Сава Гроздев, Софија
Катерина Аневска, Скопје

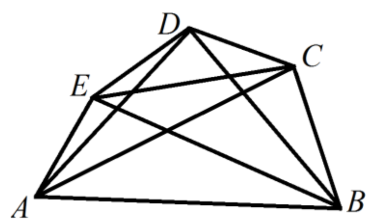
БРОИМЕ СО ПОМОШ НА ГРАФОВИ

Новогодишни празници! Сите некаде патуваат, па така и јас со моите родители тргнав со воз од Скопје за Швајцарија, во посета на мојата сестра, која студира во Цирих. На почетокот во купето бевме сами, но во Куманово влезе една девојка, која рече дека се вика Елеонора и дека патува за Белград. Патот беше долг, па по извесно време со Елеонора започнавме пријатен разговор. Таа ми кажа дека студира математика, на што јас љубопитно ја погледнав. Веројатно Елеонора претпостави дека математиката ми е омилен предмет, па затоа ми ја постави следнава задача.

Се сретнале пет пријатели и секој од нив се ракувал со секој од нив. Колку се сите ракувања?

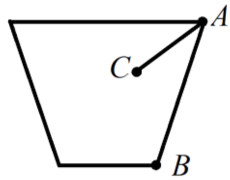
Јас малку се замислив, но се присетив дека со наставничката на часовите од математичката секција решававме слични задачи, па одговорив: Ако јас сум еден од пријателите, тогаш ќе се ракувам со четворица, што значи дека моите ракувања се 4. Слично важи и за останатите четворица пријатели, па затоа вкупниот број на ракувања е еднаков на $5 \cdot 4 = 20$. Меѓутоа, секое ракување се брои двапати – еднаш за првиот и вторпат за вториот од двајцата кои се ракуваат. Затоа 20 треба да се подели на 2, што значи дека бараниот број е $20:2=10$.

Потоа продолжив, задачата може да се реши и со цртеж така што секој од пријателите A,B,C,D,E ќе го претставиме со точка, а секое ракување меѓу двајца со отсечка. Значи имаме петаголник $ABCDE$ и бројот на сите ракувања е бројот на сите страни и дијагонали на петаголникот, кој очигледно е еднаков на 10.



Елеонора беше задоволна со мојот одговор и побрза да ми соопшти, дека моето претставување на решението со помош на цртеж е сврзано со поимот *ноериентиран граф*. Тоа беше ново за мене. Елеонора продолжи: Наједноставно кажано, *неориентиран граф* е секое множество од точки, некои од кои (може и сите) се поврзани со линии. Точките се нарекуваат *темиња на графот,* а линиите – *ребра.* Секое ребро е сврзано со точно две темиња и секои две темиња се сврзани со најмногу едно ребро.

Ми беше интересно да научам дека *Теоријата на графови* е релативно млада математичка дисциплина и дека нејзин основополошник е големиот швајцарски математичар Леонард Ојлер (1707-1783). Понатаму, дека поимот *граф* е воведен 200 години после првиот труд на Ојлер во оваа област и дека овој поим во 1936 година го вовел маџарскиот математичар Денеш Кониг (1884-1944).



Понатаму, Елеонора ми објасни дека *степенот на теме* во даден граф е еднаков на бројот на ребрата кои излегуваат од тоа теме. На пример, степенот на темето A од графот на цртежот десно е еднаков на 3, степенот на темето B е 2, а степенот на темето C е еднаков на 1. За едно теме велиме дека е *парно* ако неговиот степен е парен, а ако тоа има непарен степен велиме дека е *непарно*.

После овие кратки објаснувања, Елеонора ми ја постави следнава задача.

Задача 1. Во една компјутерска училница има 20 компјутери и некои од паровите компјутери треба да се поврзат со кабли. Колку кабли се потребни ако од секој компјутер треба да излегуваат по 5 кабли?

Решение. Лесно се заклучува дека ако оваа задача сакаме да ја решиме со помош на графови, тогаш комјутерите треба да бидат темиња, а каблите треба да бидат ребра. Тоа значи дека сите темиња имаат степен 5. Едно ребро има два краја, што значи дека вкупниот број крајни точки на ребрата е еднаков на $20\cdot 5=100$. Но, тогаш бројот на ребрата (каблите) е еднаков на $100:2=50$. ■

Елеонора ми објасни дека графовите во претходните две задачи можат да се претставaт со цртежи и дека во многу примери е важно тоа да се прави, бидејќи цртежите даваат можност за подбро разбирање на задачата. Потоа, пред да ми постави некои потешки задачи. Таа ме запозна со две тврдења кои имаат широка примена при решавање на задачи.

Лема. Збирот на степените на сите темиња во еден граф е двапати поголем од бројот на ребрата.

Доказ. Навистина, збирот на степените на темињата е еднаков на бројот на крајните точки на рабрата и бидејќи секое ребро има по две крајни точки, добиваме дека тој е двапати поголем од бројот на ребрата. ■

Последица. Бројот на непарните темиња во еден граф е парен.

Доказ. Според лемата збирот на степените е парен број, па како бројот збирот на степените на парните темиња е парен, добиваме дека и збирот на степените непарните темиња мора да е парен број. Сега тврдењето следува од фактот дека збир на непарни броеви е парен сако ако бројот на собирците е парен. ■

Откако ги разбрав овие две тврдења, со нетрпение очекував некоја потешка задача и Елеонора тоа и го направи, поставувајќи ми ја следнава задача.

Задача 2. Дали во рамнината може да се нацртаат 9 отсечки така што секоја од нив да сече точно 3 од останатите отсечки?

Почнав да размислувам и да ги цртам деветте отсечки, но ништо не излегуваше. Елеонора ме набљудуваше што правам, но трпеливо чекаше. После извесно време кренав раце едноставно побарав Елеонора да ми помогне. Таа се насмеа и предложи да искористиме модел во кој отсечките од условот на задачата да се точки, s.e. тоа да се темињата на графот. Изненадено ја запрашав како тоа отсечки да се точки. Елеонора ми објасни дека во тоа е убавината на математиката – да ја пренебрегнеш конкретната природа на објектите (во случајот на отсечките) и да ги набљудуваш како апстрактни објекти. Потоа ми го презентираше следново решение на задачата.

Решение на задача 2. Земаме граф со 9 темиња (дадените отсечки) и некои од нив треба да ги поврземе со ребра. Поврзувањето го правиме така што две темиња ги поврзуваме со ребра, ако отсечките кои соодветствуваат на тие две темиња се сечат. Значи имаме девет темиња и од секое од нив излегуваат по 3 ребра.. Според тоа, добивме граф во кој збирот на степените на сите темиња е еднаков на $9\cdot 3=27$, што не е можно бидејќи според лемата тој мора да биде двапати поголем од бројот на ребрата, т.е. мора да биде парен број.

Последното значи, дека не е можно во рамнината да се нацртаат 9 отсечки така што секоја од нив да сече точно 3 од останатите отсечки. ■

Навистина генијално! Во случајов никаков цртеж не помага, туку едноставно треба да се избере добар модел и да се примени горната лема. Ја замолив Елеонора да ми даде уште една слична задача. Таа малку се замисли и ми ја постави следнава задача.

Задача 3. Во една паралелка има 30 ученици. Дали е можно 9 од нив да имаат по три пријатели, 11 да имаат по четири и 10 да имаат по пет пријатели?

Решение. Тука моделот е очигледен: граф со 30 темиња, т.е. секој ученик е теме и ребрата соодветствуваат на пријателствата. Според условот 9 темиња имаат степен 3, 11 темиња имаат степен 4 и 10 темиња имаат степен 5. Според тоа, збирот на степените на темињата на графот треба да биде еднаков $9\cdot 3+10\cdot 5+11\cdot 4=27+50+44=121$, т.е. да е непарен број. Последното противречи на лемата, па затоа заклучуваме дека не е можно во паралелка со 30 ученици да имаме таков распоред на пријателства. ■

Откако на Елеонора и го соопштив решението на претходната задача таа ми ја постави следнава задача.

Задача 4. Баронот Минхаузен на своите пријатели има раскажувал дека на своето последно патување посетил езеро во кое има 9 острови до другите острови водат 3, 5 или 7 мостови. Дали баронот Минхаузен говори вистина или како по обичај повторно лаже?

Решение. Ќе ја користиме идејата решенијата од претходните задачи. Разгледуваме граф со 9 темиња во кој мостовите се ребра. Степенот на секое теме е непарен број, што значи дека збирот на степените на сите темиња во графот е еднаков на збирот на девет непарни броеви. Според тоа, збирот на степените на сите темиња во графот ќе биде непарен број, а тоа противречи на лемата. Конечно, од добиената противречност следува дека баронот Минхаузен повторно ги излагал своите пријатели. ■

Патувањето беше долго, но верувајте мене ми изгледаше како одеднаш да дојдовме до Белград. Имено, пред да стигнеме Елеонора ми ги зададе уште следниве четири зададе, кои јас успешно ги решив.

Задача 5. Во една населба има 9 куќи со дворови. Познато е дека Павел е сосед на Ивана и Ангела, Михајло е сосед на Ивана и Стојан, Васко е сосед на Димитар и Никола и Евгенија е сосед на Никола и повеќе соседи нема во оваа населба. Двајца се соседи, ако дворовите на нивните куќи имаат заеднички дел од ограда. Дали е можно Павел да прескокне од својот двор во дворот на Никола?

Одговор. Не е можно.

Задача 6. За празникот 8-ми март секое од 10-те момчиња во една паралелка подарило по една ружа на 8 од своите соученички. Колку девојчиња има во паралелката ако секое од нив добило по 5 ружи?

Одговор. Во паралелката има 16 девојчиња.

Задача 7. На една забава секое момче танцувало со точно 11 девојчиња, а секое девојче танцувало со точно 10 момчиња. Дали на забавата имало повеќе момчиња или повеќе девојчиња?

Одговор. На забавата имало повеќе девојчиња.

Задача 8. Во една држава има 15 градови, секој од кои е поврзан со пат со најмалку 7 други градови. Докажи, дека тргнувајќи од било кој град во државата може да се стигне до секој од останатите градови (при патувањето од еден до друг град е дозволено минување низ останатите градови).

Елеонора беше задоволна од своето учителствување, а јас од наученото, па така срдечно се разделивме. Драги пријатели, а дали и вие научивте нешто ново? Обидете се самостојно да ги решите последните четири задачи. Ви посакувам многу успех!

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ