Алекса Малчески
Машински факултет - Скопје

СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ ОД ТРИ ПРОМЕНЛИВИ II

6. Формула на Варнинг и системи равенки

Во претходниот дел видовме дека секој симетричен полином од произволен степен може да се претстави како полином од новововедените променливи σ_1, σ_2 и σ_3 кои се симетрични полиноми од прв, втор и трет степен (според дефинцијата на степен на полином).

Докажаната формула (*), за пресметување на степените суми, $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}$, која е рекурентна формула, дозволува да се определи степената сума s_k како полином од σ_1, σ_2 и σ_3. При тоа, јасно е дека таа може да се примени само ако ни се познати изразите за претходните степени суми, специјално изразите за степените суми s_{k-1}, s_{k-2} и s_{k-3}.

Јасно е дека како и во многу други случаи во математиката, така и во овој случај се настојува да се избегна рекурентните соодноси, т.е. рекурентните формули, и да се добијат директни формули за пресметување на најразлични објекти. Со помош на формулата (*) може да се добие и целосна формула за степената сума s_k како полином од σ_1, σ_2 и σ_3, која не е рекурентна формула.Таа формула, т.е. израз, за директно пресметување на степената сума s_k ја нарекуваме формула на Варнинг и го има следниот вид:

$$\frac{1}{k} s_k = \sum \frac{(-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!} \sigma_1^{\lambda_1} \sigma_2^{\lambda_2} \sigma_3^{\lambda_3}. \qquad (1)$$

Во оваа формула сумирањето се прави по сите тројки од ненегативни цели броеви $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ за кои што $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k$. При тоа, за изразот $0!$ сметаме дека има вредност 1, а $\lambda! = \lambda(\lambda-1)...3 \cdot 2 \cdot 1$. Се разбира природно е да се постави прашањето зошто во формулата на Варнинг се наметнува равенката $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k$, и сите нејзини ненегативни целобројни решенија $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Одговорот се состои во следното.Како што веќе спомнавме σ_1, σ_2 и σ_3 како полиноми од x, y и z имаат степен еден, два и три. Ако во $\sigma_1^{\lambda_1} \sigma_2^{\lambda_2} \sigma_3^{\lambda_3}$ ги замениме изразите за

$$\sigma_1 = x+y+z, \sigma_2 = xy+yz+zx \text{ и } \sigma_3 = xyz$$

ќе добиеме хомоген симетричен полином од променливите x, y и z, кој има степен $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$. Според тоа, во разложувањето за степената сума s_k може да се појават само собироци од облик $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}$ за кои $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k$.

Доказот на формулата на Варинг, т.е. точноста на равенството (1), лесно се добива со примена на методот на математичка индукција и со користење на формулата (*), $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}$. При тоа треба да се користи идентитетот

$$k\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!} = (k-1)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{(\lambda_1-1)!\lambda_2!\lambda_3!} + (k-2)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{\lambda_1!(\lambda_2-1)!\lambda_3!} + (k-3)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{\lambda_1!\lambda_2!(\lambda_3-1)!},$$

каде $k = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$. Деталите од доказот на точноста на претходното равенство и равенството (1) се оставаат за вежба.

Можеме, користејќи ја наведената формула директно да ја пресметаме било која степена сума s_k. Како пример ќе ја најдеме степената сума s_6 изразена преку елементарните симетрични полиноми σ_1, σ_2 и σ_3. Од формулата на Варинг, јасно е дека на почеток треба да ги имаме севозможните цели ненегативни решенија на равенката $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 6$. Таа равенка има точно седум решенија, кои се дадени во табелата. Заради тоа

λ_1	λ_2	λ_3
6	0	0
4	1	0
2	2	0
0	3	0
3	0	1
1	1	1
0	0	2

$$\frac{1}{6}s_6 = \frac{(-1)^{6-6-0-0}(6+0+0-1)!}{6!0!0!}\sigma_1^6\sigma_2^0\sigma_3^0 + \frac{(-1)^{6-4-1-0}(4+1+0-1)!}{4!1!0!}\sigma_1^4\sigma_2^1\sigma_3^0 +$$

$$+\frac{(-1)^{6-2-2-0}(2+2+0-1)!}{2!2!0!}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^0 + \frac{(-1)^{6-0-3-0}(0+3+0-1)!}{0!3!0!}\sigma_1^0\sigma_2^3\sigma_3^0 +$$

$$+\frac{(-1)^{6-3-0-1}(3+0+1-1)!}{3!0!1!}\sigma_1^3\sigma_2^0\sigma_3^1 + \frac{(-1)^{6-1-1-1}(1+1+1-1)!}{1!1!1!}\sigma_1^1\sigma_2^1\sigma_3^1 +$$

$$+\frac{(-1)^{6-0-0-2}(0+0+2-1)!}{0!0!2!}\sigma_1^0\sigma_2^0\sigma_3^2 =$$

$$= \frac{5!}{6!}\sigma_1^6 - \frac{4!}{4!}\sigma_1^4\sigma_2 + \frac{3!}{2!2!}\sigma_1^2\sigma_2^2 - \frac{2!}{3!}\sigma_2^3 + \frac{3!}{3!}\sigma_1^3\sigma_3 - \frac{2!}{1!}\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \frac{1!}{2!}\sigma_3^2$$

$$= \frac{1}{6}\sigma_1^6 - \sigma_1^4\sigma_2 + \frac{3}{2}\sigma_1^2\sigma_2^2 - \frac{1}{3}\sigma_2^3 + \sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_3^2$$

Множејќи го последното равенство со 6, добиваме

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 3\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2.$$

Значи, за директна примена на формулата на Варнинг треба да се пресметаат, т.е. да се најдат сите целобројни ненегативни решенија на равенка од облик $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k$. Во општ случај и тоа не е лесна задача, но овде не се заниваме со тоа прашање. Заради тоа барањето на решенијата на таа равенки ќе го разгледуваме одделно во зависност од тоа каде ќе ни се јави потреба. На пример за $k = 5$ сите целобројни решенија на равенката $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 5$ во табелата е дадено множеството решенија на таа равенка.

λ_1	λ_2	λ_3
5	0	0
3	1	0
2	0	1
1	1	1
0	1	1

Сега не е тешко да се пресмета вредноста на s_5 и тоа го оставаме на читателот за вежба.

7. Обратни степени суми

Во многу задачи покрај пресметување на сумата s_k се појавува пресметување на збирови од реципрочни вредности на x^k, y^k и z^k. Таквите збирови се од облик $s_{-k} = x^{-k} + y^{-k} + z^{-k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}$, каде $k = 1, 2, 3, ...$ и нив ќе ги нарекуваме обратни степени суми. Нив лесно е да ги изразиме преку σ_1, σ_2 и σ_3 ако за нив се искористи записот

$$s_{-k} = x^{-k} + y^{-k} + z^{-k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} = \frac{y^k z^k + x^k z^k + x^k y^k}{x^k y^k z^k} = \frac{O(x^k y^k)}{\sigma_3^k}. \quad (2)$$

Да забележиме дека може да се постапи и поинаку. Формулата (*) од претходниот дел е точна за било кои вредности на k, и при изведувањето на таа формула немавме никакви дополнителни претпоставки за k. Со замена на k во формулата (*) со $l + 3$,добиваме

$$s_l = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} s_{l+1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} s_{l+2} + \frac{1}{\sigma_3} s_{l+3}. \quad (3)$$

Со добиената формула (3) можеме последователно да ги пресметуваме обратните степени суми:

$$s_{-1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} s_\circ - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} s_1 + \frac{1}{\sigma_3} s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} 3 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_3} (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \frac{\sigma_2}{\sigma_3},$$

$$s_{-2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} s_{-1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} s_\circ + \frac{1}{\sigma_3} s_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} 3 + \frac{1}{\sigma_3} \sigma_1 = \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2},$$

$$s_{-3}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-2}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-1}+\frac{1}{\sigma_3}s_0=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\sigma_2}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_3}3=\frac{\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2}{\sigma_3^3}$$

$$s_{-4}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-2}+\frac{1}{\sigma_3}s_{-1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\frac{\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2}{\sigma_3^3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}+\frac{1}{\sigma_3}\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$
$$=\frac{\sigma_2^4-4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+4\sigma_2\sigma_3^2+2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_3^4}$$

итн. Обратно, ако ги имаме на некој начин определено обратните степени суми s_{-k}, тогаш на многу едноставен начин можеме да ги пресметаме орбитите

$$O(x^k y^k):\quad O(x^2y^2)=\sigma_3^2 s_{-2}=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3;$$
$$O(x^3y^3)=\sigma_3^3 s_{-3}=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^3,$$
$$O(x^4y^4)=\sigma_3^4 s_{-4}=\sigma_2^4-4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+4\sigma_2\sigma_3^2+2\sigma_1^2\sigma_3^2 \text{ итн.}$$

8. Решенија на некои системи равенки со три непознати

Резултатите од претходниот параграф може да се применат за решавање на некои системи алгебарски равенки со три непознати. Ако левите и десните страни на равенките симетрично зависат од непознатите x, y и z, тогаш во некои случаи корисно е да се земат $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ за нови непознати (како последица од основната теорема од претходниот дел левите и десните страни на равенките од тој систем може да се изразат преку σ_1,σ_2 и σ_3). Корисноста на ваквата смена на променливите е во тоа што степените на равенките во системот се смалуваат (бидејќи $\sigma_2=xy+yz+zx$ е од втор степен, а $\sigma_3=xyz$ е полином од тртет степен). Како правило во голем број на случаи, решението на системот во однос на новите променливи σ_1,σ_2 и σ_3 е попросто од решението на почетниот систем. Најмалку корисноста се состои во тоа да може да избираме која систем ќе го решаваме, дали почетниот или неговата трансформација.

По наоѓањето на вредностите на новите непознати σ_1,σ_2 и σ_3, потребно е да се најдат вредностите на почетните непознати x, y и z. Тоа може да биде направено со помош на следната теорема.

Теорема. Нека σ_1,σ_2 и σ_3 се три реални броеви. Кубната равенка

$$u^3-\sigma_1u^2+\sigma_2u-\sigma_3=0 \qquad (4)$$

и системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = \sigma_1 \\ xy + yz + zx = \sigma_2 \\ xyz = \sigma_3 \end{cases} \qquad (5)$$

помеѓу себе се поврзани на следниот начин: ако u_1, u_2, u_3 се корени на кубната равенка (4) , тогаш системот равенки (5) има шест решенија:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 \\ y_1 = u_2 \\ z_1 = u_3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = u_1 \\ y_2 = u_3 \\ z_2 = u_2 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = u_2 \\ y_3 = u_1 \\ z_3 = u_3 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = u_2 \\ y_4 = u_3 \\ z_4 = u_1 \end{cases}, \begin{cases} x_5 = u_3 \\ y_5 = u_1 \\ z_5 = u_2 \end{cases}, \begin{cases} x_6 = u_3 \\ y_6 = u_2 \\ z_6 = u_1 \end{cases}$$

(кои се добиваат едно од друго со пермутации) и други решенија нема; обратно, ако $x = a, y = b, z = c$ се корени на системот (5), тогаш броевите a, b, c се корени на кубната равенка (4).

За доказ на оваа теорема ни е потребно следното помошно тврдење.

Лема. Ако u_1, u_2, u_3 се корени на кубната равенка $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$, тогаш точни се равенствата

$$u_1 + u_2 + u_3 = -p\,,\ u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = q\,,\ u_1u_2u_3 = -r\,.$$

Овие формули се нарекуваат формули на Виет за кубна равенка. Постојат и виетови врски за равенка од произволен степен, но овде нас ни се потребни Виетовите формули за кубна равенка. Ќе покажеме од каде тие равенки произлегуваат. Нека u_1, u_2, u_3 се корени на кубната равенка $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$; броевите u_1, u_2, u_3 може да бидат реални или комплексни. Во секој случај полиномот $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$ можеме да го разложиме на множители на следниот начин: $u^3 + pu^2 + qu + r = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$. Ако се ослободиме од загради на десната страна од последното равенство, добиваме:

$$u^3 + pu^2 + qu + r = u^3 - (u_1 + u_2 + u_3)u^2 + (u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1)u - u_1u_2u_3\,.$$

Во последното равенство, од левата и десната страна стои еден ист полином, па според тоа соодветните коефициенти на левата и десната страна се совпаѓаат. Со други зборови $u_1 + u_2 + u_3 = -p$, $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = q$, $u_1u_2u_3 = -r$, со што е докажана лемата.

Доказ на теоремата. Ако u_1, u_2, u_3 се корени на кубната равенка (4), тогаш, согласно лемата, точни се равенствата

$$u_1 + u_2 + u_3 = \sigma_1\,,\ u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = \sigma_2\,,\ u_1u_2u_3 = \sigma_3\,.$$

Но тоа значи дека $x=u_1$, $y=u_2$ и $z=u_3$ се решенија на системот (5). Уште пет решенија се добиваат со пермутација на ознаките на непознатите. Други решенија системот нема, што ќе биде очигледно од последниот дел од доказот кој што следува во продолжение.
На крај, нека $x=a, y=b, z=c$ се решенија на системот (5), т.е.

$$a+b+c=\sigma_1, ab+bc+ca=\sigma_2, abc=\sigma_3 .$$

Тогаш

$$\begin{aligned} z^3-\sigma_1 z^2+\sigma_2 z-\sigma_3 &= z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc \\ &= (z-a)(z-b)(z-c) \end{aligned}$$

Но тоа значи дека a,b,c се корени на равенката (4). Теоремата е докажана.

Забелешка. Докажаната теорема може да се толкува и на следниот начин, ако се најдени вредностите на σ_1,σ_2 и σ_3, тогаш за наоѓање на решенијата на почетните непознати x,y,z (т.е. решенијата на (5)) доволно е да се состави кубна равенка (4) и да се најде нејзино решение, т.е. да се најдат нејзините корени. Во учебниците по алгебра може да се најдат формули за решавање на кубна равенка. Секако тие формули не се едноставни и во пракса ретко ги употребуваме Најчесто бараме едно решение на таквата равенка, па потоа за определување на останатите решенија ја применуваме теоремата на Безу. Да забележиме уште еднаш дека со решавање на кубната равенка (4) ние наоѓаме шест решенија на системот (5) по непознатите x,y,z. Бидејќи x,y,z се појавуваат симетрично во него, и во решенијата тие се појавуваат симетрично. Воопшто, ако имамае произволен систем од променливите x,y,z кој е симетричен, тогаш со негова тренаформација, т.е. со воведување на смените $\sigma_1=x+y+z, \sigma_2=xy+yz+zx$ и $\sigma_3=xyz$ ќе добиеме систем равенки по непознатите σ_1,σ_2 и σ_3. На секое решение $\sigma_1^\circ,\sigma_2^\circ,\sigma_3^\circ$ на новодобиениот систем одговара по една кубна равенка, за која треба да ги најдеме нејзините решенија (може да се користат формули). На тој начин за тројката $\sigma_1^\circ,\sigma_2^\circ,\sigma_3^\circ$ која е решение на системот, ќе формираме шест решенија на почетниот систем, како што е опишано погоре.

Пример 1. Реши го системот

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}.$$

Решение. Ќе воведеме нови непознати

$$\begin{cases} x + y + z = \sigma_1 \\ xy + yz + zx = \sigma_2 \\ xyz = \sigma_3 \end{cases}.$$

Заради формулите кои ја даваат врската меѓу степените суми $s_k = x^k + y^k + z^k$, $k \in \mathbb{N}$ и σ_1, σ_2 и σ_3, системот го добива обликот

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b^2 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = a^3 \end{cases},$$

од каде што добиваме

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \\ \sigma_3 = \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) \end{cases}.$$

Последниот сиситем можеме да го запишеме во облик

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \\ xyz = \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) \end{cases}.$$

За решение на овој систем, согласно теоремата од овој дел ја формираме кубната равенка

$$u^3 - au^2 + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)u - \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) = 0 \ .$$

Левата страна на оваа равенка можеме да ја разложиме на множители

$$u^3 - au^2 + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)u - \tfrac{1}{2}a(a^2 - b^2) = (u - a)\left[u^2 + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\right].$$

Според тоа корени на таа равенка се

$$u_1 = a\ , \qquad u_2 = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}\ , \qquad u_2 = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}\ .$$

Според тоа, почетниот систем има шест решенија, кои се добиваат со пермутација на решенијата

$$x = a\ , \qquad y = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}\ , \qquad z = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}\ .$$

Да забележиме, дека во некои случаи, со не така сложена претходна смена на променливите, дозволува несиметричен систем да се сведе на симетричен систем. Да го разгледаме следниот пример.

Пример 2. Да се реши системот

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 = b^2 \\ x^3 + 8y^3 - 27z^3 = a^3 \end{cases}.$$

Решение. Воведуваме смена $x = u$, $2y = v$, $-3z = w$. Тогаш системот равенки го добива симетричниот облик

$$\begin{cases} u + v + w = a \\ u^2 + v^2 + w^2 = b^2 \\ u^3 + v^3 + w^3 = a^3 \end{cases}.$$

Ваков систем веќе решивме, и тоа беше системот од претходната задача. Едно негово решение е $u = a$, $v = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $w = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, а останататите пет решенија се добиваат со пермутација на непознатите u, v и w во ова решеание. Заради тоа, почетниот систем ги има следните шест решенија:

1) $x = a$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$;

2) $x = a$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $z = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$;

3) $x = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$;

4) $x = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $z = -\frac{a}{3}$;

5) $x = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$;

6) $x = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$, $z = -\frac{a}{3}$.

Некогаш е целисходно да се усложни некоја од равенките во даден систем, за да тој се доведе до симетриен систем кој ќе го решиме со методите разгледаени во овој дел.

Пример 3. Да се реши системот

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 11 \\ (x-y)(x-z)(y-z) = -2 \end{cases}$$

Решение. Ќе преминеме на променливите $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.Првите две равенки го добиваат обликот $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 11$.

Ако левата страна на третата равенка е симетричен полином, тогаш изразувајќи го преку σ_1, σ_2 и σ_3 и заменувајќи ги вредностите за σ_1 и σ_2 би добиле равенка со една непозната. Тоа би било доволно да го најдеме σ_1 а потоа и x, y и z. Меѓутоа, левата страна на третата равенка не е симетричен полином. За да се доведе таа равенка до симетрична равенка, двете нејзини страни ги квадрираме. При тоа добиваме $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = 4$. Сега таа равенка е симетрична равенка, при што добиваме

$$\begin{aligned}
(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 &= (x^2+y^2-2xy)(x^2+z^2-2xz)(y^2+z^2-2yz) \\
&= O(x^4y^2) + 2x^2y^2z^2 - 2O(x^4yz) - 2O(x^3y^2z) - 2O(x^3y^3) - 8x^2y^2z^2 \\
&= O(x^4y^2) - 6x^2y^2z^2 - 2xyzO(x^3) - 2O(x^3y^3) + 2O(x^2y) \\
&= (\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2) - 6\sigma_3^2 - 2\sigma_3(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \\
&\quad - 2(\sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3) + 2\sigma_3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) = \\
&= \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2
\end{aligned}$$

На тој начин, третата равенка го добива обликот

$$-4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2 = 4.$$

Заменувајќи ги вредностите $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 11$, добиваме квадратна равенка за $\sigma_3 : \sigma_3^2 - 12\sigma_3 + 36 = 0$. Нејзино решение е $\sigma_3 = 6$. Значи, $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 11$ и $\sigma_3 = 6$. За да ги најдеме x, y и z ја формираме кубната равенка $u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0$. Нејзини решенија се $u_1 = 1, u_2 = 2$ и $u_3 = 3$. За најдените решенија на u_1, u_2 и u_3 соодветствуваат шест решенија на непознатите x, y и z. Тие се добиваат како пермутации на вредностите $x = 1, y = 2, z = 3$. Секако дека не сите тие системи на вредности го задоволуваат почетниот систем. При квадрирањето на третата равенка можно е да сме додале решенија, т.е. да се појават решенија кои што не се решенија на почетниот систем. Непосредната проверка покажува дека решенија на почетниот систем се

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \\ z_2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 2 \end{cases}.$$

Задачи

Да се решат следните системи равенки:

1. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1 \\ x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} xy + xz + yz = 11 \\ xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = 48 \\ xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + xz(x^2+z^2) = 118 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y + z = \frac{13}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{3} \\ xyz = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = \frac{78}{3} \\ xy + yz + zx = x + y + z \\ xyz = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 \\ xyz = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^5 + y^5 + z^5 - u^5 = 210 \\ x^3 + y^3 + z^3 - u^3 = 18 \\ x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 6 \\ x + y + z - u = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = b^3 \\ x + y + z = 2b \\ x^2 + y^2 - z^2 = b^2 \end{cases}$.

12. Состави кубна равенка чии корени се квадрати од корените на равенката $u^3 - 2u^2 + u - 12 = 0$.

13. Состави кубна равенка чии корени се кубови од корените на равенката $u^3 - 2u^2 + u - 12 = 0$.

14. Ако a, b и c се попарно различни броеви за кои

$$a^3 + pa + q = b^3 + pb + q = c^3 + cp + q = 0,$$

тогаш $a + b + c = 0$.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија