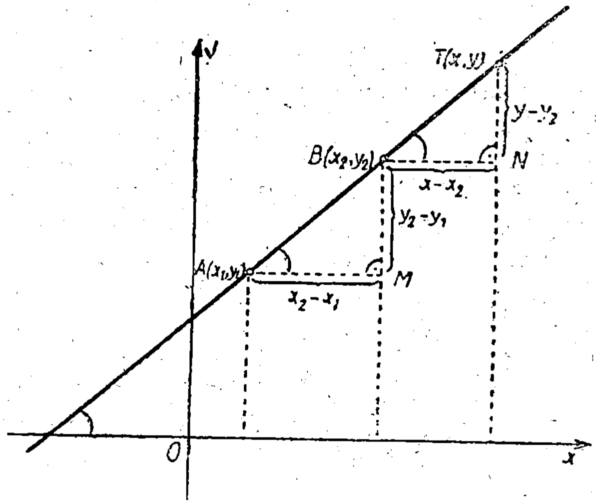
каде што коефициентите A и B не се едновремено еднакви на нула.

Ако една точка се движи по правата, координатите на сите нејзини положби ја задоволуваат равенката од прва степен во облик $Ax+By+C=O$.

Да ги земеме на правата постојаните точки $A\,(x_1, y_1)$ и $B\,(x_2, y_2)$ и подвижната точка $T\,(x, y)$. (Види сл. 19).

Триаголниците AMB и BNT се слични. За нив имаме

$$\frac{NT}{NB}=\frac{MB}{MA} \text{ а тоа значи } \frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



Сл. 19

Од тука ослободувајќи се од дропките и извлекувајќи ги заедничките фактори x и y добиваме

$$x\,(y_1-y_2)+y\,(x_2-x_1)+x_1\,y_2-x_2\,y_1=0$$

каде што y_1-y_2, x_2-x_1 и $x_1\,y_2-x_2\,y_1$ се постојани броеви, кои ги означуваме со A, B, C. Затоа равенката може накусо да се пише како

$$Ax+By+C=0,$$

со што е докажано она што погоре го тврдиме.

Вежби 1. Каква положба има правата $Ax+By+C=$ $=0$ каде што е *a*) $C=0$; *b*) $B=0$; *c*) $A=0$.

a) $C=0$, дадената равенка на правата го има обликот $Ax+By=0$ а оттука $By=-Ax$, $y=-\frac{Ax}{B}$, што значи дека таа нема отсечка на оската y; т. е. правата минува низ координатниот почеток.

b) $B=0$. Равенката го добива обликот

$$Ax+C=0 \text{ и оттука } x=-\frac{C}{A}.$$

Тоа е равенка на правата, што е паралелна со y оска на растојание $-\frac{C}{A}$.

c) $A=0$ Равенката го добива обликот $By+C=0$ и оттука $y=-\frac{C}{B}$, т. е. за секое x; y е константно. Тоа значи дека правата е паралелна на x оската на растојание $-\frac{C}{B}$.

За $A=0$ и $C=0$ имаме $y=0$ (равенката на x оската)
За $B=0$ и $C=0$ имаме $x=0$ (равенката на y оската)

2. Да ги побараме пресечните точки на правата $Ax+By+C=0$ со координатните оски. Пресечната точка со x оската има ордината $y=0$, внесено тоа во равенката ни дава $Ax+C=0$ односно $x=-\frac{C}{A}=m$. Пресечната точка со x оската е $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$. Пресечната точка со y оската има апсциса $x=0$ и по внесување во равенката добиваме $By+C=0$ од каде $y=-\frac{C}{B}=n$. Пресечната точка со y оската е $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

§ 12. СЕГМЕНТЕН ВИД НА РАВЕНКАТА НА ПРАВАТА

Како карактеристични точки на правата по однос на координатниот систем се оние точки, во кои правата ги сече оските на координатниот систем, ако таа не минува низ координатниот почеток. Ги има две, а како што знаеме правата е определена со две точки. Со спомнатите две точки на оските, добиени се отсечки или сегменти, кои како што рековме наполно ја определуваат правата. Од сл. 20 гледаме дека со отсечката m е определена точката A $(m, 0)$ а со отсечката n е определена точката B $(0, n)$. Можеме да кажеме и обратно: со точката A определена е отсечката m, а со точката B отсечката n.

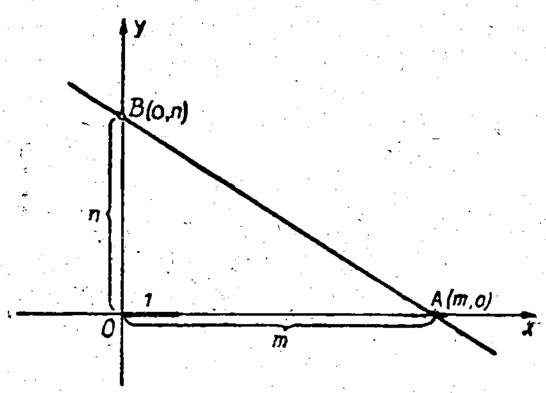
Со помошта на формулата за равенка на прави низ две точки (8) од податоците за A $(m=x_1, 0=y_1$ и B $(0=x_2, n=y_2)$ излегува

$$y-0=\frac{n-0}{0-m}(x-m) \quad \text{или} \quad y=-\frac{n}{m}(x-m).$$

Оттука имаме $nx+my=mn$, којашто равенка по делење со mn го добива сегментниот вид на равенката на правата

$$\boxed{\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1} \tag{10}$$

Во равенката влегоа сегментите што ги образува правата на оските, па затоа овој вид се вика сегментен вид. Карактеристиката на овој облик е x и y да имаат коефициенти $+1$ меѓу членовите во кои што се x и y, а на десната страна е само позитивната единица $(+1)$.



Сл. 20

Ако сретнеме равенка од обликот (10), треба да знаеме дека со неа е претставена права со отсечки m и n на координатните оски.

Од општиот вид на равенката на правата $Ax+By+$ $+C=0$ може исто така да се изведе сегментниот вид (10). За таа цел го пренесуваме C на другата страна и ја делиме целата равенка со $-C$. Имаме

$$\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1 \text{ или } \frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1$$

Знаеме дека е $-\frac{C}{A}=m, -\frac{C}{B}=n$, па добиваме на крајот

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

Вежби 1. Да се напише равенката на правата којашто ги сече на оските отсечките m и n: $a)$ $1, -1$; $b)$ $-2, -3$; $c)$ $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.

Решение. Со замената во формулата (10) на дадените вредности m и n излегува

$$a)\ \frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1 \qquad b)\ \frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

$$\text{или } x-y=1 \qquad \text{или } 3x-2y=6.$$

$$c)\ \frac{x}{\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1 \text{ или } \frac{3x}{2}+\frac{4y}{3}=1 \text{ т.е.}$$

$$9x+8y=6.$$

2. Да се најдат отсечките, кои правата $4x+3y-12=0$ ги отсечува на координатните оски.

Решение. Треба дадената равенка да се сведе на сегментен вид. За таа цел ја пишуваме во обликот $4x+3y=12$ и ја делиме со 12 за да се добие од десната страна 1. Така добиваме:

$$\frac{4x}{12}+\frac{3y}{12}=1 \text{ или } \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

Именителот на првата дропка е отсечката $m=3$, што правата ја сече на x оската а во именителот под y е отсечката $n=4$, што правата ја сече оската y.

Овие отсечки можат да се добијат и по следниот начин. Точката на оската x што ја дава отсечката m има $y=0$ кое внесено во равенката дава $x=m=3$. Исто за $x=0$ имаме $y=n=4$.

3. Да се напише во трите вида (експлицитен, сегментен и општ) равенката на правата низ точките $A(3, 4)$, $B(-2, -3)$.

За да ја добиеме равенката на правата низ $A(3=x_1, 4=y_1)$, $B(-2=x_2, -3=y_2)$, се служиме со формулата (8) и имаме

$$y-4=\frac{-3-4}{-2-3}(x-3)$$

и оттука

$$y-4=\frac{7}{5}x-\frac{21}{5} \text{ или } y=\frac{7}{5}x-\frac{1}{5}$$

Ова е експлицитниот вид во кој се

$$a=\frac{7}{5},\ b=-\frac{1}{5}$$

Ако добиената равенка ја помножиме со 5, излегува

$$5y=7x-1 \text{ односно } 7x-5y-1=0.$$

Ова е општиот вид во кој се

$$A = 7,\ B = -5,\ C = -1.$$

На крајот од $7x - 5y - 1 = 0$ излегува

$$7x - 5y = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{7}} + \frac{y}{-\frac{1}{5}} = 1,$$

што претставува сегментен вид на равенката на правата, каде е

$$m = \frac{1}{7},\ n = -\frac{1}{5}.$$

§ 13. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВА, НА КОЈАШТО РАВЕНКАТА Е ДАДЕНА

Нека ни е дадена равенката на една права

$$Ax + By + C = 0.$$

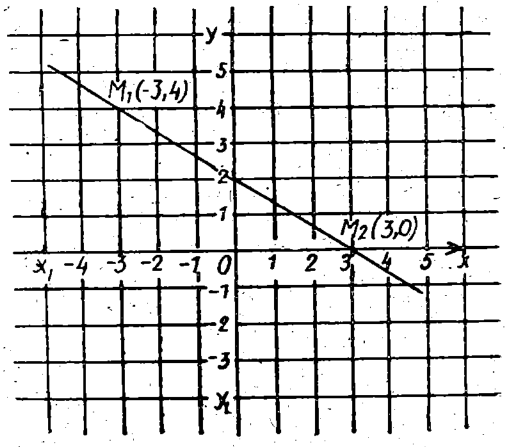
Се прашаме, како ќе ја конструираме? Постојат повеќе начини.

Прв начин. Се определуваат две точки од правата и се сврзуваат. Така на пр. ако треба да се конструира правата $2x + 3y - 6 = 0$ се определуваат две точки. Ако ставиме $x = -3$, излегува $y = 4$; ако ставиме $x = 3$, излегува $y = 0$ Значи вака (сл. 23):

x	y
-3	4
3	0

Ако ги сврземе точките $M_1(-3, 4)$, $M_2(3, 0)$, ја добиваме бараната права.

Вториот начин се состои во тоа, правата $Ax + By + C = 0$ да се напише во експлицитен облик $y = ax + b$. Потоа да се нацрта $y = ax$ сврзувајќи ја точката со апсциса 1 и ордината a, со почетокот (или ако е $a = \frac{p}{q}$, тогај позгодно е да се сврзе точката со апсциса q и ордината p со почетокот). На крајот низ точката на ординатната оска, што е оддалечена од почетокот за b, да се повлече паралела со правата $y = ax$.



Сл. 21

Во претходниот пример прво би ја напишале правата $2x + 3y - 6 = 0$ во видот $y = -\frac{2}{3}x + 2$, па би ја нацртале правата $y = -\frac{2}{3}x$ сврзувајќи го почетокот со $(3, -2)$ и потоа низ точката 2 на ординатната оска би повлекле со оваа права паралела (гледај го § 8).

Трет и најзгоден начин е, правата $Ax+By+C=0$ да се напише во сегментен вид. За таа цел, на десната страна се пренесува C и равенката се дели со $-C$. Како што знаеме, тогај $-\frac{C}{A}$ е отсечката m на оската x, $-\frac{C}{B}$ отсечката n на оската y.

Во нашиот пример $2x + 3y = 6$, равенката ја делиме со 6, па имаме $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$. Отсечката на оската x е 3 а отсечката на оската y е 2. (Сл. 21).

Задачи: 1. Да се најде равенката на правата, ако се знае, дека односите меѓу коефициентите A, B, C се

a) $\frac{A}{C} = \frac{1}{2}$, $\frac{B}{C} = \frac{3}{4}$, b) $\frac{A}{C} = \frac{1}{8}$, $\frac{C}{B} = 2$, c) $\frac{A}{C} = 0{,}2$, $\frac{B}{C} = 0{,}4$, d) $\frac{A}{C} = -\frac{2}{7}$, $\frac{B}{C} = \frac{1}{9}$, e) $A = B$, $B = \frac{C}{2}$.

f) $A = B = C$.

2. Да се докаже дека равенките

a) $2x-3y+6=0$; b) $3x-7y+5=0$; c) $mx+ny+p=0$,

претставуваат прави.

3. Да се испита, дали точката T лежи на правата p:

a) $T(2, 3)$, b) $T(4, -2)$, c) $T(-3, -1)$,

$p\equiv 4x-y=5$, $p\equiv 8x-7y=46$, $p\equiv 5x-3y+12=0$,

d) $T(3, 7)$, e) $T(-1, -1)$, f) $T(-4, 9)$,

$p\equiv 2x+3y-7=0$, $p\equiv x-3y-1=0$, $p\equiv 2x+5y-6=0$,

4. Во овие равенки, A односно B односно C да се определат така што точката P да лежи на правата p:

a) $Ax+3y-7=0$, $P(-2, 9)$; b) $2x+By+6=0$, $P(-6, -5)$; c) $2x+3y+C=0$, $P(-4, 3)$.

5. Да се определи аголот, што го прави со позитивниот смер на x оската правата: a) $2x-y-3=0$; b) $x+3y=12$; c) $11y-2x=44$; d) $13y-24x=13$; e) $4y-3x=8$, f) $7y+22x=28$; g) $6y+23x+18=0$; h) $x\sqrt{3}+y=4$.

6. Во равенката $Ax+By+C=0$, a) ако се A и B постојани, како промената на C влијае на аголот на правата со позитивниот смер на x оската; b) каков треба да биде односот меѓу A и B, ако сакаме правата да ја сече x оската под агол од 45^0. Какви треба да бидат знаците на A и B, за да биде аголот на правата со x — оската помал од 90^0?

7. Какво движење врши правата $Ax+By+C=0$, ако во нејзината равенка се менува само a) коефициентот A, b) коефициентот B, c) коефициентот C?

8. Да се напише равенката на правата, на која отсечките на координатните оски се: a) $m=6$, $n=5$; b) $m=-3$, $n=4$; c) $m=\frac{1}{4}$, $n=-\frac{4}{3}$; d) $m=-1$, $n=-1$.

9. Да се напише во сегментен облик равенката на правата

a) $3x+5y=15$; b) $4x-y=4$; c) $4x+3y+18=0$; d) $y-x=4$; e) $4x+9y=13$; f) $5x-3y+7=0$.

10. Низ точката $M\left(5, \frac{13}{2}\right)$ да се повлече права, на којашто отсечката меѓу координатните оски да биде од точката M преполовена. Да се најде равенката на правата.

11. Правата минува низ точката $M(x_0, y_0)$ и затворува со координатните оски триаголник со површина P. Да се определи равенката на правата. Потоа за a) $x_0=1$, $y_0=3$, $P=8$; b) $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $P=24$; c) $M(-2, 4)$, $P=9$.

12. Во равенката $kx + 3y - 2 = 0$, k да се определи така што отсечката на x оската да биде рамна на 4.

13. Во равенката $5x - ky + 4 = 0$, k да се определи така што отсечката на ординатната оска да биде рамна на 12.

14. Во равенката $4x - 5y + 2k = 0$, k да се определи така што отсечката на правата на ординатната оска да биде 4.

15. Во равенката $2x + 5ky - 3 = 0$, k да се определи така што отсечките на правата на координатните оски да бидат еднакви.

16. Во равенката $3kx + 4y - 5 = 0$, k да се определи така што збирот на отсечките на координатните оски да биде рамен на 5.

17. Во равенката $-3kx + 4y - 15 = 0$, k да се определи така што разликата $m - n$ на отсечките на координатните оски да биде рамна на 10.

18. Во равенката $6x + 5y - 12k = 0$, k да се определи така што производот на отсечките на координатните оски да биде $\frac{5}{6}$.

19. Во равенката $y = ax + b$ колкаво мора да биде a за да бидат еднакви отсечките што ги сече правата на координатните оски?

20. Да се конструираат правите, на коишто им се равенките *a*) $y = 2x + 3$; *b*) $y = 3x - 2$; *c*) $4y = 3x + 4$; *d*) $3y + 2x = 6$.

21. Исто како во предодната задача за правите:

a) $2x - 3y - 6 = 0$, *b*) $3x - 4y + 12 = 0$ *c*) $4x + 5y + 20 = 0$, *d*) $x - y - 2 = 0$, *e*) $2x + 5y - 10 = 0$, *f*) $2x + 3y - 5 = 0$, *g*) $2x + 4y - 9 = 0$, *h*) $x + 2y - 3 = 0$,

i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, *j*) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, *l*) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = -1$.

Резултати: **1.** *b*) $x + 4y + 8 = 0$, *e*) $x + y + 2 = 0$.

2. Да се докаже на пр. дека е $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

3. Да се увериме дали координатите на точката T ја задоволуваат равенката на правата p.

4. *a*) $A = 10$; *b*) $B = -\frac{6}{5}$; *c*) $C = -1$.

5. *a*) $63°26'6''$; *b*) $161°33'54''$; *c*) $10°18'17''$; *d*) $61°33'26''$; *e*) $36°52'11''$; *f*) $107°39'14''$; *g*) $104°37'15''$; h) $120°$.

6. *a*) Правата минува низ различни точки на ординатната оска, останувајќи паралелна сама на себе си.

b) $A+B=0$, *c*) A и B мораат да бидат позитивно означени.

7. *a*) Ако е $B<0$ и ако A расте од 0 до $+\infty$, правата завртувајќи се околу цврстата точка $-\frac{B}{C}$ на ординатната оска, ги затворува со $+x$ — оската подред сите агли од 0° од 90°; ако пак A паѓа од 0 до $-\infty$, правата завртувајќи се околу цврстата точка $-\frac{C}{B}$ на ординатната оска, ги затворува со оската $+x$ сите агли од 180° до 90°. Обратно е, ако е $B>0$.

b) Истото разгледување како во *a*) само што правата минува низ цврстата точка $-\frac{C}{A}$ на апсцисната оска.

c) Се добива множество на прави, меѓусебно сите паралелни, што минуваат низ различни точки од ординатната оска.

9. *a*) $m=5$, $n=3$; *b*) $m=1$, $n=-4$; *c*) $m=-\frac{9}{2}$ $n=-6$; *d*) $m=-4$, $n=4$; *e*) $m=\frac{13}{4}$, $n=\frac{13}{9}$; *f*) $m=-\frac{7}{5}$, $n=\frac{7}{3}$.

10. $y=-\frac{13}{10}x+13$. 11. $\frac{x}{2x_0}(1\pm k)+\frac{y}{2y_0}(1\mp k)=1$, $k=\sqrt{1-\frac{2x_0y_0}{P}}$; *a*) $y=-x+4$, $y=-9x+12$;

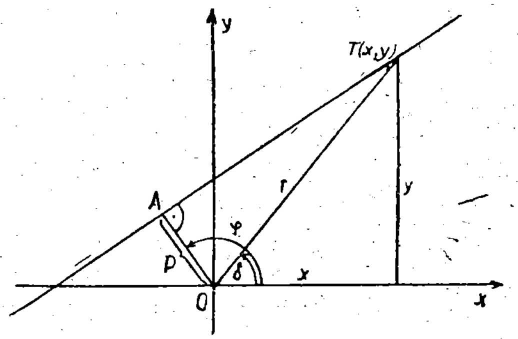
b) $x+3y-12=0$, $49x+3y-84=0$; *c*) $y+2y-6=0$, $8x+y+12=0$.

12. $k=\frac{1}{2}$. 13. $k=\frac{1}{3}$. 14. $k=10$. 15. $k=\frac{2}{5}$.

16. $k=\frac{4}{9}$. 17. $k=-\frac{4}{11}$. 18. $k=\pm\frac{5}{12}$. 19. $a=-1$.

§ 14 ХЕСЕОВ ИЛИ НОРМАЛЕН ВИД НА РАВЕНКАТА НА ПРАВА

Новиот облик на равенката на правата го добиваме, ако ни е познат аголот φ, што го затворува нормалата од почетокот на правата со позитивниот смер на оската x, како и должината p на оваа нормала од почетокот до правата, која секогаш ја сметаме за позитивна (сл. 22). Аголот φ може да се мени од 0^0 до 360^0.



Сл. 22

Нека T е која и да било точка од правата, δ аголот што го $OT_1 = r$ прави со позитивниот смер на оската x; тогај е

$$p = r\cos(\varphi - \delta) = r\cos\varphi\cos\delta + r\sin\varphi\sin\delta$$

Бидејќи е $x = r\cos\delta$, $y = r\sin\delta$, ќе биде

$$p = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

или исто така

$$(11) \qquad \boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$$

Овој облик на равенката на правата се вика *Хесеов* или *нормален* облик.

На пр. ако е $p = 2$, $\varphi = 120^0$, нормалниот облик на равенката на правата е

$$x\cos 120^0 + y\sin 120^0 - 2 = 0 \text{ или}$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2 = 0.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 2, ја добиваме истата равенка, но не напишана повеќе во нормален облик.

§ 15. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ОПШТИОТ ВИД НА РАВЕНКАТА НА ПРАВА ВО НОРМАЛЕН ВИД

Равенката $Ax + By + C = 0$, за да ја доведеме на *нормален облик*, ќе ги пресметаме $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и p со помошта на коефициентите A, B и C и така добиените вредности ќе ги внесеме во нормалниот облик на равенката на правата.

Ако ја помножиме равенката.

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0$$

со некој константен, краен, од нула различен број λ, тогај новата равенка

(2) $$\lambda Ax + \lambda Bx + \lambda C = 0,$$

ќе ја задоволуваат сите вредности на x и y што ѝ припаѓаат, а кои што ја задоволуваат и равенката (1).

Двете равенки претставуваат иста права. Равенката (2) за да го добие нормалниот облик $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$, треба, параметарот λ да се одбере така што да биде

$$\lambda A = \cos \varphi, \ \lambda B \sin \varphi, \ \lambda C = -p$$

Ако ги квадрираме двете први равенки добиваме

$$\lambda^2 A^2 = \cos^2 \varphi, \ \lambda^2 B^2 = \sin^2 \varphi,$$

кои собрани даваат

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Бидејќи е $\lambda C = -p$ т.е. λC со негативен предзнак мора да биде. За да е тоа, λ мора да биде со противен предзнак.

Според тоа, општиот облик на равенката на правата сведен на нормален облик е

(11′) $$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

каде што квадратниот корен и слободниот член мораат да бидат означени спротивно.

Вежби: 1. Да се сведе на нормален облик правата $3x + 4y = 4$.

Решение: Од равенката ($A = 3$, $B = 4$) излегува

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{\pm 5}$$

а заради тоа што C е негативно, треба да се земе $\lambda = \frac{1}{5}$

Нормалниот облик на равенката на правата гласи

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} = 0.$$

2. Да се најде аголот на нормалата повлечена од почетокот на правата $x - y + 1 = 0$ и должината на нормалата.

Решение: Да ја сведеме равенката на нормален облик. Тука е $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $\lambda = -\sqrt{2}$, па излегува

$$\frac{x - y + 1}{-\sqrt{2}} = 0$$

од каде читаме

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 135^\circ, \quad p = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Експлицитниот облик на равенката на правата $y = ax + b$ да се сведе на нормален.

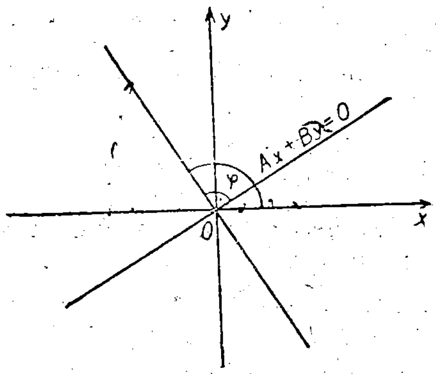
Решение:

$$y = ax + b \text{ и оттука}$$

$$y - ax - b = 0 \text{ односно}$$

$$\frac{y - ax - b}{\pm\sqrt{1 + a^2}} = 0.$$

Ако правата минува низ почетокот, тогај за аголот φ што се јавува во нормален облик, треба да се земе помалиот од двата агла, што го прави нормалата повлечена од почетокот на правата со позитивниот смер на оската x.



Сл. 23

Смерот на оној крак од аголот φ, што паѓа во нормалата го дава смерот од p. Ако треба да се претвори во нормален облик равенката на правата што минува низ координатниот почеток, тогај факторот од $\sin\varphi$, заради тоа што φ секогаш е помало од 180°, мора да биде позитивен.

4. Нека се претвори во нормален облик правата $5x - 12y = 0$.

Бидејќи $\sin\varphi$ треба да биде позитивно, тогај е

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = -\frac{1}{13},$$

и нормалниот облик гласи

$$-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y = 0.$$

§ 16. РАСТОЈАНИЕ НА ТОЧКА ДО ПРАВА

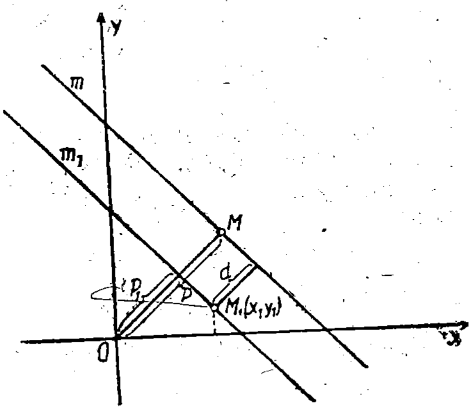
Дадена е правата m и точката $M_1(x_1, y_1)$ од иста страна на правата од која е почетокот. Треба да се најде растојанието на точката M_1 до правата m (сл. 24).

Равенката на правата m е

(1) $$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Растојанието на точката M_1, до правата m е d. Тоа е позитивно бидејќи има ист смер како и растојанието од почетокот до правата m. Од сликата гледаме, дека е

$$d = p - p_1.$$



Сл. 24

Да замислиме дека правата m_1 што минува низ M_1, е паралелна со m. Равенките на правите m и m_1, ќе се разликуваат само во општиот член, а аголот на нормалата со позитивниот смер на x — оската е ист. Равенката на правата m_1 гласи

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p_1 = 0.$$

Точката $M_1(x_1, y_1)$ оваа равенка ја задоволува. Затоа е

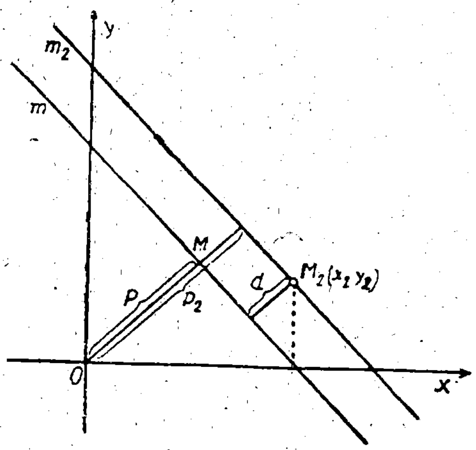
$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p_1 = 0$$

или поради $p_1 = p - d$, имаме

$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (p - d) = 0$$

од каде излегува

(12) $$\boxed{d = -(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p)}$$



Сл. 25

За точката M_2, која што е на спротивната страна од почетокот спрема правата m (сл. 25), d е негативно, заради тоа што $-d$ е позитивно, па е $p_2 = p - d$. Равенката на правата m_2 гласи

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p_2 = 0$$

или, затоа што е $M(x, y)$ на таа права,

$$x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi - (p - d) = 0.$$

Значи дека пак е

$$d = -(x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi - p).$$

Од двата случаја заклучуваме дека за да се добие растојанието на точка до права треба во негативниот Хесеов облик на равенката на правата да се внесат координатите на дадената точка. Затоа се Хесеовиот облик на равенката на правата вика и нормален облик. Ако излезе ова растојание позитивно, тоа значи дека точката е на истата страна со почетокот по однос на правата, ако пак таа е негативна, тие се од различни страни.

За равенка на правата дадена во општ облик горната формула гласи

$$d = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

За експлицитниот облик на равенката на правата таа гласи

$$d = -\frac{y_1 - ax_1 - b}{\pm\sqrt{1 + a^2}}$$

Вежби: 1. Да се најде растојанието на точката $T(-1,5)$ од правата $6x+8y-11=0$.

Решение: Работиме по формулата заменувајќи за $T(-1=x_1,\ 5=y_1)$ и добиваме

$$d=-\frac{6x_1+8y_1-11}{10}=-\frac{23}{10}.$$

Точката и почетокот се од различни страни на правата.

2. Да се најде растојанието на координатниот почеток од правата $3x-4y+6=0$.

Решение: Во формулата (12') кога се внесат за почетокот $x_1=0,\ y_1=0$ добиваме

$$d=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{6}{-5}=1{,}2.$$

3. Во триаголникот $A(1,\ 4)$, $B(11,\ 2)$, $C(7,\ 8)$ да се определи висината од темето A на страната BC.

Прво треба да се најде равенката на правата BC. Тоа е права низ две точки

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Од податоците $B(11=x_1,\ 2=y_1)$ и $C(7=x_2,\ 8=y_2)$ со замена излегува

$$y-2=\frac{8-2}{7-11}(x-11) \text{ или } y-2=-\frac{3}{2}(x-11),$$

а оттука

$$3x+2y-37=0.$$

Нормалниот облик на равенката на страната BC ќе биде

$$\frac{3x+2y-37}{\sqrt{13}}=0, \text{ а висината } h_a=-\frac{3\cdot1+2\cdot4-37}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}.$$

4. Да се најде меѓусебното растојание на правите

$$p\equiv x+y+1=0 \text{ и } q\equiv 2x+2y-7=0.$$

Оваа задача можеме да ја решиме по два начина.

Прв начин: На едната од правите земаме произволна точка и го бараме нејзиното растојание од другата права.

На пр., на p ја земаме точката T со $x=5$ и добиваме од равенката ѝ $y=-6$. Значи точката е $T(5,\ -6)$; нејзиното растојание од q е

$$d=-\frac{2x_1+2y_1-7}{\sqrt{8}}=-\frac{2\cdot5+2(-6)-7}{2\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Втор начин: Го најдуваме растојанието на почетокот од едната и другата права, па ги собираме ако почетокот е меѓу правите, а одземаме, ако почетокот е од иста страна на двете прави.

За $p \equiv x + y + 1 = 0$ и $T(0, 0)$ $d_1 = -\frac{1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

За $q \equiv 2x + 2y - 7 = 0$ и $T(0, 0)$, $d_2 = -\frac{-7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

Бараното растојание, заради тоа што почетокот е меѓу правите, е

$$d = d_1 + d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Задачи: 1. Да се напише нормален облик на равенката на правата, ако е *a*) $\varphi = 30°$, $p = 2$; *b*) $\varphi = 150°$, $p = -2$; *c*) $\varphi = 45°$, $p = 1$; *d*) $\varphi = 135°$, $p = -1$.

2. Претвори ги следните равенки на прави во нормален облик:

a) $12x + 5y - 10 = 0$; *b*) $4x + 3y + 30 = 0$; *c*) $7x - 24y - 100 = 0$ *d*) $x - y + 2 = 0$; *e*) $2x + y - 4 = 0$, *f*) $x - y = 0$; *g*) $3x + 4y = 0$; *h*) $y = ax + 2$; *i*) $4y + 3 = 0$; *k*) $4x + 3 = 0$; *l*) $x\sqrt{3} - y\sqrt{6} + 7 = 0$; *m*) $2x - y\sqrt{6} - 1 = 0$.

3. Дадени се координатите на точката M и равенката на правата p. Да се пресмета растојанието на M до p, ако е: *a*) $M(0, 0)$, $p \equiv 5x - 12y + 36 = 0$; *b*) $M(-1, -1)$, $p \equiv x + y - 1 = 0$; *c*) $M(-5, -10)$, $p \equiv 4x + 3y + 30 = 0$; *d*) $M(2, 9)$, $p \equiv 7x + 24y - 100 = 0$; *e*) $M(-7, -4)$, $p \equiv 15y + 8x + 30 = 0$.

4. Колкаво е растојанието меѓу паралелните прави: *a*) $x + y\sqrt{3} - 8 = 0$, $x + y\sqrt{3} - 12 = 0$, *b*) $3x - 5y + 1 = 0$, $3x - 5y - 7 = 0$, *c*) $7x + 24y - 10 = 0$, $7x + 24y + 14 = 0$, *d*) $3x - 4y - 6 = 0$, $2y - 1{,}5x + 9 = 0$.

5. Да се сведат на нормален облик равенките на следните прави: *a*) $y = 4x - 3$, *b*) $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

6. Дали точките $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(-1, -4)$ лежат од истата страна на правата $2x - 3y = 3$ од која лежи почетокот?

7. Координатите на темињата на триаголникот се: *a*) $A(3, 5)$, $B(7, -4)$, $C(11, -13)$, *b*) $A(-1, 4)$, $B(3, 1)$, $C(7, 5)$. Колкави се висините на триаголниците?

8. Координатите на темињата на триаголникот се: $A(3, 4)$, $B(7, 8)$, $C(9, 5)$; да се определи површината на триаголникот од должините на страните и висините.

9. Да се напише равенката на правата што е паралелна со правата *a)* $3x+4y-8=0$, а нејзиното растојание до таа права да биде ± 4; *b)* $7x+24y-10=0$ а нејзиното растојание до таа права да биде ± 3.

10. Дали точките $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(-1, -4)$ лежат од иста страна на правата $2y+3x=6$ од која е и почетокот? Да се наведат две точки што лежат од различни страни на таа права.

11. Дали точките $M_1(2, -3)$, $M_2(3, 4)$ лежат од иста страна на правата $5x-12y+8=0$.

12. Низ точката $A\left(-1, \frac{8}{3}\right)$ да се повлече права, на којашто растојанието од точката $B\left(-\frac{1}{3}, -2\right)$ е равно на $\frac{10}{3}$. Која е равенката на таа права?

13. Истата задача за $A(3, 12)$, $B(7, 2)$, $d=\sqrt{58}$; $A(-4, 12)$, $B(-10, 5)$, $d=2$.

14. Да се определи права, на којашто растојанието до координатниот почеток е равно на 4 и на која отсечките на позитивната оска x и на позитивната оска y се однесуваат како $7:24$.

Резултати. 1. *a)* $\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-2=0$, *b)* $-\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}+2=0$; *c)* $\frac{x\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$; *d)* $-\frac{x}{2}\sqrt{2}+\frac{y}{2}\sqrt{2}+1=0$.

2. *a)* $\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{10}{13}=0$; *b)* $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-6=0$;

c) $\frac{7}{25}x-\frac{24}{25}y-4=0$; *d)* $-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=0$;

e) $\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{y}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$; *f)* $-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=0$;

g) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0$, *h)* $\frac{y-ax-2}{\pm\sqrt{1+a^2}}$; *i)* $-\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}=0$; *k)* $-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=0$; *l)* $-\frac{x}{3}\sqrt{3}+\frac{y}{3}\sqrt{6}-\frac{7}{3}=0$; *m)* $\frac{2}{\sqrt{10}}x-y\sqrt{\frac{3}{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}=0$.

3. *a*) $\frac{36}{13}$; *b*) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; *c*) -4; *d*) $-\frac{26}{5}$; *e*) $-\frac{86}{17}$.

4. *a*) 2, *b*) $\frac{4}{17}\sqrt{34}$; *c*) $\frac{24}{25}$; *d*) $\frac{12}{5}$.

5. *a*) $\frac{4}{\sqrt{17}}x - \frac{y}{\sqrt{17}} - \frac{3}{\sqrt{17}} = 0$; *b*) $\frac{4}{5}y + \frac{3}{5}x - 1 = 0$.

6. Точките A и B да, C не.

7. *a*) $\frac{198}{\sqrt{97}}, \frac{99}{\sqrt{130}}, -\frac{22}{\sqrt{5}}$; *b*) $-\frac{28}{5}, \frac{28\sqrt{65}}{65}, \frac{7}{\sqrt{2}}$.

8. *a*) $AB = 4\sqrt{2}$, $v_a = \frac{-5}{\sqrt{2}}$, $P = 10$; *b*) $AC = \sqrt{37}, v_b = = \frac{20}{\sqrt{37}}$, $P = 10$; *c*) $BC = \sqrt{13}$, $v_a = \frac{-20}{\sqrt{13}}$, $P = 10$.

9. *a*) $3x + 4y + 12 = 0$, $3x + 4y - 28 = 0$.

   b) $7x + 24y - 85 = 0$, $7x + 24y + 65 = 0$.

10. Точките A и B да, C не итн.

11. На различни страни.

12. $4x - 3y + 12 = 0$, $9x + 12y - 23 = 0$.

13. *a*) $7x - 3y + 15 = 0$, $3x + 7y - 93 = 0$;

    b) $8y - 15x - 156 = 0$, $4y - 3x - 60 = 0$.

14. Определи го аголот φ; излегува $\operatorname{tg}\varphi = \frac{7}{24}$, $24x + + 7y - 100 = 0$.

§ 17. ПРЕСЕК НА ДВЕ ПРАВИ

Нека $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ се равенките на две прави p_1 и p_2. Бидејќи пресекот на двете прави лежи и на првата и на втората права, координатите мораат да ги задоволуваат равенките и на двете прави. Пресекот значи се добива со решавање на дадените равенки по x и y.

За таа цел првата равенка ја множиме со B_2 а втората со B_1, потоа првата со $-A_2$ а втората со A_1. Добиваме

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{13}$$

Од тука гледаме дека за пресекот, x и y ќе бидат определени само кога $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Ако е $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ или $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ а $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ или $-\frac{C_1}{B_1} \neq -\frac{C_2}{B_2}$, двете прави се паралелни заради тоа што имаат еднакви коефициенти на правецот а различни отсечки на ординатната оска.

Можеме да кажеме дека пресекот им се наоѓа на бескрајна оддалеченост.

Ако пак покрај $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ е и $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$, т.е.

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}, \quad -\frac{C_1}{B_1} = -\frac{C_2}{B_2},$$

тогај излегува, дека и коефициентите на правците на двете прави и отсечките на ординатната оска се еднакви. Спрема тоа, двете прави се поклопуваат и координатите на пресекот добиваат неопределен облик $\frac{0}{0}$. Тие се сечат во секоја своја точка.

Горните равенки можат да бидат напишани и во обликот

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Означиме ли ја вредноста на овие односи со k, излегува

$$A_1 = k\,A_2, \quad B_1 = k\,B_2, \quad C_1 = k\,C_2.$$

Внесеме ли ги овие вредности во првата равенка, добиваме

$$k\,A_2x + k\,B_2y + k\,C_2 = 0$$

што ни покажува дека првата равенка е друг облик на втората равенка, т.е. втората е помножена со бројот k.

Вежби: 1. Да се определи пресекот на правите:

a)	b)	c)
$3x + 2y = 8$	$2x - 5y = 1$	$3x - 2y = 7$
$2x - y = 3$	$4x - 10y = 2$	$6x - 4y = 10$
$x = 2, y = 1.$	правите се поклопуваат.	правите се паралелни.

Пресекот е $S\ (2,\ 1)$.

Задачи: 1. Да се определи пресекот на правите

a) $4x + 3y = 6$, $6x - 5y = 28$;

b) $7x - 8y = 4$, $6x + 5y = 39$;

c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$;

d) $5x - 3y = 3$, $7x + y = 25$

2. Равенките на страните на триаголникот се

$$y - 7x - 19 = 0,\ 9y - 4x + 6 = 0,\ 8y + 3x - 34 = 0.$$

Да се најдат координатите на темињата.

3. Да се најдат страните на триаголникот на којшто равенките на страните се

$$3x + y + 4 = 0,\ 3x - 5y + 34 = 0,\ 3x - 2y + 1 = 0.$$

4. Да се најдат тежишните линии на триаголникот, на којшто равенките на страните се

$$x - 7y - 39 = 0,\ 9x - 5y - 3 = 0,\ 4x + y - 11 = 0$$

5. Равенките на страните на триаголникот се

$$y + x + 3 = 0,\quad 7y + 2x + 6 = 0,\quad 3y - 2x + 14 = 0.$$

Да му се определи површината.

6. Равенките на страните на триаголникот се

$$3x + 5y - 16 = 0,\quad x - y = 0,\quad 3x + y + 4 = 0.$$

Да му се најдат висините.

7. Страните на паралелограмот се дадени со равенките

$$y - 3x + 9 = 0,\quad 3y + 5x - 18 = 0$$
$$y - 3x - 1 = 0,\quad 3y + 5x - 2 = 0.$$

Да се најдат равенките на дијагоналите и координатите на пресекот на овие дијагонали.

8. Може ли m да се определи така, двете прави

$$(m - 2)\,x + my - 2 = 0,\quad 6x + (m + 8)\,y - m - 2 = 0,$$

да се поклопуваат?

9. Да се определи m така, двете драви

$$mx - 3y - 2 = 0,\quad 3x - my - m + 1 = 0$$

да бидат паралелни.

Да ли постои вредност за m за којшто тие се поклопуваат?

10. Да се определи m така, двете прави

$$(m - 1)\,x + 2y - m + 1 = 0 \text{ и } (m - 1)\,x + (m + 3)\,y - 5 = 0$$

да бидат паралелни.

11. Да се определи m така, пресекот на правите

$$(m + 2)\,x + (1 + 5m)\,y = 15,\quad (5 - 2m)\,x + (1 - 10m)\,y = 9,$$

да биде на правата $x + y + 6 = 0$.

12. Да се определи m така, што пресекот на правите $(5m + 1)\,x + (3m + 2)\,y = 15$, $(13m - 14)\,x - (2m - 5)\,y = 9$ да биде на правата $x + y - 3 = 0$.

13. Страните на еден триаголник ги имаат равенките

$y - x + 3 = 0,\ 7y - 2x + 6 = 0,\ 3y + 2x + 14 = 0.$

Да му се определи *a*) обемот *b*) површината *c*) висината и тежишните линии:

Резултати: 1. *a*) $3, -2$; *b*) $4, 3$; *c*) $\frac{6}{5}, \frac{6}{5}$; *d*) $3, 4$.

2. $-3, -2; -2, 5; 6, 2$. **3.** $2\sqrt{10},\ 2\sqrt{34},\ 4\sqrt{13}$.

4. $17x - 3y - 25 = 0,\ 7x + 9y + 17 = 0,\ 5x - 6y - 21 = 0$.

5. 10. **6.** $\frac{6}{5}\sqrt{10},\ -4\sqrt{2},\ \frac{12}{17}\sqrt{34}$.

7. $x + 23y - 18 = 0,\ 49x + 7y - 82 = 0,\ \frac{11}{7}, \frac{5}{7}$.

8. $m_1 = -4,\ m_2 = 4$. **9.** $m = -3$; има $m = 3$.

10. $m_1 = -1,\ m_2 = 1$. **11.** $m = -\frac{23}{136}$.

12. $m_1 = 1,\ m_2 = \frac{59}{49}$. **13.** $0 = \sqrt{13} + \sqrt{53} + 4\sqrt{2}$, $P = 10$, висините $\frac{20}{\sqrt{13}}, -20\sqrt{53}, \frac{5}{\sqrt{2}}$, тежишните линии се $5, \frac{1}{2}\sqrt{157}, \frac{1}{2}\sqrt{37}$.

§ 18. АГОЛ МЕЃУ ДВЕ ПРАВИ

Нека ни се дадени две прави и тоа p_1 на којашто равенката е $y = a_1x + b_1$ и p_2 чија што равенка е $y = a_2x + b_2$. Ако p_1 е правата што со оската x зафаќа помал агол, тогај под агол меѓу двете прави p_1 и p_2 го подразбираме аголот φ за којшто треба да се заврти во позитивен смер правата p_1 за да се совпадне со p_2.

Од триаголникот SA_1A_2 (сл. 26) излегува $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. За да го определиме φ, треба од $\operatorname{tg}\alpha_2 = a_2$ прво да пресметаме α_2, потоа од $\operatorname{tg}\alpha_1 = a_1$, да пресметаме α_1 и на крајот $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Меѓутоа позгодно е да се постапи по следниот начин:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1},$$

а поради $\operatorname{tg}\alpha_2 = a_2 = \text{коеф } p_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = a_1 = \text{коеф } p_1$, имаме

Истото излегува. ако во формулата

$\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\text{коеф } p_2 - \text{коеф } p_1}{1 + \text{коеф } p_2 \text{ коеф } p_1}$ се стави $\varphi = 90^0$. Како е $\operatorname{tg} \varphi = \pm \infty$, додека *коеф* p_1 и *коеф* p_2 се конечни вредности, именителот на десната страна мора да биде рамен на нула.

Од $1 + \text{коеф } p_1 \text{ коеф } p_2 = 0$ излегува пак *коеф* $p_2 = -$ $- \dfrac{1}{\text{коеф } p_1}$. Обратното се лесно докажува, ако коефициентот на правецот на едната права е рамен на негативната и реципрочна вредност од коефициентот на правецот на другата права, двете прави меѓусебно се нормални.

Така на пр. двеќе прави $y = 4x - 5$ и $4y + x = 6$ меѓусебно се нормални.

Ако равенките на правите се дадени во облик $A_1x +$ $+ B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, условот тие две прави меѓусебно да бидат нормални е

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \tag{16'}$$

Вежби. 1. Да се определи аголот меѓу правите

$$p \ldots\ldots 4x + 3y - 6 = 0, \quad q \ldots\ 6x - 5y - 28 = 0.$$

Ќе работиме по формулата (13). Потребни ни се значи коефициентите на правците на дадените прави. За таа цел ги решаваме по y. Имаме

$$y = -\frac{4}{3}x + 2, \quad y = \frac{6}{5}x - \frac{28}{5}.$$

Оттука е $\text{коеф } p = -\dfrac{4}{3}$, $\text{коеф } q = \dfrac{6}{5}$. Со замена на формулата (14) за бараниот агол $\sphericalangle(p, q)$ излегува

$$\operatorname{tg} \sphericalangle(p, q) = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{6}{5}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}} = \frac{38}{9}$$

од каде е

$$\operatorname{tg} \sphericalangle(p, q) = \frac{38}{9} \text{ или понатаму}$$

$$\begin{aligned} \log 38 &= 1{,}57978 \\ \log\ 9 &= 0{,}95424 \\ \hline \log \operatorname{tg} \sphericalangle(p, q) &= 10{,}62554 - 10 \\ \sphericalangle(p, q) &= 76^0 40' 32''. \end{aligned}$$

Значи бараниот агол $\sphericalangle(p, q) = 76^0 40' 32''$.

2. Дали следните две прави се паралелни или нормални

a) $y = 3x + 2, \quad y = 3x - 7$;

b) $4y = -3x, \quad 3y = 4x - 15$;

c) $p_1[A(3,5),\ B(4,6)]$; $p_2[C(1,2),\ D(2,3)]$?

Решение: *a*) Тие се паралелни, затоа што имаат еднакви коефициенти на правците;

b) Тие се меѓусебно нормални, затоа што имаат коефициенти на правците реципрочни и со спротивни знаци;

c) *коеф* $p_1 = \frac{6-5}{4-3} = 1$; *коеф* $p_2 = \frac{3-2}{2-1} = 1$, правите се паралелни.

3. Дадени се правите $p \ldots 3x - 4y = -8$; $q \ldots 5y - 4m \cdot x - 7 = 0$; m така да се определи, правите p и q меѓусебно да бидат *a*) нормални *b*) паралелни.

Решение: Експлицитните облици на дадените равенки се

$$y = \frac{3}{4}x + 2 \text{ и } y = \frac{4m}{5}x + \frac{7}{5}$$

од каде гледаме, дека е *коеф* $p = \frac{3}{4}$, *коеф* $q = \frac{4m}{5}$. За да бидат правите p и q нормални, мора условот *коеф* $p \cdot$ *коеф* $q = -1$ да биде исполнет. Со замена добиваме

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4m}{5} = -1 \text{ од каде } m = -\frac{5}{3}.$$

b) За да бидат правите p и q паралелни, мора да е *коеф* $p =$ *коеф* q. Во нашиот случај $\frac{3}{4} = \frac{4m}{5}$ а оттука $m = \frac{15}{16}$.

Одговор: За да бидат двете дадени прави паралелни мора да е $m = \frac{15}{16}$, а за да бидат нормални, мора да е $m = -\frac{5}{3}$.

4. Дадени се правите $2x - my + 5 = 0$ и $4x - 3y + 1 = 0$. Да се најде такво m, правите да се сечат под агол од 45°.

Решение: Од формулата (14), зимајќи во предвид *коеф* $p_2 = \frac{2}{m}$, *коеф* $p_1 = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

имаме

$$\frac{\frac{2}{m}-\frac{4}{3}}{1+\frac{2}{m}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{6-4m}{3m+8}=1,$$

а оттука $m=-\frac{2}{7}$.

За $m=-\frac{2}{7}$ ќе биде $\operatorname{tg}\varphi=1$, а тоа значи дека правите затвораат агол од 45^0.

5. Низ точката $A(-3,\ 2)$ да се повлече на правата $3y=2x-3$ нормала и паралела. Равенката на која да е права низ A е

$$y-2=a\ (x+3).$$

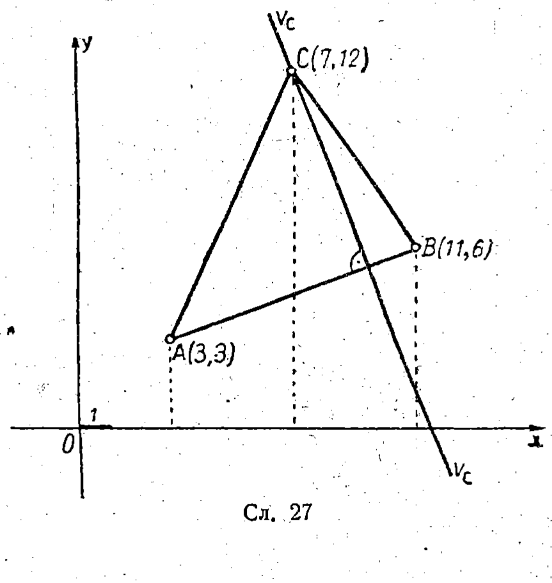
Паралелата има еднакви коефициенти на правецот, т.е. $a=\frac{2}{3}$ и ја добиваме како равенка на паралела

$$y-2=\frac{2}{3}(x+3)\ \text{или}\ y=\frac{2}{3}x+4.$$

Нормалните прави имаат коефициенти на правците реципрочни и спротивно означени, т.е. $a=-\frac{2}{3}$, па равенката на нормалата е

$$y-2=\frac{3}{2}(x+3)\ \text{или}\ y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}.$$

6. Во триаголникот $A(3,\ 3)$, $B(11,\ 6)$ $C(7,\ 12)$ да се определи равенката на висината низ темето C (сл. 27).



Сл. 27

Се работи за правата низ точката C, што е нормална на правата AB. Равенката на која да е права низ C е $y - 12 = a(x - 7)$. Коефициентот на правецот a е негативен и реципрочен од коефициентот на правецот на AB, кој е

$$\text{коеф } AB = \frac{6-3}{11-3} = \frac{3}{8}$$

Заради тоа равенката на висината низ C е

$$y - 12 = -\frac{8}{3}(x - 7) \text{ или } 8x + 3y = 92.$$

Задачи. 1. Да се определи аголот што го образуваат двете прави:

$a)$ $4x + 3y - 6 = 0, \ 6x - 5y - 28 = 9$

$b)$ $y = x, \ y = 3x + 5$

$c)$ $2x - 3y - 6 = 0, \ 5x + 4y = 20$

$d)$ $4x + 3y - 12 = 0, \ 5x + 7y - 35 = 0$

$e)$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

2. Координатите на темињата на триаголникот се: $A(-1, -1)$, $B(-3{,}5)$, $C(7, 11)$; колкави се аглите на триаголникот?

3. Равенките на страните на триаголникот се:

$a)$ $7y - 16x + 118 = 0, \quad 7y - 2x - 22 = 0, \quad 7y + 12x + 34 = 0;$

$b)$ $2y + 5x - 29 = 0, \quad y - 9x - 43 = 0, \quad y + 14x - 49 = 0.$

Да му се најдат аглите.

4. Колкави се аглите на триаголникот, што настанува со сврзување на средните точки на триаголникот $A(1\ 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, 7)$?

5. Да се напише равенката на правата, која минува низ точката $A(5, 7)$ и е $a)$ паралелна $b)$ нормална на правата $4x - 5y + 20 = 0$.

6. Да се напише равенката на правата, која минува низ пресечната точка на правите $9x - 4y - 19 = 0$, $9x + 16y + 1 = 0$ и е паралелна со правата $4x - 5y + 20 = 0$.

7. Низ точката $A(-14, 22)$ да се повлече паралелна права со правата на којашто сегментите се 18 и -16. Да се определи нејзината равенка.

8. Низ точката $A(-1, -1)$ да се повлече паралелна права со правата, која е определена со точките $B(-2, 6)$ $C(2, 1)$. Да се определи нејзината равенка.

9. Да се определи равенката на нормалата повлечена од точката $A(3, 4)$ на правата $3x - 2y + 6 = 0$.

10. Да се одреди подножната точка на нормалата повлечена од точката $A(5, 9)$ на правата $7y = 4x + 21$.

11. Да се определи равенката на нормалата во средната точка на отсечката на таа права, меѓу координатните оски.

12. На кое растојание од точката $M(6, 8)$ минува нормалата од $P(2, -3)$ на правата $3x - 4y + 6 = 0$.

13. Да се определи остриот агол, што го образуваат правите повлечени од почетокот до точките A и B, кои ја делат отсечката на правата $2x - 3y - 12 = 0$ меѓу координатните оски на три еднакви дела.

14. m да се определи така што двете прави

a) $4x - 5my + 3 = 0, \quad 3x - 2y + 6 = 0$
b) $-2mx - 5y + 4 = 0, \quad 5x - 6y + 8 = 0$
c) $8mx + 3y - 4 = 0, \quad 12x + 4my + 6 = 0$

да бидат меѓусебно нормални.

15. За која вредност на m, едниот од аглите, што го образуваат двете прави $2x - 3y + 4 = 0$, $5x - 4my + 6 = 0$ е равен на 45^0?

16. За кои вредности од m, едниот од аглите што го образуваат двете прави $y = 2x + 12$, $mx + 3y + 4 = 0$ е равен на 30^0?

17. Координатите на темињата на триаголникот се $A(0, 0)$ $B\left(2, \frac{9}{2}\right)$, $C(5, 2)$. Да му се определат висините?

18. Кои се равенките на страните на равностранен триаголник со страна a, ако едното теме му е во почетокот а една страна паѓа на апсцисната оска?

19. Равенките на страните на триаголникот се $8x - 3y + 13 = 0$, $3x - 8y - 2 = 0$, $x + y - 8 = 0$. Да му се определат равенките на висините и нивниот пресек (ортоцентар)?

20. Координатите на темињата на триаголникот се $A(-2, 2)$, $B(4, 2)$ $C(1, 6)$. Да се определи a) равенката b) пресечната точка на висините (ортоцентар).

21. Да се определат внатрешните и надворешните агли на триаголникот $A(0, 3)$, $B(6, 5)$, $C(4, 0)$ како и на триаголникот на којшто темињата се подножните точки на висините на триаголникот.

22. Координатите на темињата на триаголникот се $A(5, 3)$, $B(-2, -2)$ $C(7, -4)$. Да се определат равенките на симетралите на страните и центарот на опишаниот круг?

23. Истата задача со $A(-5, 8)$, $B(-5, 2)$, $C(3, 0)$.

24. Низ точката за $M(5, 3)$ да се повлече права така што да затвора со правите $9x + 40y - 123 = 0$, $21x - 20y - 29 = 0$ рамнокрак триаголник.

25. Да се определи точката T, која е симетрична спрема точката $S(3, 9)$ по однос на правата $y = 2x - 2$.

26. Да се определи точката T, која е симетрична спрема точката $S(x, y)$ по однос на правата $p \equiv Ax + By + C = 0$.

Резултати: **1.** *a*) $\varphi = 76^\circ 40'32''$; *b*) $\varphi = 26^\circ 33'55''$; *c*) $\varphi = 94^\circ 58'11''$; *d*) $\varphi = 22^\circ 37'12''$; *e*) $\varphi = 17^\circ 35'33''$. **2.** $\alpha = 52^\circ 7'30''$, $\beta = 102^\circ 31'44''$, $\gamma = 25^\circ 20'46''$. **3.** *a*) $\alpha = 75^\circ 41'20''$, $\beta = 53^\circ 53'9''$, $\gamma = 50^\circ 25'30''$; *b*) $\alpha = 10^\circ 25'33''$; $\beta = 17^\circ 42'57''$, $\gamma = 151^\circ 51'31''$. **4.** 90°, 45°, 45°. **5.** *a*) $5y - 4x - 15 = 0$, *b*) $4y + 5x - 53 = 0$. **6.** $12x - 15y - 35 = 0$. **7.** $8x - 9y + 310 = 0$. **8.** $5x + 4y + 9 = 0$. **9.** $3y - 2x - 18 = 0$. **10.** $6\frac{23}{65}$, $6\frac{41}{65}$. **11.** $36x + 24y + 35 = 0$. **12.** $\frac{49}{5}$. **13.** $\varphi = 34^\circ 41'42''$. **14.** *a*) $m_2 = -\frac{6}{5}$, *b*) $m = 3$; *c*) $m = 0$. **15.** $m_1 = \frac{1}{4}$, $m_2 = -\frac{25}{4}$. **16.** $m = 3(8 \pm 5\sqrt{3})$. **17.** $y = \frac{6}{5}x$, $y = -\frac{4}{9}x + \frac{38}{9}$, $y = -\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}$ **18.** $x = \frac{a}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - a)$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. **19.** $3x + 8y - 34 = 0$, $8x + 3y - 29 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $2\frac{4}{11}$, $3\frac{4}{11}$. **20.** $x = 1$. $y = -\frac{3}{4}x + 5$, $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$, $4, 8; 4, 8; -4$, $S\left(1, \frac{17}{4}\right)$. **21.** Ако α, β, γ се аглите на триаголникот, аглите на орттриаголникот ќе бидат $\alpha' = 180^\circ - 2\alpha$, $\beta' = 180 - 2\beta$, $\gamma' = 180^\circ - 2\gamma$, а можат и директно аналитички да се пресметаат, $\alpha = 55^\circ 18'18''$, $\beta = 49^\circ 45'49''$, $\gamma = 74^\circ 55'52''$. **22.** $18x - 4y - 57 = 0$, $4x - 14y - 31 = 0$, $7x + 5y - 13 = 0$, $S\left(2\frac{101}{118}, -1\frac{47}{118}\right)$.

23. $4x - y + 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$, $y + 3 = 0$, $S(-2, -3)$ **24.** $33x + 10y - 195 = 0$, $33y - 10x - 49 = 0$. **25.** $x = 7$, $y = 7$. **26.** $x = x_0 - \frac{2Ap_0}{A^2 + B^2}$, $y_1 = y_0 - \frac{2Bp_0}{A^2 + B^2}$.

Симетрали на агли меѓу 2 прави

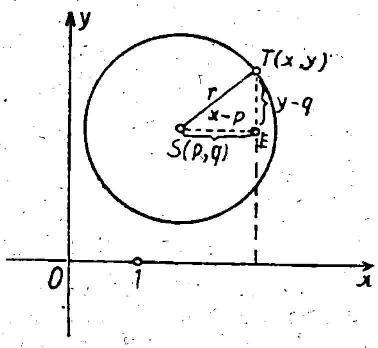
$$\frac{A_1x + B_1y + C}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

ГЛАВА IV

КРУГ

§ 19. ОПШТА РАВЕНКА НА КРУГОТ

Од она што го знаеме од порано за кругот го спомнуваме следното: кругот е множество од сите точки еднакво оддалечени од една постојана точка. Да ја претвориме оваа дефиниција во равенка.



Сл. 28

Нека е постојаната точка $S(p, q)$, S е центар на кругот а пастојаното растојание r — полупречник на кругот: тогаш значи,

$$ST = r \text{ или } ST^2 - r^2 = 0, \tag{1}$$

каде што T (x, y) е променлива точка, е геометриска равенка на кругот, којашто со помошта на основната формула за растојание меѓу две точки добива аналитички облик

$$\boxed{(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0.} \tag{2}$$

Оваа равенка ја задоволуваат координатите на секоја точка од тој круг и само тие точки.

Пример 1. Равенката на кругот со центар во точката (2, — 6) и полупречник 5 е

$$(x-2)^2+(y+6)^2-5^2=0.$$

Пример 2. Знаејќи дека симетралите на страните на триаголникот $A(-4, 3)$, $B(4, 2)$, $C(1, -1)$ се сечат во точката $S\left(\frac{1}{18}, \frac{53}{18}\right)$, равенката на опишаниот круг околу триаголникот е

$$\left(x-\frac{1}{18}\right)^2+\left(y-\frac{53}{18}\right)^2-r^2=0, \text{ каде е}$$

$$r^2=SA^2=\left(-4-\frac{1}{18}\right)^2+\left(3-\frac{53}{18}\right)^2=\frac{2665}{162}.$$

Да се определат центрите и полупречниците на круговите, дадени со равенките

a) $x^2+(y-q)^2=r^2$,

b) $x^2+(y-r)^2=r^2$, или $x^2=2ry-y^2$,

c) $x^2+(y+r)^2=r^2$, или $x^2=-2ry-y^2$,

d) $(x-p)^2+y^2=r^2$,

e) $(x-r)^2+y^2=r^2$, или $y^2=2rx-x^2$,

f) $(x+r)^2+y^2=r^2$, или $y^2=-2rx-x^2$,

g) $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, ако е $p^2+q^2=r^2$.

Ако равенката (2) ја квадрираме и средиме по степените од x и y, добиваме

$$(3) \qquad x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

$$a=-2p, \quad b=-2q, \quad c=p^2+q^2-r^2,$$

равенка од втора степен по однос на x и y, која претставува нов облик на равенката на кругот.

Секако обликот (2), што го викаме нормален облик на равенката на кругот, има поголема предност од обликот (3), бидејќи *од нормалниот облик направо ги уочуваме центарот и полупречникот на кругот.* Ова пак е важно кога сакаме да го нацртаме кругот.

Пример 3. Да се определат центарот и полупречникот на кругот $x^2+y^2-6x+7y+18=0$.

Ја сведуваме равенката на нормален облик. За таа цел ги групираме степените на апсцисата x и степените на ординатата y.

$$(x^2-6x)+(y^2+7y)+18=0;$$

секој од овие биноми го дополнуваме до квадрат: на пр.

$$x^2-6x=(x-3)^2-9, \quad y^2+7y=\left(y+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$$

5. Да се најде равенката на симетричната слика на кругот со $p = -4$, $q = -6$, $r = -1$ спрема *a*) оската x, *b*) оската y; *c*) симетралата s_1; *d*) почетокот.

6. Помести го кругот од задачата 5 така што центарот да му падне во почетокот. Колкаво е ова поместување? Помести го во спротивен правец за исто толку.

7. Да се определи симетричната слика на кругот од задачата 5 спрема нормалата на оската x низ точката (1, 0).

8. Да се определи кругот на којшто е $S(-3, -2)$ и минува низ *a*) почетокот; *b*) единичната точка на оската x; *c*) единичната точка на оската y

9. Да се определи кругот, на којшто отсечката $A(3, 7)$, $B(1, 5)$ е дијаметар.

10. Како гласи равенката на овој круг (од предната задача) во транслатираниот координатен систем x' O' y' во кој е O' a) точката $A(3, 7)$; *b*) точката $B(1, 5)$; *c*) средината на спомнатата отсечка AB?

11. Да се определи равенката на кругот, на кој е $r = 5$ и кој минува низ точките $A(4, 6)$, $B(5, -1)$

12. Да се определат координатите на центарот и полупречникот на кругот, којшто има равенка:

a) $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$,
b) $x^2 - 10x + y^2 + 12y - 83 = 0$,
c) $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0$,
d) $x^2 + y^2 + 12x - 16y + 64 = 0$,
e) $x^2 + 4x + y^2 + 8y - 16 = 0$,
f) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$,
g) $36x^2 + 36y^2 + 36x + 144y + 89 = 0$,
h) $400x^2 + 400y^2 - 320x - 600y + 189 = 0$,
i) $144x^2 + 144y^2 - 648x + 960y + 565 = 0$,
j) $x^2 - 10x + y^2 + 14y + 38 = 0$.

13. Да се определи равенката на кругот, што минува низ точката $A(-3, 4)$ и концентричен е со кругот $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$.

14. Да се определат неколку круга со $r = 5$, на кои центарот им е: *a*) на правата $y = x$: *b*) на правата $y = -x$ (спореди со зад. 2); *c*) на правата $y - 2x + 1 = 0$ *d*) на синусоидата $y = \sin x$ *e*) на правата $A(1, 4)$, $B(-1, 6)$.

15. Низ точката $A(-1, 2)$, $B(6, 9)$ минува круг на којшто центарот му е на: *a*) оската x; *b*) оската y.

16. Кругот ја допира оската x и минува низ точките $A(-1, 2)$, $B(6, 9)$; да му се определи равенката.

17. Да се определи равенката на кругот, што ја допира оската x во почетокот и минува низ точката $M(15, 25)$.

18. Да се најде растојанието на центарот на кругот $x^2 - 10x + y^2 - 24y + 133 = 0$ до почетокот.

19. Да се определи равенката на кругот, што минува низ точката $M\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ и концентричен е со кругот $2x^2 + 2y^2 + 6x - 10y - 1 = 0$.

20. Да се определи равенката на кругот што минува низ почетокот а центарот ѝ е во точката $(-4, 5)$.

21. Да се определи равенката на кругот што минува низ внатрешниот и надворешниот центар на сличноста на круговите $x^2 + y^2 = r_1^2$ и $(x - d)^2 + y^2 = r_2^2$, а пречникот ѝ е растојанието на тие центри на сличност.

Резултати. 5 $(x + 4)^2 + (y + 6)^2 = 1$; *a*) $(x + 4)^2 + (-y + 6)^2 = 1$; *b*) $(-x + 4)^2 + (y + 6)^2 = 1$; *c*) $(y + 4)^2 + (x + 6)^2 = 1$; *d*) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 1$.

6. *a*) 4, 6; $(-4, -6)$, равенката на кругот е $(x + 8)^2 + (y + 12)^2 = 1$.

7. $(x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 1$.

8. *a*) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$; *b*) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$, *c*) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 18$.

9. $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 2$.

10. *a*) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$, *b*) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, *c*) $x^2 + y^2 = 2$.

11. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

12. *a*) $p = 2$, $q =$ [illegible], $r = 4$; *b*) $p = 5$, $q = -6$, $r = 12$; *c*) $p = -7$, $q = 0$, $r = 3$; *d*) $p = -6$, $q = 8$, $r = 6$; *e*) $p = -2$, $q = -4$, $r = 6$;

f) $p = \frac{1}{2}$, $q = -2$, $r = 3$; *g*) $p = -\frac{1}{2}$, $q = -2$, $r = \frac{4}{3}$,

h) $p = \frac{2}{5}$, $q = \frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{2}$, *i*) $p = \frac{9}{4}$, $q = -\frac{10}{3}$, $r = \frac{7}{2}$;

j) $p = 5$, $q = -7$, $r = 6$.

13. $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$.

14. $(x - p)^2 + (y - p)^2 = 25$; *b*) $(x - p)^2 + (y + p)^2 = 25$; *c*) $(x - p)^2 + (y - 2p + 1)^2 = 25$; *d*) $\left(x - \frac{(2k+1)}{2}\pi\right)^2 + (y - 1)^2 = 25$; *e*) $(x - p)^2 + (y + p - 5)^2 = 25$.

15. *a*) $(x - 8)^2 + y^2 = 85$; *b*) $x^2 + (y - 8)^2 = 37$.

16. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$, $(x + 9)^2 + (y - 17)^2 = 7^2$

17. $x^2 + (y - 17)^2 = 17^2$

19. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 25$. **20.** $x^2 + 8x + y^2 - 10y = 0$.

21. $\left(x - \frac{dr_1^2}{r_1^2 - r_2^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{dr_1r_2}{r_1^2 - r_2^2}\right)^2$

§ 21. УСЛОВ, ОПШТА РАВЕНКА ОД ВТОР СТЕПЕН ДА ПРЕТСТАВУВА КРУГ

Видовме дека равенката на кругот со центар $S(p, q)$ и радиус r е

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \tag{11}$$

Ова е т. нар. *нормален облик* на равенката на кругот, кој е многу удобен поради тоа што непосредно ни ги дава битните елементи на кругот — центарот и полупречникот — со помошта на кои направо може да се црта кругот.

Равенката (11) може да се пише и како

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + (p^2 + q^2 - r^2) = 0 \tag{12}$$

или исто така во еквивалентен облик

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda px - 2\lambda qy + \lambda (p^2 + q^2 - r^2) = 0 \tag{13}$$

за произволен број $\lambda \neq 0$ (што слично имавме при правите?).

Равенката на кругот е значи равенка од втор степен со две непознати и тоа доста од специјален облик. Општа равенка од втор степен по однос на x и y е

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{14}$$

Да ја разгледаме сега обратната задача, т. е. да ги побараме условите што треба да бидат исполнети равенката (14) за да претставува круг. За да биде таа круг, треба да може да се сведе на нормален облик (2), (3) или (13) со $\lambda \neq 0$.

Релациите (12) и (14), кои се од ист степен по x и y ќе претставуваат исто крива ако коефициентите пред истоимените членови во двете равенки се пропорционални.

Ако ја напишеме таа пропорционалност за членовите од втор степен и го означиме факторот на пропорционалноста со λ, добиваме

$$A = \lambda, \ B = 0, \ C = \lambda, \text{ т. е.}$$

$$A = C, \ B = 0$$

Ако претпоставиме дека тие услови се исполнети, равенката (14) може да се пише како

$$A\ (x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0, \text{ или}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0, \text{ односно}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = 0. \tag{15}$$

Последната равенка претставува круг со центар

$$p=-\frac{D}{2A},\ q=-\frac{E}{2A} \text{ и полупречник } r=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$$

За да биде полупречникот реален, треба да е исполнет условот $D^2+E^2-4AF>0$. Ако е $D^2+E^2-4AF<0$, равенката (15) не е исполнета ни за една двојка на реални вредности на x, y и претставува *имагинарен круг*. Ако е $D^2+E^2-4AF=0$, равенката (15) ја задоволуваат координатите на една единствена реална точка со координати $x=$ $=-\frac{D}{2A},\ y=-\frac{E}{2A}$.

Тогај велиме дека равенката (15) претставува *круг со полупречник нула*. Накусо можеме да кажеме:

Општата равенка од втор степен по x и y

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

претставува реален круг, ако се исполнети условите[1])

$$A=C\neq 0,\ B=0,\ D^2+E^2>4AF$$

Ако тие услови се исполнети, тогај е

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2-\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}=0$$

нормалниот облик на тој круг.

Забелешка. Ако равенката на кругот Ax^2+Ay^2+Dx+ $+Ey+F=0$ ја разделиме со A и ставиме $\frac{D}{A}=a, \frac{E}{A}=$ $=b, \frac{F}{A}=c$ таа може да се пише и во обликот

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

или во нормалниот облик $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-$ $-\frac{a^2+b^2-4c}{4}=0$, па гледаме дека треба да е $a^2+b^2>4c$ за кругот да биде реален.

Пример 1. Кои се координатите на центарот и колкав е полупречникот на кругот $x^2+y^2-6x+10y+18=0$?

Работејќи по горе установениот начин, имаме

$$(x-3)^2+(y+5)^2=9+25-18 \text{ или}$$
$$(x-3)^2+(y+5)^2=16. \text{ Значи}$$
$$p=3,\ q=-5,\ r=4.$$

---

[1]) Дали ти е јасно дека тука се напишани четири услови?

Ако пак се служиме со формулите

$$p=-\frac{D}{2A},\ q=-\frac{E}{2A},\ r=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF},$$

$$\text{излегува } p=-\frac{-6}{2}=3,\ q=-\frac{10}{2}=-5,$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{36+100-72}=\frac{1}{2}\sqrt{64}=\frac{1}{2}\cdot 8=4.$$

Пример 2. За кои вредности на λ равенката $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-8\lambda x+(-1+15\lambda)=0$ претставуваа круг?

Секако дека е $\lambda \neq -1$. Останатите услови $A=C\neq 0$ се исполнети; се работи уште затоа, дека треба да е $D^2+E^2-4AF>0$, т. е. $64\lambda^2-4(1+\lambda)(-1+15\lambda)>0$ или $\lambda^2-14\lambda+1>1$.

Оваа неравенка е исполнета за сите вредности на λ, што се наоѓаат меѓу $7-4\sqrt{3}$ и $7+4\sqrt{3}$.

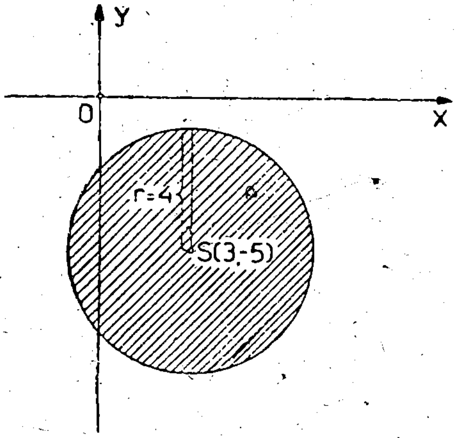
§. 22 ТОЧКА И КРУГ

Точката $M(a,\ b)$ ќе биде на кругот $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ ако координатите ѝ ја задоволуваат равенката на кругот, т. е. ако е

$$(a-p)^2+(b-q)^2=r^2$$

Ако е $(a-p)^2+(b-q)^2<r^2$, растојанието на таа точка до центарот на кругот е помало од полупречникот и точката е во кругот; ако е $(a-p)^2+(b-q)^2>r^2$, растојанието на таа точка до центарот на кругот е поголемо од полупречникот и точката е надвор од кругот.

Пример. Дали точката $M(4,\ 5)$ е во кругот $(x-3)^2+(y-4)^2-36=0$ или е надвор од него, или пак е на



Сл. 31

самиот круг? За да го испитаме тоа, ги внесуваме вредностите $x = 4$, $y = 5$ во равенката на кругот. Добиваме $1^2 + 1^2 - 3 3 < 0$, т. е. точката е во кругот. Оттука заклучуваме дека за сите точки во кругот ја имаме неравенката $k(x, y) < 0$ каде што е $k(x, y) = (x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2$. За точките надвор од кругот имаме $k(x, y) > 0$.

Во специјален случај за центарот во кругот $S(p, q)$ имаме едно решение оти е $k(p, q) = -r^2$.

По тој начин научивме да решаваме специјални квадратни равенки и неравенки, на коjшто левата страна го има обликот $(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2$ или еквивалентниот облик $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey = F$ при услов $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Пример. Да се реши неравенката $+2x^2 + 2y^2 + 20y - 12x + 36 > 0$. Делејќи ја со $+2$ таа неравенка преминува во еквивалентната неравенка $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 > 0$.

Всушност ја решаваме равенката што ѝ припаѓа на неравенката, т. е. $+2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 36 = 0$ или еквивалентната равенка $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$, на којашто решението е кругот $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 16 = 0$ т. е. кругот $k(S, 4)$ каде што е $S(3, -5)$ центар на кругот, така што решенијата на нашата равенка ја исполнуваат надворешноста од кругот k.

Задачи. 1. Дали точките: *a*) $A(4, 5)$, *b*) $B(5, -8)$, *c*) $C(2, 0)$, *d*) $D(-3, 4)$ се на, во или надвор од кругот $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

2. Истата задача за точките: *a*) $A(-1, -4)$, *b*) $(-2, -3)$, *c*) $C(-5, 3)$ *d*) $D(-4, -3)$ и кругот $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$.

3. Да се решат неравенките:

a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 16 < 0$,
b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 - 36 > 0$,
c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 > 0$,
d) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 - 25 < 0$.

4. Да се реши системот неравенки

a) $2x - 3y > 0$, $x^2 + y^2 - 4 > 0$,
b) $y - x - 2 < 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 8 < 0$.

Резултати:

1. *a*) внатре *b*) надвор *c*) внатре *d*) надвор
2. *a*) внатре *b*) внатре *c*) надвор *d*) надвор

3. *a*) Сите точки надесно од правата $y = \frac{2x}{3}$ и надвор од кругот $x^2 + y^2 - 4 = 0$,

b) Сите точки надесно од правата $y = x + 2$ и внатре во кругот $(x - 1)^2 + y^2 = 9$.

Пресекот на правите

$$7x - y - 4 = 0 \text{ и } x + 2y - 7 = 0 \text{ е}$$

$$S(\cdot, 3), \; r = \sqrt{(1-5)^2 + (3-6)^2 = 5}$$

па равенката на бараниот круг е

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

Пример. 4. Да се најде равенката на кругот, што минува низ почетокот и концентричен е со кругот даден со точките $A(4, 3)$, $B(11, 2)$, $C(12, 9)$.

Прво ги определуваме координатите на центарот p и q и радиусот r од дадениот круг. Дадениот круг е $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ и земајќи предвид дека координатите на точките ја задоволуваат нејзината равенка, имаме

$$(4-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$$
$$(11-p)^2 + (2-q)^2 = r^2,$$
$$(12-p)^2 + (9-q)^2 = r^2.$$

од каде излегува

$$4p + 3q = 50,$$
$$p + 7q = 50,$$
$$p = 8, \; q = 6 \text{ т.е. } S(8, 6).$$

Дадениот круг има радиус $SA = \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = 5$ и равенката му е: $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 25$ а концентричниот круг има исти p и q а радиусот му е $SO = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ и равенката на бараниот круг е

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = 100$$

или во развиен облик $x^2 + y^2 - 16x - 12y = 0$

Задачи. 1. Да се определи нормалата и општата равенка на кругот на којшто е *a*) $p = 5$, $q = 4$, $r = 3$; *b*) $p = -2$, $q = -3$, $r = 5$; *c*) $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = 4$.

2. Да се определи нормалниот облик на кругот $20x^2 + 20y^2 - 64x + 100y + 41 = 0$.

3. Како гласи равенката на кругот, што ги допирува координатните оски и минува низ точката *a*) $M(4, 2)$, *b*) $M(3, 6)$?

4. Да се определи равенката на кругот, на којшто пречникот е отсечката на правата $3x - 4y + 12 = 0$ меѓу координатните оски.

5. Да се најдат условите за кругoвите $a_1x^2 + a_1y^2 + b_1x + c_1y + d_1 = 0$, $a_2x^2 + a_2y^2 + b_2x + c_2y + d_2 = 0$ да се окнцентрични.

6. Да се определи равенката на кругот што минува низ точките; *a*) $A(-2, 3)$, $B(-1, 3)$ а центарот му е на правата $2x + 3y + 2 = 0$, *b*) $A(2, -3)$, $B(-4, -1)$ а центарот му е на правата $x + 3y - 18 = 0$.

7. Центарот на кругот што ги допира оските е на правата $3x - 5y + 15 = 0$; да му се определи равенката.

8. Да се определи равенката на кругот што минува низ точките

$A(7, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-2, 4)$; *b*) $A(2, -2)$, $B(7, 3)$ $C(6, 0)$;
c) $A(1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(9, 6)$; *d*) $A(10, 9)$, $B(4, -5)$, $C(0, 5)$;
e) $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 4)$; *f*) $A(2, 0)$, $B(7, 0)$, $C(7, -12)$.

9. Да се определи равенката на кругот опишан околу триаголникот, чии што равенки на страните се: *a*) $x + 2y - 3 = 0$, $3x + y - 2 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ *b*) $3y + x - 7 = 0$, $y - x + 3 = 0$, $2y - x + 3 = 0$.

10. Кругот минува низ точката $A(3, 5)$ и ја сече оската y во точките B и C така, да е $OB = 4$, $OC = -2$; да му се определи равенката.

11. Координатите на темињата на триаголникот се $A(-2, -2)$, $B(1, 3)$, $C(3, -1)$. Да се определи равенката и површината на кругот опишан околу триаголникот.

12. Колкава е површината на волуменот на топката, на којашто кругот што минува низ точките $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(6, 4)$ е најголем круг.

13. Кои вредности треба да добијат величините y_1, x_2, y_3, за да се точките $(?, y_1)$, $(x_2, 1 - \sqrt{69})$, $(7, y_3)$ на кругот $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 169$.

14. Даден е триаголникот $A(7, 1)$ $B(5, 5)$ $C(-2, 4)$; да се определи кругот што:

a) ги располовува страните на тој триаголник,

b) минува низ подножните точки на висините од тој триаголник,

c) ги располовува оние отсечки на висините на триаголникот ABC, кајшто се ограничени со темињата A, B, C, и со пресекот V на трите висини на триаголникот.

Докажи дека трите кругови се поклопуваат.

15. Земи произволен триаголник и изведи го истиот заклучок како во задачата 14.

16. Да се разгледа равенката $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4 + \lambda(x^2 + y^2 - 9) = 10$ за вредностите $\lambda = 0, 1, 5$; дали секој пат се добива равенка на круг?

17. За кои сé вредности на λ равенката во предната задача 16 претставува реален круг?

18. Какво треба да е λ за равенката

$$x^2 + y^2 + \lambda x + 3\lambda y - 7 = 0$$

да претставува круг, што минува низ единичната точка (1, 0) на оската x?

19. За кои вредности на λ претставува равенката

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 - 4\lambda x - 6\lambda y - (2\lambda + 1) = 0$$

реален круг?

Резултати: 2. $\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{676}{100}$. **3.** *a*) $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$. *b*) $(x - 15)^2 + (y - 15)^2 = 225$, $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$. **4.** $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$. **5.** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ т.е. само апсолутните членови не се пропорционални. **6.** *a*) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{265}{36}$, *b*) $x^2 + y^2 - 3x - 11y - 40 = 0$ **7.** *a*) $4x^2 + 4y^2 - 60x - 60y + 225 = 0$, *b*) $64x^2 + 64y^2 + 240x - 240y + 225 = 0$. **8.** *a*) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$, *b*) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, *c*) $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$, *d*) $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$, *e*) $x^2 + y^2 - \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}y + 7 = 0$, *f*) $x^2 + y^2 - 9x + 12y + 14 = 0$.
9. *a*) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{26}{4}$, *b*) $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$. **10.** $3x^2 + 3y^2 - 16x - 6y - 24 = 0$, **11.** $\left(x - \frac{2}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{11}\right)^2 = \frac{1105}{121}$. $P = r^2\pi = 28{,}69$. **12.** $r^2 = \frac{290}{36}$, $0 = 101{,}23$, $V = 95{,}770$. **13.** $y_1 = 14$, $y'_1 = -12$; $x_2 = 12$, $x'_2 = -8$; $y_3 = 13$, $y'_3 = -11$.

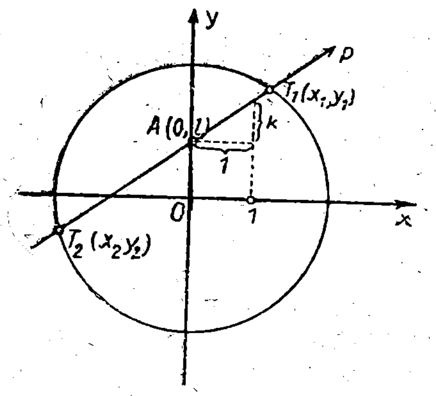
14. Кругот што минува низ средините на страните, ја има равенката $x^2 + y^2 - 8x - 9y + 30 = 0$. Равенките на страните на триаголникот се $y + 2x - 25 = 0$, $3y + x - 10 = 0$, $7y - x - 30 = 0$. Равенките на висините се $y - 1 = -7\,(x - 7)$, $y - 5 = 3\,(x - 5)$, $2y - 8 = (x + 2)$. Пресекот A' на BC и висината од A ги има координатите $\left(\frac{32}{5}, \frac{26}{5}\right)$: овие координати ја задоволуваат и равенката на кругот; слично се докажува и за B' и C'. Пресекот на висините V ги има координатите (6, 8), а средната точка од AV ги има координатите $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$; овие координати исто така ја задоволуваат равенката на кругот. Слично се докажува за срединиte на BV и CV. **15.** Истото важи и за кој да било триаголник и заради тоа овој круг се вика, круг низ девет точки или фоербахов круг. **16.** Дадениот круг може да се пише во облик: $x^2(1+\lambda)+y^2(1+\lambda)-2x-4y+1-9\lambda=0$.

Тој е реален, додека е $D^2+E^2>4AF$. Оттука излегува $9\lambda^2+8\lambda+4>0$ кое е исполнето за секое λ. **17.** За секое λ. **18.** $\lambda=6$. **19.** $-\infty<\lambda<-\frac{1}{15}$, $0<\lambda<\infty$.

§. 24 ПРАВА И КРУГ

Проблемот што се поставува на ова место е да се најдат пресечните точки и меѓусебната положба на две криви, т.е. дали тие се сечат или не. Исто така ќе го определиме аголот под кој се сечат двете криви.

За правата p и кругот k знаеме, дека се сечат, ако растојанието на правата p до центарот на кругот е помало од r, додека не се сечат, ако ова растојание е поголемо од r.



Сл. 33

Два круга k_1 и k_2 ќе се сечат кога растојанието на нивните центри е поголемо од збирот на нивните радиуси или помало од разликата на нивните радиуси.

Сите овие особини се познати од планиметријата; на ова место ќе ги добиеме по друг начин — алгебарски.

1. *Пресек на права со круг.* Да го побараме пресекот на правата (сл. 60)

(1) $$p \ldots y=kx+l$$

со кругот

(2) $$k \ldots x^2+y^2-r^2=0$$

Од планиметријата знаеме: Ако е

(3) $$r \gtreqless Op \text{ т.е. } r^2 \gtreqless Op^2,$$

правата p и кругот k се сечат во две различни точки, се допираат или не се сечат.

Да го побараме растојанието Op на правата p до центарот $O(0, 0)$ на кругот. За таа цел во нормалниот облик $\frac{-kx+y-l}{\pm\sqrt{k^2+1}}$ на правата (1) ги внесуваме координатите $(0,0)$ на центарот на кругот.

Значи $Op^2 = \left(\frac{-l}{\pm\sqrt{k^2+1}}\right)^2 = \frac{l^2}{k^2+1}$ на горните неравенства $r^2 \gtreqless Op^2$ преминуваат сега во $r^2 \gtreqless \frac{l^2}{k^2+1}$, односно $r^2(k^2+1) \gtreqless l^2$ или $r^2(k^2+1) - l^2 \gtreqless 0$. Горното правило (3) сега гласи:

Ако е

$r^2(k^2+1) - l^2 \gtreqless 0$, правата (1) и кругот (2)

се сечат во две различни точки,

се допираат,

не се сечат,

Специјално, ако е

(5) $$\boxed{r^2(k^2+1) - l^2 = 0}$$

правата (1) и кругот (2) се допираат.

Ќе ги потврдиме горните заклучоци аналитички, решавајќи го системот равенки (1) и (2).

Ја внесуваме вредноста за y од (1) во (2) и добиваме равенката

(6) $$x^2(1+k^2) + 2klx + (l^2 - r^2) = 0$$

чија што детерминанта е

$$(2kl)^2 - 4(1+k^2)(l^2-r^2) \text{ т.е.}$$

(7) $$D = 4(k^2r^2 + r^2 - l^2)$$

и решение

(8) $$x_{1,2} = \frac{-2kl \pm \sqrt{D}}{2(1+k^2)}.$$

Вредностите на y се

(9) $$y_{1,2} = kx_{1,2} + l.$$

Оттука ги имаме пресечните точки на правата (1) и кругот (2): $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$, чии координати се дадени со (8) и (9).

Односот на правата спрема кругот како што гледаме од (8) зависи од дискриминантата D. Ако е $D > 0$, тие се сечат, за $D = 0$ тие се допираат и за $D < 0$ тие не се сечат. Ова правило е еквивалентно со погоре искажаното во кое ги имавме еквивалентните неравенства $r^2 \gtreqless Op^2$ односно (4).

Пример 1. Ако правата p и кругот k се

$$p \ldots y - 7x + 36 = 0,$$
$$k \ldots x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

тогај со внесување на вредноста y од првата равенка во втората имаме
$50x^2 - 550x + 1500 = 0$ или $x^2 - 11x + 30 = 0$. Решенијата на оваа квадратна равенка се: $x_1 = 6$, $x_2 = 5$ и $y_1 = 6$, $y_2 = -1$. Правата p и дадениот круг k имаат значи две заеднички точки (6, 6) и (5, —1).

Правата пак $4y + 3x = 0$ и кругот $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 5 = 0$, имаат само една заедничка точка — почетокот, додека истиот круг и правата $4y + 3x + 1 = 0$ немаат ниедна заедничка точка (за точките што не се „реални" засега не зборуваме).

Во специјален случај, ако растојанието на правата p до центарот на кругот е поголемо од полупречникот, правата p и кругот k лежат еден надвор од друг и немаат заеднички точки. Формулите (8) и (9) и во овој случај ни даваат две различни решенија за системот (1) — (2). Но овие решенија се комплексни броеви така што заедничките точки се имагинарни и не можеме да ги нацртаме во рамнината на реалните броеви.

На пр. правата $y = 2$ и кругот $x^2 + y^2 - 1 = 0$ имаат заеднички точки $(i\sqrt{3}, 2)$, $(-i\sqrt{3}, 2)$, заради тоа што и двете овие „точки" лежат и на правата и на кругот.

§. 25 ТАНГЕНТА И НОРМАЛА НА КРУГОТ

Правата што го допира кругот ја викаме тангента или допирка на кругот. Таа го допира кругот во една точка која ја викаме *допирна точка.*

Од планиметријата знаеме дека кругот стои нормално на полупречникот што ги сврзува центарот и допирната точка.

Под нормала на круг разбираме секоја права што стои нормално на тангентата во допирната точка.

Спрема тоа, во секоја точка M од кругот, тангентата и нормалата се меѓусебно нормални прави,

(1) $$t \perp n,$$

па имаме за нивните коефициенти на правецот

(2) $$коеф\ t \cdot коеф\ n = -1.$$

Да се потсетиме на планиметриската особина со која ќе се послужиме, дека нормалата на кругот минува низ дадедената точка T, и се поклопува со полупречникот што ја сврзува оваа точка со центарот на кругот.

1. *Равенка на нормалата низ дадена точка.* Оваа равенка се добива, ако се напише равенката на права што минува низ дадена точка и центарот на дадениот круг.

Пример 1. Низ точката (x_1, y_1) од кругот $x^2 + y^2 = r^2$ да се повлече нормала.

Бидејќи центарот на кругот е во почетокот $(0, 0)$, нормалата е правата низ $(0, 0)$ и (x_1, y_1) и ја има равенката.

$$y - 0 = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}(x - 0) \text{ т.е. } y = \frac{y_1}{x_1}x$$

Пример 2. Низ точката $(2, 3)$ да се повлече нормала на кругот

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

го најдуваме прво центарот на кругот. Очевидно е дека дадениот круг може да се напише во обликот

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 1 - 4 - 1 = 0,$$

па спрема тоа центарот е во точката $(1, -2)$. Како права низ двете точки $(1, -2)$ и $(2, 3)$, бараната нормала ја има равенката

$$y = 5x - 7.$$

2. *Равенка на тангентата низ дадена точка.*

Прв случај. Равенка на тангентата низ дадената точка $D(x_1, y_1)$.

Бараната тангента t е права низ допирната точка $D(x_1\, y_1)$ нормална на отсечката $D(x_1, y_1)$, $S(p, q)$. $S(p, q)$ е центарот на дадениот круг. Равенката на тангентата ќе биде значи

$$y - y_1 = -\frac{1}{коеф\ n}(x - x_1).$$

Бидејќи коефициентот на правецот е на правата DS $\frac{y_1 - q}{x_1 - p}$, равенката на тангентата гласи

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{y_1 - q}{x_1 - p}}(x - x_1)$$

т.е. $$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1).$$

Множејќи ја оваа равенка со $y_1 - q$ и сведувајќи ја на нула добиваме

$$(3) \qquad (x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) = 0$$

Ако е r радиусот на кругот, имаме

$$(4) \qquad (x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2$$

Собрани равенките (3) и (4) ни даваат

$$[(x_1 - p)(x - x_1) + (x_1 - p)^2] + [(y_1 - q)(y - y_1) + (y_1 - q)^2] = r^2,$$

од каде

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2.$$

Равенката на тангентата на кругот $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ во точката (x_1, y_1) е

$$(5) \qquad \boxed{(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2}$$

За $p = q = 0$ го имаме следниот резултат: равенката на тангентата на кругот $x^2 + y^2 = r^2$ во дадената точка (x_1, y_1) е (сл. 35).

$$(6) \qquad \boxed{xx_1 + yy_1 = r^2}$$

којшто резултат лесно се помни.

Пример 3. Во точката (2, 3) на кругот $x^2 + y^2 = 13$ се добива тангентата, ако во (6) наместо x се стави 2 и наместо y се стави 3, равенката е $2x + 3y = 13$.

Втор случај: Низ дадената точка $T(x_0, y_0)$ надвор од кругот да се повлече тангента на кругот k.

Овој случај се сведува на преѓешниот, така што да се најде прво како и во планиметријата: допирната точка $D(x_1, y_1)$. Оваа допирна точка се добива од следните два услова;

Прв услов: изразуваме дека бараната тангента во бараната допирна точка минува низ дадената точка T.

Втор услов: изразуваме дека бараната допирна точка лежи на дадениот круг.

Пример 4. Од точката $T(-14, -2)$ да се повлече тангента на кругот $x^2 + y^2 = 100$. Ако ја обележиме со $D(x_1, y_1)$ бараната допирна точка, ќе имаме според (6) за бараната тангента

$$(7) \qquad xx_1 + yy_1 = 100.$$

Но оваа права минува и низ дадената точка $(-14, -2)$ па е

$$(8) \qquad -14x_1 - 2y_1 = 100.$$

Исто така допирната точка (x_1, y_1) што ја бараме, лежи и на дадениот круг, па е

$$(9) \qquad x_1^2 + y_1^2 = 100.$$

Треба да се решат (8) и (9). Првата равенка дава

$$y_1 = -7x_1 - 50.$$

Втората станува по внесување вредноста на y од првата

$$x_1^2 + 49x_1^2 + 700x_1 + 2400 = 0,$$

од каде имаме

$$x'_1 = -6, \; x_1'' = -8.$$

Вредностите што одговараат за y се

$$y'_1 = -8, \; y_1'' = 6.$$

Со други зборови, за бараната допирна точка (x_1, y_1) добивме две можности; точките $(-6, -8)$ и $(-8, 6)$, на коишто одговараат соодветно тангентите $-6x - 8y = 100$ и $-8x + 6y = 100$.

Заради тоа задачата, низ точката $(-14, -2)$ да се повлече на кругот $x^2 + y^2 = 100$ тангента, има две различни решенија, што можевме и однапред да го кажеме.

По овој начин, се покажува алгебарски она што го знаевме порано од планиметријата, дека од секоја точка надвор од кругот можат да се повлечат две различни тангенти. Конструкцијата на овие тангенти се гледа на сл. 77, од каде разбираме дека бараните допирни точки се наоѓаат во пресечните точки на дадениот круг со кругот на којшто пречникот се поклопува со растојанието на дадената точка до центарот на дадениот круг.

Пример 5. Да се најде равенката на тангентата t од дадениот круг k, која е паралелна со дадената права.

Допирната точка се добива како пресек на дадениот круг и правата што минува низ центарот на дадениот круг и нормална е на дадената права.

3. Услов за правата $y = kx + l$ да е тангента на кругот.

Во претешниот параграф најдовме дека правата $y = kx + l$ има со кругот $x^2+y^2= r^2$ само една заедничка точка, т.е. таа е тангента на кругот, ако е исполнет условот

$a^2 \quad b^2$

$$\boxed{r^2(1+k^2) = l^2.}$$

Тоа е условот, правата $y = kx + l$ да е тангента на кругот $x^2 + y^2 = r^2$; координатите на допирната точка се

$$x_1 = -\frac{kl}{1+k^2} = -\frac{kl}{l^2}\cdot r^2 = -\frac{k}{l}r^2,$$

$$y_1 = -\frac{k^2}{l}r^2 + l = \frac{-k^2r^2 + l^2}{l} = \frac{r^2}{l}.$$

Условот, за правата $y = kx + l$ да биде тангента на кругот $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ може непосредно да се напише изразувајќи дека растојанието на правата до центарот на кругот е равно на полупречникот, т.е.

$$\frac{q - kp - l}{\sqrt{1+k^2}} = \pm r,$$

$(q - ap + b)^2 = r^2(1+a^2)$

$$(q - kp - l)^2 = r^2(1+k^2).$$

Различни задачи за тангентата можат згодно да се решат со помошта на овој услов.

Пример 1. Од точката $T(-14, -2)$ да се повлече тангента на кругот $x^2 + y^2 = 100$.

Бидејќи тангентата минува низ точката $T(-14, -2)$ имаме $-2 = -14k + l$, и понатаму од условот имаме $l^2 = 100(1+k^2)$.

Од првата равенка добиваме $l = 14k - 2$ или по внесување на ова во втората равенка излегува

$$96k^2 - 56k - 96 = 0.$$

Оттука имаме $k_1 = \frac{4}{3}$, $k_2 = -\frac{3}{4}$, па е $l_1 = \frac{50}{3}$, $l_2 = -\frac{25}{2}$.

Равенките на тангентите се

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{50}{3}, \quad y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{2}.$$

Пример 2. Од точката $T(8, -2)$ да се повлечат тангенти на кругот $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 20$.

Имаме

$$-2 = 8k + l, \quad (-2 - 3k - l)^2 = 20(1+k^2).$$

Оттука се добива $k_{1,2} = \pm 2$, $l_1 = -18$, $l_2 = 14$, и равенките на тангентите се

$$y = 2x - 18,\quad y = -2x + 14.$$

Пример 3. Да се определат равенките на тангентите на кругот $x^2+y^2=25$, што се паралелни со правата $3x+4y=12$.

Бидејќи коефициентот на правецот на тангентата, мора да е равен на $-\frac{3}{4}$, од условната равенка излегува

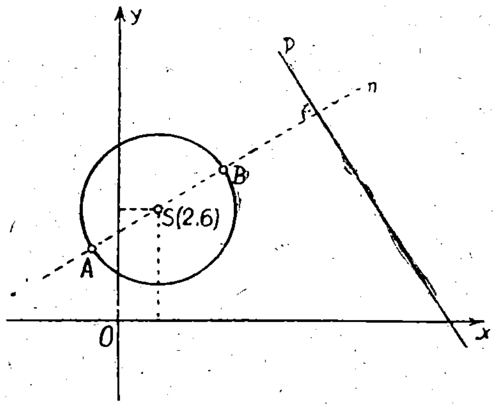
$$25\left(1+\frac{9}{16}\right) = l^2 \text{ и оттука}$$

$$l_{1,2} = \frac{25}{4}.$$

Равенките на тангентите се

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4},\quad y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}.$$

Пример 4. Која точка од кругот $K(2=p,\ 6=q,\ 5=r)$ има најмало, а која најголемо растојание до правата $3y+4x=101$ (сл. 34)?



Сл. 34

Ја повлечуваме нормалата од центарот на правата. Пресечните точки на оваа нормала со кругот се бараните точки A (најодалечената) и B (најблиската). Коефициентот на правецот на дадената права е $-\frac{4}{3}$. Произволна права низ центарот е $y-6=a(x-2)$, а нормалата ја има равенката $y-6=\frac{3}{4}(x-2)$ или $3x-4y=-18$.

Равенката на кругот е $(x-2)^2+(y-6)^2=25$ или x^2+ $+y^2-4x-12y+15=0$.

Со решавање на тие две равенки (на нормалата и на кругот) имаме

$$-25x^2+100x-300,$$

од каде

$$x_1=6,\ x_2=-2,$$

$$\text{и } y_1=9,\ y_2=3.$$

Најоддалечената точка од кругот до дадената права е $A(-2, 3)$ а најблиската $B(6, 9)$.

Пример 5. Да се определат равенките на тангентите на кругот $x^2+y^2=25$, којшто се нормални на правата $4x+3y-12=0$.

Бидејќи коефициентот на правецот на дадената права е $-\frac{4}{3}$, тангентите ќе имаат коефициент на правецот $\frac{3}{4}$.

Заради тоа е $l^2=25\left(1+\frac{9}{16}\right)$, $l_{1,2}=\pm\frac{25}{4}$ а равенките на тангентите се $l^2=r^2(1+a^2)$

$$3x-4y+25=0 \text{ и } 3x-4y-25=0.$$

Координатите на допирните точки се:

$$x_1=-\frac{k}{l}r^2=-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{25}\cdot 25=-3,$$

$$y_1=\frac{r^2}{l}=\frac{25}{24}\cdot 4=4,$$

$$x'_1=-\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{25}\right)\cdot 24=3,$$

$$y'_1=25\left(-\frac{4}{25}\right)=-4.$$

Пример 6. Да се најде тангентата на кругот $x^2+y^2=$ $=25$ која со координатните оски затвора триаголник со површина $\frac{625}{24}$.

Ако се сегментите на тангентата m, n, имаме $\frac{mn}{2}=\frac{625}{24}$ односно $mn=\frac{625}{12}$. Треба да се определи допирната точка

(x_1, y_1). Оваа точка лежи на кругот па координатите й ја задоволуваат неговата равенка, т.е. $x_1^2 + y_1^2 = 25$.

Равенката на тангентата е $xx_1 + yy_1 = 25$ или во сегментен облик $\frac{x}{\frac{25}{x_1}} + \frac{y}{\frac{25}{y_1}} = 1$.

Оттука имаме

$$\frac{25}{x_1} \cdot \frac{25}{y_1} = \frac{625}{12}$$

или

$$x_1 y_1 = 12.$$

За да ги определиме $x_1 y_1$ го решаваме системот

$$x_1^2 + y_1^2 = 25.$$
$$x_1 y_1 = 12.$$

Долната од равенките ја множиме со 2 и додаваме односно вадиме на горната односно од горната и вадиме квадратен корен од добиените изрази. Ги добиваме системите

$$\begin{array}{l|l|l|l} x_1 + y_1 = 7 & x_1 + y_1 = 7 & x_1 + y_1 = -7 & x_1 + y_1 = -7 \\ x_1 - y_1 = 1 & x_1 - y_1 = -1 & x_1 - y_1 = 1 & x_1 - y_1 = -1. \end{array}$$

Оттука имаме $D_1(4, 3)$, $D_2(3, 4)$, $D_3(-3, -4)$ и $D_4(-4, -3)$. Тангентите се

$$4x + 3y = 25, \; 3x + 4y = 25,$$
$$-3x - 4y = 25, \; -4x - 3y = 25.$$

Пример 7. Да се најде равенката на кругот со полупречник $r = 4$ што ја допира правата $p \equiv 4x + 3y - 7 = 0$ во точката $T(1, 1)$, (сл. 35). Експлицитниот облик на равенката на правата е

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Такви кругови што ја допираат правата од различни страни се два. Равенката им е

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = 16.$$

Точката $T(1, 1)$ лежи на овој круг па е

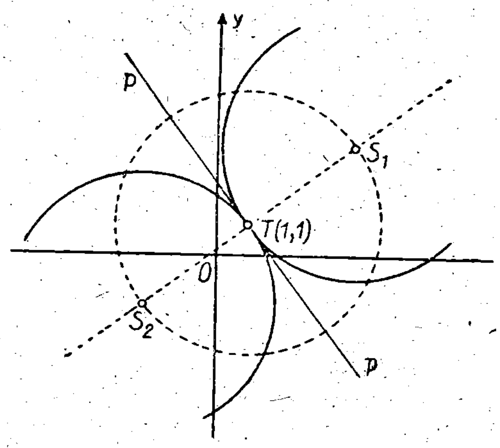
(1) $$(1 - p)^2 + (1 - q)^2 = 16.$$

Центрите S_1 и S_2 на круговите лежат на нормалата на правата во точката T. Равенката на нормалата е $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1)$, а бидејќи минува низ $S(p, q)$ важи равенката

(2) $$q - 1 = \frac{3}{4}(p - 1).$$

Со замена на (2) во (1) добиваме

$$p_1=\frac{21}{5},\ q_1=\frac{17}{5},\ p_2=-\frac{11}{5},\ q_2=-\frac{7}{5}.$$



Сл. 35

Равенките на круговите се

$$k_1\equiv\left(x-\frac{21}{5}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=16.$$

$$k_2\equiv\left(x+\frac{11}{5}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=16.$$

Задачи. *(Права и круг).*

1. Да се определат пресечните точки на кругот со правата:
a) $x^2+y^2=25,\quad x+y=7$; *b*) $x^2+y^2=r^2,\quad x+y=a$; *c*) $4x^2+4y^2=25,\ 2y-14x+25=0$; *d*) $x^2+y^2-14x-4y-5=0,\ 3x-2y-12=0$, *e*) $2y-x-3=0,\ x^2+y^2-8x-12y+27=0$; *f*) $3y-7x+43=0,\ x^2+y^2-14x-4y-5=0$.

2. Низ точката $(x-9,\ y<0)$ од кругот $x^2+y^2=130$, да се повлече тетива паралелна со правата $4x-5y-7=0$. Како гласи нејзината равенка и која е другата точка во која таа го сече кругот?

3. Да се определат аглите, под кои кругот $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ги сече координатните оски.

4. Да се определи тетивата, што на кругот $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ ја определува правата $3x+y+2=0$, како и аголот меѓу таа тетива и кругот.

5. Да се докаже дека тетивата $M_1 M_2$, што правата $Ax + By + C = 0$ ја сече на кругот $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ е равна на

$$2\sqrt{r^2 - \frac{(Ap + Bq + C)^2}{A^2 + B^2}}.$$

6. Колкава е должината на тетивата што кругот $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ ја сече на оската x.

7. Низ точката *a*) $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ во кругот $5x^2 + 5y^2 - 9y - 38 = 0$; *b*) $M(6, 2)$ во кругот $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$; да се повлече тетивата што од таа точка е располовена.

8. Да се определи равенката на кругот, што ја допира оската x во точката $M(5, 0)$ а на оската y сече тетива со должина 10.

9. Да се определи равенката на кругот на којшто полупречникот е $r = 50$ а на позитивниот дел од оската x сече тетива со должина 28 и минува низ точката $M(0, 8)$.

10. Низ точката $M(7, 1)$ од кругот $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ да се повлече тетивата што е паралелна со правата $y + 2x - 4 = 0$; која е нејзината равенка и во која уште точка таа го сече кругот.

11. Правите $3y + x - 7 = 0$ и $y + x - 15 = 0$ го сечат кругот $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$. Да се најде растојанието на центарот на овој круг до правите и должините на тетивите што лежат на правите. Да се определи равенката на симетралата на втората тетива и да се покаже дека таа минува низ центарот на кругот.

12. Во точката

a) $M(-3, y > 0)$ од кругот $x^2 + y^2 = 25$
b) $M(5, y < 0)$ од кругот $x^2 + y^2 = 169$
c) $M(-6, 5)$ од кругот $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 19 = 0$
d) $M(6, 6)$ од кругот $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ да се определи равенката на тангентата и нормалата.

13. Во точките (6, 8) и (8, 6) од кругот $x^2 + y^2 = 100$ повлечени се тангентите. Да се определи нивната пресечна точка и аголот меѓу нив.

14. Да се определат равенките на тангентите повлечени од

a) $M(-7, -1)$ на кругот $x^2 + y^2 = 25$
b) $M(7, -17)$ на кругот $x^2 + y^2 = 169$
c) $M(7, -3)$ на кругот $x^2 + y^2 = 29$
d) $M(9, 13)$ на кругот $x^2 + y^2 = 25$.

$r^2(1+a^2)=(q-ap-b)^2$

15. Да се определат равенките на тангентите повлечени од

a) $M(6, 2)$ на кругот $x^2+y^2-6x+4y-7=0$

b) $M(8, 10)$ на кругот $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

c) $M(4, 13)$ на кругот $(x-3)^2+(y+5)^2=100$

16. Како гласат равенките на тангентите на кругот $x^2+y^2=6$, кои се: *a*) паралелни со правата $2y=x-6$; *b*) нормални на правата $y=3x-7$.

17. Да се определат равенките на тангентите на кругот $x^2+y^2=4$ што се паралелни со правата $8x+15y-30=0$; кои се координатите на допирните точки?

18. Истата задача за кругот $x^2+y^2=9$ и правата $20x+21y-36=0$.

19. Да се определи аголот, што го образуваат тангентите повлечени: од *a*) $M(9, 2)$ на кругот $x^2+y^2-4x-6y-12=0$; *b*) $M(-2, 5)$ на кругот $(x-3)^2+(y-5)^2=5$.

20. Да се определат равенките на тангентите на кругот $(x-10)^2+y^2=100$, повлечени во точките со апсциси $x_1=4$ и да се определи аголот меѓу тангентите.

21. Во пресеците на правата: *a*) $7x+y-25=0$ и кругот $x^2+y^2=25$, *b*) $y+3x-8=0$ и кругот $(x-3)^2+(y-1)^2=2$ да се повлечат тангенти на кругот. Да се определат координатите на нивните пресечни точки.

22. Да се определат равенките на тангентите на кругот $(x-1)^2+(y-3)^2=16$ нормални на правата $7y-24x-2=0$.

23. Да се определи m така што кругот $x^2+y^2=25$ да сече на правата $x-3y+m=0$ тетива, која од точката $T(1, -2)$ се гледа под прав агол.

24. Како гласи равенката на кругот, што минува низ точките: *a*) $A(12, -14)$, $B(14, 3)$ и ја допира правата $3x-4y+20=0$; *b*) $A(4, 7)$, $B(2, 3)$ и ја допира правата $x-2y+12=0$; *c*) $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ и ја допира правата $3x-4y+6=0$?

25. Со радиусот $r=13$ да се опише круг, кој ја допира правата $5x+12y-124=0$ во точката со апсциса $x=8$. Како гласи нејзината равенка?

26. Да се определи равенката на кругот, кој минува низ точката $M(6, 8)$ и ја допира правата $4x+3y+1=0$ во точката со апсциса -1.

27. Центарот на кругот што ги допира двете паралелни прави $x-2=0$ и $x-6=0$ е на правата $y=3x-6$. Како гласи неговата равенка?

28. Да се определи равенката на кругот, што ги допира правите $y-k_1x-l_1=0$, $y-k_2x-l_2=0$, а центарот му е на правата $y=kx+l$.

29. Кругот ги допира двете прави $2x - 3y + 9 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ а центарот му е на правата $x + 2y - 10 = 0$. Како гласи неговата равенка?

30. Да се определи равенката на кругот што ги допира правите $3x - 4y + 8 = 0$ и $12x + 5y - 6 = 0$ а центарот му е на правата $x + y - 2 = 0$.

31. Дадени се трите прави: $2x - y = 0$, $5x - 7y - 8 = 0$ и $x - 2y - 6 = 0$. Да се определи равенката на оној круг што ги допира првата и третата права а центарот му е на втората права.

31. а) Да се определи равенката на кругот впишан во триаголникот чии страни ги имаат соодветно равенките: $y + 8 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$.

32. Кругот минува низ точката $M(5, 3)$ и ги допира правите $7x + 24y + 21 = 0$, $x + 3 = 0$. Да му се определи равенката.

33. На кругот $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ да се повлече тангента паралелна со правата $4x + 3y - 12 = 0$ и определи нејзината равенка.

34. Под кој агол се сечат круговите $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 9$ и $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

35. Да се определи аголот под кој се сечат круговите $x^2 + y^2 = 25$ и $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$.

36. Да се определат равенките на заедничките тангенти на круговите

$a)$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$;
$b)$ $x^2 + y^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$;
$c)$ $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$, $(x+1)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2$.

37. Да се докаже, дека равенката на тетивата, што ги сврзува допирните точки на надворешните заеднички тангенти на два круга во првиот круг е

$$(p_1 - p_2)(x - p_1) + (q_1 - q_2)(y - q_1) + r_1(r_1 - r_2) = 0,$$

а равенката на тетивата што ги сврзува допирните точки на внатрешните заеднички тангенти на два круга во првиот круг

$$(p_1 - p_2)(x - p_1) + (q_1 - q_2)(y - q_1) + r_1(r_1 + r_2) = 0.$$

38. Да се определат со помошта на тетивите од зад. **37** равенките на заедничките тангенти на овие кругови

$a)$ $x^2 + y^2 = 4$, $(x-4)^2 + y^2 = 1$; $b)$ $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$.

39. Која вредност треба да ја има m, правата $2x + y + m = 0$ за да биде тангента на кругот $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$?

40. Да се определи равенката на кругот, што минува низ точките $A(-4,\ 3)$, $B(-2,\ -3)$ и го сече кругот $(x-3)^2+y^2=16$ под прав агол.

Резултати.

1. *a)* $(3,\ 4)$ и $(4,3)$; *b)* $\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{2r^2-a^2}), \frac{1}{2}(a\pm\sqrt{2r^2-a^2})$, *c)* $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$; *d)* $(10,9)$ и $\left(\frac{22}{13}, -\frac{45}{13}\right)$, *e)* $(1,\ 2)$ и $(9,\ 6)$; *f)* $(10,\ 9)$, $(4,\ -5)$.

2. $4x-5y-71=0$, $\left(4\frac{35}{41},\ -10\frac{13}{41}\right)$.

3. Оската x под агол α така што да е $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ и под агол $180^\circ-\alpha$, оската y под агол β, така што да е $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{2}\sqrt{21}$ и под агол $180^\circ-\beta$.

4. Тетива е $\sqrt{90}$, бидејќи просечните точки се $(2,\ -8)$ и $(-1,\ 1)$; $\operatorname{tg}\varphi_1=-3$, $\operatorname{tg}\varphi_2=3$.

5. Излегува од Питагоровото правило, **6.** **6**.

7. *a)* $5x-2y-4=0$, *b)* $2y-3x+14=0$.

8. $(x-5)^2+(y\pm5\sqrt{2})^2=50$.

9. $(x-30)^2+(y-48)^2=50^2$.

10. $y+2x-15=0$, $M(5,\ 5)$.

11. $d_1=3\frac{\sqrt{10}}{2}$, $d_2=3\frac{\sqrt{2}}{2}$. Должините на тетивите се $t_1=\sqrt{10}$, $t_2=5\sqrt{2}$. Симетралата на другата тетива е $y-x-2=0$.

12. *a)* $3x-4y+25=0$, $3y+4x=0$,
b) $5x-12y-169=0$, $5y+12x=0$,
c) $2y-5x-40=0$, $5y+2x-13=0$,
d) $3y+4x-42=0$, $4y-3x-6=0$.

13. $\left(2\frac{1}{7},\ 7\frac{1}{7}\right)$, $\varphi=16^\circ 15' 37''$.

14. *a)* $-3x-4y=25$, $-4x+3y=25$.
b) $5y-12x+169=0$, $12y+5x+169=0$,
c) $5x+2y-29=0$, $2x-5y-29=0$,
d) $7y-24x+125=0$, $4y-3x-25=0$.

15. *a)* $2x+11y-34=0$, $y+2x-14=0$,
b) $3x-4y+16=0$, $15x-8y-40=0$,
c) $4x-3y+23=0$, $33y+56x-653=0$.

16. $y=\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{30}}{2}$, $b)$ $y=-\frac{1}{3}x\pm\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

17. $8x+15y\pm34=0$, $x_1=\pm\frac{16}{17}$, $y_1=\pm\frac{30}{17}$.

18. $20x+21y\pm87=0$, $x_1=\pm\frac{60}{29}$, $y_1=\pm\frac{63}{29}$.

19. $a)$ $4x+3y-42=0$, $3x-4y-19=0$, $\varphi=90^\circ$,

$b)$ $2y-x-12=0$, $2y+x-8=0$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}$, $\varphi=$ $=53^\circ 7' 48''$.

20. $\pm 4y=3x+20$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{24}{17}$ **21.** $a)$ $(7, 1)$, $b)$ $(0, 0)$.

22. $y=-\frac{7}{24}x-\frac{7}{8}$, $y=-\frac{7}{24}x+\frac{179}{24}$.

23. Ако се $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ крајни точки на тетивата, тогај е $\frac{y_1+2}{x_1-1}=\frac{1-x_2}{y_2+2}$ или $y_1\,y_2+2\,(y_1+y_2)+4=$ $=x_1+x_2-(1+x_1\,x_2)$. Од равенката што ја добиваме ако x па потоа y од $x-3y+m=0$ ги внесеме во $x^2+y^2=25$, излегува $x_1+x_2=-\frac{m}{5}$, $y_1+y_2=\frac{3m}{5}$, $x_1\,x_2=\frac{m^2-225}{10}$, $y_1\,y_2=$ $=\frac{m^2-25}{10}$. На крајот се добива равенката $m^2-7m-10=0$ од која треба да се пресмета m.

24. $a)$ $(x-6)^2+(y+6)^2=110$, $(x-62)^2+(y+11)^2=$ $=2500$, $b)$ $(x-3)^2+(y-5)^2=5$, $c)$ $x^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2=\frac{100}{9}$.

25. $(x-3)^2+(y+5)^2=169$, $(x-13)^2+(y-19)^2=169$.

26. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. **27.** $x^2+y^2-8x-12y+$ $+48=0$.

28. Центарот ѝ е на правата $\frac{y-k_1x-l_1}{\sqrt{1+k_1^2}}=$ $=\pm\frac{y-k_2x-l_2}{\sqrt{1+k_2^2}}$ и на правата $y=kx+l$.

29. $13x^2+13y^2-156x-52y+295=0$, $13x^2+13y^2-$ $-52x-104y+259=0$.

30. $\left(x-\frac{5}{14}\right)^2+\left(y-\frac{23}{14}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(x+\frac{10}{63}\right)^2+\left(y-\frac{136}{63}\right)^2=$ $=\frac{196}{3969}$.

31. $\left(x+\frac{17}{6}\right)^2+\left(y+\frac{19}{6}\right)^2=\frac{5}{4}$, $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

31. *a*) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

32. $(x-1)^2+(y-3)^2=16$. **33.** $4x+3y-42=0$, $4x+$ $+3y+8=0$.

34. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}$, $\varphi=53^\circ7'48''$. **35.** $\operatorname{tg}\varphi=\frac{7}{24}$, $\varphi=16^\circ15'37''$.

36. Равенките на заедничките тангенти на два круга, можат да се определат или напишувајќи го условот за секој круг, правата $y=kx+l$ да биде нејзина тангента, па потоа се определуваат k и l или да се определат координатите на надворешниот и внатрешниот центар на сличност на двата круга (центрите на сличност на два круга го делат растојанието меѓу центрите на круговите во однос на нивните радиуси; тангентата повлечена од центарот на сличноста на едниот круг, воедно е и тангента на другиот круг) *a*) $4x-3y=10$, $y=2$; $3x+4y-5=0$, $x-1=0$; *b*) $x+3=0$, $3x-4y-15=0$; *c*) $3y+4x+5=0$, $12y+$ $+5x+1=0$; *d*) $4y-3x-15=0$, $5y-12x-5=0$.

37. За да се двете тангенти $(x-p_1)(x_1-p_1)+(y-$ $-q_1)(y_1-q_1)=r_1^2$, $(x-p_2)(x_2-p_2)+(y-q_2)(y_2-q_2)=r_2^2$ иста права, треба коефициентот на правците и отсечките на оската y на двете прави да се еднакви. Внесеме ли го $\frac{x_1-p_1}{y_1-q_1}=\frac{x_2-p_2}{y_2-q_2}$ во равенката, што покажува, дека отсечките на оската y се еднакви поради $\frac{y_1-q_1}{y_2-q_2}=\frac{r_1}{r_2}$, (p_1-p_2) $(x_1-p_1)+(q_1-q_2)(y_1-q_1)+r_1(r_1-r_2)=0$. Оваа равенка заедно со равенката од првиот круг ги дава координатите на допирните точки. Ако наместо x_1 и y_1 пишеме x, y, таа ја означува правата што минува низ двете допирни точки. Слично се добива равенката на тетивата, што ги сврзува допирните точки на внатрешните заеднички тангенти на двата круга од првиот круг.

38. *a*) $x\pm y\sqrt{15}-8=0$; $3x\pm y\sqrt{7}-8=0$; *b*) $x-1=0$, $4x-3y=31$; внатрешните тангенти се имагинарни.

39. $m=-3\pm2\sqrt{5}$.

40. $\left(x+\frac{13}{6}\right)+\left(y-\frac{5}{18}\right)^2=\frac{1745}{162}$.

§. 26 МЕЃУСЕБНА ПОЛОЖБА НА ДВА КРУГА

Два круга можат да бидат концентрични или ексцентрични: концентрични се кога имаат исто p и q а различно r, во противен случај тие се ексцентрични.

Два ексцентрични круга можат да ги имаат следните пет положби:

1) Ако нивното централно растојание е поголемо од збирот на полупречниците, сите се надвор еден од друг.

2) Ако централното растојание им е еднакво на збирот од полупречниците, тие се допираат однадвор.

3) Ако централното растојание им е помало од збирот а поголемо од разликата на полупречниците, тие се сечат во 2 точки.

4) Ако централното растојание им е рамно на разликата на полупречниците, тие се допираат внатре.

5) Ако централното растојание им е помало од разликата на полупречниците, помалиот круг е целиот во поголемиот.

Примери: 1. Да се испита меѓусебната положба на круговите $(x-2)^2+(y-1)^2=1$, $(x+2)^2+(y+1)^2=9$. Збирот на полупречниците им е 4 а разликата 2: Централното растојание е $\sqrt{(2+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{20}$; круговите се надвор еден од круг.

2. Да се определи меѓусебната положба на круговите $(x-5)^2+(y-3)^2=16$ и $(x-4)^2+y^2=9$. Збирот на нивните полупречници е 7 а разликата им 1; централното растојание е $\sqrt{10}$.

Двата круга се сечат поради тоа што централното растојание им е помало од збирот а поголемо од разликата на полупречниците.

3. Да се определи меѓусебната положба на круговите $(x-3)^2+(y-4)^2=49$ и $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Збирот од полупречниците е 9, а разликата 5. Централното растојание е $\sqrt{8}$; помалиот круг лежи во поголемиот.

Задачи. Да се определи меѓусебната положба на круговите:

1. *a*) $x^2-6x+y^2-4y=12$, $x^2+8x+y^2+6y+21=0$, *b*) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$, $(x+4)^2+(y+3)^2=4$.

2. *a*) $x^2-16x+y^2-12y+51=0$, $x^2+8x+y^2-2y-19=0$, *b*) $x^2-16x+y^2-12y+84=0$, $x^2-10x+y^2-4y+28=0$.

3. *a*) $x^2 + y^2 - 5x - y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - y - 6 = 0$, *b*) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 49$, $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

4. *a*) $(x-4)^2 + y^2 = 25$, $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$, *b*) $x^2 - 8x + y^2 - 9 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 + 6y + 21 = 0$.

5. *a*) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 49$ *b*) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 49$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Резултати: 1. *a*), *b*). Централното растојание е поголемо од збирот на полупречниците; едниот круг е целиот надвор од другиот.

2. *a*), *b*). Централното растојание е равно на збирот од полупречниците; круговите се допираат однадвор.

3. *a*), *b*). Централното растојание е помало од збирот и поголемо од разликата на полупречниците; круговите се сечат.

4. *a*), *b*). Централното растојание е равно на разликата од полупречниците; круговите се допираат однатре.

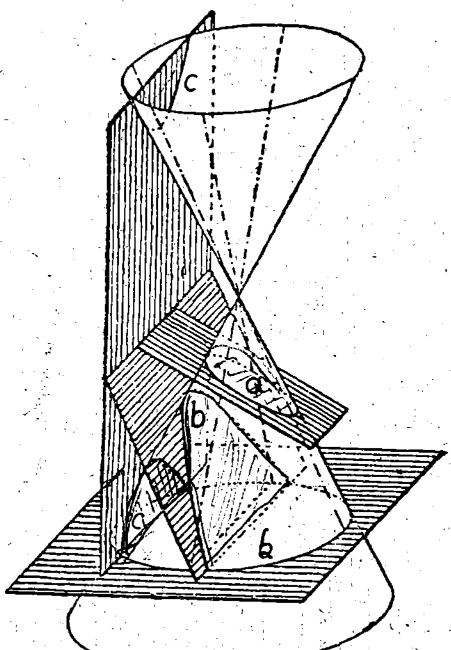
5. *a*), *b*). Централното растојание е помало од разликата на полупречниците; помалиот круг е целиот во поголемиот.

ГЛАВА V

КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

УВОД

Меѓу најважните криви доаѓаат секако различните пресеци на конус со рамнина. Ако конусот е прав а рамнината со која го сечеме нормална на оската на конусот, пресекот е круг. Со поместување паралелно на рамнината, круговите се менуваат. Тие се помали, ако рамнината е поблизу до врвот на конусот и стануваат точка кога рамнината минува низ самиот врв.



Сл 36

Ако рамнината се наведне малу, се добива како пресек крива што личи на словото O и се вика *елипса*: (Пресекот a на сл. 36). Ако ја поместуваме рамнината по оската на конусот, елипсата станува поголема, во колку рамнината е подалеку од врвот на конусот.

Ако ги разделиме двата дела на конусот со една рамнина Π што содржи една изводница g на конусот, велиме дека таа рамнина го *допира* конусот по таа изводница. Секоја рамнина, што е паралелна со предодната рамнина ги сече изводниците на конусот, освен изводницата g. Пресекот личи на бескрајно закривеното слово V и се вика *парабола* (кривата b на сл. 36). Параболата е во толку по закривена во колку е подалеку од изводницата g на конусот која со неа е паралелна.

На крајот, низ врвот на конусот да положиме една рамнина x (хи), така што да го сече конусот во две изводници g_1 и g_2. Секоја рамнина паралелна со x, го сече конусот во крива составена од две гранки која се вика *хипербола* (кривата C и C на сл. 36). Во колку рамнината на тие пресеци, т.е. рамнината со која сечеме е поблиска на рамнината x, двата дела од кривата се заостряваат и сé повеќе се приближуваат еден до друг, додека за самата рамнина не добиеме две бескрајни слова V сврзани во бескрајното слово x (икс).*)

Тоа би бил приближниот изглед на елипсата, хиперболата и параболата.

Сега, ќе ги дефинираме елипсата, хиперболата и параболата на еден друг начин, планиметриски а подоцна во § 60 ќе се увериме дека се работи за обичните пресеци на конусот елипсата, хиперболата и параболата.

§ 27. ЕЛИПСА

1. Поим за елипса. Голема оска, фокуси, ексцентрицитет. Елипсата ќе биде во некоја рака „круг со два центра" — крива, што ја има особината, *збирот* на растојанијата на која да е нејзина точка до две постојани точки да е еден ист број, карактеристичен за односната елипса. Ако го означиме овој постојанен број со $2a$ и го наречеме *голема оска* на елипсата а постојаните точки — *фокуси* на елипсата со F_1 и F_2, тогај елипсата е множество од точки T на рамнината, за кои е (види ја сл. 37).

$$F_1T + F_2T = 2a \tag{1}$$

Самите отсечки F_1T и F_2T се викаат *радиус вектори на точката T* со оглед на фокусите F_1 и F_2.

Растојанието F_1F_2 се вика *фокусно растојание* и се означува со $2e$, т.е.

$$F_1F_2 = 2e \tag{4}$$

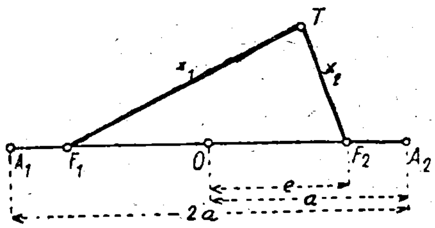
Бројот $e = \frac{1}{2}F_1F_2$ се вика (линеарен) *ексцентрицитет*

---

*) Нам ништо не ни пречи, што хиперболата се состои од два дела; ние знаеме дека тангенсоидата се состои од безброј одделни делови.

на елипсата и ни го покажува растојанието на фокусите до средината O на отсечката $F_1 F_2$.

Должината $2a$ да ја пренесеме на правата $F_1 F_2$ така, што точката O да ѝ биде средина (сл. 37). Ако $A_1 A_2$ е добиената отсечка, ќе биде $OA_1 = OA_2 = a$.



Сл. 37

Точките A_1 и A_2 се викаат главни врвови или главни темиња на елипсата.

Бидејќи за секоја точка од елипсата од една страна е

$$F_1T + TF_2 = 2a = A_1 A_2$$

а од друга, по основната особина на триаголникот

$$F_1T + TF_2 \geqq F_1 F_2$$

ќе биде

$$F_1 F_2 \leqq A_1 A_2, \text{ т. е. } 2e \leqq 2a, \text{ односно } e \leqq a$$

Ако е $F_1 F_2 = A_1 A_2$, тогај е $e = a$, $F_1T + TF_2 = F_1F_2$, а тоа значи дека точката T е во сегментот F_1F_2.

За елипсата значи треба да се зема

(5) $$2e < 2a \text{ т. е. } e < a$$

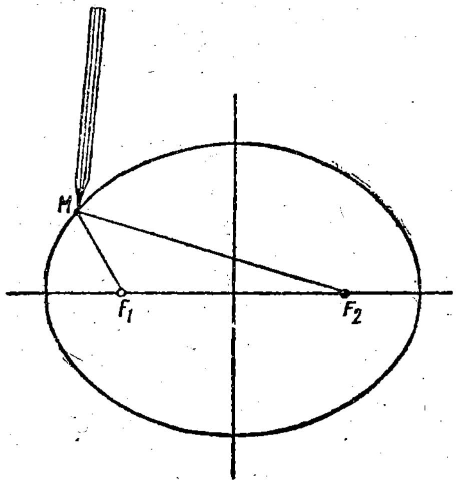
Врз основа на сето изнесено, ја имаме следната дефиниција за елипсата:

Елипсата е геометриско место на сите точки T, за кои сумата на радиус векторите од две постојани точки F_1 и F_2 е секогаш иста: $F_1 T + TF_2 = 2a$; оваа сума мора секогаш да е поголема од фокусното растојание $F_1 F_2$ т. е. $2a > F_1 F_2$.

Бројот $2a$ се вика должина на *големата* или *главна оска на елипсата.*

2. Механичка конструкција на елипсата (Декарт ја вика „градинарска конструкција") со дадени F_1, F_2, и $2a$.

Земаме конец или жица со должина $2a$ на којшто едниот крај го зацврстуваме во F_1 а вториот во F_2. Ако е затегнат конецот со молив (како што е покажано на сл. 38), при движење добиваме елипса опишана од моливот.



Сл. 38

3. Геометриска конструкција на елипсата.

Ако ни се дадени фокусите F_1 и F_2, и должината $2a$, конструкцијата на елипсата може да се изведе точка по точка со помошта на шестар. Околу фокусот F_1 како центар опишуваме лак со полупречник $r_1 < 2a$, потоа од фокусот F_2 со полупречник $r_2 = 2a - r_1$ втор лак (сл. 39). Пресечната точка на двата лака е точка од елипсата. Со повторување конструкцијата добиваме произволен број точки од елипсата.

4. Оскина равенка на елипсата. Да е земеме правата (види сл. 40) F_1F_2 за оска x а средината на отсечката F_1F_2 за координатен почеток. Тогај се фокусите дадени со:

$$F_1(-e, o),\ F_2(e, o);$$

оската y како обично е правата добиена со завртување на оската x за агол од 90^0 во позитивен смер.

Ако $T(x, y)$ е произволна точка од елипсата, тогај е

$$F_1T + TF_2 = 2a$$

или според основната формула од § 4, за растојание меѓу две точки

$$\sqrt{[x-(-e)]^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-e)^2+(y-0)^2}=2a.$$

Значи

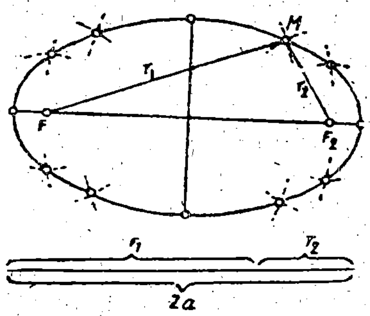
$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a.$$

Тоа е бараната равенка на елипсата. Меѓутоа, ако извршиме рационализација на последната равенка, т.е. ако се ослободиме од корените, добиваме од

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=-\sqrt{(x-e)^2+y^2}+2a$$

по квадрирање

$$(x+e)^2+y^2=(x-e)^2+y^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+4a^2$$



Сл. 39

Оттука по средување ја добиваме равенката

$$a^2-ex=a\sqrt{x^2-2ex+e^2+y^2}.$$

Уште едно квадрирање на оваа равенка ни дава

$$x^2(a^2-e^2)+y^2a^2=a^2(a^2-e^2). \tag{7}$$

Тука се јавува изразот a^2-e^2; бидејќи е $a^2>e^2$ можеме да ставиме (види сл. 40):

$$\boxed{b^2=a^2-e^2} \tag{8}$$

Отсечката или заправо бројот b се вика *споредна полуоска* заправо, должината на споредната полуоска.

Ако е $a=b$, елипсата преминува во *круг*.

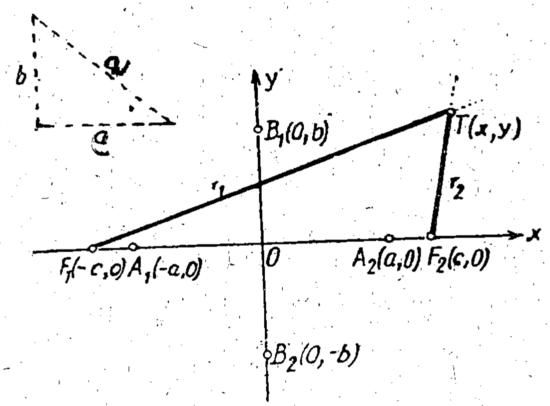
Внесувајќи ја вредноста на b од (8) во равенката (7) оваа го добива обликот

(9) $$\boxed{b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2}$$

односно

(9') $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тоа е оскина равенка на елипсата.



Сл. 40

Пример. Да се определи елипсата на којашто фокусното растојание е $F_1F_2=2e=4$, а должината на големата оска $2a=10$.

Ќе имаме $b^2=a^2-e^2=21$ па според тоа равенката на елипсата е

$$21x^2+25y^2=25\cdot 21.$$

Забелешка. Да го истакнеме повторно следното: ако две равенки се такви, едната да произлегува од другата по множење со некој различен од нула број, тие се еквивалентни и претставуваат едно исто геометриско место. На пр. секоја од равенките $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{18}=1$, $18x^2+4y^2=4\cdot 18$, $9x^2+2y^2=2\cdot 18$ претставува една иста елипса, на која е $a=2$, $b=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ т.е должината на главната оска е $6\sqrt{2}$ а должината на споредната оска 4 (*не е важна ознаката* **а** *за главната оска, ами важно е дека главната оска е поголема од споредната*).

Специјално нека запомниме, дека равенките

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

се еквивалентни.

b) *Обратна задача.*

Забележуваме дека оскината равенка на елипсата е равенка од втор степен, на којашто левата страна е збир од два квадрати.

Линеарниот ексцентрицитет на елипсата се пресметува по формулата $e=\sqrt{(\text{главна полуоска})^2-(\text{споредна полуоска})^2}$; при кругот е $e=0$.

Бројниот ексцентрицитет ε се пресметува по формулата

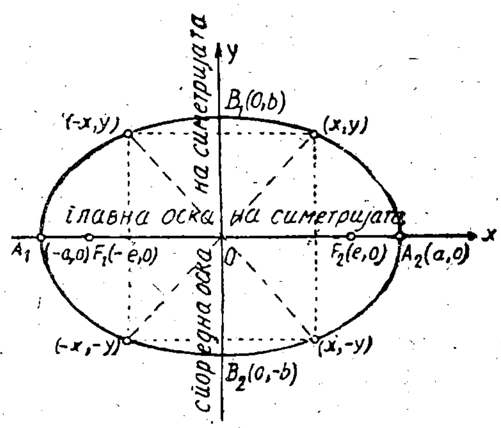
$$\varepsilon=\frac{\text{линеарен ексцентрицитет}}{\text{главна полуоска}}=\frac{e}{a}$$

Гледаме дека секогаш е $0\geqq\varepsilon<1$.

Горните формули α) и β) покажуваат, дека за точката $T(x, y)$ од елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, радиус векторите F_1T и F_2T изнесуваат

$$F_1T=a+\varepsilon x,\ F_2T=a-\varepsilon x$$

5. *Симетрија.* Веќе од самата механичка и геометриска конструкција на елипсата можевме да заклучиме, дека таа е *симетрична* крива спрема главната оска A_1A_2 и *споредната оска*, т. е. спрема симетралата на отсечката F_1F_2. Од тоа следува дека елипсата е симетрична и спрема средината O на отсечката F_1F_2. Да се увериме во ова од равенката (9).



Сл. 41

Најнапред кривата (9) е симетрична спрема оската x, оти ако лежи точката (x, y) на кривата, ќе лежи и точката

$(x, -y)$, а симетрична е и спрема оската y, оти ако точката (x, y) е на кривата, ќе биде на кривата и $(-x, y)$.

Дека кривата (9) е и централно симетрична спрема O, излегува оттаму што ако во равенката (9) наместо x и y пишеме $-x$ и $-y$ равенката е задоволена.

Навистина значи, *елипсата е симетрична спрема главната оска $A_1 A_2$ како и спрема споредната оска, т.е. симетралата на отсечката $A_1 A_2$. Елипсата има центар во средината на отсечката $A_1 A_2$ односно $F_1 F_2$.*

Да ги определиме пресечните точки на елипсата со оските; за оската x е $y = 0$, па од (9) добиваме $x^2 = a^2$ т.е. $x = \pm a$. *Правата што минува низ фокусите, ја сече елипсата во две точки т.к.н. темиња или врвови, кои се симетрично расположени спрема центарот O на елипсата.* Ова растојание е рамно на должината $2a$ на *главната оска на елипсата.*

Пресечните точки на оската y имаат апсциса 0, па од (9) за нив излегува

$$y^2 = b^2 \text{ односно } y = \pm b.$$

На крајот имаме:
Точките

$$(-a,\ 0),\ (a,\ 0), \tag{10}$$

во кои главната оска x ја сече елипсата

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

се викаат главни темиња на елипсата.

Точките

$$(0, +b),\ (0, -b), \tag{11}$$

во кои споредната оска y ја сече елипсата, се викаат споредни темиња на елипсата.

Равенката $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, каде што е $b^2 > a^2$ означува елипса, на која фокусите се на оската y. Во тој случај е $e = \sqrt{b^2 - a^2}$.

6. *Дискусија на оскината равенка на елипсата. Параметар. Паралела со главната и паралела со споредната оска.*

a) Се прашаме сега, кои од паралелите со главната, а кои од паралелите со споредната оска имаат заеднички точки со елипсата?

Од сликата 42 го гледаме следното: секоја права, паралелна со главната оска ја сече елипсата само тогај ако таа паралела ја сече споредната оска.

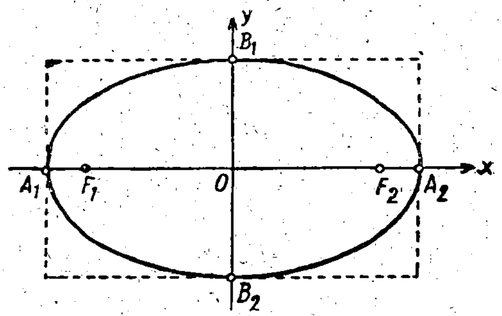
Ако правата минува низ главниот или споредниот врв, тогај таа ја допира кривата. Тоа значи, на секоја апсциса x, за која е $-a < x < a$, ѝ припаѓаат две спротивни вредности за ординатата, додека на апцисата x, која е равна на позитивната или негативната должина на главната полуоска ѝ припаѓа една единствена ордината и тоа 0 (види сл. 42).

Напротив на апсцисата што е, земајќи ја апсолутно, поголема од должината на главната полуоска, т.е. на бројот x за кој е $|x| > a$, не одговара ниедна реална точка од елипсата. Тоа се гледа и од равенката

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

која решена по непознатата y дава

$$(11) \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Сл. 42

Оттука се гледа, дека за иста апсциса x одговараат две спротивни вредности на y, што значи, дека кривата е симетрична спрема главната оска y. Понатаму, ординатата е реална ако радикандот е позитивен или 0, т.е. ако е:

$a^2 - x^2 \geqq 0$ или $a^2 \geqq x^2$, односно $x^2 \leqq a^2$ и отука $-a \leqq x \leqq a$; ординатата y е имагинарна, ако радикандот е негативен т.е. ако е

$$a^2 - x^2 < 0 \text{ или } a^2 < x^2 \text{ односно } x^2 > a^2.$$

Но $x^2 > a^2$ ќе биде како за $x > a$ така и за $x < -a$.

Значи елипсата

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

е реална за

$$(12) \qquad -a \leqq x \leqq a,$$

а имагинарна за преостанатите апсциси т.е. за

$$(13) \qquad a < x < -a.$$

Притоа a ја означува должината на главната полуоска од кривата.

Пример. Да се определи точката T $(3, y > 0)$ од елипсата

$$x^2 + 25y^2 = 25.$$

Имаме

$$9 + 25y^2 = 25, \quad y = \pm\frac{4}{5}.$$

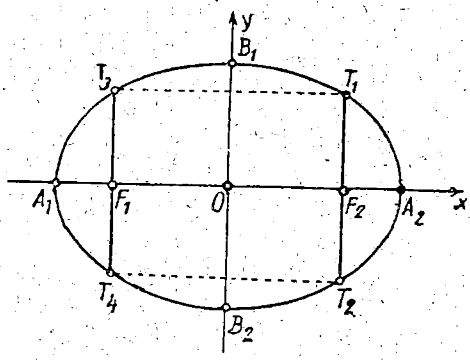
Значи на нашата елипса има две точки со апсциса 3 и тоа:

точката $\left(3, \frac{4}{5}\right)$ и точката $\left(3, -\frac{4}{5}\right)$. Бараната точка е $T\left(3, \frac{4}{5}\right)$.

Од горните разгледувања заклучуваме дека елипсата во правец на своите главни оски е расположена меѓу своите главни темиња.

Слични разгледувања за споредната оска не доведуваат до заклучок, дека елипсата во правец на својата споредна оска е расположена меѓу споредните темиња.

ђ) *Параметар на елипсата.* Гледаме дека нормалата на главната оска, подигната во фокусот, ја сече елипсата во двете точки T_1 и T_2 и со тоа определува една особена тетива на елипсата т. нар. параметар на елипсата (сл. 43). Значи параметарот на елипсата е должината на тетивата, што минува низ фокусот и стои нормално на главната оска; го обележуваме со $2p$.



Сл. 43

$2p$ е двојната позитивна ордината на точката, чија апсциса е равна на e или $-e$. Спрема равенката (11) имаме

$$(14) \qquad p = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2} = \frac{b^2}{a} \text{ т. е.}$$

Се разбира само по себеси, дека како и при кругот, отсечката што соединува две точки од кривата ќе ја викаме *тетива на кривата*.

$$\text{(15)}\quad \boxed{\text{Полупараметарот} = p = \frac{b^2}{a} = \frac{(\text{споредната полуоска})^2}{\text{главната полуоска}}}$$

Пример 1. Да се определи полупараметарот p на елипсата, на којашто е $a = 7$, $e = 4$. Имаме: $p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{33}{7}$.

Пример 2. Од равенката $9x^2 + 25y^2 = 225$ да се проучи елипсата (да се определи оската, ексцентрицитетот, координатите на темињата и координатите на фокусите).

Равенката на елипсата е $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, па според дадената имаме

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9,\ e = \sqrt{a^2 - b^2} = \pm 4,\ a = \pm 5,\ b = \pm 3.$$

Големата оска на елипсата е $2a = 10$, малата оска е $2b = 6$, координатите на темињата се: $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 3)$, $D(0, -3)$; координатите на фокусите се $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

Пример 3. Да се нацрта елипса, ако е дадена една точка од неа и двата нејзини фокуса. Дадени се F_1, F_2 и T. На отсечката F_1F_2 ја цртаме симетралата. Таа го дава центарот на кривата. На полуправа ги пренесуваме TF_1 ($= AM$) и TF_2 ($= MB$) и добиената отсечка AB е големата оска на елипсата. Ја располовуваме оваа отсечка AB и половината ја пренесуваме од O налево и надесно. Ги добиваме темињата A и B.

Со истата полуоска од F_1 со шестар ја сечеме симетралата на F_1F_2 и ги добиваме темињата C и D. Понатаму ја конструираме елипсата следејќи ја дефиницијата.

Пример 4. Да се најде равенката на елипсата, на која големата оска е $2a = 8$ и која минува низ точката $T(2, 3)$. Равенката на елипса е $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$ и за да биде позната, треба да се знаат a и b. Дадено ни е a, b го најдуваме од условот елипсата да минува низ точката T. Во тој случај координатите на оваа точка ја задоволуваат равенката на елипсата, па по внесување вредностите $a = 4$, $x = 2$, $y = 3$ добиваме

$$4b^2 + 144 = 16b^2,$$

од каде

$$b = \pm 2\sqrt{3}.$$

Равенката на елипсата ќе биде

$$12x^2 + 16y^2 = 192,$$

или

$$3x^2 + 4y^2 = 48$$

Пример 5. Како гласи оскината равенка на елипсата, што минува низ точките $A\left(3, \frac{16}{5}\right)$, $B\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

Појдуваме од општата равенка на елипсата $b^2x^2+a^2y^2= = a^2b^2$. За да ги определиме a и b потребни ни се две равенки што ги добиваме од условот, елипсата да минува низ дадените точки па координатите на овие ја задоволуваат нејзината равенка.

Со внесување координатите на дадените точки место x и y ги добиваме равенките

$$\begin{array}{l|l} 9b^2 + \frac{256}{25} a^2 = a^2b^2 & 16 \\ 16b^2 + \frac{144}{25} a^2 = a^2b^2 & -9 \end{array}$$

Собрани овие равенки по множењето со 16, односно, — 9 даваат

$$\left(\frac{256 \cdot 16}{25} - \frac{144 \cdot 9}{25}\right) a^2 = 7a^2b^2,$$

од каде е $b = \pm 4$.

Со помошта на $b = 4$ го добивме и a. Навистина, од едната (втората) од последните равенки имаме

$$256 + \frac{144}{25} a^2 = 16a^2 \quad \text{или} \quad 16 + \frac{9}{25} a^2 = a^2,$$

од каде е $a = \pm 5$.

Бараните полуоски се $a = 5$, $b = 4$ па равенката на елипсата е

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

Задачи: 1. Да се определат фокусите на елипсата: *a*) $9x^2 + 25y^2 = 225$; *b*) $x^2 + 36y^2 = 9$; *c*) $x^2 + 2y^2 = 4$; *d*) $18x^2 + 4y^2 = 9$?

2. Како гласи оскината равенка на елипсата што минува низ точките

a) $M\left(6, \frac{28}{5}\right)$, $N\left(8, \frac{21}{5}\right)$; *b*) $M\left(\frac{24}{5}, 3\right)$, $N\left(\frac{18}{5}, 4\right)$; *c*) $M(9, 4)$ $N(12, 3)$; *d*) $M\left(4\frac{1}{5}, 4\right)$, $N\left(5\frac{3}{5}, 3\right)$; *e*) $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$?

3. Колкав е параметарот и бројниот ексцентрицитет на елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$?

4. Да се определи равенката на елипсата, на којашто фокусите се $(\pm 4{,}0)$ а големата оска ѝ е 10.

5. Истотото како (во зад. 4) за елипсата чии фокуси се $(0, +3)$ и $(0, -3)$ а големата оска 12.

6. Да се определи равенката на елипсата, на којашто фокусите се $(4, 0)$ и $(-4, 0)$ а малата ѝ оска е равна на 6.

7. Да се определи равенката на елипсата, на која бројниот ексцентрицитет е $\frac{2}{3}$ а фокусите ѝ се $(0, 5)$ и $(0, -5)$.

8. Да се определи равенката на елипсата на којашто големата оска е 6 а бројниот ексцентрицитет $\frac{1}{2}$.

9. Како гласат равенките на радиус векторите на точката $(8, y > 0)$ од елипсата $36x^2 + 100y^2 = 3600$?

10. Ако целиот меридијан на Земјата го замислиме за елипса, на која полуоските се $a = 6378$ км, $b = 6357$ км, да се определи равенката, двата ексцентрицитета и параметарот на меридијанот.

11. Во елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ да се впише квадрат и определат координатите на неговите темиња.

12. Каков предзнак има триномот $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ за точки што се најдуваат во елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, а каков за точки надвор од елипсата? Дали точките $A\,(4, 1)$, $B\,(2, 7)$ се надвор или во елипсата $9x^2 + 25y^2 = 225$?

13. Да се определи равенката на елипсата, на којашто бројниот ексцентрицитет е $\frac{1}{3}$ а параметарот $2p = 8$.

14. Како гласи равенката на елипсата, на којашто центарот има координати $(3, 5)$ а оските $2a$ и $2b$ се паралелни со координатните оски?

15. Елипсата *a*) $x^2 + 9y^2 = 3$, *b*) $49x^2 + 100y^2 = 4900$, да се помести паралелно така што центарот да ѝ падне во точката $(3, -4)$.

16. Да се определат центарот, темињата, бројниот ексцентрицитет и фокусите на елипсата *a*) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$; *b*) $16x^2 + 9y^2 + 6y - 16x - 139 = 0$.

17. Да се определи равенката на елипсата, на којашто оските се 8 и 4, центарот ѝ е во $S\,(2, -3)$ а големата оска паралелна со оската x.

18. Да се определи равенката на елипсата, на којашто оските се $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{3}$, центарот ѝ е во $S\,(1, -1)$ а големата оска паралелна со оската y.

19. Докажи ја теоремата: ако две елипси имаат еднаков бројни ексцентрицитет, оските им се пропорционални, т. е. тие се слични.

20. Докажи ја теоремата: ако две елипси имаат еднаков бројни ексцентрицитет и еднаков параметар, тие се складни.

21. Каква елипса ни претставуваат равенките *a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a^2 < b^2$; *b*) $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, $a^2 > b^2$.

22. Докажи дека равенката на елипсата може да се пише во обликот $x^2 + y^2 = b^2 + \varepsilon x^2$:

23. Како гласи равенката на елипсата, на која центарот е во десниот фокус а големата полуоска се поклопува со оската x?

24. Да се нацрта триаголникот ABC, ако се дадени $AB = 6$, $BC + AC = 10$, $v(AB) = 3$.

25. Да се докаже дека за секое t, точката со координата $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b\frac{2t}{1+t^2}$ лежи на елипсата.

26. Да се определи елипса на којашто се дадени бројниот ексцентрицитет ε и параметарот p.

27. Како гласи равенката на елипсата при која е $a + b = 25$, $e = 5$.

28. Да се докаже дека сите елипси $(a^2 - 9)x^2 + a^2y^2 = a^4 - 9a^2$ каде a е произволно, се конфокални, т. е. имаат исти фокуси.

29. Од кои точки на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ се гледаат фокусите под прав агол.

Резултати:

1. *a*) $\pm 4{,}0$; *b*) $\pm\frac{\sqrt{35}}{2}, 0$; *c*) $\pm\sqrt{2}, 0$; *d*) $0, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

2. *a*) $49x^2 + 100y^2 = 4900$, *b*) $25x^2 + 36y^2 = 900$. *c*) $x^2 + 9y^2 = 225$, *d*) $25x^2 + 49y^2 = 1225$, *e*) ако е $x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 = m$, тогај е $a^2 = \frac{m}{y_2^2 - y_1^2}$, $b^2 = \frac{m}{x_1^2 - x_2^2}$; за $x_1^2 > x_2^2$ мора да е $y_1^2 < y_2^2$.

3. $2p = \frac{8}{3}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

4. $9x^2 + 25y^2 = 225$.
5. $4x^2 + 3y^2 = 108$.
6. $9x^2 + 25y^2 = 225$.
7. $36x^2 + 20y^2 = 1125$.
8. $3x^2 + 4y^2 = 27$.
9. $x = 8$, $9x - 40y + 72 = 0$.

10. $6357^2x^2 + 6378^2y^2 = 6357^2 \cdot 6378^2$; $e = 3\sqrt{29715}$, $\varepsilon = e : a = 3\sqrt{29715} : 6378$.
11. $x = y\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

12. Ако точката M е во елипсата лесно се наоѓа дека е $MF_1+MF_2<2a$ од каде излегува $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2<0$; ако M е надвор од елипсата, тогај е $MF_1+MF_2>2a$ одкаде излегува $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2>0$. Во посебниот пример A е внатре а B надвор од елипсата.

13. $8x^2+9y^2=162$. **14.** $49(x-3)^2+100(y+4)^2=4900$.

15. a) $(x-3)^2+9(y+4)^2=3$, b) $49(x-3)^2+100(y+4)^2=4900$.

16. a) $(-2,1)$; $(-5,1)$; $(1,1)$, $\frac{1}{3}\sqrt{5}$; $(-2\pm\sqrt{5},1)$;

b) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{2},-\frac{13}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{3}\right)$; $\frac{1}{4}\sqrt{7}$; $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\pm\sqrt{7}\right)$

17. $x^2+4y^2-4x+24y+24=0$.

18. $36x^2+25y^2-72x+50y+60=0$.

19. Од $\frac{e}{a}=\frac{e'}{a'}$ излегува $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$.

20. Од $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ и $\frac{b^2}{a}=\frac{b'^2}{a}$ излегува $b=b'$, $a=a'$.

21. Елипса, на која големата оска е $2b$ во случајот a), $2a$ во случајот b), е на оската y, а малата оска на оската x.

22. Излегува од $a^2x^2-(a^2-b^2)x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

23. Ако во равенката од **22.** задача пишеме $x-e$ наместо x и оставиме y непроменливо и земајќи уште предвид дека е $1-\varepsilon^2=\frac{p}{a}$, $b^2-\frac{p}{a}e^2=p^2$ излегува $x^2+y^2=(p+\varepsilon x^2)$.

24. Темето C се наоѓа во пресекот на елипсата $16x^2+25y^2=400$ и правата $y=3$.

25. Треба да се докаже дека е $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

26. Излегува $b^2=\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$, $a^2=\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$, мора да биде $\varepsilon<1$.

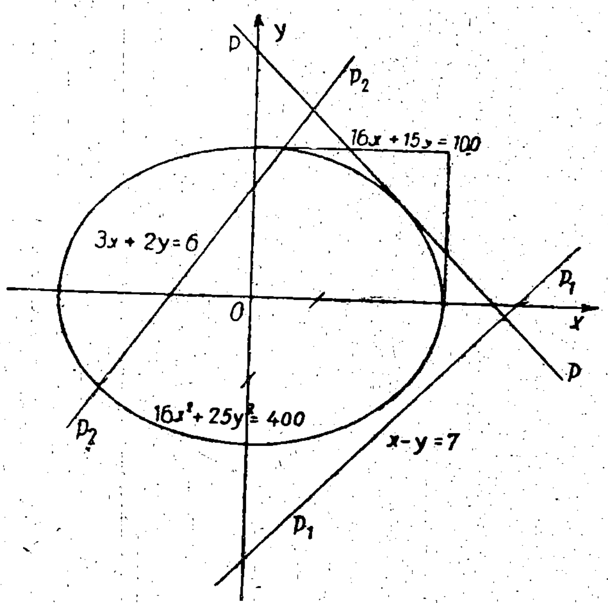
27. $144x^2+169y^2=24336$.

28. Координатите на фокусот не зависат од a.

29. Треба да се определат пресечните точки на елипсата и кругот $x^2+y^2=e^2$. Излегува $x^2=\frac{a^2(e^2-b^2)}{a^2-b^2}$, $y^2=b^2\frac{a^2-e^2}{a^2-b^2}$. За $a^2>b^2$ мора да биде $a^2>e^2>b^2$.

§ 28. ЗАЕДНИЧКИ ТОЧКИ НА ДВЕ КРИВИ

1. Пресек на криви — решавање равенки. Исто како што при барањето на пресечни точки на две прави или права и круг ги решававме равенките што припаѓаат на тие криви за да ги најдеме решенијата им, постапуваме и при барањето на пресечни точки на кои било две криви.



Сл. 44

Пример 1. Да се најде односот меѓу елипсата $16x^2 + 25y^2 = 40$ и правата *a*) $x - y - 7 = 0 \equiv p_1$; *b*) $3x - 2y + 6 = 0 \equiv p_2$; *c*) $16x + 15y = 100 \equiv p_3$, (сл. 44).

Одговор на задачата добиваме, ако го решиме системот равенки составен од равенките на правата и елипсата.

a)
$$16x^2 + 25y^2 = 400,$$
$$x - y = 7.$$

Од втората равенка имаме $x = 7 + y$. Внесувајќи ја оваа вредност за x во првата равенка добиваме по средување $41y^2 + 224y + 384 = 0$. Дискриминантата на оваа равенка е $D = b^2 - 4ac = -13128 < 0$. Таа е како што гледаме помала од нула, па според тоа решенијата се имагинарни. Дадената права и елипса немаат заеднички точки.

b)
$$16x^2+25y^2=400,$$
$$3x-2y+6=0.$$

Од другата равенка имаме $3x=2y-6$ и со замена на x оттука во првата равенка добиваме

$$289y^2-384y-3024=0.$$

Бидејќи коефициентот пред y и независниот член имаат противни знаци, корените на последната равенка се реални и нееднакви. Дадената права ја сече елипсата.

c)
$$16x^2+25y^2=400,$$
$$16x+15y=100.$$

По истиот начин во овој случај ја добиваме равенката

$$16x^2+25\left(\frac{20}{3}-\frac{16}{15}x\right)^2=400$$

или средена

$$x^2-8x+16=0$$

Дискриминантата $D=b^2-4ac=8^2-4.16=0$. Системот има две еднакви решенија. Дадената права и елипса се допираат.

§ 29. ТАНГЕНТА И НОРМАЛА НА ЕЛИПСАТА

Под тангента на елипсата разбираме секоја права, што ја допира елипсата. Таа ја допира елипсата во една заедничка точка што ја викаме допирна точка на тангентата и елипсата.[1])

Под *нормала* на крива во дадена точка од кривата разбираме права што е нормална на тангентата на кривата во истата точка.

Да видиме како низ дадена точка ќе повлечеме тангента и нормала на дадената елипса

$$(1)\qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Прв случај. Дадена е допирната точка $D(x_1, y_1)$; да се најде равенката на тангентата на елипсата (1).

Штом правата минува низ точката $D(x_1, y_1)$ таа има равенка од обликот

$$(2)\qquad y-y_1=k(x-x_1).$$

---

[1]) Кривата $y=\sin x$ (синусоида) ја има правата $y=1$ за тангента макар што таа права и кривата имаат безброј многу допирни точки.

За да го определиме коефициентот на правецот k, го поставуваме условот правата (2) да ја допира елипсата (1), т. е. тие да имаат само една пресечна точка. Со елиминација на y од равенките (1) и (2) ја добиваме равенката

$$b^2x^2 + a^2[y_1 + k(x - x_1)]^2 = a^2b^2,$$

односно по средување

(3) $$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2k(y_1 - kx_1)x + a^2(y_1 - kx_1)^2 - a^2b^2 = 0.$$

Со оваа равенка се определени апсцисите на пресечните точки на (1) и (2). Но пресечните точки се поклопуваат, т.е. тие се една, па апсцисата x на допирната точка $D(x_1, y_1)$ е двоен корен на равенката.

По правилото на Виета ја имаме релацијата

$$2x_1 = -\frac{2a^2k(y_1 - kx_1)}{b^2 + a^2k^2}.$$

Решена оваа равенка по k дава

(4) $$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Значи, коефициентот на правецот на тангентата на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ во точката (x_1, y_1) од таа елипса е даден со (4).

Внесена оваа вредност за k во (2) ни ја дава равенката на самата тангента во обликот

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1).$$

Ако ја помножиме оваа равенка со a^2y_1, таа може да се напише и во облик

(5) $$a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2y_1^2 + b^2x_1^2.$$

Бидејќи точката (x_1, y_1) лежи на дадената елипса, десната страна во (5) е a^2b^2 па таа добива облик

(6) $$\boxed{b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2}$$

Тоа е равенката на тангентата на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, во точката (x_1, y_1) од таа елипса како допирна точка.

Таа формула лесно се помни.

Равенката на нормалата во точката (x_1, y_1) од елипсата е

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

Пример 1. Да се определат во точката (2, 2) од елипсата $5x^2 + 20y^2 = 100$ равенките на тангентата и нормалата.

Спрема (6), тангентата ја има равенката

$$5 \cdot 2x + 20 \cdot 2y = 100 \text{ т. е. } x + 4y = 10.$$

Нормалата е права што минува низ точката (2, 2) т. е.

$$y - 2 = a(x - 2).$$

Таа е нормална на тангентата па е $a = -\frac{1}{k} = 4$. Нејзината равенка ќе биде значи

$$y - 2 = 4(x - 2) \text{ т. е. } 4x - y = 6.$$

Втор случај. Од точката T (x_0, y_0) што не лежи на елипсата (1) да се повлече тангента на таа елипса. Овој случај се сведува на предодниот: прво се определува допирната точка (x_1, y_1) на бараната тангента, па потоа и самата тангента по формулата (6). Допирната точка ја најдуваме од равенките

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \text{ и} \tag{7}$$

$$b^2x_0x_1 + a^2y_0y_1 = a^2b^2, \tag{8}$$

кои изразуваат дека точката $D_1(x_1, y_1)$ лежи и на елипсата и на тангентата и дека оваа последната минува и низ точката (x_0, y_0).

Пример 2. Да се повлече од точката $T\left(7, \frac{2}{5}\right)$ тангента на елипсата $4x^2 + 25y^2 = 100$. Ако ја означиме допирната точка на тангентата со $D_1(x_1, y_1)$ ќе имаме

$$4x_1^2 + 25y_1^2 = 100. \tag{a}$$

Тангентата ја има равенката $4xx_1 + 25yy_1 = 100$ или бидејќи дадената точка $T\left(7, \frac{2}{5}\right)$ лежи на неа, ќе биде

$$28x_1 + 10y_1 = 100$$

Оттука го изразуваме y_1 и заменуваме во (a). По средување ја добиваме равенката

$$x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0,$$

чии решенија се 4 и 3. Соодветните ординати се $-\frac{6}{5}$ и $\frac{8}{5}$. Спрема тоа допирните точки се

$$\left(4, -\frac{6}{5}\right) \text{ и } \left(3, \frac{8}{5}\right).$$

Според (6), соодветните тангенти се

$8x - 15y = 50$, за првата допирна точка и

$3x + 10y = 25$, за втората допирна точка.

На сличен начин може да се докаже дека од секоја точка надвор од елипсата, можат да се повлечат на таа елипса две различни тангенти. Ако точката е во елипсата, не може да се повлече ниедна тангента на елипсата. За точка од елипсата постои само една тангента што таа точка ја има како допирна.

Пример 3. Да се определи равенката на нормалата во точката $M\left(\frac{21}{5}, 4\right)$ од елипсата $25x^2 + 49y^2 = 1225$

Имаме

$$y - 4 = \frac{49 \cdot 4}{25 \cdot \frac{21}{5}}\left(x - \frac{21}{5}\right)$$

или ако се среди

$$75y - 140x + 288 = 0$$

Услов правата $y = kx + l$ да е тангента на елипсата

Кога ги бараме пресечните точки на правата $y = kx + l$ и елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ги решаваме овие равенки заменувајќи го y од првата во втората равенка. Така ја добиваме равенката

$$x^2(a^2k^2 + b^2) + 2kla^2x + l^2a^2 - a^2b^2 = 0.$$

За апсцисата на пресечната точка имаме

$$x = -\frac{1}{k^2a^2 + b^2}\left(kla^2 \pm ab\sqrt{a^2k^2 + b^2 - l^2}\right).$$

Правата $y = kx + l$ ја сече елипсата ако дискриминантата $k^2a^2 + b^2 - l^2 > 0$; ако дискриминантата $a^2k^2 + b^2 - l^2 = 0$, пресечните точки се поклопуваат и правата е тангента на елипсата. Според ова, релацијата $\boxed{a^2k^2 + b^2 = l^2}$ го претставува условот, правата $y = kx + l$ да е тангента на елипсата.

Координатите на допирните точки се

$$x_1 = -\frac{kla^2}{a^2k^2 + b^2} = -\frac{kla^2}{l^2} = -\frac{k}{l}a^2,$$

$$y_1 = kx_1 + l = -\frac{k^2}{l}a^2 + l = \frac{-k^2a^2 + l^2}{l} = \frac{b^2}{l}.$$

Оттука излегува исто така, ако се познати координатите на допирните точки, отсечката на оската y е $l = \frac{b^2}{y_1}$ а коефициентот на правецот $k = -\frac{lx_1}{a^2} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. Равенката на тангентата според тоа е

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1} \text{ или } b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2,$$

т.е. исто како и порано добиениот резултат.

Пример. Од точката $T(x_0, y^0)$ да се повлечат тангенти на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Координатите на точката T мораат да ги задоволуваат равенките

$$y_0 = kx_0 + l \text{ и } a^2k^2 + b^2 = l^2.$$

Од овие равенки треба да се определат k и l.

Внесе ли се за $l = y_0 - kx^0$ во $a^2k^2 + b^2 = l^2$ излегува

$$k^2(a^2 - x_0^2) + 2kx_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0.$$

Дискриминантата на оваа равенка е

$$b^2x_0^2 + a^2y^2 - a^2b^2.$$

Ако таа е поголема од нула, т.е. ако точката $T(x_0\, y_0)$ е надвор од елипсата, се добиваат две вредности за k, k_1 и k_2, а тогај и две вредности за l, l_1 и l_2. Значи од точката $T(x_0y_0)$ можат да се повлечат на елипсата две тангенти. Ако дискриминантата е нула, точката $T(x_0, y_0)$ е на нејзината елипса и добиваме една тангента. Ако пак е $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$ точката е во елипсата и немаме реални тангенти на елипсата од таа точка.

Се разбира, дека двете тангенти што можат до T да се повлечат на елипсата, меѓусебно ќе бидат нормални, т.е. ќе биде $k_1k_2 = -1$, кога е $\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1$ или $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$.

Ова ни покажува, дека геометриското место на точките од рамнината од кои можат да се повлечат на елип-

сата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *две меѓусебно нормални тангенти е* **круг,** *опишан околу почетокот со полупречник* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Овој круг се вика *Монжеов* или *ортоптичен.*

Пример. Од точката $T\left(7, \frac{2}{5}\right)$ да се повлечат тангенти на елипсата $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Треба да се исполнат условите

$$\frac{2}{5} = 7k + l, \quad 25k^2 + 4 = l^2.$$

Со елиминација на l се добива равенката $600k^2 - 140k - 96 = 0$ и оттука

$$k_1 = \frac{8}{15}, \quad k_2 = -\frac{3}{10} \text{ и потоа } l_1 = -\frac{10}{3}, \; l_2 = \frac{5}{2}.$$

Значи равенките на тангентите се:

$$15y = 8x - 50 \text{ и } 10y + 3x = 25.$$

Задачи 1. Да се определат пресечните точки на правата и елипсата *a*) $2x + 21y = 60$, $16x^2 + 36y^2 = 576$, *b*) $3x + 2y - 10 = 0$, $x^2 + 4y^2 = 20$, *c*) $5y + 4x - 28 = 0$, $16x^2 + 25y^2 = 400$, *d*) $3y + x - 21 = 0$, $x^2 + 9y^2 = 225$, *e*) $8y + 5x - 56 = 0$, $25x^2 + 64y^2 = 1600$.

2. Колкава е тетивата, што правата $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ја определува на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$?

3. Во точката $M\left(\frac{24}{5}, -3\right)$ од елипсата $25x^2 + 36y^2 = 900$ да се определи равенката на тангентата и нормалата.

4. Да се определи равенката на тангентата во точката $M\left(3, \frac{12}{5}\right)$ од елипсата $9x^2 + 25y^2 = 225$.

5. Тангентите на елипсата повлечени во точките со апсциси $x = \pm e$ образуваат ромб. Да му се определат страните и површината.

6. Во пресечните точки на правата $14x + 5y - 50 = 0$ и елипсата $4x^2 + 25y^2 = 100$ да се повлечат тангенти на елипсата. Да се определат координатите на нивната пресечна точка.

Најди ги спротивните точки и на вториот фокус, по однос на истата тангента.

7. Да се повлечат тангентите на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ чии коефициент на правецот е a) $+1$, b) -1. Кои се координатите на допирните точки?

8. На елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ да се повлечат тангентите паралелни со правата $bx + ay = ab$ и определат нивните равенки.

9. Да се определат равенките на тангентите повлечени од

a) $T(-5{,}9)$ на елипсата $9x^2 + 25y^2 = 225$,

b) $T\left(-\frac{63}{5}, -1\right)$ „ „ $25^2 + 81y^2 = 2025$

c) $T(0, -3)$ „ „ $5x^2 + 9y^2 = 45$,

d) $T\left(3, 7\frac{2}{5}\right)$ „ „ $9x^2 + 25y^2 = 225$,

e) $T\left(\frac{15}{4}, 8\right)$ „ „ $9x^2 + 25y^2 = 225$.

10. Да се определи точка од елипсата, во која нормалата минува низ фокусот.

11. Колкаво треба да е b во равенката на елипсата $b^2x^2 + 25y^2 = 25b^2$ за правата $5x + 6y - 30 = 0$ да ја допира таа елипса.

12. Да се определи равенката на елипсата, што ја допира правата $4x + 5y - 25 = 0$ во точката со апсциса 4.

13. Да се определи равенката на елипсата што ја допираат правите

a) $2x + 3y - 25 = 0$, $\quad 3x - 8y - 50 = 0$

b) $5x + 12y + 75 = 0$, $\quad 20x - 27y + 225 = 0$

c) $3x + 10y - 25 = 0$, $\quad 8x - 15y - 50 = 0$

d) $-10y + 3x - 25 = 0$ $\quad 40y - 63x - 325 = 0$.

14. На елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$ да се повлечат тангенти паралелни со правата $2x + 4y - 15 = 0$. Кои се координатите на тие тангенти и кои се координатите на допирните точки?

15. На елипсата $9x^2 + 16y^2 = 144$ да се повлечат тангенти кои со позитивниот смер на оската x затвораат агол од $45°$. Да се определат равенките на тангентите и координатите на нивните допирни точки.

16. Да се докаже аналитички: Ако нормалата во секоја точка од елипсата минува низ центарот на елипсата, таа е круг.

17. На елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$ да се повлече тангента, која отсечува на координатните оски еднакви отсечки. Да се определи равенката на тангентата и координатите на допирните ѝ точки.

18. Во точката со апсциса e од елипсата $9x^2+25y^2=225$ да се повлече тангента на елипсата. Колкава е површината меѓу тангентата и координатните оски?

19. Во точката $(3, y>0)$ од елипсата $9x^2+25y^2=225$ да се повлече тангента и нормала; да се определат равенките на радиус векторите што ѝ припаѓаат на таа точка и да се докаже дека симетралата на внатрешниот агол на радиус векторите е идентична со нормалата.

20. Во точката $M(2, y>0)$ од елипсата $4x^2+9y^2=36$ да се повлече тангента на елипсата. Од фокусите да се повлечат нормалите на таа тангента. Да се определат равенките на овие нормали и делот на тангентата меѓу нормалите.

21. Да се определат равенките на тангентите на елипсата $9x^2+25y^2=225$ што се *a*) паралелни, *b*) нормални на правата $4x+5y=0$.

22. Да се докаже, дека производот на нормалите повлечени од фокусите на елипсата до тангентата е постојан и еднаков на b^2.

23. Да се докаже: аголот што го зафаќаат тангентите повлечени од $T(x_0, y_0)$ на елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ е даден со

$$tg\,\varphi=\frac{2\sqrt{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}}{a^2+b^2-x_0^2-y_0^2}.$$

24. Околу елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ да се опише квадрат.

25. Колкави се страните на рамнокракиот триаголник, опишан околу елипсата $144x^2+225y^2=32400$, ако му е основата паралелна со големата оска и висината еднаква на 27.

26. Да се определи точка од оската x така што должината на тангентата од неа до допирната точка на елипсата $49x^2+81y^2=3969$ да биде рамна на половина од малата оска.

27. Да се докаже: ако растојанието на тангентата на елипсата до центарот и е α а аголот на таа тангента со големата оска на елипсата d, тогај постои релацијата $d^2=a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha$.

28. Во пресечните точки на елипсата $9x^2+25y^2=225$ и кругот $x^2+y^2-8x+12=0$, да се определат равенките на тангентите (на елипсата) и површината на четириаголникот што го образуваат овие тангенти.

29. Да се определат пресечните точки на кривите $4x^2+9y^2=180$ и $x^2+y^2=25$ и аголот меѓу нив. ✓

30. Да се докаже теоремата: Ако се повлечат тангентите во темињата $A(a, 0)$ и $B(-a, 0)$ од елипсата, тогај производот на отсечките на тие тангенти од темињата до пресечните точки P и P' со произволната тангента $b^2xx_1-a^2yy_1=a^2b^2$ е постојан и еднаков на b^2.

31. Да се докаже дека правите PF_1 и $P'F_2$ (види ја претешната задача) се сечат на нормалата на точката $M(x_1, y_1)$.

32. Околу елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ опишан е рамностран триаголник, на којшто врвот е $C(o, s)$. Колкава е неговата површина?

33. Да се определат равенките на заедничките тангенти на кривите:

$a)$ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{12} = 1, \frac{x^2}{112} + \frac{y^2}{9} = 1$; $b)$ $41x^2 + 41y^2 = 625, 9x^2 + 25y^2 = 225$, $c)$ $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{25} = 1,\ x^2 + y^2 = 75$?

Резултати:

1. $a)$ $M_1\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$, $M_2\left(-\frac{18}{5}, \frac{16}{5}\right)$; $b)$ $M_1(4, -1)$, $M_2(2, 2)$; $c)$ $M_1\left(3, \frac{16}{5}\right)$, $M_2\left(4, \frac{12}{5}\right)$; $d)$ $M_1(9, 4)$, $M_2(12, 3)$, $e)$ $M_1\left(\frac{24}{5}, 4\right)$ $M_2\left(\frac{32}{5}, 3\right)$.

2. $t = \frac{2ab}{a^4 + b^4}\sqrt{a^6 + b^6}$. **3.** $10x - 9y - 75 = 0$, $10y + 9x = \frac{66}{5}$.

4. $9x + 20y - 75 = 0$, $45y - 100x + 192 = 0$.

5. $s = \frac{a}{e}\sqrt{a^2 + e^2}$, $P = \frac{2a^3}{e}$. **6.** $M\left(7, \frac{2}{5}\right)$.

7. $x_{1,2} = \mp\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y_{1,2} = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **8.** $y = -\frac{b}{a}x \pm b\sqrt{2}$.

9. $a)$ $x + 5 = 0$, $4x + 5y - 25 = 0$, $M_1(-5, 0)$, $M_2\left(4, \frac{9}{5}\right)$; $b)$ $5x + 12y + 75 = 0$, $20x - 27y + 225 = 0$, $M_1\left(-\frac{27}{5}, -4\right)$, $M_2\left(-\frac{36}{5}, 3\right)$; $c)$ $2x - 3y - 9 = 0$, $2x + 3y + 9 = 0$, $M_1\left(2, -\frac{5}{3}\right)$, $M_2\left(-2 - \frac{5}{3}\right)$; $d)$ $4x - 5y + 25 = 0$, $x - y - 5 = 0$,

$M_1\left(-4, \frac{9}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{143}{29}, \frac{72}{145}\right)$; e) $5y-4x-25=0$, $44x+$ $+7y-221=0$, $M_1\left(-4, \frac{9}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{1100}{221}, \frac{63}{221}\right)$.

10. Темињата A, B. **11.** $b^2=\frac{275}{36}$. **12.** $9x^2+25y^2=$ $=225$.

13. a) $25x^2+100y^2=2500$, b) $25x^2+81y^2=2025$,,
c) $4x^2+25y^2=100$, d) $4x^2+25y^2=100$.

14. $x+2y=5$, $x+2y=-5$, $M_1\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$, $M_2\left(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.

15. $x-y+5=0$, $x-y-5=0$, $M_1\left(-\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

16. Од равенката на нормалата, ако се стави $x=0$, $y=0$, излегува $a^2=b^2$.

17. $x+y-\sqrt{13}=0$; $M_1\left(\frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}\right)$. **18.** $\frac{125}{8}$.

19. $9x+20y-75=0$, $100x-45y-192=0$; $12x+5y-$ $-48=0$, $12x-35y+48=0$, $100x-45y-192=0$.

20. $4x+3\sqrt{5}y=18$, $3x\sqrt{5}-4y-15=0$.

21. $4x+5y-25=0$, $4x+5y+25=0$, $5x-4y-$ $-\sqrt{769}=0$, $-5x+4y-\sqrt{769}=0$.

22. $n(e,0)=\frac{a^2b^2-b^2ex_1}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}$, $n_2(-e,0)=\frac{a^2b^2+b^2ex_1}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}$, $n_1n_2=b^2$, оти е $a^4y_1^2=a^4b^2-a^2b^2x_1^2$.

23. Определи ги коефициентите на правците на двете тангенти и потоа нивниот агол.

24. a) ± 3, $\pm\frac{8}{5}$, $tg\varphi=\frac{126}{125}$, $\varphi=45°13'43''$; b) $\pm\frac{12}{5}\pm$ $\pm\frac{6}{5}$, $tg\varphi=\frac{35}{72}$, $\varphi=25°55'30''$, c) $tg\varphi=\frac{5}{6}$.

25. $x_1=\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

26. Равенките на краците се $5y=\pm 3x+75$ а должините им $3\sqrt{306}$.

27. Ансцисата на допирната точка излегува од равенката $32x_1^4 - 2x_1^2 \cdot 6561 + 6561 \cdot 81 = 0$, $x_1 = \frac{7}{4}$; $y_1 = \frac{7\sqrt{7}}{4}$, апсцисата на точката на x оската е $x = 12$.

28. Бидејќи отсечките на тангентите од елипсата на координатните оски се $\frac{a^2}{x_1}, \frac{b^2}{y_1}$ тогаш е $d = \frac{a^2}{x_1} \sin\alpha$, $d = \frac{b^2}{y_1} \cos\alpha$. Ако се пресметаат оттука вредностите за x и y и внесат во равенката на елипсата, излегува $a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha = d^2$.

29. $P = 14\sqrt{7}$.

30. $M_1(3, 4)$, $M_2(-3, 4)$, $M_3(-3, -4)$, $M_4(3, -4)$, $3x + 4y - 25 = 0$, $x + 3y - 15 = 0$, $tg\varphi \frac{1}{3}$, $\varphi = 18^0 26' 6''$.

31. Се наоѓа, дека е $AP = \frac{b^2(a - x_1)}{ay_1}$, $BP = \frac{b^2(a + x_1)}{ay_1}$ а оттука со помошта на равенката на елипсата излегува $AP \cdot BP = b^2$.

32. Пресечната точка на PF_2 и $P'F_1$ има координати $N\left(-\frac{ex_1}{a}, -\frac{ey_1}{a - e}\right)$. Овие координати ја задоволуваах и равенката на нормалата во точката $M(x_1, y_1)$.

33. $l^2(a^2 + b^2k^2) = e^4k^2$.

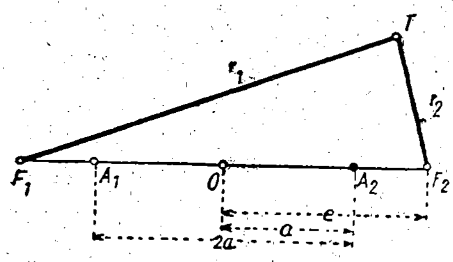
34. Страната CA на рамностраниот триаголник ја има равенката $y = x\sqrt{3} + s$; штом таа треба да биде тангента на елипсата, излегува $3a^2 + b^2 = s^2$ или $s = \sqrt{3a^2 + b^2}$; висината на рамностраниот триаголник е $b + \sqrt{3a^2 + b^2}$, $P = \frac{v^2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b + \sqrt{3a^2 + b^2}\right)^2$.

35. *a*) $4y = \pm x \pm 16$; *b*) $5y = \pm 4x \pm 25$; *c*) $3y = \pm \pm\sqrt{3}x \pm 30$.

§ 30. ХИПЕРБОЛА

1. Поим за хипербола, голема оска, фокуси и ексцентрицитет. Видовме дека елипсата е множество на точки, чиј што збир од растојанијата (радиус векторите) до две постојани точки F_1 и F_2 секогаш е еден ист број.

Ако наместо збирот ја посматраме *разликата на растојанијата т. е. радиус векторите*, добиваме — наместо елипса — друга крива т. н. хипербола, на којашто F_1 и F_2 се фокуси а $2a$ голема оска. Хиперболата е значи множество од точки T од рамнината за кои е (види сл. 45).



Сл. 45

(1) $$F_1T - F_2T = 2a \text{ или } F_2T - F_1T = 2a$$

односно

(2) $$| F_1T - F_2T | = 2a,$$

каде што $|\ |$ ја означува *апсолутната вредност* на изразот меѓу радиус векторите.

Растојанието F_1F_2 се вика *фокусно растојание* или растојание на фокусите и се означува со $2e$. Значи е

(3) $$F_1F_2 = 2e.$$

Бројот $e = \frac{1}{2} F_1F_2$ се вика (линеарен) *ексцентрицитет на хиперболата* и ни го покажува растојанието на еден од фокусите до средината O на отсечката F_1F_2. Потоа ќе видиме дека O е и центар на симетријата на хиперболата.

Ја нанесуваме должината $2a$ на правата F_1F_2 така што точката O да биде средина (сл. 45) и ја добиваме должината A_1A_2. Ќе биде значи

$$OA_1 = OA_2 = a$$

Точките A_1 и A_2 се викаат главни *врвови* или *темиња* на хиперболата.

Бидејќи е $|F_1T - F_2T| = 2a$, притоа за $\triangle F_1F_2T$ мора да е $F_1T - F_2T \leq 2a$, ќе имаме $2a \leq F_1F_2$. Ако е $2a = F_1F_2$ тогај е $F_1T - F_2T = F_1F_2$, што значи дека T е на правата F_1F_2 надвор од отсечката, F_1F_2 и тоа десно од $F_1 = A$. Разгледувајќи го исто така $F_2T - F_1T = F_1F_2$ заклучуваме дека и точките од правата F_1F_2 надвор од отсечката F_1F_2 ја чинат хиперболата. Тоа е граничен случај на хиперболата. За да не се случи тоа, во дефиницијата на хиперболата да се земе

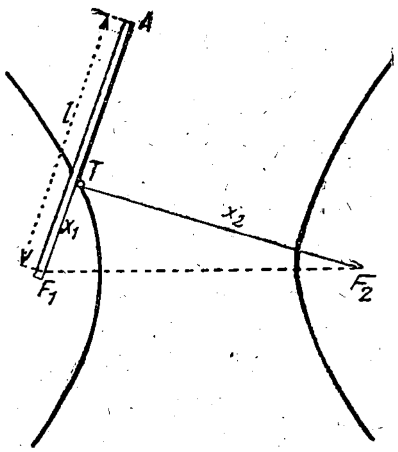
(4) $2e > 2a$ т.е. $e > a$ (види сл. 45).

Така ја имаме следната дефиниција за хиперболата:

Хиперболата е геометриско место на точки T за кои разликата на радиус векторите од две постојани точки F_1 и F_2 е секогаш иста: $|F_1T - F_2T| = 2a$. Оваа разлика секогаш е помала од фокусното растојание F_1F_2, значи $2a < F_1F_2$.

Како што при определувањето на кругот треба да го знаеме неговиот центар и радиус, така и за хиперболата треба да ги знаеме нејзините фокуси F_1F_2 и должината $2a$ на главната й оска.

Бројот $2a$ се вика *должина на големата или главната* (реалната) *оска на хиперболата.*

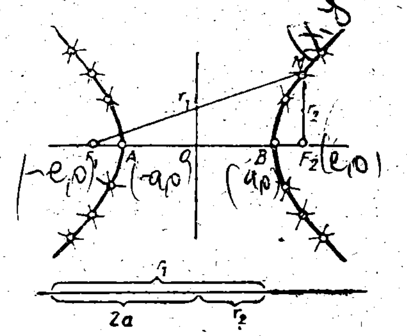


Сл. 46

2. *a) Механичка конструкција на хиперболата со дадени* F_1, F_2 и $2a$. Земаме ленир со должина l и конец или жица со должина $l' = 2a + l$. Лениротго прицврстуваме во едниот фокус на пр. F_1 така што да може околу него тој да се врти во рамнината што ја цртаме (сл. 46). Едниот крај од жицата го зацврстуваме за вториот крај од лениротa вториот во F_2. Со молив ја држиме жицата напната во секоја положба на лениротт. Вртејќи го ленирот околу F_1, моливот ќе опишува едната гранка на хиперболата во која се наоѓа фокусот. Ако ленирот се уцврсти во F_2 ја добиваме со повторување на конструкцијата и втората гранка на хиперболата (сл. 46).

3. *Геометриска конструкција на хиперболата.* Ако ни се дадени фокусите F_1 и F_2 и должината $2a$, ќе можеме да ја конструираме хиперболата точка по точка по следниот

начин. Со шестар ја земаме отсечката $r_1 > 2a$ и со неа опишуваме лаци околу секој од фокусите. Потоа со полупречникот $r_2 = r_1 - 2a$ опишуваме пак околу секој фокус лак (сл. 47).



Сл. 47

Пресечните точки на овие лаци определуваат 4 точки од хиперболата, бидејќи ако M е едната пресечна точка, тогај $MF_1 - MF_2 = r_1 - (r_1 - 2a) = 2a$.

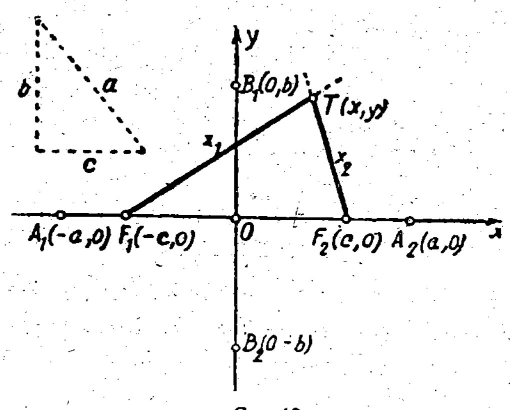
Со повторување на оваа конструкција можат да се добијат произволен број точки од хиперболата.

4. *Оскина равенка на хиперболата.*

а) изведување на равенката. Ја земаме правата F_1F_2 (види сл. 48) за оска x а средината на отсечката F_1F_2 за координатен почеток O. Фокусите во тој случај дадени се со:

$$F_1(-e, 0),\ F_2(e, 0),$$

а оската y е симетралата на отсечката F_1F_2.



Сл. 48

Ако $T(x, y)$ е која и да било точка од хиперболата, тогај е

$$F_1T - TF_2 = 2a \text{ или } -FT_1 + TF_2 = 2a$$

при услов $2e > 2a$ или накусо $\pm F_1T \mp F_2T = 2a$. Еднаш треба да се земат горните предзнаци а втор пат долните. Спрема основната формула за растојание на две точки имаме

$$\pm\sqrt{[x-(-e)]^2+(y-0)^2} \mp \sqrt{(x-e)^2+(y-0)^2} = 2a,$$

или

$$\pm\sqrt{(x+e)^2+y^2} \mp \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a.$$

Ова е бараната равенка на хиперболата. Да го извршиме ослободувањето од корените. За таа цел, префрлувајќи го едниот корен на десната страна, имаме

$$\pm\sqrt{(x+e)^2+y^2} = \pm\sqrt{(x-e)^2+y^2} + 2a.$$

Со квадрирање добиваме

$$(x+e)^2+y^2 = (x-e)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + 4a^2.$$

Оттука излегува

$$a^2 - ex = \mp a\sqrt{x^2-2ex+e^2+y^2}.$$

Повторното квадрирање ни дава

$$x^2(a^2-e^2) + y^2a^2 = a^2(a^2-e^2). \tag{7}$$

Изразот $a^2 - e^2$ што се јавува тука го заменуваме поради $a^2 < e^2$ со b^2 т.е.

$$\boxed{b^2 = e^2 - a^2.} \tag{8}$$

Должината односно бројот b се вика *споредна полуоска — заправо должина на споредната полуоска — на хиперболата.*

При $a = b$, хиперболата се вика *рамнострана.*

Внесувајќи ја вредноста за b од (8) во (7) таа преминува по делење со $-a^2b^2$ во.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{9}$$

што претставува оскина равенка на хиперболата.

Пример. Да се определи хиперболата, на којашто растојанието на фокусите е $2e = 14$, а главната полуоска $2a = 6$.

Имаме $b^2 = e^2 - a^2 = 40$, па оскината равенка на хиперболата е

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1.$$

Очигледно е дека равенката

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

меѓусебно се еквивалентни и претставуваат една иста хипербола.

Оскината равенка на хиперболата е равенка од втор степен, чија лева страна е разлика од квадрати.

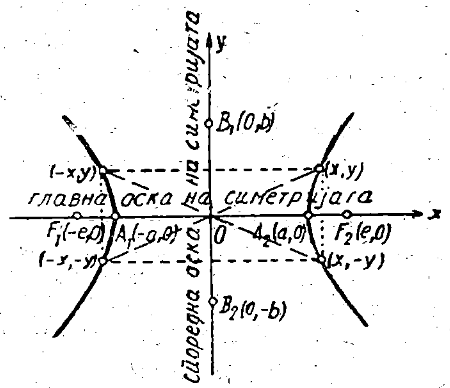
Вежба. Од оскината равенка (9) на хиперболата да се искаже значењето на коефициентите пред квадратите на непознатите x^2 и y^2.

Како се добива од оскината равенка на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ оскината равенка на хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$? Напросто со замена во равенката на елипсата b^2 со $-b^2$, т.е. место b да се пише имагинарниот број bi. Заради ова bi при хиперболата се вика уште *имагинарна полуоска.*

c) Должина на радиус векторите на хиперболата. За должината на радиус векторите F_1T и F_2T на хиперболата имавме погоре

(10)
$$F_1T=\pm a+\varepsilon x,$$
$$F_2T=\pm a-\varepsilon x.$$

Знакот + важи за десната страна на хиперболата а знакот — за левата страна.



Сл. 49

Величината e се вика *линеарен ексцентрицитет* а величината $\varepsilon=\frac{e}{a}$ *бројни ексцентрицитет* на хиперболата. Додека при елипсата имавме $e=\sqrt{a^2-b^2}$, при хиперболата е $e=\sqrt{a^2-b^2}$.

5. *Симетрија.* Веќе од механичката и геометриската конструкција на хиперболата можевме да заклучиме, дека таа е *симетрична крива* спрема главната оска A_1A_2 како и спрема *споредната оска*, т.е. спрема симетралата на отсечката F_1F_2 (сл. 49). Од тоа следува дека таа е симетрична и спрема почетокот O. Да се увериме во ова од равенката (9).

Кривата (9) е симетрична спрема оската x, оти ако точката (x, y) лежи на кривата, на неа ќе лежи и точката $(x, -y)$ а симетрична е и спрема оската y, оти ако точката (x, y) лежи на кривата (9), на неа ќе лежи и точката $(-x, y)$.

Дека кривата (9) е симетрична и спрема почетокот излегува оттаму, што ако во равенката (9) место (x, y) ставиме $(-x, -y)$ таа останува непроменета.

Навистина значи *хиперболата е симетрична спрема главната оска A_1A_2 како и спрема споредната оска, т.е. симетралата на отсечката A_1A_2. Хиперболата има центар во средината на отсечката A_1A_2 односно F_1F_2.*

Да ги определиме пресечните точки на хиперболата со оските. За оската x е $y = 0$, па од (9) добиваме $x^2 = a^2$ т.е. $x = \pm a$. *Правата значи, што минува низ фокусите ја сече хиперболата во две точки т. н. темиња или врвови,* коишто се симетрични спрема центарот 0 на хиперболата. Растојанието на овие темиња е равно на должината $2a$ на *главната оска на хиперболата.*

Пресечните точки со ординатната оска y имаат апсциса нула, па од (9) имаме $y^2 = -b^2$ откаде $y = \pm bi$.

Додека при елипсата имавме и *втората оска на симетријата* да ја сече во две точки т. н. *споредни темиња*, при хиперболата немаме пресечни точки меѓу *втората оска на симетрија* и неа. Заради тоа таа и се вика имагинарна оска на хиперболата, а $2b$ должина на имагинарната оска на хиперболата.

Според тоа имаме: *Точките $(-a, 0)$, $(a, 0)$ во кои главната оска $x = 0$ ја сече хиперболата се викаат реални темиња на хиперболата. Имагинарните точки $(0, bi)$, $(0, -bi)$, во кои споредната оска $x = 0$ ја „сече" хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ се викаат имагинарни темиња на хиперболата.*

6. *Дискусија на оскината равенка на хиперболата. Параметар. Паралела со главната и паралела со споредната оска.*

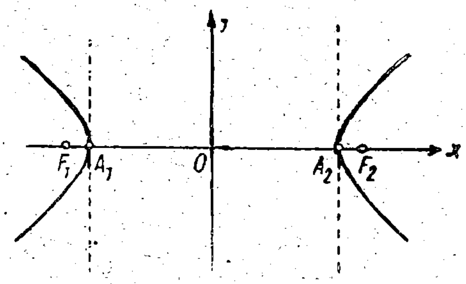
a) Да видиме сега, кои паралели со главната а кои со споредната оска имаат заеднички точки со хиперболата?

Од сл. 50 го гледаме следното: Секоја паралела со главната оска ја сече хиперболата секогаш во две точки различни и симетрични спрема споредната оска.

Ако го разгледаме снопот прави паралелни со споредната оска, гледаме дека секоја права од овој сноп ја сече хиперболата само во случај, ако таа лежи надвор од главната оска. Ако правата минува низ главниот врв таа ја допира кривата. Тоа значи дека ни за една апсциса x, за која е

$$-a < x < a,$$

немаме реална ордината y од кривата, додека за апсцисата x што е равна на позитивната или негативната вредност на должината на главната полуоска одговара една единствена ордината равна на нула (види ја сл. 50). Напротив, на апсцисата за која е $|x| > a$ одговараат две точки реални и симетрични спрема главната оска.



Сл. 50

Ова се гледа од равенката $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ кога таа се реши по непознатата y. Излегува

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

и оттука

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Оттука се гледа дека на една иста апсциса одговараат две спротивни вредности за y, што значи дека е таа симетрична спрема главната оска x. Понатаму ординатата е реална, ако радикандот е позитивен или нула, т.е. ако е

$$x^2 - a^2 \geqq 0 \text{ или } x^2 \geqq a^2 \text{ и оттука } x \geqq a \text{ или } x \leqq -a.$$

Ординатата y е имагинарна, ако радикандот е негативен т.е. ако е

$$x^2 - a^2 < 0 \text{ или } x^2 < a^2 \text{ и оттука } x < a \text{ или } x > -a.$$

Значи хиперболата

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

има реални точки, за вредностите на апсциситe

(12) $$x \leqq -a \text{ или } x \geqq a,$$

а имагинарни точки за преостанатите апсциси т. е. за

(13) $$-a < x < a.$$

a ја означува должината на главната полуоска од нашата крива.

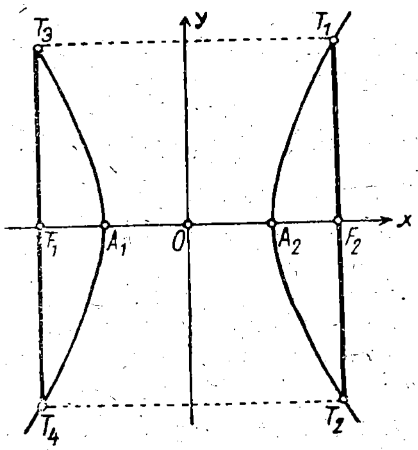
Пример. Да се определи точката $T(3, y > 0)$ од хиперболата $x^2 - 25y^2 = 25$.

Решение: $9 - 25y^2 = 25$ т. е. $y = \pm \frac{4}{5} i$

Не постои значи точка од дадената хипербола, на којашто апсцисата е 3.

Ако ги упоредиме досега познатите геометриски места: правата, кругот, елипсата и хиперболата гледаме дека елипсата и кругот се *конечни криви* додека правата и хиперболата се *бесконечни.* Освен тоа хиперболата ја има и таа посебна особина што е составена од сосем одделени делови, кои се викаат гранки на хиперболата.

b) Параметар на хиперболата. Нормалата на главната оска подигната во фокусот ја сече хиперболата во две точки T_1 и T_2 и определува една особена тетива[1]) на хиперболата



Сл. 51

т. н. *параметар на хиперболата.* (сл. 51). Значи параметарот на хиперболата е должината на тетивата што минува низ фокусот и стои нормално на главната оска.

[1]) Само по себеси се разбира, дека како и при кругот, отсечката што соединува две точки од кривата се вика *тетива на кривата.*

Параметарот ќе го означуваме со $2p$. По истиот начин како и при елипсата наоѓаме при хиперболата:

$$p = \frac{b}{a}\sqrt{e^2 - a^2} = \frac{b^2}{a} \text{ т. е.}$$

$$(15) \quad \boxed{\text{Полупараметарот} = p = \frac{b^2}{a}\frac{(\text{споредната полуоска})^2}{\text{главната полуоска}}}$$

Пример 1.: Да се определи полупараметарот p на хиперболата

$$a = 5, \; e = 7.$$

Имаме

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{e^2 - a^2}{a} = \frac{24}{5}$$

Задачи. 1. Да се определи равенката на хиперболата ако ѝ се дадени две точки и тоа:

a) $A\left(6\frac{1}{4},\, 3\right)$, $B\left(8\frac{1}{3},\, 5\frac{1}{3}\right)$, b) $A\left(8\frac{1}{3},\, 4\right)$, $B\left(13,\, 7\frac{1}{5}\right)$

c) $A\,(2,\, 1)$, $B\,(10,\, 7)$.

2. Да се определи равенката на хипербола, ако ѝ се дадени големата оска $2a$ и точката $M\,(x_1, y_1)$.

3. Да се определат фокусите на хиперболата: a) $25x^2 - 144y^2 = 3600$, b) $x^2 - y^2 - 5$, c) $16x^2 - 25y^2 = 400$.

4. Да се определи равенката на хиперболата, ако ѝ е даден параметарот $2p = \frac{8}{3}$ и линеарниот ексцентрицитет $e = \sqrt{13}$.

5. Темињата на елипсата се во фокусите на хиперболата и обратно. Ако равенката на елипсата е $9x^2 + 16y^2 = 144$, која е равенката на хиперболата?

6. Да се определи равенката на хиперболата, ако ѝ се дадени $2a$ и $2p$.

7. Да се определи равенката на хиперболата, на која, што се $2a = 6$, $2e = 8$.

8. Да се определи равенката на хиперболата, ако координатите на фокусите ѝ се $(0, + 3)$ а главната оска 4.

9. Рамностраната хипербола минува низ точката $M\,(3, -1)$; да се определи нејзината равенка.

10. Каков предзнак има триномот $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$ за точките a) меѓу двете гранки на хиперболата, b) во внатрешната страна на една од гранките на хиперболата?

24. Точката T има координати (x, y) во стариот и (x', y') во новиот координатен систем. Ќе го означиме со ρ радиус векторот на точката T а $\sphericalangle X'OT$ со φ. Од $x = \rho \cos(\alpha + \varphi) = \rho \cos\alpha \cos\varphi - \rho \sin\alpha \sin\varphi$, $y = \rho \sin(\alpha + \varphi) = \rho \sin\alpha \cos\varphi + \rho \cos\alpha \cos\varphi$, поради $x' = \rho \cos\varphi$, $y' = \rho \sin\varphi$, излегува $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$, $y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$ и за $\alpha = -45^0$, $2x'y' = a^2$, како равенка на рамнострана хипербола во новиот систем.

§ 31. ПРАВА И ХИПЕРБОЛА

Пресечните точки на правата $y = kx + l$ и хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ се наоѓаат кога тие две равенки се решат по x и y. Се добива равенката $x^2(b^2 - a^2k^2) - 2a^2klx - a^2(l^2 + b^2) = 0$ и оттука

$$x_{1,2} = \frac{1}{b^2 - a^2k^2}\left(a^2kl \pm ab\sqrt{b^2 + l^2 - a^2k^2}\right),\ y_{1,2} = kx_{1,2} + l.$$

Гледаме дека ќе имаме две, една или ниедна вредност според тоа дали е $b^2 + l^2 - a^2k^2 \gtreqless 0$.

§ 32. АСИМПТОТИ НА ХИПЕРБОЛАТА

Да ги определиме пресечните точки на правата низ почетокот $y = kx$ со хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Добиваме

$$x_{1,2} = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}},\ y_{1,2} = \pm\frac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

Гледаме дека пресечните точки се реални, ако е $b^2 - a^2k^2 > 0$ или $\left(k + \frac{b}{a}\right)\left(k - \frac{b}{a}\right) < 0$ т. е. ако е

$$-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}.$$

Пресечните точки се имагинарни ако е $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$ или $k^2 - \frac{b^2}{a^2} > 0$ т. е. кога е $k > \frac{b}{a}$ или $k < -\frac{b}{a}$.

Особен случај имаме кога радикандот е нула т. е. $b^2 - a^2k^2 = 0$. Оттука имаме $k = \pm\frac{b}{a}$. Пресечните точки не се имагинарни, но не се и во конечност, ами реални и се бесконачно оддалечени. Правите $y = \pm \frac{b}{a} x$ се викаат асимптоти на хиперболата.

Кога x расте се повеќе и повеќе, правите $y = \pm \frac{b}{a} x$, се повеќе се доближуваат до хиперболата. Разликата меѓу ординатата на асимптотата y_a и ординатата на хиперболата y_h е дадена со (за точките од првиот квадрант)

$$y_a = \frac{b}{a} x, \quad y_h = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \text{ Од}$$

$$y_h^2 = y_a^2 \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \text{ излегува}$$

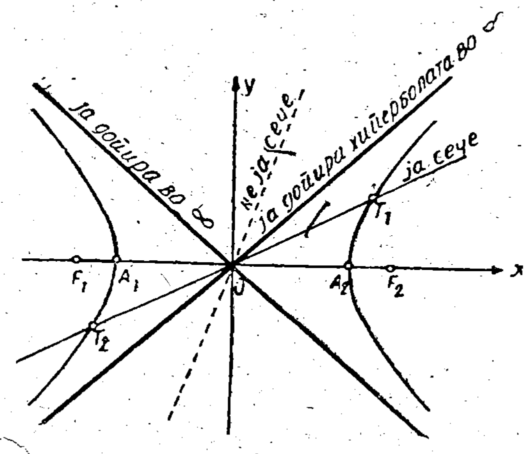
$$(y_a + y_h)(y_a - y_h) = b^2, \quad y_a - y_h = \frac{b^2}{y_a + y_h}.$$

При растење на x, растат и y_a и y_h, а разликата им $y_a - y_h$ бидејќи b^2 е постојано, станува се помала и помала, додека најпосле не стане помала од кој било мал позитивен број.

Оттука заклучуваме дека лакот на асимптотата е постојано под асимптотата тоа се повеќе и' се доближува, додека не ја стигне во бескрајноста.

Аналогна меѓусебна положба имаат лаците на хиперболата спрема асимптотата и во останатите квадранти.

Сликата 52 ни ја покажува хиперболата и правите низ нејзиниот центар.



Сл. 52

2. На растојание 2 од главната оска на хиперболата $4x^2-9y^2=36$ повлечена е паралела со неа. Колкава е тетивата?

3. Да се определат пресечните точки на правите со хиперболите

$a)$ $4x-3y+36=0,\ 36x^2-81y^2=2916,$
$b)$ $24x+35y+60=0,\ 9x^2-25y^2=225,$
$c)$ $20x-9y-60=0,\ 16x^2-9y^2=144,$
$d)$ $21y-40x+60=0,\ 25x^2-9y^2=225.$

4. Елипсата и хиперболата имаат линеарен ексцентрицитет, а нивните бројни ексцентрицитети се реципрочни; кои се координатите на пресечните точки во првиот квадрант, ако бројниот ексцентрицитет на елипсата е ε.

5. Тетивата на хиперболата $16x^2-9y^2=144$ е $4x-15y-60=0$. Да се определи средната точка на таа тетива.

6. Да се определат асимптотите на хиперболата

$a)$ $9x^2-16y^2=144,$ $b)$ $25x^2-36y^2=900,$
$c)$ $4x^2-25y^2=100,$ $d)$ $2x^2-3y^2=6.$

7. Ако равенките на асимптотите се

$$a)\ y=\pm\frac{3}{4}x,\ e=5;\quad b)\ y=\pm\frac{5}{12}x,\ e=13.$$

Како гласи равенката на хиперболата?

8. Тангенсот на аголот φ што го прави асимптотата е $\frac{24}{7}$ а ексцентрицитетот $e=5$. Како гласи равенката на хиперболата?

9. Истата задача за $tg\,\varphi=\frac{120}{119}$ и $e=13$.

10. Да се конструира асимптотата ако равенката на хиперболата е: $a)$ $9x^2-16y^2=144$; $b)$ $4x^2-9y^2=36$; $c)$ $3x^2-y^2=3$.

11. Да се определи равенката на хиперболата, што минува низ точката $M(1, \sqrt{3})$ а правите $y=\pm 2x$ и́ се асимптоти.

12. Под кој агол се сечат асимптотите на хиперболата што минува низ точките $M_1(1, 3)$ и $M_2(3, 5)$?

13. Кој агол зафаќаат асимптотите на хиперболата $20x^2-26y^2=500$?

14. Да се определи равенката на хиперболата, на којашто главната оска е 8, а асимптотите зафаќаат агол од 60°.

15. Да се определат равенките на асимптотите на хиперболата

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$

16. Да се докаже дека отсечката на нормалата повлечена од фокусот на секоја асимптота е равна на b.

Резултати: **1.** 10. **2.** $6\sqrt{2}$.

3. *a*) $(-9,\ 0),\ (-15,\ -8)$; *b*) $\left(-\frac{25}{3},\ 4\right)\ \left(-13,\ \frac{36}{5}\right)$;

c) $(3,\ 0),\ \left(\frac{51}{8},\ \frac{15}{2}\right)$, *d*) $\left(5,\ 6\frac{2}{3}\right),\ \left(7\frac{4}{5},\ 12\right)$.

4. $x = e,\ y = \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}e$. **5.** $\left(-\frac{5}{8},\ -\frac{25}{6}\right)$.

6. *a*) $y = \pm\frac{3}{4}x$, *b*) $y = \pm\frac{5}{6}x$; *e*) $y = \pm\frac{2}{3}x$, *d*) $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$.

7. *a*) $9x^2 - 16y^2 = 144$, *b*) $25x^2 - 144y^2 = 3600$.

8. $16x^2 - 9y^2 = 144$, **9.** $144x^2 - 25y^2 = 3600$.

11. $4x^2 - y^2 = 1$. **12.** $tg\,\varphi = \frac{8}{11}\sqrt{5},\ \varphi = 58°24'44''$.

13. $tg\varphi = -4\sqrt{5},\ \varphi = 96°22'46''$.

14. $48x^2 - 16y^2 = 768$. **15.** $y - q = \pm\frac{b}{a}(x - p)$.

16. $d = -\frac{ay - bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$, за $x = e,\ y = 0$ излегува $d = b$.

§ 34. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА НА ХИПЕРБОЛАТА

Аналогно како при елипсата, се најдува дека коефициентот на правецот на тангентата во точката $D(x_1,\ y_1)$ од хиперболата е

$$k = \frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

па равенката на тангентата во таа точка е

$$x - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1), \text{ односно}$$

$$\boxed{b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2}$$

13. Во кои точки и под кој агол се сечат кривите:

a) $25x^2 - 9y^2 = 225, \quad 9x^2 + 9y^2 = 125,$

b) $4x^2 - 9y^2 = 36, \quad 9x^2 + 9y^2 = 289,$

c) $4x^2 - 9y^2 = 36, \quad 16x^2 + 45y^2 = 720,$

d) $x^2 + y^2 = b^2, \quad x^2 - y^2 = a^2$?

14. Колкав е аголот што го образуваат тангентите од точката $M_1(x_1, y_1)$ на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

15. Да се определат равенките на тангентите на хиперболата што се паралелни со правата $y = kx$. Кога е можна задачата?

16. Од центарот на хиперболата $x^2 - y^2 = a^2$ да се опише круг што ја сече хиперболата под агол од 45°. Колкав е полупречникот на кругот?

17. Да се определат заедничките тангенти на кривите:

a) $20x^2 - 36y^2 = 720, \quad x^2 + y^2 = 8,$

b) $9x^2 - 20y^2 = 180, \quad 3x^2 + 4y^2 = 36.$

18. Во пресечните точки на правата $y = 3$ со хиперболата $16x^2 - 25y^2 = 400$ да се повлечат тангенти на хиперболата и пресмета површината на триаголникот што го образуваат тангентите и правата $y = 3$.

19. Дали можат фокусите на хиперболата да бидат од иста страна на тангентата на хиперболата?

20. Тангентите на хиперболата повлечени во точките со $x = \pm e$ определуваат ромб; да му се определат страните и површината.

21. Во пресечните точки на правата $y + x = 5$ со хиперболата $25x^2 - 40y^2 = 1000$ да се повлечат тангенти на хиперболата и определат координатите на нивната пресечна точка.

22. Да се докаже дека допирната точка ја располовува отсечката на тангентата меѓу асимптотите.

23. Да се докаже дека површината на триаголникот определен со тангентата и асимптотите на хиперболата е постојана и равна на ab.

24. Да се докаже дека производот на растојанијата од фокусите на хиперболата до која било нејзина тангента е постојан и равен на $-b^2$.

25. Да се определи геометриското место на точките, од кои можат да се повлечат две меѓусебно нормални тангенти на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

26. Низ точката $M\left(\frac{15}{4}, 3\right)$ од хиперболата $16x^2 - 9y^2 = 144$ да се повлечат радиус векторите и докаже дека симетралата на аголот, што тие го образуваат, е идентична со тангентата на хиперболата во таа точка.

27. Да се определи геометриското место на проекциите од фокусите на хиперболата на нејзината тангента.

Резултати:

1. *a*) $25x + 12y - 45 = 0$, *b*) $8x - 3y + 32 = 0$, *c*) $3x - 4y - 9 = 0$.

2. *a*) $(-10, 12)$, *b*) $\left(5, 6\frac{2}{3}\right)$.

3. *a*) $15x - 16y - 36 = 0$, $5x + 4y + 16 = 0$,
b) $13x + 8y - 10 = 0$, $15x - 8y + 18 = 0$,
c) $5x - 3y - 32 = 0$, $17x - 15y - 64 = 0$,
d) $3y - 4x + 16 = 0$, $y + x + 3 = 0$,
e) $4y - 5x - 14 = 0$, $y + 2x + 16 = 0$. **4.** $a^2 = \frac{73}{16}$.

5. $15x - 8y + 18 = 0$, $15x - 8y - 18 = 0$,

$M_1\left(-\frac{10}{3}, -4\right)$, $M_2\left(\frac{10}{3}, 4\right)$.

6. $4y - 5x - 14 = 0$, $y + 2x + 16 = 0$,

$M_1\left(-\frac{256}{7}, -\frac{288}{7}\right)$, $M_2\left(-\frac{25}{2}, 9\right)$.

7. $36x^2 - 100y^2 = 3600$. **8.** $9x^2 - 16y^2 = 144$.

9. Кривите се $(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - e^2)$; $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{e^2 - c^2} = 1$. Ако (x_1, y_1) е едната пресечна точка, тогај производот на тангенсите од аглите на соодветните тангенти е $-\frac{(a^2 - e^2)\ (e^2 - c^2)\, x_1^2}{a^2c^2y_1^2}$. Ако се одземе равенката на елипсата од равенката на хиперболата и пресмета $\frac{x_1^2}{y_1^2}$ па добиената вредност внесе во горниот израз излегува дека тој е -1.

10. Тангентите на хиперболата се $\sqrt{5}\,x \mp 2y = 6$ и $-\sqrt{5}\,x \mp 2y = 6$; тангентите на елипсата се $2\sqrt{5}\,x \pm 5y = 60$ и $-2\sqrt{5}\,x \pm 5y = 60$.

11. $y = x \pm 3$.

12. Темињата A и B.

13. *a*) ± 5, $\pm\frac{20}{3}$, $tg\varphi = \frac{136}{27}$, $\varphi = 78^\circ 46' 16''$;

$b)\ \pm 5,\ \pm\frac{8}{3},\ tg\varphi=\frac{130}{27},\ \varphi=78^0 16' 1'';$

$c)\ \pm 5,\ \pm\frac{8}{3},\ tg\varphi=-\frac{27}{8},\ \varphi=106^0 30' 16'';$

$d)\ x=\pm\sqrt{\frac{b^2+a^2}{2}},\ y=\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},$

$$tg\varphi=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4-1}.$$

14. $tg\varphi=\frac{2\sqrt{a^2b^2-b^2x_1^2+a^2y_1^2}}{x_1^2+y_1^2-a^2+b^2}.$

15. $y=kx\pm\sqrt{k^2a^2-b^2}$, ако е $|k|>\frac{b}{a}$, 2 решенија т.е. ако $y=kx$ лежи во аголот меѓу асимптотите што не ги содржи кривите, постојат две паралелни тангенти; ако $y=kx$ лежи во аголот што ги содржи кривите немаме никакви паралелни тангенти, оти ако е $|k|<\frac{b}{a}$, $k^2a^2-b^2<0$ вредноста на коренот е имагинарна. Ако е $k=\frac{b}{a}$ едно решение (асимптотата).

16. $r^2=a^2\sqrt{2}$ **17.** $a)$ $y=\pm x\pm 4$, $b)$ $y=\pm\frac{3}{2}x\pm 6.$

18. $P=\frac{625}{12}.$

19. Од нормалниот облик на равенката на тангентата на хиперболата излегува, дека фокусите секогаш лежат од различни страни на тангентата.

20. $S=\frac{a}{e}\sqrt{a^2+e^2}$, $P=\frac{2}{e}a^3$. **21.** 8, -5.

22. Координатите на пресечната точка од асимптотата $y=\frac{b}{a}x$ и тангентата се $x'=\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}$, $y'=\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}$; замениме ли го тука b со $-b$ ги добиваме координатите x'', y'' на пресечните точки на тангентата со другата асимптота. Лесно се најдува дека е $2x_1=x'+x''$, $2y_1=y'+y''$.

23. Едното теме е во почетокот, другото ги има координатите x', y' а третото x'', y''. Од формулата за површината на триаголникот излегува веднаш $P=ab$.

24. Аналогно како при елипсата.

25. Излегува од зад. **14**, ако е $\varphi = 90^0$.

26. Равенките на радиус векторите се $5y + 12x - 60 = 0$ и $35y - 12x - 60 = 0$ а равенката на симетралата од нејзиниот внатрешен агол, $20x - 9y = 48$. Равенката на тангентата е $20x - 9y = 48$.

27. Аналогно како при елипсата.

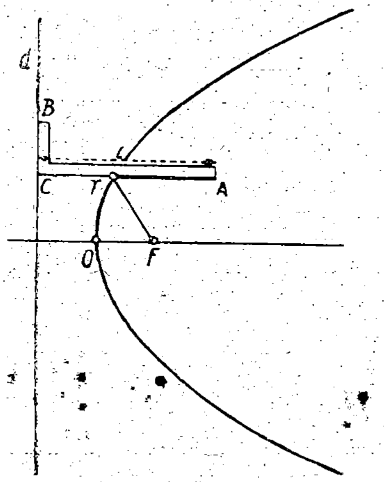
§ 35. ПАРАБОЛА

1. *Дефиниција. Фокус и директриса.* Парабола е таква крива од рамнината на којашто секоја точка еднакво е оддалечена од дадена точка и дадена права. Дадената точка се вика *фокус* — а дадената права *директриса.*

Параболата е значи множество од точки T за кои е

$$(1) \qquad FT = Td.$$

2. *Механичка конструкција на параболата. Врв или теме; оска.* Го земаме правиот агол ABC (којшто може да биде триаголник, штица или две летвички меѓусебно прицврстени под агол од 90°). Потоа земаме конец со должина $l = AC$ и едниот крај го уцврстуваме во A (види сл. 55), а



Сл. 55

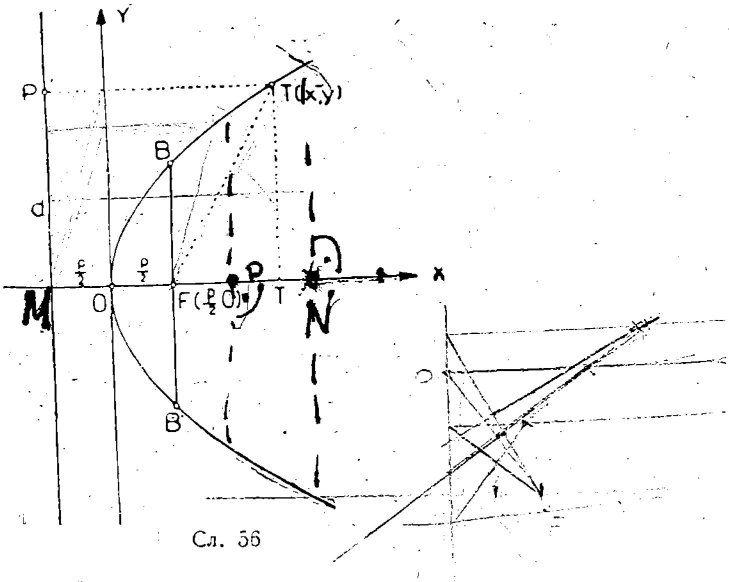
вториот во фокусот F. Со врвот од моливот го затегнуваме конецот по страната AC. Овој врв ќе покажува една точка T од параболата поради $FT = CT$. Ако се лизга краток BC на аголот по директрисата, точката T (врвот на моливот) ќе опишува еден лак од параболата и тоа во толку подолг, во колку конецот $AC = l$ е подолг. Специјално, кога кракот AC ќе минува низ фокусот, врвот на моливот ќе се наоѓа во средината O на растојанието од F до d. Оваа точка од параболата се вика врв или теме на параболата.

Можеме многу лесно да утврдиме дека *параболата е симетрична по однос но правата што е нормална на директрисата а минува низ темето.*

Оваа права низ фокусот, како и при елипсата и хиперболата се вика *главна оска* на параболата или просто *оска на параболата*, оти како ќе видиме, тоа е единствена права, *спрема која параболата е симетрична.*

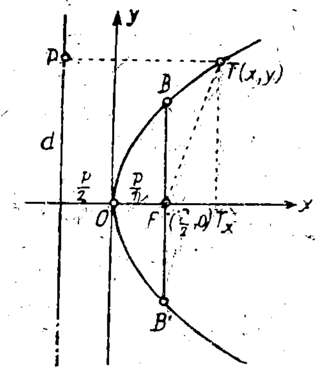
3. *Геометриска конструкција на параболата.* Ако е дадена директрисата d на параболата и фокусот F се повлекува најнапред низ точката F нормалата FM на d. Се избира на оваа нормала точката N и низ неа се повлекува нормала на MF.

Со шестар ја земаме потоа должината MN и со неа опишуваме лак околу F, додека овој не ја пресече нормалата во N. Така добиваме две точки од параболата. Други две точки добиваме, ако во една друга точка од оската на пр. во P издигнеме нормала и со должината PM опишеме лак околу фокусот, додека овој не ја пресече нормалата во P итн. Средната точка на отсечката FM е теме на параболата. (Сл. 56).



Сл. 56

4. *Темена равенка на параболата. Параметар на параболата.* Го избираме најнапред координатниот систем. За оската x ја земаме правата низ фокусот F така, што да стои нормално на директрисата и да е ориентирана од директрисата спрема фокусот. За оската y ја земаме правата што е нормална на оската x и го располовува растојанието меѓу фокусот и директрисата (Сл. 57).



T,F = TP

Сл. 57

Ако се означи со p растојанието меѓу директрисата и фокусот во нашиот координатен систем, тогај фокусот ја добива ознаката $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ а директрисата d е правата

(3) $$x = -\frac{p}{2}.$$

Ако $T(x, y)$ е произволна точка од параболата, од основната формула за растојание меѓу две точки добиваме за дефиниционата геометриска равенка (1) на параболата

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=dT.$$

Но очигледно е $dT = dT_x = dO + OT_x = \frac{p}{2} + x$ така што да имаме

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Рационализираме ли ја оваа равенка, добиваме

(4) $$\boxed{y^2=2px.}$$

За да докажеме дека $y^2 = 2px$ ја претставува равенката на параболата, треба и обратно да докажеме дека, ако координатите x, y на некоја точка T ја задоволуваат таа равенка, растојанието на таа точка до фокусот F еднакво е на нејзиното растојание до директрисата.

Нека x, y ја задоволуваат равенката $y^2 = 2px$. На оската x, почнувајќи од 0 на лево ја пренесуваме отсечката $OA = \frac{p}{2}$ и на десно $OF = \frac{p}{2}$. Во точката A *ја издигаме* нормалата d на оската x.

Дојдовме пак до фокусот F и директрисата d. Растојанието на точката T до директрисата d е $x + \frac{p}{2}$, а растојанието на точката T до фокусот F е $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. Бидејќи е $y^2 = 2px$ и уште TF секогаш позитивно, ќе имаме

$$TF = \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2}.$$

Значи растојанието на точката T до фокусот F е равно на растојанието на точката T до директрисата, т.е. точката T е на параболата.

Според тоа равенката

$$y^2 = 2px$$

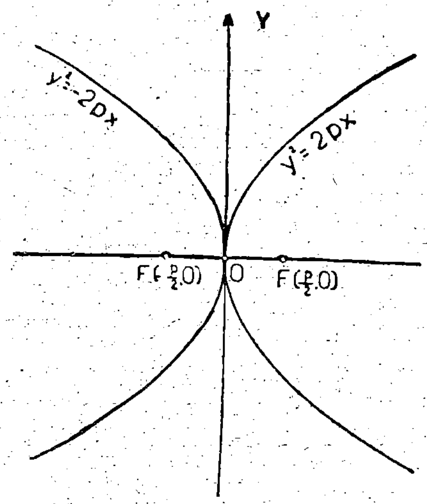
ја задоволуваат координатите на сите точки од параболата и само тие точки, па заради тоа, таа се вика равенка на параболата. Се вика уште и темена или вршна равенка на параболата поради тоа, што координатниот почеток е во нејзиното теме, а апсцисната оска се поклопува со оската на параболата.

Тетивата што е повлечена во фокусот нормално на оската на параболата се вика параметар на параболата. Тој е равен на $2p$ поради тоа што за $x = \frac{p}{2}$ имаме од равенката на параболатата $y = \pm p$, а ова се ординатите на краевите од параболата, па значи должината му е $2p$.

Ако $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ се две точки од параболата, тогај имаме $y_1^2 : y_2^2 = x_1 : x_2$, коешто покажува, дека апсциситe на две точки од параболата се однесуваат како квадратите на нивните ординати.

§ 36. СИМЕТРИЈА НА ПАРАБОЛАТА

Од равенката на параболата $y^2 = 2px$ излегува $y = \pm\sqrt{2px}$, кое го покажува следното: прво, дека параболата е реална само во случај кога радикандот $2px$ не е негативен, и второ, дека во тој случај на секое $x > 0$ одговараат две спротивни ординати $\pm\sqrt{2px}$. Тоа значи дека параболата е симетрична спрема оската x, којашто е оска на симетрија



Сл. 58

на нашата парабола. Со други зборови, ако ја завртиме параболата за 180° околу нејзината оска, таа ќе се поклопи сама со себе си.

Кога x расте бескрајно и y расте бескрајно, што значи дека кривата се протегнува во бескрајност.

Ако во равенката $y^2 = 2px$ го внесеме $-x$ место x таа преминува во равенката $y^2 = -2px$. Сл. 58 ни ја покажува таа парабола, која е симетрична спрема параболата $y^2 = 2px$. Овие две параболи имаат заедничко теме, додека директрисата на едната го содржи параметарот на другата од нив.

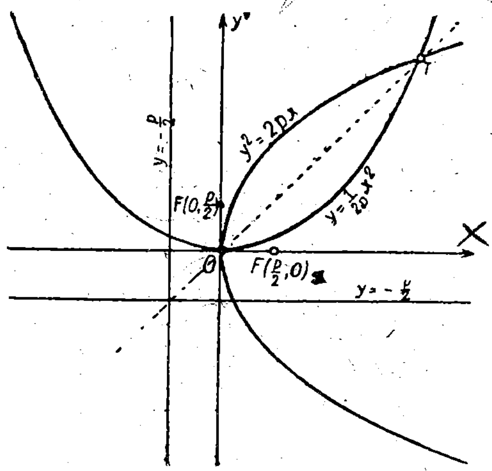
§ 37. ПАРАБОЛИТЕ

$$y = \pm\frac{x^2}{2p}, \quad y = ax^2 + bx + c$$

Параболата $y = \frac{x^2}{2p}$. Ако извршиме симетрија на нашата парабола спрема симетралата од првиот квадрант (сл. 59), т. е. ако извршиме пермутација на x и y во равенката (4) ја добиваме равенката

$$x^2 = 2py \text{ т. е. } y = \frac{1}{2p} x^2$$

којашто исто така *претставува парабола.* Новата парабола само поинаку е сместена во нашиот координатен систем; фокусот ѝ не е во точката $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, ами во $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, а директрисата не е правата $x = -\frac{p}{2}$, ами $y = -\frac{p}{2}$.



Сл. 59

Од равенката (6) гледаме дека таа парабола е симетрична спрема оската y и е дефинирана за секоја апсциса x.

Најобичната квадратна функција $y = x^2$ претставува парабола (сл. 60), чиј параметар е 1, па често пати се вика единична парабола. Директрисата ѝ е права паралелна со оската x на растојание $-\frac{1}{4}$, а фокусот $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

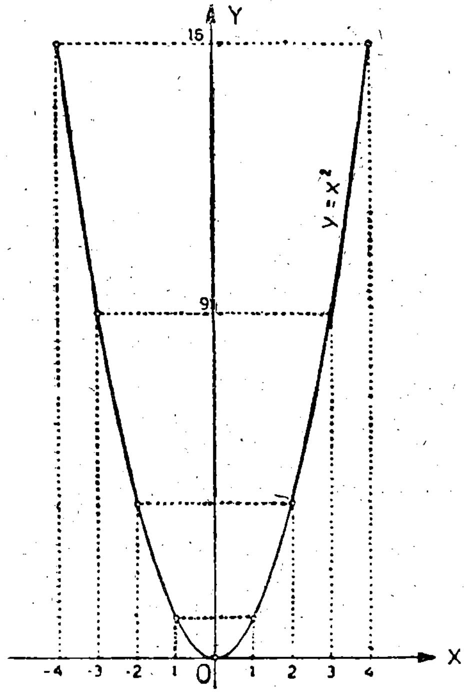
Пример: $y = 3x^2$ е парабола, на којашто ординатата на фокусот е $\frac{1}{12}$.

b) $y = -\frac{1}{2p} x^2$. Ако ја пресликаме параболата (6) по однос на оската x, т. е. ако во равенката (6) пишеме место x пак $-x$, а место y пишеме $-y$, добиваме

$$-y = \frac{1}{2p} x^2 \text{ т. е. } y = -\frac{1}{2p} x^2,$$

а тоа е равенка на параболата (сл. 61) чии фокус е точката $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, а директрисата правата $y = \frac{p}{2}$.

Пример. Равенката $y = -\frac{3}{2}x^2$ ја претставува параболата што е обрната надолу. Директрисата ѝ е правата $y = \frac{1}{6}$.



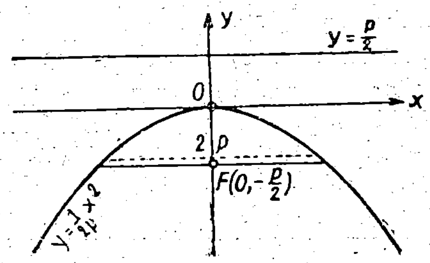
Сл. 60

c) *Параболата* $y = ax^2 + bx + c$. График на квадратна функција. Знаеме дека графикот на чисто квадратната функција

$$y = ax^2 \tag{8}$$

е параболата чиј фокус е точката $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, параметарот апсолутната вредност од реципрочната вредност на a, а директрисата ѝ е правата $y = -\frac{1}{4a}$.

Отворот на параболата е нагоре, ако е $a > 0$, а надолу ако е $a < 0$. За $a = 0$ ја добиваме оската x, како график на функцијата (8).



Сл. 61

Ако извршиме транслација на параболата (8), така, што темето да ѝ дојде во точката $T(m, n)$, ја добиваме параболата

(9) $$y - n = a(x - m)^2, \text{ односно}$$

(10) $$y = a(x - m)^2 + n$$

којашто е иста (8), само поместена за ориентираната отсечка OT. Фокусот на оваа парабола е во точката

$\left(m, \frac{1}{4a} + n\right)$, а директрисата ѝ е правата $y = -\frac{1}{4a} + n$.

Да ја разгледаме сега *општата квадратна функција*

(11) $$y = ax^2 + bx + c$$

Ја сведуваме оваа равенка на обликот (9) односно (10). Од (11) излегува

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2} + c$$

т. е.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Ова пак е нашата парабола (8) но преместена така, што темето C да ѝ се наоѓа во точката $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Равенката (11) значи претставува парабола добиена со преместување на параболата (8).

Пример 1. Равенката

$$y = 2x^2 - 3x + 4 \text{ или } y = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$$

ја претставува параболата чие теме е во точката $\left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$, фокусот во $\left(\frac{3}{4}, 3\right)$, а директрисата ѝ е $y = \frac{11}{4}$.

Задачи 1. Да се определи p во равенката на параболата $y^2 = 2px$, ако таа минува низ точката *a*) $M\ (2, -4)$; *b*) $N\ (12, 6)$.

2. Да се определи параболата, чија оска е земена за *a*) оската x, темето во почетокот на координатниот систем и фокусот $(3, 0)$; *b*) оската y, темето во почетокот на координатниот систем и фокусот $F\ (0,3)$.

3. Што означува равенката $(y - n)^2 = 2p\,(x - m)$.

4. Да се определи темето, оската, фокусот и директрисата на параболата *a*) $y^2 + 4y - 6x + 7 = 0$; *b*) $y = x^2 - 8x + 15$; *c*) $y = 2x^2 - 5x + 7$; *d*) $y + 5x^2 - 8x - 3 = 0$.

Да се определат симетричните слики на овие параболи по однос на оската x, оската y, симетралата s и по однос на почетокот 0.

5. Параболата чие теме е во $V\ (2,3)$ минува низ почетокот. Да се определи нејзината равенка.

6. Како гласи равенката на параболата чиј фокус е во почетокот, а оската ѝ се поклопува со оската x?

7. Како гласи равенката на параболата, чие теме е во точката $A\ (3,2)$, а фокусот во точката $B\ (5,2)$?

8. Темето на параболата е $V\ (-2, -5)$, а нејзината директриса има равенка $x - 3 = 0$. Како гласи равенката на ~~хипербол~~ата?

9. Во параболата $y^2 = 7x$ да се впише рамностранен триаголник така, што едното теме да му лежи во почетокот.

10. Да се определи равенката на параболата, што минува низ точките $A\ (3,4)$, $B\ (9,10)$, $C\ (9, -2)$, а оската ѝ е паралелна со оската x.

11. Да се определи равенката на параболата, што минува низ точките $A\ (1, -1)$, $B\ (-2,4)$, $C\ (16,4)$, а оската ѝ е паралелна со оската x.

12. На параболата $y^2 = 2px$ да се определи точката M така, што збирот од квадратите на растојанијата на таа точка до темето и до фокусот да е равно на k. Дискусија!

Резултати:

1. *a*) 4, *b*) $\frac{3}{2}$ **2.** *a*) $y^2 = 12x$, *b*) $x^2 = 12y$. **3.** Парабола на која темето е во $V(m, n)$. **4.** *a*) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$; $y + 2 = 0$; $(2, -2)$; $x + 1 = 0$, *b*) $(4, -1)$, $x = 4$, $\left(4, -\frac{3}{4}\right)$, $y = -\frac{5}{4}$, *c*) $\left(\frac{5}{4}, \frac{31}{8}\right)$, $x = \frac{5}{4}$, $\left(\frac{5}{4}, 4\right)$, $y = \frac{15}{4}$, *d*) $\left(\frac{4}{5}, \frac{31}{5}\right)$, $x = \frac{4}{5}$, $\left(\frac{4}{5}, \frac{123}{20}\right)$, $y = \frac{25}{4}$.
5. $2y^2 - 12y + 9x = 0$. **6.** $y^2 = 2px - p^2$. **7.** $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$. **8.** $y^2 + 10y + 20x + 65 = 0$. **9.** $x = 21$, $y = 7\sqrt{3}$. **10.** $(y - 4)^2 = 6(x - 3)$. **11.** $(x - 7)^2 = 9(y + 3)$. **12.** $MO^2 + MF^2 = k^2$ заради $y^2 + 2px$ дава $2x^2 + 3px + \frac{p^2}{4} - k^2 = 0$. Како е $x > 0$, задачата има само едно решение ако е $4k^2 > p^2$; задачата не може да има никогаш две решенија.

§ 38 ПРАВА И ПАРАБОЛА

Пресечните точки на параболата $y^2 = 2px$ со правата $y = kx + l$ се најдуваат со решавање равенките по x и y.

Внесена вредноста за y од втората во првата равенка ни дава

$$k^2x^2 + 2klx + l^2 = 2px$$

или

$$k^2x^2 - 2x(p - kl) + l^2 = 0.$$

Оттука се добива

$$x_{1,2} = \frac{p - kl \pm \sqrt{p(p - 2kl)}}{k^2}$$

Понатаму е $y_{1,2} = kx_{1,2} + l$ така што бараните пресечни точки се (x_1, y_1), (x_2, y_2), каде што координатите x_1, x_2, y_1, y_2 се дадени со горните изрази. Овие точки се *реални*, ако радикандот е $p(p - 2kl) \geqslant 0$ т.е. $p - 2kl \geqslant 0$, (бидејќи е $p > 0$), а се *поклопуваат*, ако радикандот е нула. Излегува дека релацијата $p - 2kl = 0$ е услов правата $y = kx + l$ да ја допира параболата $y^2 = 2px$.

По истиот начин се наоѓаат пресечните точки на параболата со кругот, елипсата и хиперболата.

§ 39. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА НА ПАРАБОЛАТА

Равенката на тангентата на параболата $y^2 = 2px$ ќе ја изведеме по истиот начин како при елипсата. Равенката на правата низ допирната точка $D(x_1, y_1)$ е

(1) $$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Коефициентот на правецот k на оваа тангента ќе го определиме од условот, правата (1) со параболата $y^2 = 2px$ да има една пресечна точка. Внесувајќи ја вредноста за y од (1) во равенката на параболата, добиваме

(2) $k^2x^2 - 2x(p - ky_1 + k^2x_1) + y_1^2 - 2kx_1y_1 + k^2x_1^2 = 0$

Од условот x_1 да е двоен корен имаме

$$2x_1 = \frac{2(p - ky_1 + k^2x_1)}{k^2}$$

откаде излегува $k = \frac{p}{x_1}$ и равенката на тангентата е

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad yy_1 - y_1^2 = px - px_1,$$

односно

$$\boxed{yy_1 = p(x + x_1).}$$

Ова е равенката на тангентата во точката $D(x_1, y_1)$ од параболата $y^2 = 2px$.

Пример. Равенката на тангентата во точката $(2, \sqrt{6})$ од параболата $y^2 = 3x$ е $\sqrt{6}y = \frac{3}{2}(x + 2)$.

Услов, правата $y = kx + l$ да е тангента на параболата $y^2 = 2px$ е

$$\boxed{p = 2kl}$$

Координатите на допирната точка се

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2} = \frac{kl}{k^2} = \frac{l}{k}, \quad y_1 = k \cdot \frac{l}{k} + l = 2l,$$

откаде повторно излегува

$$l = \frac{y_1}{2}, \quad k = \frac{l}{x_1} = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{y_1^2}{2x_1y_1} = \frac{2px_1}{2x_1y_1} = \frac{p}{y_1}.$$

Коефициентот на правецот на тангентата од параболата е $\frac{p}{y_1}$. Оттука се гледа, дека аголот што тангентата на параболата го прави со оската x е во толку помал во колку y е поголемо. Кога y, расте бескрајно, $tg\alpha \to 0$, што значи дека параболата сé повеќе и повеќе се приближува кон смерот што е паралелен со оската x.

Равенките на тангентите на параболата од точка надвор од параболата се определуваат по истиот начин како при елипсата и хиперболата.

Равенката на тангентата видовме дека е $yy_1 = p(x + x_1)$. Тука се непознати координатите на допирната точка x_1y_1. Бидејќи тангентата минува низ точката T (x_0, y_0), имаме $yy_1 = y(x + x_1)$. Од друга страна параболата минува низ допирната точка, па имаме $y_1^2 = 2px_1$. Од задните две равенки ги определуваме координатите x_1y_1.

Ова може да се добие и по следниот начин. Од условите за допир ги имаме равенките $y_0 = k\, x_0 + l$ и $p = 2kl$. Внесена вредноста за l од првата во втората ни дава $2k^2x_0 - 2ky_0 + p = 0$. Оттука добиваме за k две вредности k_1 и k_2, кои се реални кога $y_0^2 - 2px_0 \geqslant 0$, т. е. кога точката $T(x, y)$ е надвор од параболата или на неа.

Ако поставиме услов овие тангенти да бидат меѓусебно нормални добиваме.

$$k_1k_2 = -1 \text{ или поради } k_1k_2 = \frac{p}{2x_0}$$

откаде е

$$x_0 = -\frac{p}{2}.$$

Ова пак е исполнето за секоја точка од директрисата.

Пример 1. Од точката T (5, 7) да се повлечат тангенти на параболата $y^2 = 8x$.

Треба да бидат исполнети равенките

$$7y_1 = 4(5 + x_1) \text{ и } y_1^2 = 8x_1$$

кои решени ни даваат

$$y_1 = 10,\ y_1' = 4,\ x_1 = \frac{25}{2},\ x_1' = 2.$$

Равенките на тангентите се

$$20y = 4(2x + 25) \text{ и } 4y = 4(x + 2) \text{ или } 5y = 2x + 25$$
$$\text{и } y = x + 2.$$

Ако работиме со помошта на условите, ги имаме равенките

$$7 = 5k + l,\ 4 = 2kl$$

кои решени ни даваат

$$k_1 = 1,\ k_2 = \frac{2}{5},\ l_1 = 2,\ l_2 = 5,$$

па добиените тангенти се истите погоре добиени.

Пример 2. Да се најде равенката на тангентата на параболата $y^2 = 12x$ што ја сече правата $y = 3x - 4$ под агол од 45^0 и координатите на допирната и́ точка.

Од равенката на тангентата на параболата $yy_1 = p(x + x_1)$ имаме за коефициентот на правецот $tg\alpha = \frac{6}{y_1}$, додека коефициентот на правецот на дадената права е $tg\beta = 3$.

Од односот $45^0 = \beta - \alpha$ следува:

$$tg\varphi = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta tg\alpha} \text{ т.е.}$$

$$1 = \frac{3 - \frac{6}{y_1}}{1 + \frac{18}{y_1}} = \frac{3y_1 - 6}{y_1 + 18} \text{ или}$$

$$y_1 + 18 = 3y_1 - 6 \text{ или } 2y_1 = 24,\ y_1 = 12.$$

Внесувајќи ја оттука вредноста за y_1 во равенката на параболата добиваме $x_1 = 12$ и равенката на тангентата е $2y = x + 2$, а допирната точка $D(12, 12)$.

Ако пишеме $45^0 = \alpha - \beta$, излегува $y = -3$, $x = \frac{3}{4}$ и равенката на тангентата е $2y + 4x = -3$.

§ 40 РАВЕНКА НА НОРМАЛА НА ПАРАБОЛАТА

Нормала е права што стои нормално на тангентата во допирната точка. Бидејќи коефициентот на правецот на тангентата од параболата е $\frac{p}{y_1}$ равенката на нормалата е

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \text{ или}$$

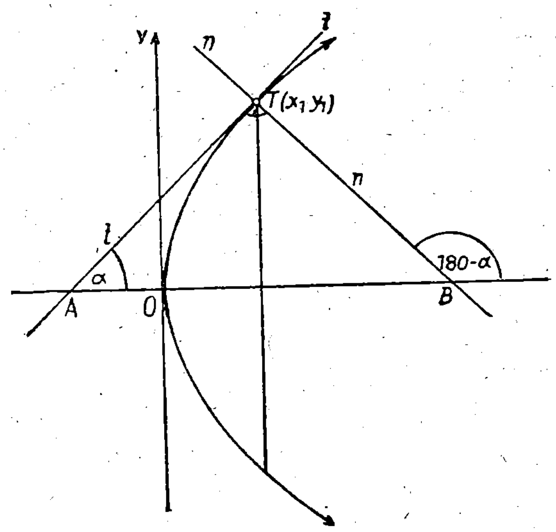
$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0.$$

Пример 1. Равенката на нормалата во точката $M(3, 6)$ на параболата $y^2 = 12x$ е

$$6(y - 6) + 6(x - 3) = 0 \text{ или}$$
$$y + x = 9.$$

Пример 2. На параболата $y^2 = 16x$, да се најде точката во која тангентата и нормалата со оската x зафаќаат рамнокрак триаголник (основата му е на оската x) (Сл. 63).

Бидејќи триаголникот ABT е рамнокрак, ако тангентата го зафаќа аголот α со x оската, нормалата ќе го зафаќа аголот $180^0 - \alpha$ па е $a_1 = -a_2$. Равенките на тангентата и нормалата во точката $T(x, y)$ се



Сл. 63

$$yy_1 = 8(x + x_1) \text{ односно } y - y_1 = -\frac{y_1}{8}(x - x_1).$$

Бидејќи е $a_1 = -a_2$, имаме $\dfrac{8}{y_1} = \dfrac{y_1}{8}$ а оттука $y_1^2 = 64$ или $y_1 = \pm 8$. За соодветната апсциса имаме од равенката на параболата $x_1 = 4$. Бараните точки се

$$T(4,\ 8) \text{ и } T(4,\ -8)$$

т.е. задачата има две решенија.

Задачи 1. Да се определат пресечните точки на правата *a*) $6x + y = 18$ со параболата $y^2 = 18x$; *b*) $2x + y - 2 = 0$ и $3y^2 = 16x$; *c*) $4x - y - 12 = 0$ и $y^2 = 8x$.

2. Кои се равенките на радиусвекторите на параболата $y^2 = 8x$, што им припаѓаат на точките $A(2, -4)$, $B\left(\frac{9}{2}, 6\right)$ и кој агол тие зафаќаат?

3. Во точката *a*) $M(3, -6)$ од параболата $y^2 = 12x$, *b*) $M\left(\frac{25}{4}, 5\right)$ од параболата $y^2 = 4x$, да се определи равенката на тангентата и нормалата.

4. Дадени се тангентите на параболата *a*) $3x - 2y + 4 = 0$, *b*) $2x + 2y + 5 = 0$, *c*) $3x + 4y + 12 = 0$. Да се определат соодветните параболи како и координатите на допирните точки.

5. Да се определи равенката на тетивата од параболата $y^2 = 2px$ што минува низ фокусот од параболата и сече на позитивните делови од координатните оски еднакви отсечки. Колкава е нејзината должина?

6. На параболата $y^2 = 5x$ да се повлече тангентата што е паралелна со правата $3x - 2y + 7 = 0$. Да се определи равенката на тангентата и координатите на допирната ѝ точка.

7. Каде се сечат тангентите на параболата $y^2 = 2px$ повлечени во точката со апсциса $x = \frac{p}{2}$?

8. Колкаво мора да е p во равенката $y^2 = 2px$ за параболата да ја допира правата $3y = 8x + 24$?

9. Под кој агол се сечат параболите $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$?

10. Во која точка од параболата $y^2 = 15x$, тангентата прави со позитивниот смер на оската x агол од 45^0.

11. Да се определи равенката на тангентата на параболата $2y^2 = 9x$ што е паралелна со правата $3x + 8y + 12 = 0$ и координатите на допирната ѝ точка.

12. Да се определат равенките на тангентата на параболата а) $y^2 = 8x$ *повлечени* од $T(6,8)$; *b*) $y^2 = 15x$ повлечени од $T\left(\frac{3}{2}, -\frac{21}{4}\right)$; *c*) $y^2 = 9x$ повлечени од $T\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, *d*) $y^2 = 5x$ повлечени од $T\left(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$.

13. Равенката на тангента на парабола е $9x - 6y + 5 = 0$. Да се определи равенката на параболата.

14. Кој агол го затвораат тангентите на параболата $y^2 = 5x$ повлечени од $T(-3,7)$?

15. На параболата $y^2 = 2px$ да се определи точката во која тангентата и нормалата со оската x затвораат рамнокрак триаголник.

16. Да се докаже дека тангентите на параболата повлечени од која било точка на директрисата се нормални една на друга.

17. На параболата $y^2 = 2px$ да се повлече тангента така што нејзината отсечка од допирната точка до оската

x да биде еднаква на p. Кои се координатите на допирната точка?

18. На параболата $y = 12x$ да се повлечат тангенти, кои со правата $y = 3x - 5$ зафаќаат агол од 45^0.

19. Под кој агол се сечат кругот $x^2 + y^2 + 6x = 63$ и параболата $y^2 = 12x$?

20. Да се определи равенката на тангентата од параболата $y^2 = 4x$, што е нормална на правата $y = 2x + 7$.

21. Да се определат равенките на нормалите повлечени во точките $M(1, 2)$, $M(4, 4)$ од параболата $y^2 = 4x$ и аголот што тие го прават.

22. Да се определат равенките на заедничките тангенти на кривите $y^2 = 20x$ и $9x^2 + 16y^2 = 144$ и координатите на нивните допирни точки.

23. Да се определат равенките на заедничките тангенти на кривите:

$a)$ $y^2 = 4x, \; 10x^2 + 10y^2 = 81,$

$b)$ $x^2 + y^2 = 25, \; y^2 = \frac{75}{4}x,$

$c)$ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{27} = 1, \quad y^2 = 9x,$

$d)$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1, \; y^2 = \frac{125}{4}x.$

24. Нормалата на параболата $y^2 = 16x$ паралелна е со правата $4y + 3x = 40$. Кои се координатите на допирната точка?

25. Под кој агол се сечат кругот $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2$ и параболата $y^2 = 2px$?

26. Истата задача за кругот $x^2 + y^2 - 4x - 60 = 0$ и параболата $y^2 = 8x$.

27. На параболата $y^2 = 4x$ да се повлече тангента паралелна со правата $2x - 3y + 9 = 0$. Да се определи равенката на тангентата и површината на триаголникот определен со допирната точка, фокусот и пресечната точка на нормалата во оската x.

28. Кој услов треба да е исполнет за правата $y = kx + l$ да биде нормала на параболата $y^2 = 2px$?

29. Дадена е параболата $y^2 = 9x$. Да се определи равенката на кругот којшто во точките $A(4, 6)$ и $B(4, -6)$ ја допира таа парабола однатре.

30. Да се определи равенката на кругот, којшто во точките $A\left(\frac{9}{2}, 6\right)$ и $B\left(\frac{9}{2}, -6\right)$ ја сече параболата $y^2=8x$ под прав агол.

31. Во точката $M(5, 10)$ од параболата $y^2=20x$ да се повлече тангента. Потоа да се докаже дека истата тангента ја допира и елипсата $9x^2+16y^2=144$. Ако допирната точка на елипсата е M', да се определи равенката на кругот, што ја допира елипсата во M' однадвор, а центарот му е на директрисата.

32. Да се определи равенката на параболата чие теме е во центарот, а фокусот во десниот фокус на елипсата $16x^2+25y^2=400$. Во кои точки и под кој агол се сечат овие криви?

33. Под кој агол се сечат кривите

$$4x^2-9y^2=36 \text{ и } 9y^2=10x?$$

34. Да се определат равенките на заедничките тангенти на параболата $y^2=12x$ и кругот со полупречник $r=5$ и центар во фокусот на параболата.

35. Да се определи равенката на парабола на којашто е $3y-x-9=0$ тангента. Да се определат координатите на допирната точка и равенките на радиус векторите во допирната точка. Да се докаже дека симетралата на аголот, што го образуваат радиус векторот во допирната точка и паралелата со оска x низ допирната точка, се поклопува со тангентата на параболата.

36. Да се докаже: две конфокални параболи со спротивни оски и еднакви параметри, се сечат под прав агол.

Резултати. 1.

$a)$ $M_1(2, 6)$, $M_2\left(\frac{9}{2}, -9\right)$; $b)$ $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $M_2(3, -4)$;

$c)$ $M_1(2, -4)$, $M_2\left(\frac{9}{2}, 6\right)$.

2. $a)$ $x=2$, $12x-5y=24$, $\varphi=157°22'49''$.

3. $a)$ $y+x+3=0$, $y-x+9=0$; $b)$ $10y-12x-75=0$, $24y+20x+5=0$.

4. $a)$ $y^2=12x$, $M\left(\frac{4}{3}, -4\right)$; $b)$ $y^2=10x$, $M\left(\frac{5}{2}, -5\right)$;

$c)$ $y^2=9x$, $M(4, -6)$.

5. $x+y-\frac{p}{2}=0, d=4p$. **6.** $9x-6y+5=0,\ D\left(\frac{5}{9}, \frac{5}{3}\right)$.

7. $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$

8. $p=42\frac{2}{3}$.

9. Во O (0, 0) под прав агол. Во A $(2p, 2p)$ под аголот $\varphi=36^0\,52'11''$.

10. $D\left(\frac{15}{4}, \frac{15}{2}\right)$.

11. $3x+8y+24=0,\ D(8,-6)$.

12. *a*) $x-y+2=0,\ x-3y+18=0, D_1(2,4), D_2(18,12)$;

b) $5x+2y+3=0,\ 4x+4y+15=0, D_1\left(\frac{3}{5},-3\right)$ $D_2\left(\frac{15}{4},-\frac{15}{2}\right)$;

c) $2y-3x-3=0,\ 4y+3x+12=0,\ D_1(1,3)$, $D_2(4,-6)$;

d) $6y-9x-5=0,\ 8y+5x+16=0,\ D_1\left(\frac{5}{9}, \frac{5}{3}\right)$, $D_2\left(\frac{16}{5},-4\right)$.

13. $y^2=5x$.

14. $tg\varphi=\frac{32}{7},\ \varphi=77^{\circ}39'39''$. **15.** $T_1\left(\frac{p}{2}, p\right),\ \ T_2\left(\frac{p}{2},-p\right)$.

16. Точка на директрисата ги има координатите $\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$. Затоа е

$$y_1=-\frac{kp}{2}+l,$$

понатаму $p=2kl,\ \ l=\frac{p}{2k}$. Значи е $y_1=-\frac{kp}{2}+\frac{p}{2k}$ или $k^2p+2ky_1=p$. Оттука излегува $k_1k_2=-1$, што значи, дека тангентите се една на друга нормални.

17. Од $p^2 = 2px + 4r_1^2$ излегува

$$x_1 = -\frac{p}{4}(1 - \sqrt{5}),\ y_1 = p\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}.$$

18. $x - 2y + 12 = 0,\ 4x + 2y + 3 = 0.$

19. Равенките на тангентите во пресечната точка $M(3, 6)$ се $y = -x + 9,\ y = x + 3,\ \varphi = 90^0$.

20. $y = -\frac{x}{2} - 2.$

21. $x + y - 3 = 0,\ 2x + y - 12 = 0,\ tg\varphi = \pm\frac{1}{3}.$

22. $y = x + 5,\ y = -x - 5,\ E_1\left(-\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right),\ P_1(5, 10),$

$$E_2\left(-\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right),\ P_2(5, -10).$$

23. *a)* $x - 3y + 9 = 0,\ x + 3y + 9 = 0;$

b) $4y - 3x - 25 = 0,\ 4y + 3x + 25 = 0;$

c) $y = \frac{3}{8}x + 6,\ \ y = -\frac{3}{8}x - 6;$

d) $y = \frac{25}{12}x + \frac{15}{4},\ y = -\frac{25}{12}x - \frac{15}{4}.$

24. $\frac{9}{4}$, 6. **25.** $tg\varphi = \pm\sqrt{3}.$ **26.** $tg\varphi = \pm\sqrt{3}.$

27. $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2},\ \ P = \frac{39}{8}.$ **28.** $\kappa^3 p + 2(\kappa p + l) = 0.$

29. $\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{225}{4}.$ **30.** $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = 117.$

31. Тангентата е $y = x + 5$, условот $\kappa^2 a^2 + b^2 = l^2$ е исполнет; координатите на допирната точка се

$$x_1 = -\frac{16}{5},\ y_1 = \frac{9}{5},\ 25x^2 + 25y^2 + 250x - 180y + 787 = 0.$$

32. $y^2 = 12x,\ S_1\left(\frac{5}{4}, \sqrt{15}\right),\ S_2\left(\frac{5}{4}, -\sqrt{15}\right)$, тангентата на елипсата е $4x + 5\sqrt{15}y - 80 = 0$, а тангентата на параболата $2x - 2\sqrt{15}y = 15$, $tg\,\varphi = -\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

33. Пресечните точки се $\left(\frac{9}{2}, \sqrt{5}\right), \left(\frac{9}{2} - \sqrt{5}\right)$. Равенките на тангентите се $2x - y\sqrt{5} = 4$ и $18y - 2x\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = 0$, односно $2x + y\sqrt{5} = 4,\ 18y + 2x\sqrt{5} + 9\sqrt{5} = 0,\ \varphi = 27^0 51' 28''$.

34. Тангентите на параболата се $4y - 3x - 16 = 0$, $4y + 3x + 16 = 0$, а тангентите на кругот $-3x + 4y - 16 = 0$, $-3x - 4y + 16 = 0$.

35. Равенката на параболата е $y^2 = 4x$. Радиусвекторот на допирната точка ја има равенката $4y - 3x + 3 = 0$, паралелата на оската x низ допирната точка е $y - 6 = 0$, а равенката на симетралата аголот $3y - x - 9 = 0$.

36. Равенката на едната парабола е $y^2 = 2px$, а равенката на втората, чија оска е спротивна на првата, а има исти фокус е $y^2 = 2px\ (x - p)$. Тие се сечат во точката $S\left(\frac{p}{2}, p\right)$. Коефициентот на правецот на тангентата во S на првата парабола е $\frac{p}{y} = 1$, а на втората $-\frac{p}{y} = -1$. Двете параболи значи, се сечат под прав агол.

§ 41. ИЗВЕДУВАЊЕ РАВЕНКИТЕ НА ГЕОМЕТРИСКИ МЕСТА

Еден од многу важните поими во геометријата е поимот за геометриско место на точки, за којшто станува збор во овој дел.

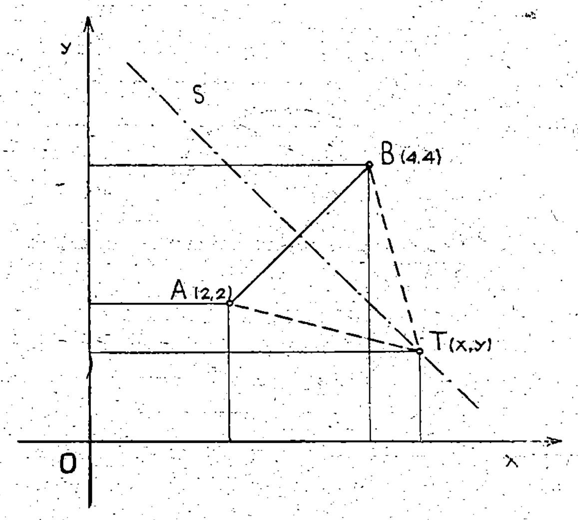
Под геометриско место на точки се подразбира онаа геометриска творба (крива или површина), што го има својството, сите нејзини точки и само тие точки да задоволуваат еден поставен услов.

Порано (во планиметријата и др.) со чисти геометриски испитувања утврдувавме, од каков вид е тоа место (симетрала на отсечка, симетрала на агол, круг, елипса, хипербола, парабола и др.) Во аналитичката геометрија координатниот систем го земаме како основа за разгледувањата и составуваме од уочените и дадените релации равенки, кои што го претставуваат во сушност геометриското место. Ако притоа се добијат две равенки, тие определуваат само една или повеќе точки, што го задоволуваат дадениот услов. Ако се добие една равенка, тоа значи дека условите на задачата ги задоволуваат безброј точки. Тие лежат на една права ако добиената равенка е од прва степен и на една крива од 2 ред ако е равенката од втора степен.

Определени методи за решавање на задачи од оваков тип не постојат. Изборот на координатниот систем исто така е произволен. Секоја задача се решава посебно. Ако се наложи воведување на помошни величини, потребно е тие да се елиминираат, и во добиената равенка да фигурираат само дадените величини и координатите на една произволна точка што го задоволува поставениот услов.

Ќе дадеме неколку изработени примери и потоа задачи за вежби од геометриските места.

1. Задача: Да се определи равенката на геометриското место од точки, што се еднакво оддалечени од точките A (2,2) и B (4,4).



Сл. 64

Ова геометриско место е симетралата на отсечката AB. Ако било која нејзина точка ја обележиме со $T(x, y)$, според задачата мора да постои условот

$$AT = BT.$$

Тогај е

$$\overline{AT} = \sqrt{(2-x)^2 + (2-y)^2} \text{ и}$$

$$\overline{BT} = \sqrt{(4-x)^2 + (4-y)^2}.$$

По изедначување имаме

$$\sqrt{(2-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(4-x)^2 + (4-y)^2}.$$

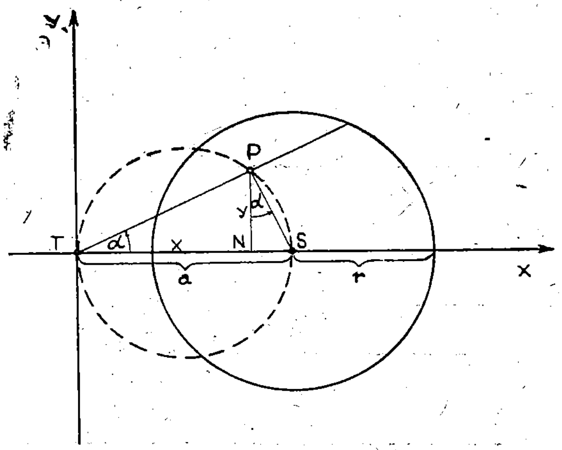
Ако ја квадрираме оваа равенка, па сведиме и средиме ја добиваме на крајот равенката

$$x + y - 6 = 0,$$

што и претставува бараното геометриско место.

2. Задача: Даден е еден круг и точката T надвор од него. Од точката T се повлечени сечици на кругот. Се прашува што претставува геометриското место на средните точки на сечиците?

Координатниот почеток го земаме во точката T а оската x да минува низ центарот на дадениот круг и точката T. Дадени се радиусот на кругот r и $\overline{TS} = a$. Си повлекуваме една сечица произволна. Нејзината средна точка се определува со нормалата од S.



Сл. 65

Ако сечицата го затвора со x оската аголот α и ако координатите на точката P ги означиме со x и y ќе имаме

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x}.$$

Од триаголникот пак PSN имаме

$$tg\,\alpha = \frac{SN}{PN} = \frac{a-x}{y}.$$

Со изедначување на добиените вредности за $tg\,\alpha$ излегува

$$\frac{y}{x} = \frac{a-x}{y}$$

односно

$$y^2 = ax - x^2$$

Значи геометриското место е круг чиј врв е во T а полупречник $\frac{a}{2}$.

Општата равенка на овој круг е

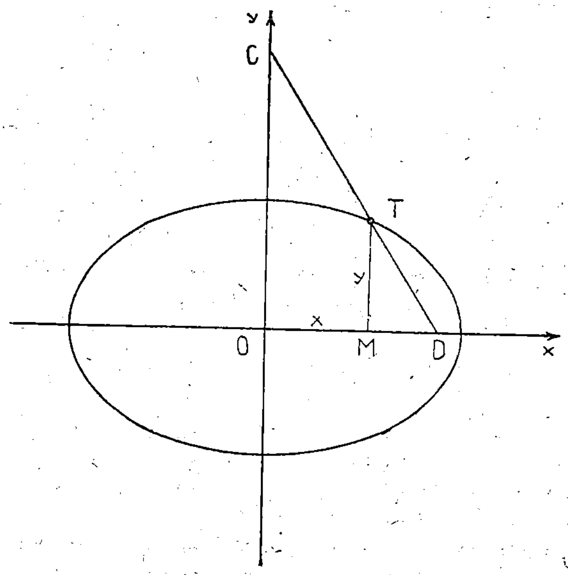
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

3. *Задача*: Отсечката CD (5 см) се лизга по краците на еден прав агол така да краевите на отсечката се наоѓаат на двата крака. Точката T ја дели оваа отсечка во односот $3:2$. Кое е геометриското место на оваа точка T?

$$CT : TD = 3 : 2.$$

Краците на правиот агол ги земаме за оски на координатниот систем. Координатите на точката T се

$$\overline{OM} = x \text{ и } \overline{TM} = y.$$



Сл. 66

Од релациите (според цртежот)

$$\overline{OD} : x = \overline{CD} : \overline{CT} = 5 : 3 \text{ и } \overline{OC} : y = \overline{CD} : \overline{TD} = 5 : 2$$

добиваме

$$\overline{OD} = \frac{5x}{3}, \ \overline{OC} = \frac{5y}{2}.$$

Бидејќи е

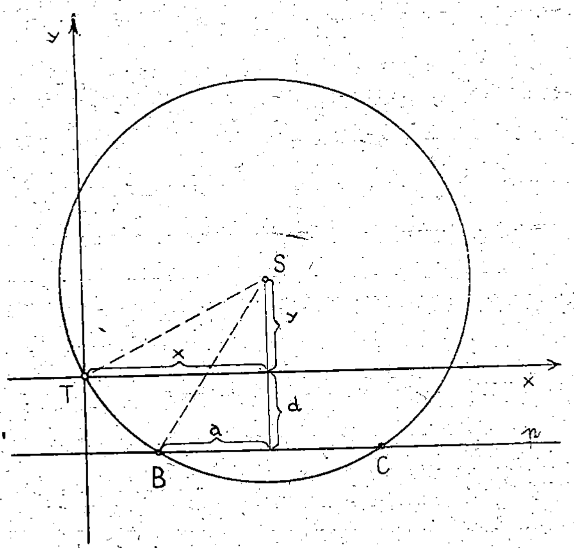
$$\overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 = 25,$$

следува

$$\frac{25}{9} x^2 + \frac{25}{4} y^2 = 25 \text{ или}$$

$4x^2 + 9y^2 = 36$ т.е. геометриското место на точките T е елипса со средиште во пресечната точка на правиот агол и полуоски 3 и 2 единици.

4. Задача: Да се најде геометриското место на центрите на круговите, кои минуваат низ дадена точка T и на правата p отсечуваат отсечка $2a$.



Сл. 67

За оска x ја земаме правата p што минува низ T а за оска y, нормалата на неа во T.

Отсечката $TD = d$ а $BC = 2a$.

Од сликата се гледа дека е $\overline{ST} = \overline{SB}$. Ако со x и y ги обележиме координатите на центарот тогај

$$\overline{ST}^2 = x^2 + y^2 \text{ и } \overline{SB}^2 = a^2 + (y + d)^2.$$

Оттука следува

$$x^2 + y^2 = a^2 + (y + d)^2,$$

или понатаму

$$x^2 = a^2 + 2yd + d^2,$$

а ова е равенка на парабола, чија оска е паралелна со оската y.

Задачи:

1. Да се определи геометриското место на точки оддалечени од правата $8x - 15y + 34 = 0$ за $a)$ 5, $b)$ -5.

2. Да се определи геометриското место на точки при кои односот од растојанијата од две дадени прави е постојанен и еднаков на k.

3. Да се определи геометриското место на точките на кои збирот од растојанијата до краковите на правиот агол е константен.

4. Да се определи геометриското место на точките на кои разликата од квадратите на нивните растојанија до две постојани точки е еднаква на k^2.

5. Дадени се точките $A(1, 0)$ и $B(5, 0)$. Да се определи геометриското место на точките $T(x, y)$ за кои е $\overline{AT}:\overline{BT}=3$.

6. Да се определи геометриското место на центрите на круговите што го сечат кругот $x^2+y^2=8$ под прав агол и минуваат низ точката $M(4, 6)$.

7. На кругот $x^2+y^2=r^2$ да се повлечат тангенти со должина a. Кое е геометриското место на нивните краеви?

8. Во кругот $x^2+y^2=r$ се повлечени тетиви со должина a. Кое е геометриското место на средните им точки?

9. Да се определи геометриското место на центрите на круговите на кои радиусот $r=4$ и минуваат низ точката $M(2, 3)$.

10. Низ координатниот почеток да се повлечат тетиви на кругот $y^2=2rx-x^2$ и тие продолжат за својата должина. Што е геометриското место на нивните краишта?

11. Какво геометриско место добиваш ако ги скратиш на половина ординатите на точките од една елипса?

12. Истото од претходната задача за кругот.

13. Врвот на сноп зраци е во *a*) средиштето, *b*) едниот врв на елипсата $4x^2+9y^2=36$. Кое е геометриското место на средните точки на зраците оградени со врвот и елипсата?

14. Да се определи геометриското место на средните точки на спојниците на точки од хиперболата $9x^2-16y^2=144$ со *a*) координатниот почеток, *b*) врвот и *c*) фокусот.

15. Да се определи геометриското место на центрите на круговите што ги допираат круговите $x^2+y^2=9$ и $(x-5)^2+y^2=4$.

16. Да се определи геометриското место на центрите на круговите што ја допираат правата $x+3=0$ и кругот $(x-8)^2+y^2=25$ однадвор.

17. Да се определи геометриското место на центрите на круговите што допираат еден полукруг и неговиот пречник.

18. Да се определи геометриското место на центрите на круговите, коишто ја допираат правата $y+4=0$ и кругот $x^2+(y-2)^2=4$.

19. Да се определи геометриското место на подножните точки од нормалите, што можат да се повлечат од фокусот на параболата на сите тангенти на параболата.

20. Да се определи геометриското место на тежиштата на триаголниците, на коишто едниот врв е во врвот на параболата $y = 2px$, вториот во фокусот и третиот на самата парабола.

Резултати.

1. $8x - 15y - 51 = 0$, $8x - 15y + 119 = 0$.

2. Ако се $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ равенки на тие прави, резултатот е

$$(A_1x + B_1y + C_1)\sqrt{A_2^2 + B_2^2} + k(A_2x + B_2y + C_2)\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = 0.$$

Ова се равенки на две прави што минуваат низ пресечната точка на дадените прави.

3. Ако краковите на правиот агол се координатните оски а константниот број k, бараното геометриско место е

$$x + y = k.$$

4. Оската на апсцисата нека се поклопува со отсечката $\overline{AB} = 2a$, а оската на ординатата нека е симетралата на таа отсечка. Ако бараната точка е $T(x, y)$ на геометриското место, тогаш е

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k^2 \text{ или } (a + x)^2 + y^2 - (a - x)^2 - y^2 = k^2$$

$$\text{односно } x = \frac{k^2}{4a}.$$

5. Ако $C(x, y)$ е бараната точка на геометриското место, тогаш е

$$\frac{(x - 1)^2 + y^2}{(x - 5)^2 + y^2} = 9 \text{ или } x^2 + y^2 - 11x + 28 = 0.$$

6. $2x + 3y - 15 = 0$. **7.** $x^2 + y^2 = a^2 + r^2$

8. $x^2 + y^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}$ **9.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

10. $y^2 = 4rx - x^2$ **11.** $b^2x^2 + 4a^2y^2 = a^2b^2$ (елипса).

12. $x^2 + 4y^2 = r^2$.

13. *a*) $\frac{4}{9}x^2 + y^2 = 1$; *b*) $\frac{4}{9}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1$, или

$$\frac{4}{9}x^2 + (y \pm 1)^2 = 1.$$

14. *a*) $9x^2 - 16y^2 = 36$; *b*) $(x-2)^2 - 16y^2 = 36$,

$$c)\ 9\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 16y^2 = 36.$$

15. $24\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - y^2 = 6.$

16. $y^2 = 32x.$ **17.** $y^2 = 2r\left(x + \frac{r}{2}\right)^2.$

18. $x^2 = 8y.$

19. Равенката на тангентата е $y\,y_1 = p(x + x_1)$, равенката на нормалата од фокусот на таа тангента е

$$2py = -y_1(2x - p)$$

какви и да се x_1 и y_1, пресечната точка на двете прави е $x = 0$ т.е. равенка на оската y.

20. Од $3u = x + \frac{p}{2}$, $3v = y$ и $y^2 = 2px$

излегува $v^2 = \frac{2p}{3}\left(u - \frac{p}{6}\right).$

Задачи за повторување

1. Низ точката $M(10,10)$ да се повлече права, чие растојание од точката $N(-13,3)$ по апсолутна вредност е равно на 17.

2. Да се определи точка од права $y = 2x - 11$ на којашто растојанието од правата $8y + 15x - 24 = 0$ по апсолутна вредност е равно на 8.

3. Низ точката $M(7,24)$ да се повлече права така што отсечката ѝ меѓу паралелните прави $4y - 3x - 24 = 0$ и $4y - 3x - 12 = 0$ да е еднаква на 4.

4. На правата $2y - x - 8 = 0$ да се определи точка што од правата $3x + 4y - 11 = 0$ и од точката $M(8,3)$ е еднакво оддалечена.

5. Да се определи равенката на правата, којашто минува низ точката $M(2, -3)$, така што оваа точка да ја располовува отсечката на таа права меѓу правите $3x + y - 2 = 0$ и $x + 5y + 10 = 0$.

6. Низ точката $M(-2,6)$ да се повлече права што ги сече правите $5x - y + 4 = 0$ и $5y + x - 6 = 0$ под еднакви аглови.

7. Темето A на квадратот е во почетокот, а второто теме соседно ги има координатите $B(a, b)$. Кои се координатите на другите темиња?

8. Докажи ја теоремата: Проекциите од која и да било точка $M(x_0, y_0)$ што е на кругот опишан околу триаголникот на страните на триаголникот ABC, лежат на иста права *(Симсонова права)*.

9. Да се определи равенката на кругот што минува низ точката $M(3, -1)$, го сече кругот $(x+2)^2+\left(y+\frac{9}{12}\right)^2 = \frac{49}{4}$ под прав агол, а центарот му е на правата $4y+9x-12=0$.

10. Да се определи равенката на кругот, што ги допира правите $4y-3x=3$ и $3y-4x+3=0$ и има полупречник 2.

11. На елипсата $x^2+3y^2=28$ дадени се точките: $A(5,1)$ и $B(-4,2)$. Кои се координатите на третата точка C од таа елипса, ако површината на триаголникот ABC е максимална?

12. На гранката од хиперболата $3x^2-y^2=3$ што минува низ првиот квадрант, да се определи точката T што е најблиска до точката $M(0,4)$. Истовремено одреди ја оддалеченоста на точката M од точката T на хиперболата.

13. Да се определи точката, во којашто се сечат параболата $y^2=32x$ и кругот опишан околу фокусот на параболата со полупречник $r=26$. Кои се равенките на тангентите во горната пресечна точка и колкав е аголот меѓу тие тангенти? Колкава е површината на триаголникот што тангентите го образуваат со оската x?

14. Низ темето на параболата $y^2=6x$ да се повлече тетива што со позитивниот смер на оската x заклучува агол од 30^0. Да се определи точка од параболата меѓу пресечните точки, чие растојание од таа тетива е најголемо.

15. Колкаво треба да е p во равенката на параболата $y^2=2px$, за да го допира таа кругот $(x-13)^2+y^2=25$? Кои се координатите на допирната точка и кои се равенките на заедничките тангенти?

16. Дадена е равенката $y^2=2px$ и точката $M(8,0)$; да се определи равенката на кругот што минува низ M и ја допира параболата во две спрема оската x симетрични точки.

17. Од механиката ни е познато дека координатите на која било точка од кривата на „телото фрлено косо" е дадена со равенката $x=ct\cos\alpha$, $y=ct\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$. Тука c ја означува почетната брзина, t времето, g забрзувањето на силата на тежата, α аголот под кој телото е фрлено.

a) Да се определи равенката на кривата по која телото се движи во облик $y=f(x)$; *b*) да се докаже дека кривата е парабола; *c*) да се определи темето, параметарот и равенката на директрисата на таа парабола; *d*) да се определи аголот α, под кој треба да се фрли некое тело за да мине низ дадената точка $M(x_0, y_0)$;

b) да се определи геометриското место на точките за кои излегува само една вредност на аголот φ („*парабола на сигурноста*").

Резултати.

1. $8y - 15x + 70 = 0$, $15y - 8x - 230 = 0$.

2. $M_1(8,5)$, $M_2\left(-\frac{24}{31}, -12\frac{17}{31}\right)$. 3. $y = 24$, $y = \frac{24}{7}x$.

4. $M_1(4,6)$, $M_2(64, 36)$. 5. $y - 4x + 11 = 0$.

6. $2y + 3x - 6 = 0$, $3y - 2x - 22 = 0$. 7. $C(a-b, a+b)$, $D(-b, a)$; $C'(a+b, b-a)$, $D'(b, -a)$.

8. Да ја земеме за оска x страната AB, за оска y соодветната висина CO; да ги означиме со a, b апсцисите на точките A, B и со c ординатата на точката C; равенката на кругот опишана околу триаголникот ABC ќе биде $x^2 + y^2 - (a+b)x - \frac{c^2 + ab}{c}y + ab = 0$. Ако проекциите на точката $M(x_0, y_0)$ на страната BC, AC, AB се A', B', C', координатите на точката C' се $(x_0, 0)$. Координатите на точката $A'(x_1, y_1)$ ќе се добијат, ако се решат равенките на правите BC и MA', т.е. $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$, $y - y_0 = \frac{b}{c}(x - x_0)$ откаде излегува $x_1 = \frac{b^2x_0 + bc^2 - bcy_0}{b^2 + c^2}$, $y_1 = \frac{b^2c + c^2y_0 - bcx_0}{b^2 + c^2}$; координатите на точката $B'(x_2, y_2)$ се добиваат во x_1 и y_1 ако се замени b со a. Точките A', B', C' лежат на иста права ако B' лежи на правата $A'C'$ т.е. ако е $\frac{b^2c + c^2y_0 - bcx_0}{bc^2 - bcy_0 - c^2x_0} = \frac{a^2c + c^2y_0 - acx_0}{ac^2 - acy_0 - c^2x_0}$. Ако се ослободиме од именителот и ја разделиме равенката со $c^3(a-b)$, излегува $x_0^2 + y_0^2 - (a+b)x_0 - \frac{c^2 + ab}{c}y_0 + ab = 0$ кое ни покажува дека $M(x_0, y_0)$ лежи на кругот ABC.

9. $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 26$.

10. $\left(x - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{7}\right)^2 = 4$, $\left(x - \frac{31}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = 4$, $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 4$, $(x+7)^2 + (y+7)^2 = 4$.

11. $C(-1, -3)$. 12. $T(2, 3)$, $TM = \sqrt{5}$.

13. 18, ± 24, $3y-2x-36=0$, $5x+12y-378=0$, $\varphi=$ $=123^\circ 41'25''$ $P=1123{,}2$.

14. Растојанието σ на точката $M(x;y)$ на параболата од $y=\frac{x}{2}\sqrt{3}$ е $\frac{(x\sqrt{3}-3y)}{\sqrt{12}}$ или поради $y^2=6x$ тоа е $\frac{(6\sqrt{3}y-y^2)}{12}$; $\sigma'=0$ за $y=3\sqrt{3}, x=\frac{9}{2}$, $\sigma\max.=-\frac{9}{4}$.

15. $p=1$, $12, \pm\sqrt{24}\ x\mp y\sqrt{24}+12=0$.

16. $(x-13)^2+y^2=25$, $(x-5)^2+y^2=9$.

17. *a*) и *b*) Елиминирај го t од двете дадени равенки. Излегува параболата $y=x\,tg\,\alpha-\frac{g\,x^2}{2c^2\cos^2\alpha}$. Темето ѝ е $\left(\frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}, \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$, директрисата $y=\frac{c^2}{2g}$ и е независна од α.

d) Аголот α се добива од равенката $y_1=x_1\,tg\,\alpha-\frac{g\,x_1^2}{2c^2\cos^2\alpha}$ или $tg^2\alpha-\frac{2c^2}{g\,x_1}tg\,\alpha+\frac{2c^2y_1}{g\,x_1^2}+1=0$.

Излегуваат две вредности за $tg\,\alpha$ итн. Тие се реални, кога е $D=\frac{c^4}{g^2x_1^2}-\frac{2c^2y_1}{g\,x_1^2}-1\geqq 0$. *b)* $D=0$ за $c^4-2gc^2y_1-$ $-g^2x_1^2=0$. Тоа е равенката на параболата на која оската е оската y, а тангентата во нејзиното теме директрисата на парабола со иста почетна брзина. За точки надвор од таа парабола е $D<0$. Под ниеден агол не може да се фрли телото, за да ги достигне тие точки. За точките во параболата постојат два смера, со кои може да се погоди дадена точка. За тоа, таа парабола се вика *„парабола на сигурноста“*. Таа ја допира секоја од параболите под 1) и 2).

СОДРЖИНА

ГЛАВА I

Увод во аналитичката геометрија Стр.

ГЛАВА II

Точка

ГЛАВА III

Права

ГЛАВА IV

Круг

ГЛАВА V

Конусни пресеци

Исправка: По грешка направена е замена на сликите 40 и 48, така слика 40 на страна 150 треба да стои како слика 48 на стр. 129 (долу) а слика 48 на стр. 129 долу треба да стои како слика 40 на стр. 105.