ЈЕДНАКОСТИ У ПРАВИЛНОМ ПЕТНАЕСТОУГЛУ

Нека је дат правилан петнаестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{15}$ (слика 1). Централни угао над страницом тог многоугла износи $24°$, а периферијски $12°$. Унутрашњи угао му је $156°$. Уведимо ознаке $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$, $A_1A_5 = d$, $A_1A_6 = e$, $A_1A_7 = f$ и $A_1A_8 = g$. Тада важе једнакости:

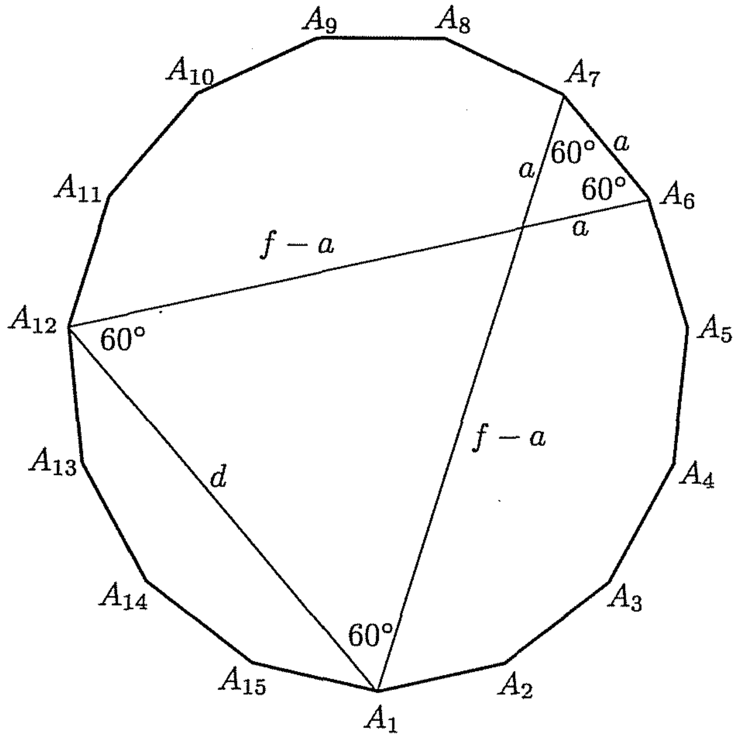
1) $f - d = a$,

2) $\dfrac{a}{g} + \dfrac{c}{d} = 1$,

3) $\dfrac{c}{a} - \dfrac{d}{b} = 1$,

4) $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{a}$.

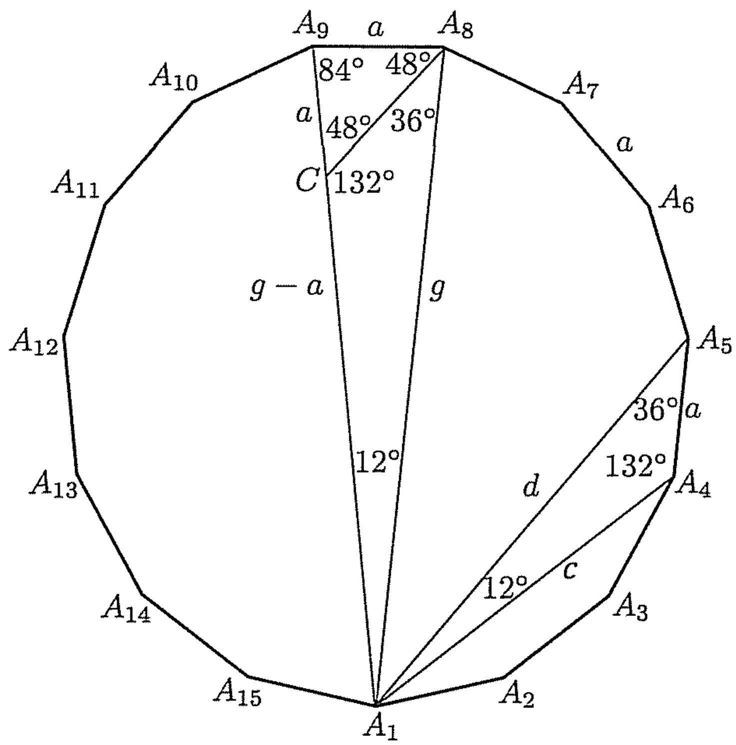
Доказ. 1) Тачку пресека дијагонала A_1A_7 и A_6A_{12} обележимо са B (слика 1). С обзиром на то да је $\sphericalangle BA_6A_7 = \sphericalangle BA_7A_6 = 60°$ (периферијски угао над трећином кружнице описане око правилног 15-оугла), значи да је троугао A_6A_7B једнакостраничан. Како је $A_6B = A_7B = a$, произлази да је $A_1B = A_{12}B = f - a$.



Слика 1.

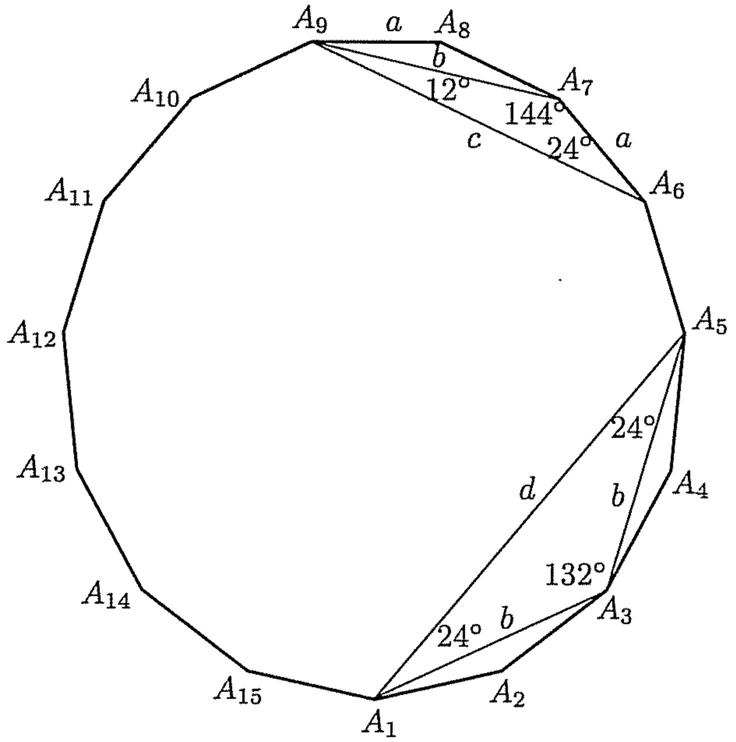
Троугао A_1BA_{12} је такође једнакостраничан, па је $A_1B = BA_{12} = A_{12}A_1$. Како је $A_1B = f - a$, $A_1A_{12} = d$ и $A_1B = A_{12}A_1$ закључујемо да је $f - a = d$, односно $f - d = a$, тј. једнакост 1) важи.

2) Нека је $A_9C = A_8A_9 = a$, $C \in A_1A_9$ (слика 2). Тада је $A_1C = g - a$.



Слика 2.

Троуглови $A_1A_4A_5$ и A_1A_8C имају исте углове па је $\triangle A_1A_4A_5 \sim \triangle A_1A_8C$. Из те сличности следи $d : c = g : (g-a)$, тј. $dg - ad = cg$. Одавде, после дељења са dg, добијамо $1 - \frac{a}{g} = \frac{c}{d}$, тј. $\frac{a}{g} + \frac{c}{d} = 1$.



Слика 3.

3) На основу синусне теореме примењене на троугао $A_1A_3A_5$ (слика 3), имамо

$$\frac{b}{\sin 24^\circ} = \frac{d}{\sin 132^\circ}.$$

Како је $\sin 132^\circ = \sin(180^\circ - 48^\circ) = \sin 48^\circ$ и $\sin 48^\circ = 2\sin 24^\circ \cos 24^\circ$, добијамо $\cos 24^\circ = \dfrac{d}{2b}$. Применом косинусне теореме на троугао $A_6A_7A_9$ добијамо

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 24^\circ,$$

а одавде, због $\cos 24^\circ = \dfrac{d}{2b}$, следи

$$(*) \qquad b^2 = a^2 + c^2 - \frac{acd}{b}.$$

Сада користимо следећу лему (помоћну теорему): *ако у* $\triangle ABC$ *важи* $\alpha = 2\beta$, *онда је* $a^2 = b(b+c)$. Један њен доказ налази се у [1], стр. 133. На основу ове леме примењене на троугао $A_6A_7A_9$, имамо

$$(\star) \qquad b^2 = a(a+c).$$

Из једнакости $(*)$ и $(\star)$ призлази $a^2 + c^2 - \dfrac{acd}{b} = a(a+c)$, односно

$$c - \frac{ad}{b} = a \Rightarrow bc - ad = ab \Rightarrow \frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1.$$

4) Једнакост $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{a}$, због $a = 2R\sin 12^\circ$, $b = 2R\sin 24^\circ$, $d = 2R\sin 48^\circ$ и $g = 2R\sin 84^\circ$ (слика 4), еквиавлента је са

$$\frac{1}{\sin 24^\circ} + \frac{1}{\sin 48^\circ} + \frac{1}{\sin 84^\circ} = \frac{1}{\sin 12^\circ},$$

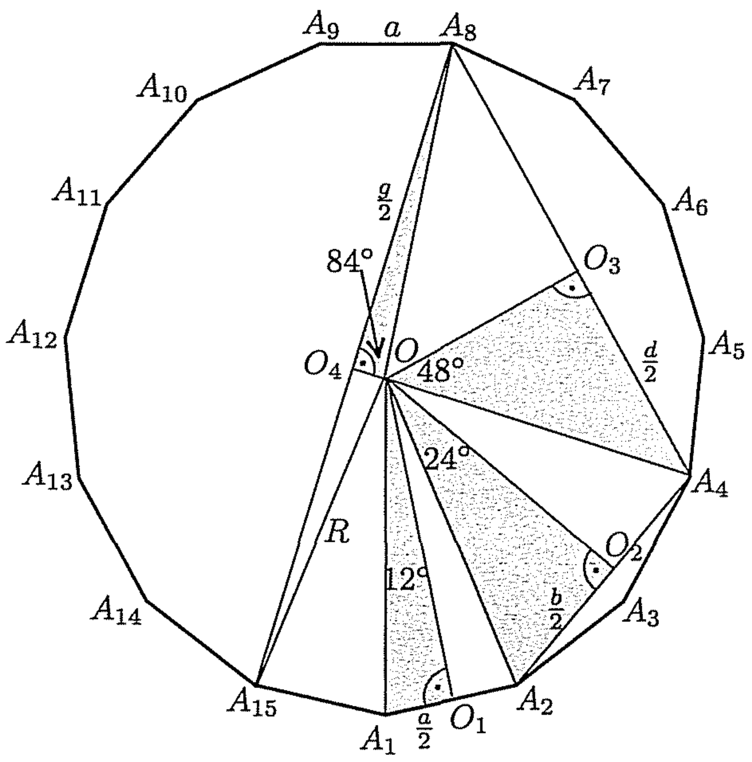
односно са

$$\frac{\sin 48^\circ + \sin 24^\circ}{\sin 24^\circ \sin 48^\circ} = \frac{\sin 84^\circ - \sin 12^\circ}{\sin 12^\circ \sin 84^\circ}.$$

Трансформацијом збира и разлике синуса у производ добијамо:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sin\dfrac{48^\circ + 24^\circ}{2}\cos\dfrac{48^\circ - 24^\circ}{2}}{\sin 24^\circ \sin 48^\circ} = \frac{2\sin\dfrac{84^\circ - 12^\circ}{2}\cos\dfrac{84^\circ + 12^\circ}{2}}{\sin 12^\circ \sin 84^\circ} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\cos 12^\circ}{\sin 24^\circ \sin 48^\circ} = \frac{\cos 48^\circ}{\sin 12^\circ \sin 84^\circ} \\
\Leftrightarrow\ & \cos 12^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 84^\circ = \cos 48^\circ \cdot \sin 24^\circ \cdot \sin 48^\circ \\
\Leftrightarrow\ & \sin 84^\circ = \sin 96^\circ \ (\text{јер је } \sin 2x = 2\sin x \cos x).
\end{aligned}$$

Последња једнакост је тачна јер је $\sin 84^\circ = \sin(180^\circ - 96^\circ) = \sin 96^\circ$. Овим је доказ једнакости 4) завршен.



Слика 4.

Задаци.

1. Докажите да за правилан петнаестоугао важи једнакост $b + c = g$.
2. Докажите једнакости 1) и 2) помоћу:
а) тригонометрије;
б) методе координата;
в) Птоломејеве теореме.
3. Докажите једнакост под 4) применом комплексних бројева.

Литература

[1] С. Огњановић и др, *Збирка задатака из математике*, Стручна књига, Београд, 1984.

[2] www.srb.imomath/dodatne/komp_geo_mr.pdf

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2012/13 година