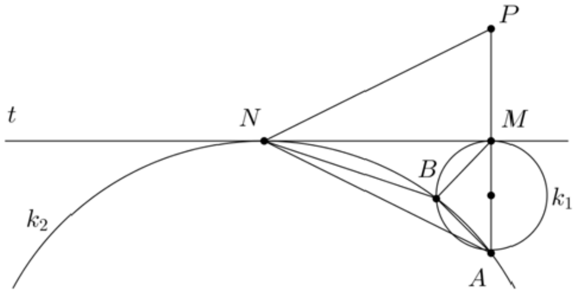
# ЈБМО 2012

1. Нека $a,b$ и $c$ се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right) \qquad (1)$$
Кога важи знак за равенство?
**Решение.** Во неравенството (1) за $1-a,1-b,1-c$ заменуваме $b+c$, $c+a$, $a+b$ и го добиваме еквивалентното неравенство
$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right),$$
кое е еквивалентно со неравенството
$$\left(\frac{a+c}{b}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}}+2\right)+\left(\frac{b+c}{a}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}}+2\right)+\left(\frac{a+b}{c}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{c}}+2\right)\geq 0,$$
т.е. со неравенството
$$\left(\sqrt{\frac{c+a}{b}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-\sqrt{2}\right)^2\geq 0,$$
кое е точно.
Јасно, знак за равенство важи ако и само ако
$$\frac{c+a}{b}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+b}{c}=2,$$
и ако го искористиме условот $a+b+c=1$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2. Нека кружниците $k_1$ и $k_2$ се сечат во две различни точки $A$ и $B$ и нека $t$ е заедничка тангента на $k_1$ и $k_2$, која $k_1$ и $k_2$ ги допира во точките $M$ и $N$, соодветно. Ако $t\perp AM$ и $\overline{MN}=2\overline{AM}$, најди го $\measuredangle NMB$.
**Решение.** *Прв начин.* Нека точката $P$ е симетрична на точката $A$ во однос на $M$. Тогаш $\overline{AM}=\overline{MP}$ и $t\perp AP$. Затоа $\triangle APN$ е рамнокрак и $AP$ е негова основа. Според тоа, $\measuredangle NAP=\measuredangle NPA$. Понатаму,
$$\measuredangle BAP=\measuredangle BAM=\measuredangle BMN \text{ и } \measuredangle BAN=\measuredangle BNM.$$
Од досега изнесеното следува
$$180^\circ-\measuredangle NBM=\measuredangle BNM+\measuredangle BMN=\measuredangle BAN+\measuredangle BAP=\measuredangle NAP=\measuredangle NPA,$$
што значи дека четириаголникот $MBNP$ е тетивен (точките $B$ и $P$ лежат на различни страни од $MN$). Затоа $\measuredangle APB=\measuredangle MPB=\measuredangle MNB$ и триаголниците $APB$ и $MNB$ се складни ($\overline{MN}=2\overline{AM}=\overline{AM}+\overline{MP}=\overline{AP}$). Според тоа, $\overline{AB}=\overline{MB}$, т.е. триаголникот $AMB$ е рамнокрак. Но, $t$ е

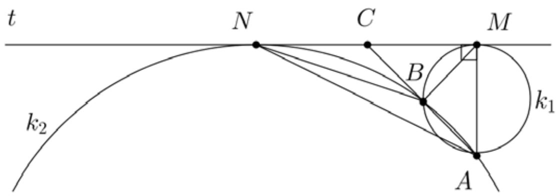
тангента на $k_1$, па затоа е нормална на $AM$, што значи дека центарот на $k_1$ лежи на $AM$, т.е. триаголникот $AMB$ е правоаголен. Според тоа, $\measuredangle AMB = 45^\circ$, од што следува дека

$$\measuredangle NMB = 90^\circ - \measuredangle AMB = 45^\circ.$$




*Втор начин.* Нека $C$ е пресекот на правите $MN$ и $AB$ (види цртеж). Тогаш $\overline{CN}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$ и $\overline{CM}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$, па затоа $\overline{CN} = \overline{CM}$. Но, $\overline{MN} = 2\overline{AM}$, па затоа $\overline{CN} = \overline{CM} = \overline{AM}$, што значи дека триаголникот $ACM$ е рамнокрак. Затоа

$$\measuredangle NMB = \measuredangle CMB = \measuredangle BCM = 45^0.$$




3. На табла се заковани $n$ шајки и секои две се поврзани со конец. Секој конец е обоен со една од $n$ дадени различни бои. За секои три различни бои, постојат три шајки поврзани меѓу себе со конци во овие три различни бои. Може ли $n$ да биде

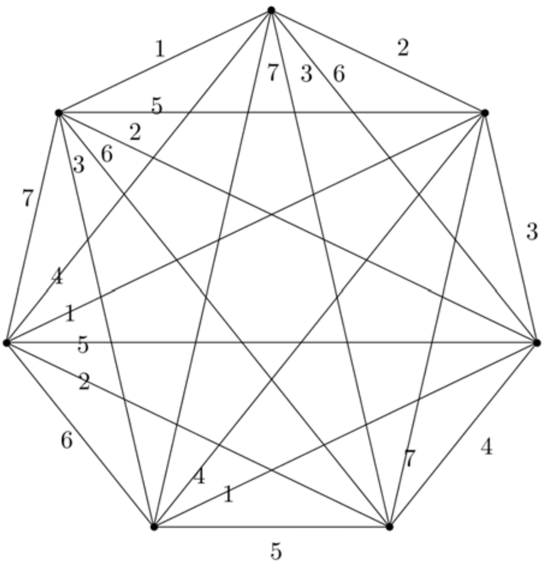
   а) 6? б) 7?

   **Решение.** а) Одговорот е не.

   Да претпоставиме дека тоа е можно. Да земеме една боја, да речеме плава. Секој плав конец е страна на 4 триаголници кои може да сеѕ формираат од 6 точки (шајки). Бидејќи постојат $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ парови на бои, во кои немаме плава, и за секој пар на бои заедно со плавата боја постои триаголник со конци во овие бои, заклучуваме дека постојат најмалку три плави конци (во спротивно бројот на триаголници со плави конци како една страна ќе биде најмалку $2 \cdot 4 = 8$, што е противречност). Истото е точно за секоја друга боја, па сите заедно имаат $6 \cdot 3 = 18$ конци, но ние имаме само $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ конци.

б) Одговорот е да.

Да ги распоредиме шајките така да секоја од нив е теме на правилен седумаголник и да ја обоиме секоја негова страна со различна боја. Сега да ја обоиме секоја секоја дијагонала на овој седумаголник со боја која е иста со неговата страна која е паралелна на дијагоналата. Може директно да се провери дека тројка од бои се појавува кај секој триаголник (заради симетријата, доволно е да се провери само тројката која ја содржи првата боја).




*Забелешка.* Аргументот во а) може да се примени на секој парен број $n$. Аргументот во б) може да се примени за секој непарен број $n = 2k+1$ како што следи: прво означи ги шајките со $0,1,2,...,2k$ и исто така означи ги боите со $0,1,2,...,2k$. Потоа поврзи ја шајката $x$ со шајката $y$ со конец со боја $x + y \pmod{n}$. За секоја тројка бои $(p,q,r)$ постојат темиња $x, y, z$ кои се поврзани со овие три бои. Навистина, ние мораме да го решиме $(\bmod n)$ системот

$$x + y \equiv p, x + z \equiv q, y + z \equiv r \qquad (*)$$

Ако ги собереме сите три ќе добиеме $2(x + y + z) \equiv p + q + r$ и доколку ги помножиме со $k+1$ ќе добиеме

$$x + y + z \equiv (k+1)(p + q + r).$$

Сега можеме да ги најдеме $x, y, z$ од (*).

4. Определи ги сите природни броеви $x, y, z$ и $t$ такви што

$$2^x 3^y + 5^z = 7^t . \qquad (1)$$

**Решение**. Од дадената равенка разгледувајќи по модул 3 добиваме $5^z \equiv 1 \pmod 3$, што значи дека $z = 2c, c \in \mathbb{N}$. Понатаму, јасно е дека $t \geq 2$. Ако $t = 2d+1,\ d \in \mathbb{N}$, тогаш равенката (1) го добива обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d .$$

Ако $x \geq 2$, тогаш разгледувајќи по модул 4 добиваме $1 \equiv 3 \pmod 4$, што е противречност. Ако $x = 1$, добиваме

$$2 \cdot 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$$

и разгледувајќи по модул 24 добиваме

$$2 \cdot 3^y + 1 \equiv 7 \pmod{24},$$

од што следува дека $24 \mid 6(3^{y-1} - 1)$, т.е. $4 \mid (3^{y-1} - 1)$, што значи дека $y - 1$ е парен број. Тогаш $y = 2b+1, b \in \mathbb{N}$ и добиваме дека

$$6 \cdot 9^b + 25^c = 7 \cdot 49^d .$$

Ако во последното равенство разгледуваме по модул 5 добиваме $(-1)^b \equiv 2(-1)^d \pmod 5$, што не е можно за кои било $b, d \in \mathbf{N}$. Од досега изнесеното следува дека $t$ е парен број, т.е. $t = 2d, d \in \mathbb{N}$.

Според тоа, равенката (1) можеме да ја запишеме во обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 49^d ,$$

односно

$$(7^d - 5^c)(7^d + 5^c) = 2^x 3^y .$$

Но, $(7^d - 5^c, 7^d + 5^c) = 2$ и $7^d + 5^c > 2$ можни се следниве три случаи:

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2^{x-1} \\ 7^d + 5^c = 2 \cdot 3^y \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \cdot 3^y \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} 3^y \end{cases} \qquad (4)$$

Од системот (2) добиваме $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ и ако разгледаме по модул 3, добиваме $2^{x-2} \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, од што следува дека $x-2$ е парен број, т.е. $x = 2a+2$, $a \in \mathbb{N}_0$, каде $a > 0$, бидејќи за $a = 0$ од претходната равенка следува $7^d = 1+3^y$, што не е можно (непарен број еднаков на парен број). Според тоа, $7^d - 5^c = 2\cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 4 добиваме $7^d \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, па затоа $d = 2e, e \in \mathbb{N}$. Тоа значи дека

$$49^e - 5^c = 2\cdot 4^a,$$

па ако разгледаме по модул 8 добиваме $5^c \equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, од што следува дека $c = 2f,\ f \in \mathbb{N}$. Според тоа, $49^e - 25^f = 2\cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 3 добиваме $0 \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, што е противречност. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Да го разгледаме системот (3). Од $2^{x-1} = 7^d + 5^c \geq 12$ следува $x \geq 5$. Тогаш

$$7^d + 5^c \equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ \text{т.е.}\ 3^d + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

па затоа $d$ е непарен број. Но, $7^d = 5^c + 2\cdot 3^y \geq 11$, па затоа $d \geq 2$ и затоа $d = 2e+1,\ e \in \mathbb{N}$. Како и во претходниот случај од $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ разгледувајќи по модул е добиваме $x = 2a+2$ и како $x \geq 5$ добиваме $a \geq 2$. Според тоа, $7^d = 4^a + 3^y$, т.е. $7\cdot 49^e = 4^a + 3^y$ и ако разгледаме по модул 8 добиваме $7 \equiv 3^y\ (\mathrm{mod}\,8)$, бидејќи $3^y$ е конгруенстен со 1 по модул 8 ако $y$ е парен, односно со 3 ако $y$ е непарен. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Од системот (4) следува $7^d = 5^c + 2$, што значи дека цифрата на единиците на бројот $7^d$, што е можно само ако $d = 4k+1, k \in \mathbb{N}$. Ако $c \geq 2$, тогаш разгледувајќи го $7^{4k+1} = 5^c + 2$ по модул 25 добиваме $7 \equiv 2$ $(\mathrm{mod}\,25)$, што не е можно. За $c = 1$ добиваме $d = 1$ и решение на задачата е $x = 3, y = 1, z = t = 2$.