XXXIX олимпијада

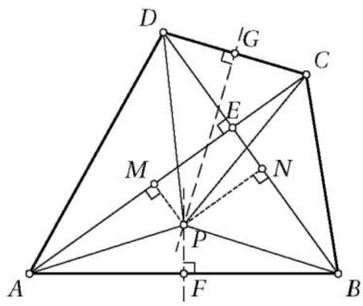
1. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се нормални, а спротивните страни AB и CD не се паралелни. Пресечната точка P на симетралите на станите AB и CD лежи во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека околу четириаголникот може да се опише кружница ако и само ако триаголниците ABP и CDP имаат еднакви плоштини.

Решение. *Прв начин*. Нека E е пресечната точка на AC и BD. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека точката P лежи во триаголникот ABE. Со M и N ги означуваме подножјата на нормалите спуштени од P кон AC и BD, соодветно. Ќе претпоставиме дека M припаѓа на отсечката AE, а N припаѓа на отсечката BE. Останатите случаи слично се разгледуваат. Тогаш

$$\begin{aligned}2S_{ABP} &= 2S_{ABE} - 2S_{PAE} - 2S_{PBE}\\ &= (\overline{AM}+\overline{PN})(\overline{BN}+\overline{PM}) - (\overline{AM}+\overline{PN})\overline{PM} - (\overline{BN}+\overline{PM})\overline{PN}\\ &= \overline{AM}\cdot\overline{BN} - \overline{PN}\cdot\overline{PM}\,.\end{aligned}$$

Аналогно $2S_{CDP} = \overline{CM}\cdot\overline{DN} - \overline{PM}\cdot\overline{PN}$, па затоа

$$2(S_{ABP} - S_{CDP}) = \overline{AM}\cdot\overline{BN} - \overline{CM}\cdot\overline{DM} \qquad (1)$$



Нека $\overline{PA} = \overline{PB}$ и $\overline{PC} = \overline{PD}$. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник, тогаш P е центар на опишаната кружница и $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BN} = \overline{DN}$. Сега, од (1) заклучуваме дека $S_{ABP} = S_{CDP}$. Обратно, нека $S_{ABP} = S_{CDP}$ и без ограничување на општоста да земеме дека $\overline{PA} = \overline{PB} > \overline{PC} = \overline{PD}$. Тогаш $\overline{AM} > \overline{CM}$, $\overline{BN} > \overline{DN}$, па затоа важи

$$\overline{AM}\cdot\overline{BN} > \overline{CM}\cdot\overline{DN}\text{, т.е. } S_{ABP} > S_{CDP}$$

што противречи на равенството (1).

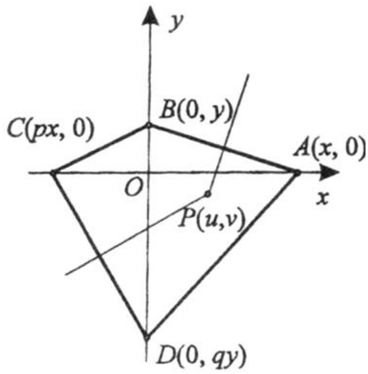
Втор начин. Средините на страните AB и CD да ги означиме со F и G, соодветно. Да претпоставиме дека P е на иста страна на правата AC на која е B. Бидејќи $PF \perp AB, PG \perp CD, \measuredangle FEB = \measuredangle ABE$ и $\measuredangle GEC = \measuredangle DCE$, лесно се покажува дека $\measuredangle FPG = \measuredangle FEG = 90^\circ + \measuredangle ABE + \measuredangle DCE$.

Понатаму, имаме $S_{ABP} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{FP}}{2} = \overline{FE}\cdot\overline{FP}$ и слично $S_{CDP} = \overline{GE}\cdot\overline{GP}$, па условот $S_{ABP} = S_{CDP}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{FE}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{GP}}{\overline{FP}}$, што важи ако и само ако $\triangle EFG \sim \triangle PGF$, т.е. ако и само ако $EFPG$ е паралелограм. Последното се сведува на $\measuredangle EFP = \measuredangle EGP$, т.е.

$$2\measuredangle ABE = 2\measuredangle DCE\,,$$

што е услов четириаголникот $ABCD$ да е тетивен.

Трет начин. Дијагоналите AC и BD се заемно нормални, па затоа можеме да земеме правоаголен Декартов координатен систем таков што A и C припаѓаат на $x-$оската и B и D припаѓаат на $y-$оската (цртеж десно). Тогаш темињата на четириаголникот се зададени со $A(x,0)$, $B(0,y), C(px,0)$ и $D(0,qy)$, каде $x>0$, $y>0$, $p<0, q<0$ и $p\neq q$ (страните AB и CD не се паралелни).



Разгледувајќи го степенот на точката O во однос на кружница добиваме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$, т.е.

$$px^2-qy^2=0\,. \qquad (1)$$

Нека координатите на точката P се (u,v). Од условот $\overline{PA}=\overline{PB}$ следува равенството $(u-x)^2+v^2=u^2+(v-y)^2$, т.е.

$$2ux-2vy=x^2-y^2\,. \qquad (2)$$

Аналогно од условот $\overline{PC}=\overline{PD}$ добиваме

$$2upx-2vqy=p^2x^2-q^2y^2\,. \qquad (3)$$

Од системот линеарни арвенки (2) и (3) ги определуваме координатите на точката P и добиваме

$$u=\frac{p^2x^2-q^2y^2-q(x^2-y^2)}{2x(p-q)},\;\; v=\frac{p^2x^2-q^2y^2-p(x^2-y^2)}{2y(p-q)}\,. \qquad (4)$$

За плоштините на триаголниците PAB и PCD добиваме

$$S_{ABP}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x-u & -v \\ -u & y-v \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(xy-xv-yu)\,, \qquad (5)$$

$$S_{CDP}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} px-u & -v \\ -x & qy-v \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(pqxy-pxv-qyu)\,. \qquad (6)$$

При пресметувањето на плоштините на триаголниците PAB и PCD водено е сметка тие да имаат ист знак. Еднаквоста на плоштините на овие триаголници е еквивалентна со равенството

$$pq-1=\frac{v}{y}(p-1)+\frac{u}{x}(q-1)\,. \qquad (7)$$

Од овде, по замената на изразите за u и v од (4) и по средувањето на добиената релација се добива

$$(px^2-qy^2)[(p-1)^2x^2+(q-1)^2y^2]=0\,. \qquad (8)$$

Изразот во средните загради на (8) е позитивен, па затоа триаголниците PAB и PCD имаат еднакви плоштини ако и само ако важи условот (1), т.е. ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

2. На еден натпревар учествувале a натпреварувачи, кои биле оценувани од b судии, каде $b \geq 3$ е непарен број. Секој судија го оценува секој натпреварувач со „положил“ или „не положил“. Нека k е број, таков што оценките на било кои двајца судии се совпаѓаат кај најмалку k натпреварувачи. Докажи дека $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Решение. За секој $i \in \{1, 2, \ldots, a\}$ нека i - тиот натпреварувач добил x_i оценки „положил“ и y_i оценки „не положил“. Тогаш $x_i + y_i = b$ и бројот на парови од судии кои го оцениле исто овој натпреварувач е

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \geq \frac{1}{4}((b-1)^2 - 1)$$

Бидејќи b е непарен број, следува дека

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \geq \frac{1}{4}(b-1)^2 .$$

Според тоа, ако ги собереме горните неравенства за $i = 1, 2, \ldots, a$ добиваме дека бројот на поклопувањата на паровите судии кај a натпреварувачи е еднаков на

$$\sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4} .$$

Бидејќи секој од $\binom{b}{2}$ паровите судии се сложуваат кај најмногу k натпреварувачи, вкупниот број на поклопување не е поголем од $k\binom{b}{2}$. Конечно, го добиваме неравенството

$$k\binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4} ,$$

кое е еквивалентно со неравенството кое што требаше да се докаже.

3. За секој позитивен цел број n со $d(n)$ ќе го означиме бројот на позитивните цели делители на n (вклучувајќи ги 1 и n). Определи ги сите позитивни цели броеви k за кои постои позитивен цел број n, така што $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$.

Решение. Нека $n > 1$ и $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ е каноничното разложување на n на прости множители, $a_i = k_i + 1$, за $1 \leq i \leq r$. Тогаш

$$d(n) = a_1 a_2 \ldots a_r \quad \text{и} \quad d(n^2) = (2a_1 - 1)(2a_2 - 1)\ldots(2a_r - 1) .$$

Задачата се сведува на определување на сите природни броеви k кои може да се претставаат во облик

$$m=\frac{(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_r-1)}{a_1a_2...a_r},\ \text{каде}\ k_i\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ \text{за}\ i=1,2,...,r\ . \qquad (1)$$

Јасно, m мора да биде непарен број, бидејќи $d(n^2)$ е непарен број. Со индукција ќе покажеме дека секој непарен број $m\in\mathbb{N}$ може да се претстави во обликот (1).

Базата на индукцијата $k=1$ е тривијална. Нека претпоставиме дека тврдењето важи непарниот број m. Тогаш точноста на тврдењето за непарниот број $k=2m-1$, следува од индуктивната претпоставка и претставувањето $k=\frac{2m-1}{m}m$. Ако непарниот број е од видот $k=4m-1$, каде m е непарен број тогаш тој може да се запише во видот $k=\frac{12m-3}{6m-1}\cdot\frac{6m-1}{3m}\cdot m$, па затоа точноста на тврдењето за броевите од овој вид следува од индуктивната претпоставка и даденото претставување. Ќе продолжиме со оваа идеја. Нека $n=2^t m-1$, каде m е непарен. Означуваме $u=(2^t-1)m$ и добиваме

$$k=\frac{2^t u-2^t+1}{2^{t-1}u-2^{t-1}+1}\cdot...\cdot\frac{4u-3}{2u-1}\cdot\frac{2u-1}{u}\cdot m\ .$$

Со ова индукцијата е завршена.

4. Определи ги сите парови (a,b) од цели броеви такви што ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b.

Решение. Нека ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b. Тогаш, бројот

$$b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7)=b^2-7a$$

е делив со ab^2+b+7. Бидејќи $a\geq 1$, следува дека $ab^2+b+7>b^2-7a$, односно ако $b^2-7a\geq 0$, заклучуваме дека $b^2-7a=0$. Значи $b=7a$, $a=7c^2$ и лесно се проверува дека парот $(7c^2,7c)$ (c е цел број) ги задоволува условите од задачата. Да претпоставиме дека $b^2-7a<0$. Тогаш целиот број $7a-b^2$ е помал од $7a$ и е делив со ab^2+b+7. Следува $b=1$ или $b=2$ бидејќи во спротивно $ab^2+b+7>9a$. Лесно се проверува дека случајот $b=2$ не е можен, а за $b=1$ добиваме две решенија $(11,1)$ и $(49,1)$.

5. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC која ги допира страните BC, CA и AB во точките K, L и M, соодветно. Правата која што минува низ B и е паралелна со MK ги сече правите LM и LK во точките R и S. Докажи дека $\measuredangle RIS$ е остар.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи

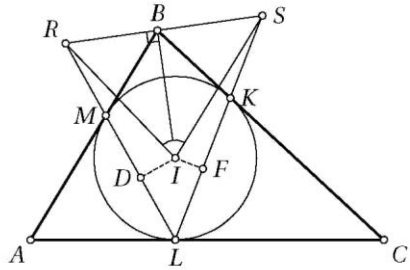
$$\measuredangle RMB=90^\circ-\tfrac{\alpha}{2},\ \ \measuredangle RBM=\measuredangle BMK=90^\circ-\tfrac{\beta}{2},\ \ \measuredangle MRB=90^\circ-\tfrac{\gamma}{2},$$

$$\measuredangle SKB = 90^\circ - \tfrac{\gamma}{2},\ \measuredangle SBK = \measuredangle MKB = 90^\circ - \tfrac{\beta}{2},\ \measuredangle KSB = 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2},$$

следува дека триаголниците RMB и KBS се слични. Оттука добиваме

$$\overline{RB}\cdot\overline{BS} = \overline{BK}^2,$$

затоа што $\overline{BK} = \overline{BM}$. Бидејќи $BI \perp MK$ (BI е симетрала на $\measuredangle MBK$ во рамнокракиот триаголник MKB) следува



$$\overline{RI}^2 + \overline{SI}^2 - \overline{RS}^2 = \overline{RB}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{BI}^2 - (\overline{RB} + \overline{BS})^2$$
$$= 2(\overline{BI}^2 - \overline{RB}\cdot\overline{BS})$$
$$= 2(\overline{BI}^2 - \overline{BK}^2) = 2\overline{IK}^2 > 0.$$

Оттука следува дека $\measuredangle RIS$ е остар.

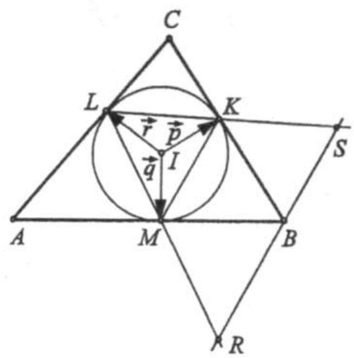
Втор начин. Нека D и F се средините на отсечките LM и LK, соодветно. Од тетивните четириаголници $RBID$ и $SBIF$ следува

$$\measuredangle RIS = \measuredangle RLS + \measuredangle IRL + \measuredangle ISL = 90^\circ - \tfrac{\beta}{2} + \measuredangle IBD + \measuredangle IBF = 90^\circ - \tfrac{\beta}{2} + \measuredangle DBF.$$

Бидејќи BD и BF се тежишни линии во триаголниците BLM и BLK такви што $\overline{BL} > \overline{BM}$ и $\overline{BL} > \overline{BK}$, добиваме $\measuredangle LBD < \tfrac{1}{2}\measuredangle LBM$ и $\measuredangle LBF < \tfrac{1}{2}\measuredangle LBK$.

Ако ги собереме овие неравенства добиваме $\measuredangle DBF < \frac{\beta}{2}$ и оттука $\measuredangle RIS < 90^\circ$.

Трет начин. Без ограничувањe на општоста можеме да претпоставиме дека вписаната кружница има радиус еднаков на 1 (цртеж десно). Ена единичните вектори со кои се поврзани точките K, L, M со центарот на кружницата се $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, соодветно. За да докажеме дека $\measuredangle RIS$ е остар доволно е да докажеме дека скаларниот производ на векторите $\overrightarrow{IR}$ и $\overrightarrow{IS}$ е позитивен.



За векторот $\overrightarrow{IB}$ важи $(\overrightarrow{IB} - \vec{p})\vec{p} = 0$ и $(\overrightarrow{IB} - \vec{q})\vec{q} = 0$, т.е.

$$\overrightarrow{IB}\cdot\vec{p} = 1 \text{ и } \overrightarrow{IB}\cdot\vec{q} = 1. \qquad (1)$$

Според условот на задачата векторот $\vec{q} - \vec{p}$ е ортогонален на векторот $\overrightarrow{IB}$, а векторите $\vec{r} - \vec{p}$ и $\overrightarrow{LS}$ се колинеарни. Оттула следува дека постојат скалари λ и μ за кои важи:

$$\overrightarrow{IS}=\overrightarrow{IB}+\lambda(\vec{q}-\vec{p}), \qquad \overrightarrow{IS}=\vec{r}+\mu(\vec{r}-\vec{p}) \tag{2}$$

односно

$$\overrightarrow{IB}+\lambda(\vec{q}-\vec{p})=\vec{r}+\mu(\vec{r}-\vec{p}). \tag{3}$$

Ако (3) го помножиме со $\vec{p}$ и $\vec{q}$, и ги искориостиме равенствата (1) ги добиваме равенствата

$$1+\lambda(\vec{q}\cdot\vec{p}-1)=\vec{r}\cdot\vec{p}+\mu(\vec{r}\cdot\vec{p}-1), \tag{4}$$

$$1+\lambda(1-\vec{p}\cdot\vec{q})=\vec{r}\cdot\vec{q}+\mu(\vec{r}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{q}). \tag{5}$$

Ако ги собереме (3) и (4) за коефициентот μ добиваме

$$\mu=\frac{2+\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}{\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1}. \tag{6}$$

Притоа да забележиме дека именителот во изразот на десната страна на (6) е различен од нула. Навистина, во спротивно од $\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1=0$ ќе следува $(\vec{r}-\vec{p})(\vec{r}-\vec{q})=0$. Последното значи дека векторите $\overrightarrow{LK}$ и $\overrightarrow{LM}$ се ортогонални и дека точките M,I,K лежат на дијаметар на впишаната кружница. Од $\vec{p}\perp\overrightarrow{BC}$ и $\vec{q}\perp\overrightarrow{AB}$ следува дека AB и BC се паралелни, а тогаш триаголникот ABC не постои.

Од (6) заменуваме во (2) и добиваме

$$\overrightarrow{IS}=\frac{\vec{p}(\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-2)+\vec{r}(1-\vec{p}\cdot\vec{q})}{\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1}. \tag{7}$$

Аналогно се добива

$$\overrightarrow{IR}=\frac{\vec{q}(\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-2)+\vec{r}(1-\vec{p}\cdot\vec{q})}{\vec{r}\cdot(\vec{p}+\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}-1}. \tag{8}$$

Лесно се пресметува дека скаларниот производ $\overrightarrow{IS}\cdot\overrightarrow{IR}$ е позитивен, што значи дека $\measuredangle RIS$ е остар.

6. Ги разгледуваме сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ каде што

$$f(n^2 f(m))=m(f(n))^2$$

за произволни $m,n\in\mathbb{N}$. Определи ја најмалата можна вредност на $f(1998)$.

Решение. Прво ќе ги определиме функциите кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $f(1)=a$. За $n=m=1$ добиваме $f(f(m))=a^2m$ и $f(an^2)=(f(n))^2$. Тогаш

$$\begin{aligned}(f(m))^2(f(n))^2 &= (f(m))^2 f(an^2)=f(m^2 f(f(an^2)))\\ &= f(m^2a^3n^2)=(f(amn))^2,\end{aligned}$$

т.е.

$$f(amn) = f(m)f(n) .$$

За $n=1$ имаме $f(am) = af(m)$, па значи

$$af(mn) = f(m)f(n) \tag{1}$$

Ќе докажеме дека a е делител на $f(n)$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Нека p е произволен прост број и α и β се степеновите показатели на p во каноничното разложување на a и $f(n)$. Од (1), со индукција, следува дека

$$(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k)$$

за секој природен број k. Тогаш $k\beta \geq (k-1)\alpha$, што е можно само ако $\beta \geq \alpha$. Оттука следува дека a е делител на $f(n)$.

Ставаме $g(n) = \frac{f(n)}{a}$. Од докажаното, следува дека $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Понатаму, лесно се покажува дека

$$g(mn) = g(m)g(n) \tag{2}$$

$$g(g(m)) = m \tag{3}$$

Обратно, ако $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функција која ги задоволува равенствата (2) и (3), тогаш за секој $\alpha \in \mathbb{N}$ функцијата $f(n) = \alpha\, g(n)$ ги задоволува условите од задачата.

Сега ќе го најдеме општиот облик на функциите $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат равенствата (2) и (3). За $n = m = 1$ од (2) следува

$$g(1) = 1 \tag{4}$$

Со P ќе го означиме множеството од прости броеви. Ќе докажеме дека $g(p) \in P$ за секој $p \in P$. Навистина, ако $g(p) = uv$, од (3) и (2) следува дека

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v) .$$

Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $g(u) = 1$, па оттука добиваме

$$u = g(g(u)) = g(1) = 1,$$

односно $g(p) \in P$. Ако $n \geq 2$ е произволен природен број и $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е неговото канонично разложување на прости множители, од (2) добиваме:

$$g(n) = (g(p_1))^{\alpha_1} \dots (g(p_k))^{\alpha_k} \tag{5}$$

Од докажаното, следува дека, ако $g: P \to P$ е произволна функција таква што $g(g(p)) = p$, за секој $p \in P$, тогаш со помош на равенствата (4) и (5) g може еднозначно да се продолжи на множеството на природните броеви. Директно се проверува дека така добиената функција $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ги задоволува равенствата (2) и (3).

Сега ќе покажеме дека најмалата можна вредност на $f(1998)$ е 120. Бидејќи

$$f(1998) = f(2\cdot 3^3 \cdot 37) = f(1)g(2)(g(3))^3 g(37) \geq 1\cdot 3\cdot 2^3 \cdot 5 = 120,$$

останува да конструираме функција f која ги задоволува условите од задачата и за која важи $f(1998) = 120$. Ставаме

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(37) = 5 \text{ и } f(p) = p$$

за сите останати прости броеви p. Јасно е дека $f(f(p)) = p$ за секој $p \in P$. На овој начин е дефинирана функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ која ги задоволува условите од задачата и $f(1998) = 120$.