ЈЕДНА ТЕОРЕМА О ПРАВИЛНОМ ПЕТНАЕСТОУГЛУ

Драгољуб Милошевић, Александар Средојевић
Горњи Милановац

Познато је да се неке теореме могу доказати на више различитих начина. На пример, за Питагорину теорему нађено је више од стотину доказа. Различити докази су од великог значаја и користи за читаоца, било да је то ученик, студент или просто љубитељ математике. Упознавањем с њима читалац има прилику да види ствари из више углова, да тиме прошири спектар метода и идеја и да своју математичку зрелост подигне на виши ниво. Због тога, има пуно истине у констатацији да је корисније доказати једну теорему или решити један задатак на више начина, него више теорема или више задатака на један начин. У овом чланку ћемо представити пет различитих доказа једне теореме о правилном петнаестоуглу.

Познато је да у правилном седмоуглу $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ важи једнакост $\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}$. У књизи [1] наводи се (без доказа) да слично тврђење важи за правилан петнаестоугао. Тачније, да важи

Теорема. Ако је $A_0A_1 \ldots A_{14}$ правилан петнаестоугао, тада је

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_7}.$$

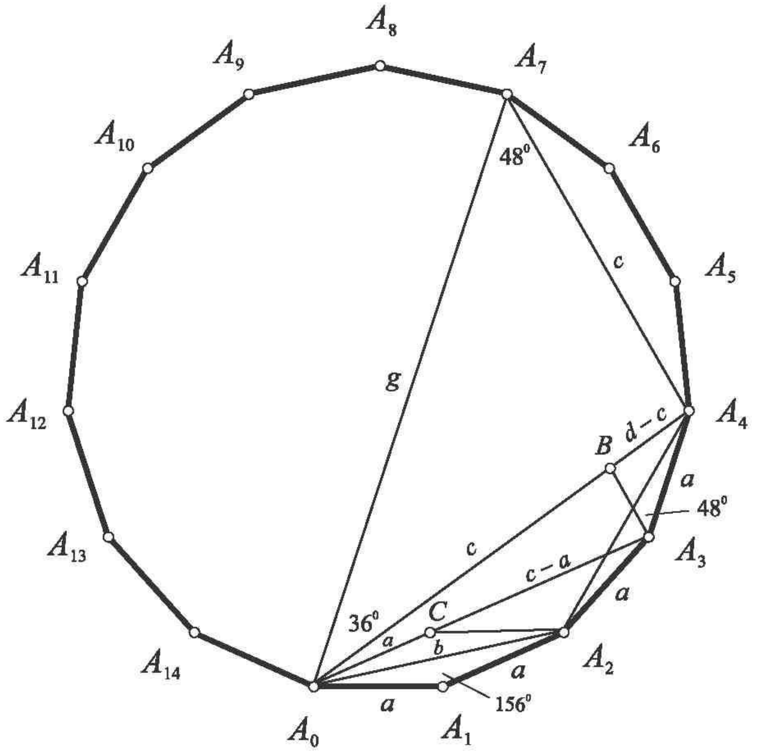
Први доказ. Уведимо следеће ознаке за странице и дијагонале петнаестоугла: $A_0A_1 = a$, $A_0A_2 = b$, $A_0A_3 = c$, $A_0A_4 = d$, $A_0A_5 = e$, $A_0A_6 = f$, $A_0A_7 = g$. Тада наведена једнакост прелази у

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{g}. \qquad (1)$$

Уочимо кружницу описану око петнаестоугла. Тада је централни угао над страницом петнаестоугла једнак $360^0 : 15 = 24^0$, па је одговарајући периферијски угао једнак $24^0 : 2 = 12^0$. С обзиром да је спољашњи угао правилног многоугла једнак централном углу над страницом, у случају правилног петнаестоугла то је 24^0. Отуда је унутрашњи угао правилног петнаестоугла једнак $180^0 - 24^0 = 156^0$.

На дијагонали $A_0A_4 = d$ уочимо тачку B, такву да је $A_0B = A_0A_3 = c$ (сл. 1). Тада је $BA_4 = d - c$. Троугао A_0A_3B је једнакокраки, па је

$$\measuredangle A_0A_3B = \measuredangle A_0BA_3 = (180^0 - 12^0) : 2 = 84^0.$$



Сл. 1.

У троуглу A_3A_4B имамо

$$\measuredangle BA_3A_4 = \measuredangle A_2A_3A_4 - (\measuredangle A_2A_3A_0 + \measuredangle A_0A_3B)$$

$$= 156^0 - (2 \cdot 12^0 + 84^0) = 48^0 \qquad (2)$$

и

$$\measuredangle A_3A_4B = \measuredangle A_3A_4A_2 + \measuredangle A_2A_4A_1 + \measuredangle A_1A_4A_0$$

$$= 3 \cdot 12^0 = 36^0. \qquad (3)$$

Слично, у троуглу $A_0A_4A_7$ је

$$\measuredangle A_4A_7A_0 = 4 \cdot 12^0 = 48^0 \qquad (4)$$

и

$$\measuredangle A_7A_0A_4 = 3 \cdot 12^0 = 36^0. \qquad (5)$$

Из (2), (3), (4), (5) закључујемо да је $\Delta A_3A_4B \sim \Delta A_7A_0A_4$ јер имају једнаке углове. Због тога је

$$A_3A_4 : A_7A_0 = A_4B : A_0A_4,$$

односно

$$a : g = (d - c) : d.$$

Одавде је $ad = g(d - c)$, тј.

$$dg - ad = cg. \tag{6}$$

На дијагонали A_0A_3 одредимо тачку C, тако да је $A_0C = A_0A_1 = a$. Следи $CA_3 = c - a$. Како је $A_0A_3 \parallel A_1A_2$ и $A_0A_1 = A_1A_2 = A_0C = a$, четвороугао $A_0A_1A_2C$ је ромб, па је и $A_2C = a$. Дакле, троугао A_2A_3C је једнакокраки $(A_2C = A_2A_3 = a)$, те је

$$\begin{aligned}\measuredangle CA_2A_3 &= 180^0 - 2 \cdot \measuredangle A_2A_3C = 180^0 - 2 \cdot \measuredangle A_2A_3A_0 \\ &= 180^0 - 2 \cdot 2 \cdot 12^0 = 132^0.\end{aligned} \tag{7}$$

С друге стране, из једнакокраког троугла $A_0A_2A_4$ $(A_0A_2 = A_2A_4 = b)$ имамо

$$\begin{aligned}\measuredangle A_0A_2A_4 &= 180^0 - 2 \cdot \measuredangle A_2A_4A_0 \\ &= 180^0 - 2 \cdot 2 \cdot 12^0 = 132^0.\end{aligned} \tag{8}$$

Из (7) и (8) следи да су једнакокраки троуглови A_2A_3C и $A_0A_2A_4$ слични, па је

$$A_2A_3 : A_2A_4 = A_3C : A_4A_0,$$

односно $a : b = (c - a) : d$. Одатле је

$$ab + ad = bc. \tag{9}$$

Деобом левих и десних страна (6) и (9) добијамо $\frac{dg - ad}{ab + ad} = \frac{cg}{bc}$. То, даље, повлачи $\frac{d(g - a)}{a(b + d)} = \frac{g}{b}$, односно $\frac{g - a}{ag} = \frac{b + d}{bd}$. Након извршених деоба на левој и десној страни то даје $\frac{1}{a} - \frac{1}{g} = \frac{1}{d} + \frac{1}{b}$, одакле очигледно следи (1).

Други доказ. Користићемо следеће тврђење познато као Птолемејева[1] теорема

Лема 1. Ако је $ABCD$ тетивни четвороугао, тада је

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

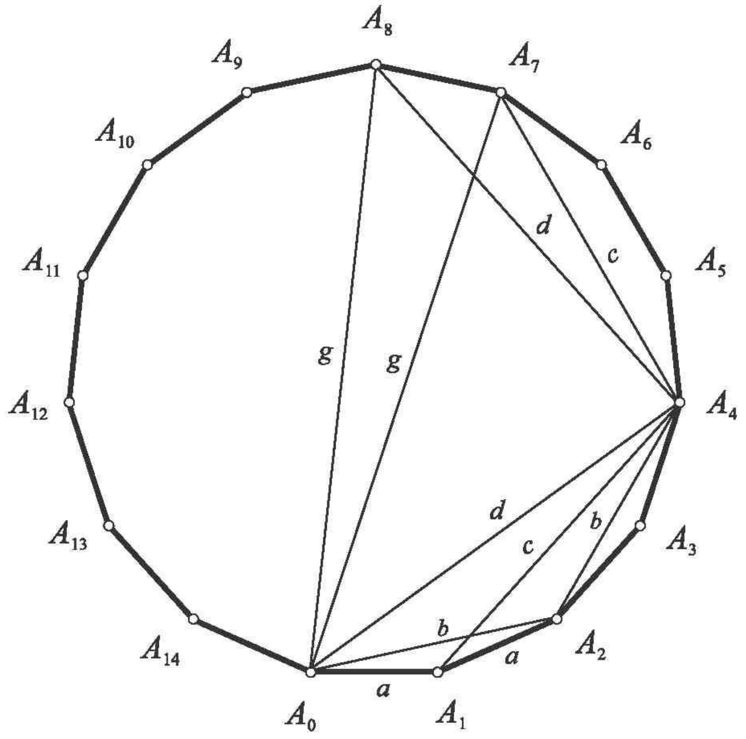
□

Применом Птолемејеве теореме на тетивне четвороуглове $A_0A_4A_7A_8$ и $A_0A_1A_2A_4$ (сл. 2), добијамо

[1] Клаудиус Птолемеј (100-170 н.е.) – грчко-римски математичар и астроном.

$$A_0A_7 \cdot A_4A_8 = A_0A_8 \cdot A_4A_7 + A_0A_4 \cdot A_7A_8 \tag{10}$$

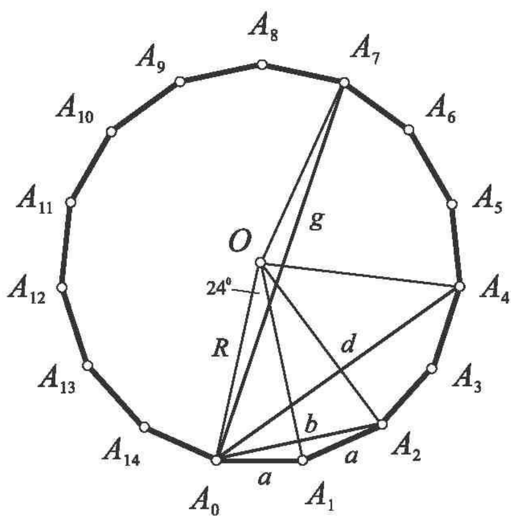
$$A_0A_2 \cdot A_1A_4 = A_0A_1 \cdot A_2A_4 + A_1A_2 \cdot A_0A_4. \tag{11}$$



Сл. 2.

Уз ознаке из првог доказа, једнакости (10) и (11) прелазе у $gd = gc + da$ и $bc = ab + ad$, односно $gd - da = gc$ и $ab + ad = bc$. Након деобе левих и десних страна добијамо $\dfrac{d(g-a)}{a(b+d)} = \dfrac{g}{b}$, а одатле $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{g}$, исто као у првом доказу.

Трећи доказ. Нека су O и R центар и полупречник кружнице описане око петнаестоугла (сл. 3).



Сл. 3.

Како је $\measuredangle A_0OA_1 = 24^0$, то је $\measuredangle A_0OA_2 = 2\cdot 24^0 = 48^0$, $\measuredangle A_0OA_4 = 2\cdot 48^0 = 96^0$ и $\measuredangle A_0OA_7 = 2\cdot 84^0 = 168^0$. Отуда је

$$a = 2R\sin 12^0,\ b = 2R\sin 24^0,\ d = 2R\sin 48^0,\ g = 2R\sin 84^0,$$

па је једнакост (1) еквивалентна са

$$\frac{1}{\sin 12^0} = \frac{1}{\sin 24^0} + \frac{1}{\sin 48^0} + \frac{1}{\sin 84^0}.$$

То је даље еквивалентно са $\frac{1}{\sin 12^0} - \frac{1}{\sin 84^0} = \frac{1}{\sin 24^0} + \frac{1}{\sin 48^0}$ и

$$\frac{\sin 84^0 - \sin 12^0}{\sin 84^0 \sin 12^0} = \frac{\sin 48^0 + \sin 24^0}{\sin 48^0 \sin 24^0}. \qquad (12)$$

Коришћењем тригонометријских идентичности

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

једнакост (12) се трансформише у

$$\frac{\cos 48^0}{\sin 84^0 \sin 12^0} = \frac{\cos 12^0}{\sin 48^0 \sin 24^0},$$

односно у

$$\sin 24^0 \sin 48^0 \cos 48^0 = \sin 84^0 \sin 12^0 \cos 12^0. \qquad (13)$$

Како за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $2\sin x\cos x = \sin 2x$, једнакост (13) је еквивалентна са $\sin 24^0 \sin 96^0 = \sin 84^0 \sin 24^0$ и даље са

$$\sin 96^0 = \sin 84^0. \qquad (14)$$

Како је $\sin x = \sin(180^0 - x)$, следи $\sin 96^0 = \sin(180^0 - 96^0) = \sin 84^0$, те је једнакост (14) тачна. Стога је тачна и једнакост (1).

Четврти доказ. Како је $\measuredangle A_0OA_3 = 3\cdot 24^0 = 72^0$, $\measuredangle A_0OA_5 = 5\cdot 24^0 = 120^0$ и $\measuredangle A_0OA_6 = 6\cdot 24^0 = 144^0$ (сл. 3), следи

$$c = 2R\sin 36^0,\ e = 2R\sin 60^0,\ f = 2R\sin 72^0.$$

Имајући у виду сличне вредности за a, b, d и g из трећег доказа и користећи познате идентитете

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y)$$

$$\sin x = \sin(180^0 - x),$$

добијамо

$$e^2 - b^2 = (2R\sin 60^0)^2 - (2R\sin 24^0)^2 = 2R\sin 36^0 \cdot 2R\sin 84^0$$
$$= cg \qquad (15)$$

$$g^2 - e^2 = (2R\sin 84^0)^2 - (2R\sin 60^0)^2 = 2R\sin 24^0 \cdot 2R\sin 144^0$$
$$= 2R\sin 24^0 \cdot 2R\sin 36^0 = bc \qquad (16)$$

$$f^2 - b^2 = (2R\sin 72^0)^2 - (2R\sin 24^0)^2 = 2R\sin 48^0 \cdot 2R\sin 96^0$$
$$= 2R\sin 48^0 \cdot 2R\sin 84^0 = dg \qquad (17)$$

$$f^2 - e^2 = (2R\sin 72^0)^2 - (2R\sin 60^0)^2 = 2R\sin 12^0 \cdot 2R\sin 132^0$$
$$= 2R\sin 12^0 \cdot 2R\sin 48^0 = ad \qquad (18)$$

$$g^2 - f^2 = (2R\sin 84^0)^2 - (2R\sin 72^0)^2 = 2R\sin 12^0 \cdot 2R\sin 156^0$$
$$= 2R\sin 12^0 \cdot 2R\sin 24^0 = ab. \qquad (19)$$

Сада из (15) и (16) имамо

$$\frac{g}{b} = \frac{cg}{bc} = \frac{e^2 - b^2}{g^2 - e^2}.$$

Како је $\frac{e^2 - b^2}{g^2 - e^2} = \frac{f^2 - b^2 - (f^2 - e^2)}{g^2 - f^2 + (f^2 - e^2)}$ из последње једнакости, имајући у виду (17), (18) и (19), добијамо

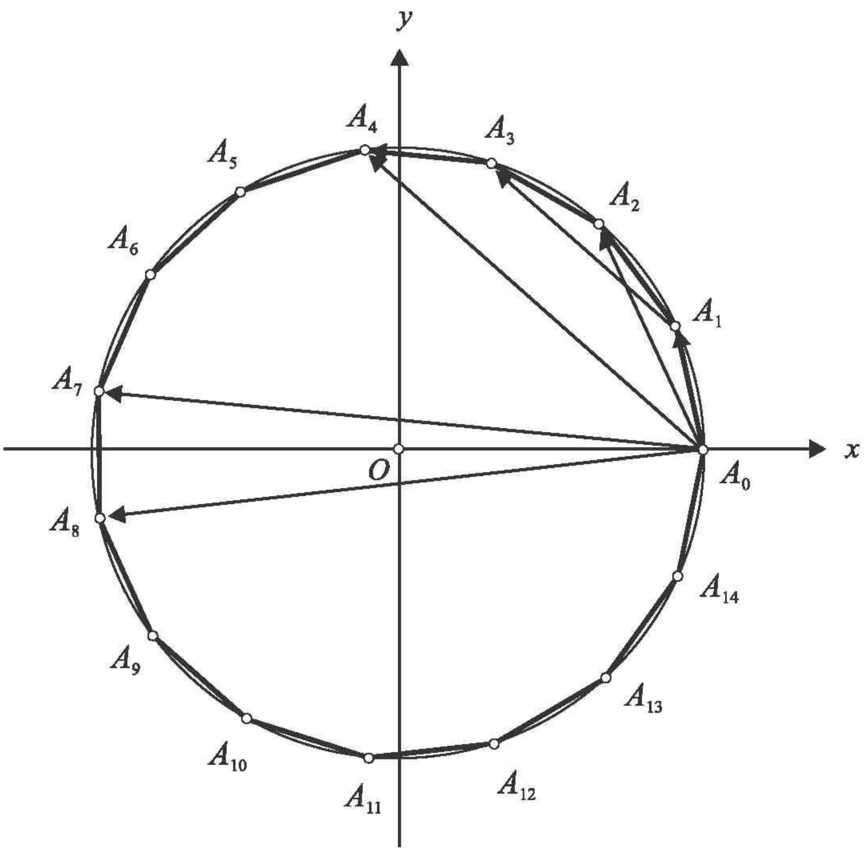
$$\frac{g}{b} = \frac{dg - ad}{ab + ad} = \frac{d(g - a)}{a(b + d)}.$$

Одатле, као у првом доказу, следи $\frac{1}{a} - \frac{1}{g} = \frac{1}{d} + \frac{1}{b}$, што је требало да се покаже.

Пети доказ. У овом доказу користићемо комплексне бројеве. Узмимо да је правилан петнаестоугао $A_0A_1 \dots A_{14}$ уписан у јединичну кружницу Гаусове равни са средиштем у координатном почетку, тако да темену A_0 одговара комплексан број 1 (слика 4). Тада темену A_k, где је $k = 0, 1, \dots, 14$, одговара комплексан број

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{15} + i\sin\frac{2k\pi}{15}.$$

Приметимо да је $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ за $k = 0, 1, \dots, 14$.



Сл. 4.

У даљем ћемо користити следећа тврђења која дајемо без доказа.

Лема 2. Ако тачкама X и Y одговарају комплекни бројеви x и y, тада је

$$XY = |x-y| = |y-x|,$$

где је XY дужина дужи XY.

□

Лема 3. Нека су XY и ZT $(XY \geq ZT)$ дужи које леже на истој или на паралелним правама и нека су x, y, z, t одговарајући комплексни бројеви. Ако су вектори XY и ZT исто оријентисани, тада је

(а) $XY + ZT = |x-y| + |z-t| = |(x-y)+(z-t)|$;

(б) $XY - ZT = |x-y| - |z-t| = |(x-y)-(z-t)|$.

□

С обзиром да је $A_0A_2 = A_1A_3 = b$, следи

$$\frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_0A_4} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}\,. \tag{20}$$

На основу леме 2 је $A_1A_3 = |\varepsilon_3 - \varepsilon_1|$ и $A_0A_4 = |\varepsilon_4 - \varepsilon_0|$. Како су $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_0A_4}$ колинеарни вектори истог смера, из леме 3(а) следи

$$\frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_0A_4} = \frac{A_0A_4 + A_1A_3}{A_1A_3 \cdot A_0A_4} = \frac{|(\varepsilon_4 - \varepsilon_0) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)|}{|\varepsilon_3 - \varepsilon_1| \cdot |\varepsilon_4 - \varepsilon_0|} = \frac{|(\varepsilon_1^4 - 1) + (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_1)|}{|\varepsilon_1^3 - \varepsilon_1| \cdot |\varepsilon_1^4 - 1|} .$$

То се даље може трансформисати у

$$\frac{|(\varepsilon_1^4 - 1) + (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_1)|}{|\varepsilon_1^3 - \varepsilon_1| \cdot |\varepsilon_1^4 - 1|} = \frac{|(\varepsilon_1^2 - 1)(\varepsilon_1^2 + 1) + \varepsilon_1(\varepsilon_1^2 - 1)|}{|\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 - 1)| \cdot |(\varepsilon_1^2 - 1)(\varepsilon_1^2 + 1)|} = \frac{|(\varepsilon_1^2 - 1)(\varepsilon_1^2 + 1 + \varepsilon_1)|}{|\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 - 1)| \cdot |(\varepsilon_1^2 - 1)(\varepsilon_1^2 + 1)|} .$$

Како за свака два комплексна броја x и y важи $|xy| = |x| \cdot |y|$ и како је $|\varepsilon_k| = 1$ (полупречник јединичне кружнице), последњи разломак можемо представити у облику

$$\frac{|(\varepsilon_1^2 - 1)(\varepsilon_1^2 + 1 + \varepsilon_1)|}{|\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 - 1)| \cdot |(\varepsilon_1^2 - 1)(\varepsilon_1^2 + 1)|} = \frac{|\varepsilon_1^2 - 1| \cdot |\varepsilon_1^2 + 1 + \varepsilon_1|}{|\varepsilon_1| \cdot |\varepsilon_1^2 - 1| \cdot |\varepsilon_1^2 - 1| \cdot |\varepsilon_1^2 + 1|} = \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1|}{|\varepsilon_1^2 - 1| \cdot |\varepsilon_1^2 + 1|} .$$

Тако је, због (20),

$$\frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_0A_4} = \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1|}{|\varepsilon_1^2 - 1| \cdot |\varepsilon_1^2 + 1|} . \tag{21}$$

Слично, из $A_0A_1 = A_3A_4 = a$ имамо

$$\frac{1}{A_0A_1} - \frac{1}{A_0A_7} = \frac{1}{A_3A_4} - \frac{1}{A_0A_7} = \frac{1}{a} - \frac{1}{g} . \tag{22}$$

На основу леме 2 је $A_3A_4 = |\varepsilon_4 - \varepsilon_3|$ и $A_0A_7 = |\varepsilon_7 - \varepsilon_0|$. Како су $\overrightarrow{A_3A_4}$ и $\overrightarrow{A_0A_7}$ колинеарни вектори истог смера, из леме 3(а) следи

$$\frac{1}{A_3A_4} - \frac{1}{A_0A_7} = \frac{A_0A_7 - A_3A_4}{A_3A_4 \cdot A_0A_7} = \frac{|(\varepsilon_7 - \varepsilon_0) - (\varepsilon_4 - \varepsilon_3)|}{|\varepsilon_4 - \varepsilon_3| \cdot |\varepsilon_7 - \varepsilon_0|} = \frac{|(\varepsilon_1^7 - 1) - (\varepsilon_1^4 - \varepsilon_1^3)|}{|\varepsilon_1^4 - \varepsilon_1^3| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|} ,$$

односно

$$\frac{|(\varepsilon_1^7 - 1) - (\varepsilon_1^4 - \varepsilon_1^3)|}{|\varepsilon_1^4 - \varepsilon_1^3| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|\varepsilon_1^4(\varepsilon_1^3 - 1) + \varepsilon_1^3 - 1|}{|\varepsilon_1^3(\varepsilon_1 - 1)| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|(\varepsilon_1^3 - 1)(\varepsilon_1^4 + 1)|}{|\varepsilon_1^3| \cdot |\varepsilon_1 - 1| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|\varepsilon_1^3 - 1| \cdot |\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1 - 1| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|} .$$

То се даље може трансформисати у

$$\frac{|\varepsilon_1^3 - 1| \cdot |\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1 - 1| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1)| \cdot |\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1 - 1| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|} = \frac{|\varepsilon_1 - 1| \cdot |\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1| \cdot |\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1 - 1| \cdot |\varepsilon_1^7 - 1|}$$

$$= \frac{|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1| \cdot |\varepsilon_1^4 + 1|}{|\varepsilon_1^7 - 1|} . \tag{23}$$

Како је $A_0A_7 = A_0A_8$, следи $|\varepsilon_7 - \varepsilon_0| = |\varepsilon_8 - \varepsilon_0|$, тј. $|\varepsilon_1^7 - 1| = |\varepsilon_1^8 - 1|$. Сада (23) прелази у

$$\frac{|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1|\cdot|\varepsilon_1^4+1|}{|\varepsilon_1^7-1|} = \frac{|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1|\cdot|\varepsilon_1^4+1|}{|\varepsilon_1^8-1|} = \frac{|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1|\cdot|\varepsilon_1^4+1|}{|(\varepsilon_1^4-1)(\varepsilon_1^4+1)|} = \frac{|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1|\cdot|\varepsilon_1^4+1|}{|\varepsilon_1^4-1|\cdot|\varepsilon_1^4+1|}$$

$$= \frac{|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1|}{|\varepsilon_1^2-1|\cdot|\varepsilon_1^2+1|}.$$

Из свега тога следи

$$\frac{1}{A_0A_1} - \frac{1}{A_0A_7} = \frac{1}{A_3A_4} - \frac{1}{A_0A_7} = \frac{|\varepsilon_1^2+\varepsilon_1+1|}{|\varepsilon_1^2-1|\cdot|\varepsilon_1^2+1|}. \qquad (24)$$

Упоређујући (21) и (24), добијамо да је $\frac{1}{A_0A_1} - \frac{1}{A_0A_7} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4}$, односно $\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_7}$, што је и требало да се докаже.

□

Напомена. Теорема се може се доказати и на шести начин, применом Питагорине теореме. То остављамо читаоцима за вежбу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Ilišević, Primjena kompleksnih brojeva u geometriji mnogokuta, Bilten seminara za nastavnike – mentore, Hrvatsko matematičko društvo, br. 14 (2005), 38 – 43.

[2] D. Milošević, Diagonaler i den regulaere 14 - kant, Matematik Magasinet (Danska), 66 (2012), 2285 – 2286.

[3] М. Првановић, *Основи геометрије*, Грађевинска књига, Београд, 1987.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2017/18 година