ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 9 октября 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Взяли пять натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами? *Михаил Евдокимов*
4	2.	На прямой отмечено 4 точки и еще одна точка отмечена вне прямой. Всего существует 6 треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными? *Егор Бакаев*
	3.	На окружности отмечено 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.
2	а)	Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечетными.
2	б)	Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были четными? *Павел Кожевников*
5	4.	Даны параллелограмм $ABCD$ и точка K такая, что $AK = BD$. Точка M — середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90^\circ$. *Егор Бакаев*
5	5.	Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса? *Егор Бакаев*

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 9 октября 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q. Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p+q$? *Наири Седракян*
5	2. На прямой отмечено 100 точек, и еще одна точка отмечена вне прямой. Рассмотрим все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными? *Егор Бакаев*
5	3. Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наибольшее количество ягод может съесть лиса? *Егор Бакаев*
5	4. Петя нарисовал многоугольник площадью 100 клеток, проводя границы по линиям квадратной сетки. Он проверил, что его можно разрезать по границам клеток и на 2 равных многоугольника, и на 25 равных многоугольников. Обязательно ли тогда его можно разрезать по границам клеток и на 50 равных многоугольников? *Егор Бакаев*
6	5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведенной из прямого угла. (Ортоцентр треугольника — точка пересечения его высот.) *Алексей Заславский*

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 23 октября 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

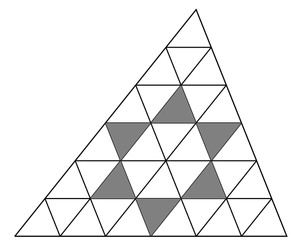
5 1. Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

Николай Чернятьев

5 2. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошкой называется прямоугольник, состоящий из двух клеток.)

Николай Чернятьев

6 3. Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности. (Ортоцентр треугольника — точка пересечения его высот.)



Егор Бакаев

8 4. Квадратная коробка конфет разбита на 49 равных квадратных ячеек. В каждой ячейке лежит шоколадная конфета — либо чёрная, либо белая. Саша может съесть две конфеты, если они одного цвета и лежат в соседних по стороне или по углу ячейках. Какое наибольшее количество конфет гарантированно может съесть Саша, как бы ни лежали конфеты в коробке?

Александр Кузнецов

8 5. На трёх красных и трёх синих карточках написаны шесть положительных чисел, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то трёх чисел, а на карточках другого цвета — попарные произведения тех же трёх чисел. Всегда ли можно гарантированно определить эти три числа?

Борис Френкин

9 6. Дан правильный $2n$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ с центром O, причём $n \geq 5$. Диагонали A_2A_{n-1} и A_3A_n пересекаются в точке F, а A_1A_3 и A_2A_{2n-2} — в точке P. Докажите, что $PF = PO$.

Максим Тимохин

7.

5 а) Группа людей прошла опрос, состоящий из 20 вопросов, на каждый из которых возможно два ответа. После опроса оказалось, что для любых 10 вопросов и любой комбинации ответов на эти вопросы существует человек, давший именно эти ответы на эти вопросы. Обязательно ли найдутся два человека, у которых ответы ни на один вопрос не совпали?

6 б) Решите ту же задачу, если на каждый вопрос есть 12 вариантов ответа.

Иван Митрофанов, Алексей Канель-Белов

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
5	1. 100 ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин? *жюри Турнира городов по задаче Николая Чернятьева*
5	2. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошкой называется прямоугольник, состоящий из двух клеток.) *Николай Чернятьев*
7	3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причём O не лежит на диагоналях четырёхугольника. Окружность, описанная около треугольника AOC, проходит через середину диагонали BD. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BOD, проходит через середину диагонали AC. *Алексей Заславский*
8	4. На 2016 красных и 2016 синих карточках написаны положительные числа, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то 64 чисел, а на карточках другого цвета — попарные произведения тех же 64 чисел. Всегда ли можно определить, на карточках какого цвета написаны попарные суммы? *Борис Френкин*
9	5. Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на две части и покрыть ими какой-нибудь круг диаметра больше 1? *Александр Шаповалов*
9	6. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя задумывает некоторый многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Далее делается несколько ходов. За ход Вася платит Пете рубль и называет любое целое число a по своему выбору, которое он ещё не называл, а Петя в ответ говорит, сколько решений в целых числах имеет уравнение $P(x) = a$. Вася выигрывает, как только Петя два раза (не обязательно подряд) назвал одно и то же число. Какого наименьшего числа рублей хватит Васе, чтобы гарантированно выиграть? *Anant Mudgal (Индия)*
12	7. На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причем они по-прежнему должны быть в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же. *Фёдор Петров*

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 26 февраля 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается (в десятичной записи) на 2016 и делится на 2017. *М. А. Евдокимов*
4	2.	Докажите, что на графике любого квадратного трёхчлена со старшим коэффициентом 1, имеющего ровно один корень, найдётся такая точка (p, q), что трёхчлен $x^2 + px + q$ также имеет ровно один корень. *Б. Р. Френкин*
5	3.	Из вершины A остроугольного треугольника ABC по биссектрисе угла A выпустили бильярдный шарик, который отразился от стороны BC по закону «угол падения равен углу отражения» и дальше катился по прямой, уже ни от чего не отражаясь. Докажите, что если $\angle A = 60°$, то траектория шарика проходит через центр описанной окружности треугольника ABC. *А. Г. Кузнецов*
5	4.	В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за 6 таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо? *И. И. Богданов*
	5.	
2	а)	На каждой стороне 10-угольника (не обязательно выпуклого) как на диаметре построили окружность. Может ли оказаться, что все эти окружности имеют общую точку, не совпадающую ни с одной вершиной 10-угольника?
3	б)	Решите ту же задачу для 11-угольника. *Е. В. Бакаев*

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 26 февраля 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Дан правильный 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$. Можно ли из 12 векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{A_{11}A_{12}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_1}$ выбрать 7, сумма которых равна нулевому вектору? *М. В. Мурашкин*
4	2. Даны две концентрические окружности и точка A внутри меньшей окружности. Угол величиной α с вершиной в A высекает на этих окружностях по дуге. Докажите, что если дуга большей окружности имеет угловой размер α, то и дуга меньшей имеет угловой размер α. *Е. В. Бакаев*
5	3. В каждую клетку квадрата 1000×1000 вписано число так, что в любом не выходящем за пределы квадрата прямоугольнике площади s со сторонами, проходящими по границам клеток, сумма чисел одна и та же. При каких s числа во всех клетках обязательно будут одинаковы? *Е. В. Бакаев*
5	4. По кругу стоят 10 детей разного роста. Время от времени один из них перебегает на другое место (между какими-то двумя детьми). Дети хотят как можно скорее встать по росту в порядке возрастания по часовой стрелке (от самого низкого к самому высокому). Какого наименьшего количества таких перебежек им заведомо хватит, как бы они ни стояли изначально? *Е. В. Бакаев*
6	5. Графики двух квадратных трехчленов пересекаются в двух точках. В обеих точках касательные к графикам перпендикулярны. Верно ли, что оси симметрии графиков совпадают? *А. А. Заславский*

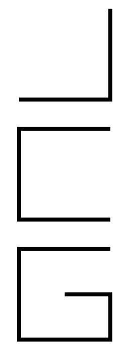
ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 12 марта 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
5	1. В шахматном турнире было 10 участников. В каждом туре участники разбивались на пары и в каждой паре играли друг с другом одну игру. В итоге каждый участник сыграл с каждым ровно один раз, причём не меньше чем в половине всех игр участники были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре хоть одна игра была между земляками. *Б. Р. Френкин*
	2.
1	а) Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник и поделить его на две равные части разрезом такой формы, как показано на верхнем рисунке?
2	б) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на среднем рисунке.
4	в) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на нижнем рисунке. (Во всех пунктах разрез лежит внутри многоугольника, на границу выходят только концы разреза. Стороны многоугольника и звенья разреза идут по линиям сетки, маленькие звенья в два раза короче больших.) *Ю. С. Маркелов, ученик 7 класса*
	3. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т.д.
4	а) Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < ...$)?
4	б) А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает? *А. К. Толпыго*
8	4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны, а также $AD = BE = CF$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность. *Б. А. Обухов*
8	5. Вес каждой гирьки набора — нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе? *А. В. Шаповалов*
10	6. Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на 8, 9 и 10 клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз. Найдите хотя бы одно $n > 50$, которое не является пропрыгиваемым. *Е. В. Бакаев*
	7. Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8. При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску
6	а) хотя бы 40 доминошек;
3	б) хотя бы 41 доминошку;
3	в) более 41 доминошки. *М. А. Евдокимов*



ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 12 марта 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. На плоскости даны треугольник и 10 прямых. Оказалось, что каждая прямая равноудалена от каких-то двух вершин треугольника. Докажите, что или две из этих прямых параллельны, или три из них пересекаются в одной точке. *С. В. Маркелов*
	2. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т.д.
3	а) Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < ...$)?
3	б) А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает? *А. К. Толпыго*
7	3. Вася утверждает, что он разрезал выпуклый многогранник, у которого есть лишь треугольные и шестиугольные грани, на две части и склеил из этих частей куб. Могут ли слова Васи быть правдой? *М. А. Евдокимов*
8	4. Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Ф, что при любом способе положить его по границам клеток на раскрашенный квадрат, все 10 накрытых им клеток будут разного цвета. Обязательно ли Ф — прямоугольник? *Е. В. Бакаев*
9	5. В треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$. *Е. В. Бакаев*
10	6. При каких натуральных n для всякого целого $k \geq n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n? *А. Г. Кузнецов, И. В. Лосев*
12	7. В Чикаго живут 36 гангстеров, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём нет двух банд с совпадающим составом. Оказалось, что гангстеры, состоящие в одной банде, не враждуют, но если гангстер не состоит в какой-то банде, то он враждует хотя бы с одним её участником. Какое наибольшее число банд могло быть в Чикаго? *Фольклор, предложил Л. Э. Шабанов*

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 19 марта 2017 г.

1. В первый день 2^n школьников играли в пинг-понг «навылет»: сначала сыграли двое, затем победитель сыграл с третьим, победитель этой пары — с четвёртым и т.д., пока не сыграл последний школьник (ничьих в пинг-понге не бывает). Во второй день те же школьники разыграли кубок: сначала произвольно разбились на пары и сыграли в парах, проигравшие выбыли, а победители снова произвольно разбились на пары и сыграли в парах, и т.д. Оказалось, что наборы игравших пар в первый и во второй день были одни и те же (возможно, победители были другие). Найдите наибольшее возможное значение n.

Б. Френкин

2. Сфера касается 99 рёбер некоторой выпуклой 50-угольной пирамиды. Обязательно ли тогда она касается и 100-го ребра этой пирамиды?

М. Евдокимов

3. Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geq \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

М. Фадин

4. Клетки доски 100×100 раскрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли перекрасить ровно 2018 различных клеток этой доски в противоположный цвет так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось одно и то же количество чёрных клеток?

Ю. Чеканов

5. Дан треугольник XBC. Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M.

Е. Бакаев

6. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a) + P(b)$ делится на $a + b$?

Г. Жуков

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 19 марта 2017 г.

Предварительная версия решений

1. *В первый день 2^n школьников играли в пинг-понг «навылет»: сначала сыграли двое, затем победитель сыграл с третьим, победитель этой пары — с четвёртым и т.д., пока не сыграл последний школьник (ничьих в пинг-понге не бывает). Во второй день те же школьники разыграли кубок: сначала произвольно разбились на пары и сыграли в парах, проигравшие выбыли, а победители снова произвольно разбились на пары и сыграли в парах, и т.д. Оказалось, что наборы игравших пар в первый и во второй день были одни и те же (возможно, победители были другие). Найдите наибольшее возможное значение n.*

Б. Френкин

Ответ. 3.

Решение. Построим следующий граф: вершины — игроки, рёбра — сыгранные партии. Согласно условию, для обоих турниров этот граф один и тот же. Рассмотрим первый турнир и выберем те партии, победители которых до этого не выигрывали (например, такова первая партия). Тогда соответствующие рёбра образуют путь, а остальные рёбра одним концом примыкают к этому пути. В частности, если выбросить все висячие вершины, то останется только наш путь без крайних вершин.

Теперь рассмотрим тот же граф как граф кубкового турнира. Если из него выбросить висячие вершины, останется граф турнира на 2^{n-1} победителях первого этапа. Он, очевидно, является путём лишь при $n \leq 3$, в противном случае победитель турнира будет иметь степень не меньше 3. Значит, $n \leq 3$.

Осталось привести пример при $n = 3$. Пусть участники пронумерованы от 1 до 8 и пары в кубке таковы (первым указан проигравший, вторым победитель): 1–2, 3–4, 5–6, 7–8, 2–4, 6–8, 4–8. тогда при игре навылет пары могли быть такими (победитель снова указан вторым): 1–2, 2–4, 3–4, 4–8, 7–8, 8–6, 6–5.

2. *Сфера касается 99 рёбер некоторой выпуклой 50-угольной пирамиды. Обязательно ли тогда она касается и 100-го ребра этой пирамиды?*

М. Евдокимов

Ответ. Нет.

Решение. Мы покажем даже, что это неверно ни в одном из двух случаев: (а) сотое ребро — ребро основания, и (б) сотое ребро — боковое.

(а) Возьмём правильный 51-угольник $A_1A_2 \ldots A_{51}$ с центром C. Пусть ω и Ω его вписанная и описанная окружности соответственно. Рассмотрим сферу S с центром C, которая пересекает плоскость 51-угольника по окружности ω, и рассмотрим конус с основанием Ω, в который вписана эта сфера. Пусть O — вершина этого конуса. Тогда у 50-угольной пирамиды $OA_1A_2 \ldots A_{50}$ все боковые рёбра и 49 рёбер основания касаются сферы S, а ребро A_1A_{50} — не касается.

(б) Построим многоугольник, сферу и конус так же, как в пункте (а). Пусть теперь прямые A_1A_{51} и $A_{49}A_{50}$ пересекаются в точке B. Тогда пирамида $OA_1A_2 \ldots A_{49}B$ — искомая: все её рёбра, кроме бокового ребра OB, касаются сферы S.

3. *Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство:*

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geq \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

М. Фадин

Решение. Положим $x_{n+k} = x_k$. Тогда при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ по неравенству Коши о средних имеем

$$\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^4 + \left(\frac{x_{k+1}}{x_{k+2}}\right)^4 + \left(\frac{x_{k+2}}{x_{k+3}}\right)^4 + \left(\frac{x_{k+3}}{x_{k+4}}\right)^4 \geq 4 \cdot \frac{x_k}{x_{k+1}} \cdot \frac{x_{k+1}}{x_{k+2}} \cdot \frac{x_{k+2}}{x_{k+3}} \cdot \frac{x_{k+3}}{x_{k+4}} = 4\frac{x_k}{x_{k+4}}.$$

Сложив все n полученных неравенств, получаем учетверённое требуемое неравенство.

4. *Клетки доски 100×100 раскрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли перекрасить ровно 2018 различных клеток этой доски в противоположный цвет так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось одно и то же количество чёрных клеток?*

Ю. Чеканов

Ответ. Нет.

Решение 1. Ясно, что строки доски можно переставлять как угодно, и столбцы тоже. Переставим все нечётные столбцы влево, а все нечётные строки вниз. В итоге из исходной доски получится доска, разделённая на 4 одинаковых квадрата — два противоположных из них белые, а остальные чёрные.

Пусть после перекраски в каждой строке и каждом столбце оказалось по $50 + k$ чёрных клеток; тогда в каждом столбце и в каждой строке перекрашено на k белых клеток больше, чем чёрных. Пусть в одном из чёрных квадратов перекрашено a клеток. По замечанию выше, в каждом из белых квадратов перекрашено по $a+50k$ клеток, а тогда в другом чёрном квадрате также перекрашено $(a + 50k) - 50k = a$ клеток. Значит, общее число перекрашенных клеток равно $2a + 2(a + 50k) = 4(a + 25k)$, то есть оно делится на 4 и потому не может равняться 2018.

Решение 2. Пронумеруем строки снизу вверх, а столбцы справа налево, числами от 1 до 100 (пусть левая нижняя клетка чёрная). Тогда у каждой чёрной клетки чётная сумма координат, а у каждой белой — нечётная.

Рассмотрим сумму координат всех чёрных клеток (до или после перекраски). Поскольку в каждой строке их поровну, сумма их ординат делится на $1+2+\ldots+100 = 5050$, аналогично сумма абсцисс также делится на 5050. В частности, эта сумма до и после перекраски была чётной, то есть изменилась на чётное число.

С другой стороны, при перекраске исходно чёрной клетки в белый цвет наша сумма чётности не меняла, а при перекраске исходно белой в чёрный — меняла. Это значит, что было перекрашено чётное количество белых клеток.

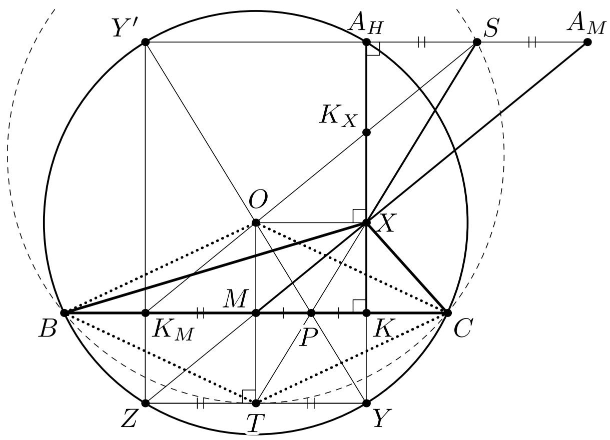
Пусть w и b — количества перекрашенных исходно белых и исходно чёрных клеток, соответственно. Тогда $w+b = 2018$, а $w-b$ делится на 4, поскольку как исходное, так и полученное количество чёрных клеток делится на 4. Значит, $w = ((w + b) + (w - b))/2$ — нечётное число. Противоречие.

5. *Дан треугольник XBC. Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M.*

Е. Бакаев

Решение. Пусть M — середина BC, а Y и Z — точки, симметричные X относительно прямой BC и точки M, соответственно. Тогда $\angle BZC = \angle BYC = \angle BXC = 180^\circ - \angle BA_HC$, откуда точки A_H, B, C, Y и Z лежат на одной окружности Ω с центром O и радиусом R. При этом, поскольку $A_HA_M \parallel BC$ и $A_MX : XM = 2$, получаем $A_HX : XY = A_MX : 2XM = 1$, то есть X — середина A_HY.

Пусть T — середина YZ. Тогда $OTYX$ — прямоугольник, поэтому $TX = OY = R$. Из симметрии относительно BC получаем, что $OB = OC = TB = TC = R$. Значит, T — центр окружности, описанной около треугольника BXC, то есть, по лемме о трезубце, середина дуги BC окружности (A_IBC).



Пусть $K = A_HY \cap BC$, YY' — диаметр окружности Ω, а P и S — середины KM и A_HA_M, соответственно. Заметим, что $YZ = 2KM = A_HA_M = A_HY'$. Значит, TX пересекает отрезки KM и A_HA_M в их серединах P и S, а также $P = YY' \cap BC$. Тогда $BP \cdot PC = YP \cdot PY' = TP \cdot PS$ (последнее равенство выполнено в силу симметрии отрезков YY' и TS относительно перпендикуляра к BC в точке P). Значит, $TBSC$ — вписанный четырёхугольник, как и TBA_IC. Поскольку A_I и S лежат на TX, отсюда следует $A_I = S$.

Замечание. На последнем шаге можно действовать и по-другому. Пусть $K = A_HY \cap BC$, а S — середина A_HA_M. Пусть K_M и K_X — точки, симметричные K относительно M и X соответственно. Тогда в треугольнике A_IBC точка K_M — точка касания вневписанной окружности с BC, а K_X — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная K. При гомотетии с центром A_I, переводящей вневписанную во вписанную, эти точки переходят друг в друга — значит, A_I лежит на K_MK_X. Осталось заметить, что K_MK_X проходит через S (поскольку $K_XK : K_XA_H = KK_M : A_HS = 2$), так что $A_I = K_MK_X \cap TX = S$.

6. *Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a) + P(b)$ делится на $a + b$?*

Г. Жуков

Ответ. При всех чётных n.

Решение. Нечётные n не подходят. В самом деле, рассмотрим многочлен $P(x) = x^n + 1$ и различные натуральные a, b. Так как n нечётно, $a^n + b^n$ делится на $a + b$, а тогда $P(a) + P(b) = (a^n + b^n) + 2$ не делится, поскольку $a + b > 2$.

Осталось доказать, что все чётные n подходят. Рассмотрим произвольный многочлен $P(x)$ степени n. Представим его в виде суммы $P(x) = P_0(x) + P_1(x)$, где в $P_0(x)$ все мономы чётной степени, а в $P_1(x)$ – нечётной. Заметим, что при всех натуральных a, b сумма $P_1(a) + P_1(b)$ делится на $a + b$. Докажем, что найдутся такие a, b,что и $P_0(a) + P_0(b)$ делится на $a + b$. Заметим, что степень P_0 равна n.

Рассмотрим случай, когда старший коэффициент $P_0(x)$ положителен (в случае отрицательного старшего коэффициента проведём дальнейшее доказательство для многочлена $-P_0(x)$). Так как $n > 1$, то найдётся такое натуральное m, что $P_0(m) > 2m$. Докажем, что $a = m$, $b = P_0(m) - m$ подходят. В силу выбора m, они оба натуральные, причём $b > a$. Далее, по модулю $a + b = P_0(m)$ выполняются сравнения $P_0(a) = P_0(m) \equiv 0$ (очевидно) и $P_0(b) = P_0((b+a)-a) \equiv P_0(-a) = P_0(m) \equiv 0$ (в силу чётности многочлена P_0). Значит, $P_0(a)+P_0(b) \equiv 0 \pmod{a + b}$, что и требовалось.

Замечание. В случае чётного n можно проделать подобное рассуждение и без разбиения на чётную и нечётную компоненты. Поскольку степень многочлена $P(x)+P(-x)$ равна $n > 1$, существует такое натуральное m, что $P(m) + P(-m) > 2m$. Тогда подойдут числа $a = m$, $b = P(m) + P(-m) - m$. Действительно, тогда $b > a > 0$, и по модулю $a + b = P(m) + P(-m)$ верно сравнение $P(a) + P(b) \equiv P(a) + P(-a) = P(m) + P(-m) \equiv 0$.