Шефкет Арсланагиќ,
Алија Муминагиќ,

ПОВЕЌЕ ДОКАЗИ НА ЕДНО ПОЗНАТО АЛГЕБАРСКО НЕРАВЕНСТВО

Да се реши една математичка задача на два или повеќе начини е многу креативна и вредна работа за младите надарени ученици, кои претендираат сериозно да се занимаваат со математика. Во прилог на ова, ќе го цитираме познатиот американски методичар и математичар Георге Полsа кој вели: „Повредно е да се реши една математичка задача на два или повеќе начини, отколку да се решат стотина задачи на еден ист начин”.

Овде ќе дадеме повеќе докази на едно познато алгебарско неравенство кое гласи:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},\quad (a,b,c>0) \tag{1}$$

Ова неравенство во математичката литература е познато како Нессбит-ово неравенство (во најпрост облик).

Доказ 1. Имаме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2} \qquad /\cdot 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$2a(a+c)(a+b)+2b(b+c)(a+b)+2c(b+c)(a+c)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b\geq 0$$

$$a^2(a-b)+a^2(a-c)-b^2(a-b)+b^2(b-c)-c^2(a-c)-c^2(b-c)\geq 0$$

$$(a^2-b^2)(a-b)+(a^2-c^2)(a-c)+(b^2-c^2)(b-c)\geq 0$$

$$(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)\geq 0\,.$$

Очигледно, последното неравенство е точно па точно е и почетното неравенство (1) кое е еквивалентно со него. Равенство важи само кога $a=b=c$.

Доказ 2. Во доказот 1 добивме дека неравенството

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},\quad (a,b,c>0)$$

е еквивалентно со неравенството

$$2a^3+2b^3+2c^3\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \tag{2}$$

Сега ќе покажеме дека е точно помошното неравенство

$$x^3+y^3\geq x^2y+xy^2\,,\ (x,y>0) \tag{3}$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\geq 0$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2-xy)\geq 0\,; \qquad (x+y)(x^2-2xy+y^2)\geq 0$$

$$(x+y)(x-y)^2\geq 0\,.$$

Последното неравенство од претходната низа на еквивалентни неравенства е точно, при што равенство важи ако $x=y$. Според тоа, неравенството (3) е точно равенство. Во неравенство (3) на местото на x и y редоследно замениме a и b, b и c односно c и a соодветно, при што ги добиваме следните три неравенства:

$$a^3+b^3\geq a^2b+ab^2\,, \qquad b^3+c^3\geq b^2c+bc^2\,, \qquad c^3+a^3\geq c^2a+ca^2\,,$$

кои се точни. Ако ги собереме ја добиваме точноста на неравенството (2). Тоа значи, дека е точно и неравенството (1). Равенството е исполнето само ако $a=b=c$.

Доказ 3. Во вој доказ ќе го користиме помошното неравенство

$$\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\geq 2\,,\ (u,v>0) \tag{4}$$

Значи, неравенството (4) е точно и равенство е исполнето ако $u=v$. Според неравенството (4) неравенствата

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}\geq 2\,, \qquad \frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}\geq 2\,, \qquad \frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}\geq 2\,,$$

кога $a,b,c>0$ се точни равенства. Со собирање на овие неравенства добиваме:

$$\left(\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}\right)+\left(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}\right)\geq 6\,,$$

$$\left(\frac{a+c}{b+c}+\frac{a+b}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{a+b}\right)\geq 6\,,$$

$$\frac{2a+b+c}{b+c}+\frac{2b+a+c}{a+c}+\frac{2c+b+a}{a+b}\geq 6\,,$$

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)+1+1+1\geq 6\,,$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Доказ 4. Ако на левата страна на неравенството (1) додадеме 3 добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3&=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\\&=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\\&=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\end{aligned}$$

Користејќи го неравенството помеѓу геометриска и аритметичка средина ($A \geq G$) за три реални позитивни броеви x, y и z која гласи: $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3 \geq \frac{1}{2} 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}} ,$$

односно

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3 \geq \frac{9}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)\frac{1}{a+b}\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}} ,$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3 \geq \frac{9}{2}, \qquad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} .$$

Доказ 5. Користејќи го неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина ($A \geq H$) за три позитивни реални броеви, добиваме:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} . \tag{5}$$

Заради неравенството (5) имаме

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3 \\ &\geq (a+b+c)\frac{9}{2(a+b+c)}-3=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}\end{aligned}.$$

Доказ 6. Ќе воведеме смени $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$.Од последните равенства, добиваме

$$a=\frac{y+z-x}{2}, b=\frac{x+z-y}{2}, \ c=\frac{x+y-z}{2}, \ x,y,z>0 .$$

Сега,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)-3\right] \overset{(4)}{\geq} \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Забелешка 1. Во пракса понекогаш се зема и следната смена:

$$b+c=2x , \ c+a=2y , \ a+b=2z ,$$

од каде добиваме

$$a+b+c=x+y+z , \ a=y+z-x , \ b=x+z-y , \ c=x+y-z .$$

Понатаму доказот би бил како и во доказот 6.

Доказ 7. Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството:

$$\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right) \geq 0 . \tag{6}$$

Ќе ставиме $A=2(b+c)(c+a)(a+b)$. Сега имаме

$$\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}=\frac{(2a-b-c)(a+c)(a+b)}{A}=\frac{(a^2-b^2)(a+c)+(a^2-c^2)(a+b)}{A},$$

$$\frac{b}{a+c}-\frac{1}{2}=\frac{(b^2-a^2)(b+c)+(b^2-c^2)(b+a)}{A},$$

$$\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}=\frac{(c^2-a^2)(c+b)+(c^2-b^2)(c+a)}{A}.$$

Сега левата страна на неравенството (6) можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{1}{A}[(a^2-b^2)(a+c)+(a^2-c^2)(a+b)+$$

$$+(b^2-a^2)(b+c)+(b^2-c^2)(b+a)+(c^2-a^2)(c+b)+(c^2-b^2)(c+a)]$$

Понатаму,

$$(a^2-b^2)(a+c)+(b^2-a^2)(b+c)=a^3+a^2c-ab^2-b^2c+b^3-a^2b+b^2c-a^2c=$$

$$=a(a^2-b^2)-b(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a-b)=(a-b)^2(a+b)>0$$

Слично,

$$(b^2-c^2)(b+a)+(c^2-b^2)(c+a)=(b-c)^2(b+c)>0,$$

$$(a^2-c^2)(a+b)+(c^2-a^2)(c+b)=(a-c)^2(a+c)>0$$

Од овде следува

$$\frac{1}{A}[(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)]\geq 0,$$

што значи дека неравенството (6) е точно а со тоа и неравенството (1) е точно.

Забелешка 2.Секако дека овој доказ е прилично гломазен, па заради тоа можеме да го сметаме дека е „доказ од потреба“.

Доказ 8. Како и во доказот 3 добиваме дека даденото неравенство (1) се сведува на еквивалентно неравенство (2):

$$2a^3+2b^3+2c^3\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b.$$

Бидејќи овде $\alpha=(3,0,0)$, $\beta=(2,1,0)$, и од $(3,0,0)\succ(2,1,0)$, според Мјурхед-овата теорема(неравенство) (види [8]) добиваме дека:

$$T_{(3,0,0)}\geq T_{(2,1,0)},$$

односно точно е неравенството:

$$2a^3+2b^3+2c^3\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b.$$

Според тоа неравенството (2) е точно а со тоа е точно и неравенството (1).

Забелешка 3. Очигледно овој доказ е елегантен, но за него е потребно познавање на Myurhed-овата теорема која на многу ученици (и наставници) не им е позната.

Забелешка 4. Се покажува дека се точни неравенствата:

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geq\frac{4}{3},$$

$$\frac{a}{b+c+d+e}+\frac{b}{a+c+d+e}+\frac{c}{a+b+d+e}+\frac{d}{a+b+c+e}\geq\frac{5}{4},$$

итн.

Ќе покажеме дека е точна генерализацијата на ови неравенства:

Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ позитивни реални броеви и $S=a_1+a_2+...+a_n$, $n\geq 2$. Точно е неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geq\frac{n}{n-1}. \tag{7}$$

Доказ. Користејќи ги неравенствата помеѓу геометриска и аритметичка средина, имаме

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-S+S}{S-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{S-a_i}-n=S\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S-a_i}-n\overset{(A\geq G)}{\geq}$$

$$\overset{(A\geq G)}{\geq} S\cdot n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{(S-a_1)(S-a_2)...(S-a_n)}}-n\overset{(G\geq H)}{\geq}$$

$$\overset{(G\geq H)}{\geq} S\cdot n\cdot\frac{n}{(S-a_1)+(S-a_2)+...+(S-a_n)}-n=S\frac{n^2}{nS-S}-n=\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}$$

Во (7) важи равенство само во случај кога $a_1=a_2=...=a_n$.

Забелешка 5. Исто така, еден од авторите на оваа статија (Арсланагиќ) во [1] ја има докажано точноста на неравенствата:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2,\ (a,b,c,d>0),$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}+\frac{e}{f+a}\geq\frac{5}{2},\ (a,b,c,d,e>0)$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geq 3,\ (a,b,c,d,e,f>0)$$

На прв поглед би се помислило дека и овде е точна генерализација, т.е. дека е точно следното Несбитт-ово неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_4+a_5}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{1}{2}, \tag{8}$$

каде $a_i>0$, $i=1,2,3,...,n$.

Последното неравенство предизвикало живо интересирање помеѓу математичарите. Најпростиот случај ($n=3$) се појавил во литературата во 1903 година (A. M. Nesbitt, Problem 15114, Educionational Times (2) 3(1903), 37-38)

Х. С. Схапиро во 1954 година во познатото списание American Mathematical Monthls 61(1954), 571 , поставил проблем (проблем 4603) да се докаже дека неравенството (8) е точно за $n=3,4,...$.

Во 1956 година дадено е парцијално решение на ова неравенство. Уредниците на часописот American Mathematical Monthlsобјавиле дека M. J. Lightill успеал да докаже дека неравенството не е точно за $n=20$. Нешто подоцна, т.е. во 1958 година, математичарот A. Zulaf докажал дека неравенствот (8) не е точно и за $n=14$. Докажано е дека (8) не е точно за n парен број и не е точно за $n \geq 14$.

Математичарот P. H. Diananda во 1963 докажал дека е точно неравенството

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_4+a_5}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \lambda n \text{ ,}$$

каде $0,461238 < \lambda < 0,499197$.

На крај да кажеме дека A. Zulaf во 1958 година докажал дека е точно неравенството:

$$1<\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_4+a_5}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}<n-1,$$

каде што $a_i > 0$, $i=1,2,3...,n$; $n \geq 3$. Горните граници се најдобри можни.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Arslanagić,Š .,** Dokazi nekoih specijalnih slučajeva jedne ciklične nejednakosti, Bilten Univerziteta „Džemal Biedić“ vo Mostar, br.15 (1984)

[2] **Arslanagić,Š .,** Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004

[3] **Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., Inequalities, Cambridge,** At the University Press, 1952.

[4] **Engel, A.,** Problem-Solving-Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997

[5] **Kadelburg, Z., Xuki}, D., Luki}, M., Mati}, I.,** Nejednakosti, Materijal za mlade matemati~are, Sveska 42, Dru{tvo matemati~ara Srbije, Beograd, 2003.

[6] **Mitrinovi}, D.,** Analiti~ke nejednakosti, Gra|evinska kwiga, Beograd, 1970

[7] **Pećarić, J.,** Nejednakosti, Mala matematicka biblioteka, Kniga 6, Hrvatsko matematicko drustvo, Zagreb, 1996.

[8] **Pepić, M.,** Dokazivanje nejednakosti primjenom Myuhed-ove teoreme, Triangle, Vol.2 (1998), No.3, 186-190.

[9] **Muminagić, A., Carstensen, J.,** Poznati zadaci so ne taka poznati resenija, Sigma 70(2005/2006), 1-3.

Статијата првпат е објавенаво списанието СИГМА на СММ