

ХИИ РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата

Десет години републички натпревари по математика '86-'95

подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. При делење на два броја со 8 се добиваат остатоци 5 и 3. Докажи дека при делење на производот на тие броеви со 8 се добива остаток 7.

2. Бригада трактористи треба да изораат блок земја за одредено време со дневна норма од 360 декари. Трактористите ја натфрлиле нормата за $16\frac{2}{3}\%$, па за последниот ден од одреденото време им останале за орање уште 60 декари. Пресметај колку декари имал блокот.

3. Во правоаголниот триаголник ABC повлечена е висината CD на хипотенузата AB . Докажи дека збирот на радиусите r , r_1 и r_2 на впишаните кружници во триаголниците ABC , ADC и BDC е еднаков на висината CD .

4. Од точката M , што лежи на правата p , повлечи произволна полуправа MN што не лежи на правата p . Потоа повлечи права q , паралелна со правата p и различна од неа, која полуправата MN ја сече во точката S , а симетралите на добиените напоредни агли во точките P и Q . Докажи дека точката S е средина на отсечката PQ .

XIII (88.VII.1)

Ако при делење на x и y со 8 се добиваат остатоци 5 и 3, тогаш:

$$x = 8m + 5, \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad y = 8n + 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За нивниот производ добиваме:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (8m + 5) \cdot (8n + 3) \\ &= 64mn + 24m + 40n + 15 \\ &= 8 \cdot (8mn + 3m + 5n) + 8 + 7 \\ &= 8(8mn + 3m + 5n + 1) + 7 \\ &= 8k + 7, \quad (k = 8mn + 3m + 5n + 1). \end{aligned}$$

Оттука следува дека при делење на производот $x \cdot y$ со 8 се добива остаток 7.

ХIII (88.VII.2)

Прв начин. Бригадата треба дневно да изора 360 декари. Но, таа ја натфрлила нормата за $16\frac{2}{3}\%$. Бидејќи:

$$16\frac{2}{3}\% \text{ од } 360 \text{ е } \frac{50}{3} \cdot \frac{1}{100} \cdot 360, \text{ т.е. } 60$$

ќе следува дека нормата е натфрлена за 60 декари и сега изнесува 420 декари. Ако во првиот случај на бригадата ѝ беа потребни n денови, тогаш во вториот случај - со дневна норма од 420 декари - ќе ѝ бидат потребни $n-1$ ден и уште еден ден, бидејќи последниот ден се изорани само 60 декари. Според тоа добиваме:

$$420(n-1) + 60 = 360n$$

$$42n - 42 + 6 = 36n$$

$$6n = 36, \quad n = 6$$

Значи, на бригадата ѝ се потребни 6 дена да го изора блокот. Следствено, блокот има $6 \cdot 360$ декари, т.е. 2160 декари.

Втор начин. На ист начин како погоре наоѓаме дека новата норма е 420 декари. Нека блокот има x декари. Ако бригадата дневно изорува 360 декари, ќе ѝ бидат потребни $\frac{x}{360}$ дена. Но, бригадата ја натфрлила нормата за 60 декари дневно и со таа норма изорала $x-60$ декари, бидејќи за последниот ден останале само 60 декари. Значи, со норма од 420 декари на бригадата ѝ биле потребни $\frac{x-60}{420}$ дена, а тој рок е за 1 ден помал од $\frac{x}{360}$ дена. Според тоа, ја имаме равенката:

$$\frac{x}{360} - 1 = \frac{x-60}{420} \quad / \cdot 2520$$

од каде што добиваме:

$$7x - 2520 = 6x - 360$$

$$x = 2160$$

Значи, блокот има 2160 декари.

XIII (88.VII.3)

Нека $\overline{CD} = h$ е висина во правоаголниот $\triangle ABC$ и нека r, r_1 и r_2 се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABC, ADC и BDC . Да означиме: $\overline{AD} = q, \overline{BD} = p$ (црт. 1).

Од $\triangle ABC$, бидејќи $\overline{AT} = b - r$, $\overline{TB} = a - r$ добиваме:

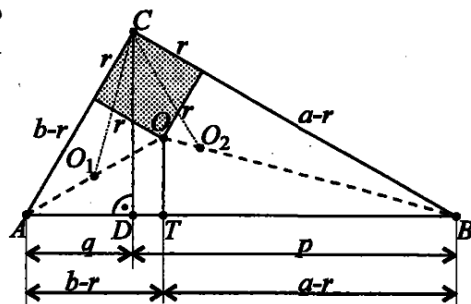
$$b - r + a - r = c, \quad r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

На сличен начин од триаголниците ADC и BDC добиваме:

$$r_1 = \frac{1}{2}(q + h - b) \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{1}{2}(p + h - a).$$

Тогаш:

$$\begin{aligned} r + r_1 + r_2 &= \frac{1}{2}(a + b - c + q + h - b + p + h - a) \\ &= \frac{1}{2}(2h + (q + p) - c) = h. \end{aligned}$$



Црт. 1

XIII (88.VII.4)

Според условот на задачата го добиваме црт. 2, каде што s_1 и s_2 се симетрала на напоредните агли. Треба да докажеме дека $\overline{PS} = \overline{SQ}$.

Ќе докажеме дека $\triangle MPS$ е рамнокрак. Навистина, од: $\alpha = \beta$, бидејќи s_1 е симетрала

$\alpha = \gamma$, како наизменични агли

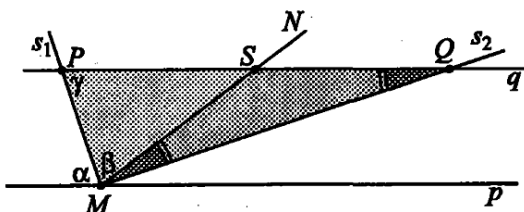
следува дека $\beta = \gamma$, т.е. $\triangle MPS$ е рамнокрак, од каде што следува дека:

$$(1) \quad \overline{MS} = \overline{PS}.$$

На сличен начин се докажува дека $\triangle MQS$ е рамнокрак, од каде што следува дека:

$$(2) \quad \overline{MS} = \overline{SQ}.$$

Од (1) и (2) следува $\overline{PS} = \overline{SQ}$, т.е. S е средина на отсечката PQ .



Црт. 2

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Откако ја поминал половината од патот меѓу местата A и B , возачот на камионот ја зголемил брзината за 25%, па во местото B стигнал половина час порано. За колку часа камионот го поминал патот од A до B ?

2. Збирот на три реални броја е 0. Докажи дека збирот на кубовите на тие реални броеви е еднаков на трикратниот производ на тие броеви.

3. Конструирај квадрат чиито две спротивни темиња лежат на дадена права p , а другите две на две дадени кружници.

4. Над катетите AC и BC , надвор од правоаголниот триаголник ABC , конструирани се квадратите $ACDE$ и $BFKC$.

1° Сврзи ги темињата D и K , па докажи дека продолжената хипотенузина висина CC_1 минува низ средината M на отсечката DK .

2° Од E и F спушти нормали EE_1 и FF_1 на продолжението на AB , па докажи дека овие нормали се еднакви на хипотенузините отсечки, т.е.

$$\overline{EE_1} = \overline{AC_1}, \quad \overline{FF_1} = \overline{BC_1}.$$

XIII (88.VIII.1)

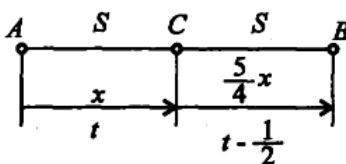
Прв начин. Ако на првата половина од патот камионот се движел со брзина x , тогаш на втората половина се

движел со брзина $x + \frac{25}{100}x$, т.е. $\frac{5}{4}x$. Притоа,

првата половина од патот ја минал за некое време t , а втората за половина час помалку,

т.е. за време $t - \frac{1}{2}$. Бидејќи патот е еднаков,

добиваме (црт. 3):



Црт. 3

$$\left. \begin{aligned} s &= x \cdot t \\ s &= \frac{5}{4}x \left(t - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow xt = \frac{5}{4}x \left(t - \frac{1}{2} \right) \quad / : x$$

$$t = \frac{5}{4}t - \frac{5}{8} \quad / \cdot 8$$

$$8t = 10t - 5$$

$$2t = 5, \quad t = 2,5$$

Следствено, патот од A до B камионот го минал за $2,5 + 2,5 - 0,5$ часа, т.е. за 4,5 часа.

Втор начин. Нека на првата половина од патот камионот се движел со брзина x ; тогаш на втората половина брзината е $\frac{5}{4}x$. Времето потребно

да се измине првата половина од патот е $\frac{S}{x}$ ($AB = 2S$, црт. 3), а за втората

$\frac{S}{\frac{5}{4}x} = \frac{4S}{5x}$, и ова време е помало за половина час. Според тоа имаме:

$$\frac{S}{x} = \frac{4S}{5x} + \frac{1}{2} \quad / \cdot 10x$$

$$10S = 8S + 5x$$

$$2S = 5x.$$

Оттука $\frac{S}{x} = \frac{5}{2}$, а бидејќи $\frac{S}{x} = t$, следува дека $t = 2,5$, т.е. првата половина од патот камионот ја минува за 2,5 часа, а втората за 2 часа - половина час помалку.

Значи, патот од A до B камионот ќе го мине за 4,5 часа.

XIII (88.VIII.2)

Нека $a, b, c \in \mathbb{R}$ и нека $a+b+c=0$; треба да докажеме дека $a^3+b^3+c^3=3abc$. Имаме:

$$a+b+c=0$$

$$a+b=-c$$

$$a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=-c^3$$

$$a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)=0$$

$$a^3+b^3+c^3+3ab(-c)=0$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Забелешка. Со кубирање на условот $a+b+c=0$ добиваме:

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc,$$

од каде што со погодно групирање по три члена и ставајќи

$$6abc = 3abc + 3abc + 3abc - 3abc$$

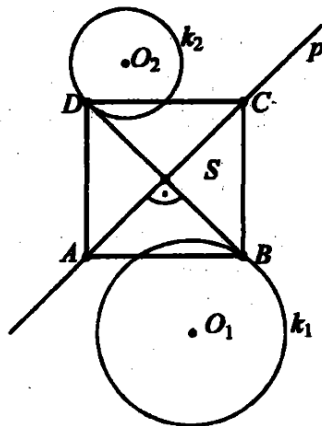
доаѓаме, иако на посложен начин, до истиот резултат. Стори го тоа сам!

XIII (88.VIII.3)

1^о Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. правата p минува низ темињата A и C на квадратот $ABCD$, а $B \in k_1(O_1, r_1)$ и $D \in k_2(O_2, r_2)$ (црт. 4).

За да го конструираме квадратот $ABCD$, доволно е да одредиме едно од темињата B или D ; потоа лесно го наоѓаме центарот S и другите три темиња на квадратот $ABCD$.

Очигледно е дека B и D се осносиметрични во однос на правата p , т.е. $D = \sigma_p(B)$. Но $B \in k_1$, затоа ќе најдеме осносиметрична слика k'_1 на кружницата k_1 во однос на правата p . Бидејќи сликата на точката B , т.е. точката D , лежи и на k'_1 и на k_2 , ќе следува дека D лежи на пресекот на овие две кружници, т.е. $D = k'_1 \cap k_2$.



Црт. 4

2^о Конструкција. Од анализата следуваат следните конструкции:

1) Цртаме кружница k'_1 , осносиметрична на кружницата k во однос на правата p , т.е. $k'_1 = \sigma_p(k_1)$

2) $k'_1 \cap k_2 = \{D_1, D_2\}$

3) $B_1 = \sigma_p(D_1)$, $B_2 = \sigma_p(D_2)$

4) $p \cap B_1D_1 = \{S_1\}$, $p \cap B_2D_2 = \{S_2\}$

5) $k'(S_1, \overline{S_1D_1})$, $k''(S_2, \overline{S_2D_2})$

6) $p \cap k' = \{A_1, C_1\}$, $p \cap k'' = \{A_2, C_2\}$

Четириаголниците $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ се бараните квадрати.

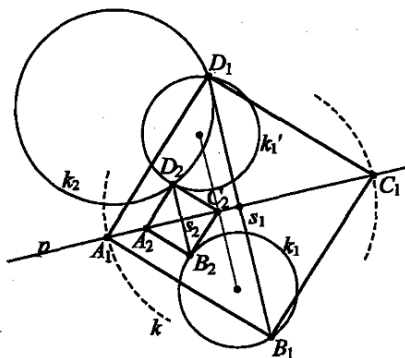
3^о Доказ. Бидејќи $B_1 = \sigma_p(D_1)$ ќе следува дека:

$$\overline{B_1S_1} = \overline{D_1S_1} \text{ и } B_1S_1 \perp D_1S_1$$

Понатаму, по конструкција имаме дека:

$$\overline{S_1A_1} = \overline{S_1C_1} = \overline{S_1B_1}$$

па следува дека четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е квадрат, бидејќи неговите дијагонали се еднакви, нормални и се преполовуваат. Аналогно заклучуваме дека и четириаголникот $A_2B_2C_2D_2$ е квадрат и е решение на задачата.



Црт. 5

4^o Дискусија. Дали задачата ќе има едно решение, повеќе решенија или, пак, ќе нема решение, зависи од заемниот однос на кружниците k_1' и k_2 . Значи, можни се следните случаи:

1) Ако k_1' и k_2 се сечат во две точки, т.е. $k_1' \cap k_2 = \{D_1, D_2\}$ тогаш задачата има две решенија (како во нашиот случај), ако ни една од пресечните точки D_1 или D_2 не лежи на правата p (при што квадратите можат да бидат и складни); едно решение, ако една од овие точки лежи на правата p ; а ни едно решение, ако пресечните точки лежат на правата p .

2) Ако k_1' и k_2 имаат само една заедничка точка, т.е. се допираат (однадвор или одвнатре) тогаш задачата има едно решение, ако допирната точка не лежи на правата p ; нема решение, ако оваа точка лежи на правата p .

3) Ако k_1' и k_2 немаат заеднички точки, тогаш задачата нема решение.

4) Ако $k_1' \equiv k_2$, тогаш задачата има бесконечно многу решенија.

ХIII (88.VIII.4)

Според условите на задачата го добиваме цртежот 6. Треба да докажеме дека:

$$1) \overline{DM} = \overline{MK}, \quad 2) \overline{EE_1} = \overline{AC_1}, \quad 3) \overline{FF_1} = \overline{BC_1}.$$

Очигледно, хипотенузата висина CC_1 го дели правоаголникот $\triangle ABC$ на два правоаголних триаголници, слични на него, т.е.

$$\triangle ACC_1 \sim \triangle ABC \sim \triangle BCC_1$$

Оттука следува дека:

$$\angle ACC_1 = \beta, \quad \angle BCC_1 = \alpha$$

Од $\overline{DC} = \overline{AC}$, $\overline{KC} = \overline{BC}$ и

$\angle DCK = 90^\circ$ следува дека $\triangle DKC \cong \triangle ABC$. Кај те-

мето C имаме два пара

накрсни агли, па заклучуваме дека $\angle DCM = \alpha$,

$\angle KCM = \beta$, од каде што

следува дека триагол-

ниците DCM и KCM се рамнокраки, па имаме:

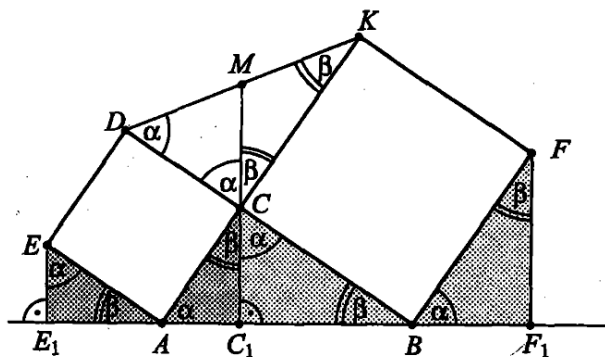
$$\overline{DM} = \overline{CM}, \quad \overline{KM} = \overline{CM} \Rightarrow \overline{DM} = \overline{KM}.$$

Бидејќи $\angle EAE_1 = \beta$, $\angle AEE_1 = \alpha$, како агли со нормални краци и

$\overline{AE} = \overline{AC}$, следува дека $\triangle EAE_1 \cong \triangle ACC_1$, а оттука и $\overline{EE_1} = \overline{AC_1}$.

Аналогно, од складноста на триаголниците BFF_1 и BCC_1 заклучуваме

дека $\overline{FF_1} = \overline{BC_1}$.



Црт. 6