Мирко Петрушевски
Скопје

АБЕЛОВАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА НИЗ ПРИМЕРИ

Абел е првиот кој започнал да ја користи дискретната варијанта на формулата за парцијална интеграција

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k),$$

каде $a_k, b_k, k = \overline{1,n}$ се дадени броеви, а $A_k \overset{def}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Позната е како Абелова трансформација (или уште и Абелова формула за сумирање) и претставува еден од најважните основни методи на класичната анализа. За докажување на формулата доволно е да се искористи записот $a_k = A_k - A_{k-1}, k = \overline{1,n}, A_0 \overset{def}{=} 0$. Неколку примери ќе ја илустрираат оваа трансформација. Корисна е при докажување на неравенства во кои низата $(b_k)_{k=1}^{n}$ е монотона.

<u>**Пример**</u> **1.** (неравенство на Абел). При

$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0, \; M = \max_{1\le k\le n} A_k, \; m = \min_{1\le k\le n} A_k$$

важат неравенствата

$$mb_1 \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le Mb_1$$

<u>**Доказ.**</u> Трансформацијата во облик

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

овозможува да се искористи дека $b_n \ge 0$ и $b_k - b_{k+1} \ge 0$. Неравенствата

$$mb_n \le A_n b_n \le Mb_n, \text{ и}$$
$$m(b_k - b_{k+1}) \le A_k (b_k - b_{k+1}) \le M(b_k - b_{k+1})$$

просумирани за $k = \overline{1, n-1}$ е бараното.

<u>**Пример**</u> **2.** За

$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0 \text{ и } A_k \ge 0, \; k = \overline{1,n},$$

важи $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ge 0$.

<u>Доказ</u>. Директна последица од претходниот пример бидејќи $m \ge 0$.

<u>Пример</u> 3. (IMO’78) Нека $\phi : \mathrm{k} \to \mathrm{k}$ е инјективна трансформација на множеството природни броеви. Тогаш за секој $n \in \mathrm{k}$ важи неравенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\phi(k)}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

<u>Доказ.</u> Еквивалентно неравенство е

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{\phi(k)}{k} - 1\right) \ge 0 \ . \qquad (*)$$

При $c_k \overset{def}{=} \frac{\phi(k)}{k}$, инјективноста на ϕ и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина дава

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k \ge k\sqrt[k]{c_1 c_2 \cdots c_k} \ge k \ ,$$

па така од претходниот пример за $a_k \overset{def}{=} c_k - 1$ и $b_k \overset{def}{=} \frac{1}{k}$ се добива (*).

<u>Пример</u> 4. Ако за

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0, \qquad b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$$

важи

$$A_1 \ge B_1, A_2 \ge B_2, \ldots, A_n \ge B_n \ ,$$

каде $B_k \overset{def}{=} b_1 + b_2 + \cdots + b_k$. Тогаш, за секој природен број p е исполнето

$$a_1^p + \cdots + a_n^p \ge b_1^p + \cdots + b_n^p \ .$$

<u>Доказ.</u> Еквивалентно неравенство е

$$(a_1^p - b_1^p) + \cdots + (a_n^p - b_n^p) \ge 0 \ .$$

Нека

$$c_k \overset{def}{=} a_k - b_k \quad \text{и} \quad d_k = a_k^{p-1} + a_k^{p-2} b_k + \cdots + a_k b_k^{p-1} + b_k^{p-1}$$

Тогаш, $a_k^p - b_k^p = c_k d_k$ и исполнето е

$$C_k \ge 0 \ \text{ и } \ d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_n \ge 0 \, .$$

<u>Пример</u> 5. За $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ и $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n > 0$ нека е исполнето

$$a_1 a_2 \ldots a_k \ge b_1 b_2 \ldots b_k \ \text{ за секој } \ k = \overline{1, n} \, .$$

Тогаш важи $A_n \ge B_n$.

<u>Доказ.</u> Имаме

$$A_n - B_n = (\frac{a_1}{b_1} - 1)b_1 + \cdots + (\frac{a_n}{b_n} - 1)b_n$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина се добива

$$\frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_k}{b_k} \geq k\sqrt[k]{\frac{a_1}{b_1} \cdots \frac{a_n}{b_n}} \geq k\ ,$$

па така

$$(\frac{a_1}{b_1} - 1) + \cdots (\frac{a_k}{b_k} - 1) \geq 0\ .$$

Од пример 2 се добива потребното неравенство.

<u>Пример</u> 6. За $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$ важи $A_k \geq B_k$ за секој $k = \overline{1, n}$ и уште $a_1 b_1 \leq a_2 b_2 \leq \cdots \leq a_n b_n$. Тогаш важи и

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}\ .$$

<u>Доказ.</u> Имаме

$$\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k}) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \frac{1}{a_k b_k}\ ,$$

па може повторно да се искористи пример 2.

<u>Пример</u> 7. За $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ и $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ нека е исполнето $A_k \geq B_k$ за секој $k = \overline{1, n}$. Тогаш важи

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq b_1^2 + \cdots + b_n^2\ .$$

<u>Доказ.</u> Имаме

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_n b_n \\ &\geq B_1(b_1 - b_2) + B_2(b_2 - b_3) + \cdots + B_n b_n \\ &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \end{aligned}$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц се добива

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \geq (b_1^2 + \cdots + b_n^2)^2$$

<u>Пример</u> 8. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни реални броеви т.ш. за секој природен број n важи $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt{n}$. Тогаш

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})\ .$$

<u>Доказ.</u> За $b_n \overset{def}{=} \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ може да се искористи претходниот пример. Лесно се покажува и дека $b_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

<u>Пример</u> 9. За $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ и $0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ нека е исполнето $A_k \leq B_k$ за секој $k=\overline{1,n}$. Тогаш важи

$$\sqrt{a_1}+\dots+\sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_1}+\dots+\sqrt{b_n} \, .$$

<u>Доказ.</u> При дадените услови, лесно се покажува следното неравенство

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\dots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \leq \sqrt{b_1}+\dots+\sqrt{b_n} \, .$$

Имено, левата страна е еднаква на

$$A_1\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)+A_2\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)+\dots+A_n\frac{1}{\sqrt{b_n}} \leq$$

$$\leq B_1\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)+B_2\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)+\dots+B_n\frac{1}{\sqrt{b_n}}$$

што е еднакво на десната страна. Од неравенството на Коши-Шварц следи

$$(\sqrt{a_1}+\dots+\sqrt{a_n})^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[4]{b_k}\sqrt{\frac{a_k}{\sqrt{b_k}}}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{b_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{b_k}}\right) \leq (\sqrt{b_1}+\dots+\sqrt{b_n})^2$$

<u>Пример</u> 10. За $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ важи $a_1 a_2 \cdots a_k \geq \frac{1}{(2k)!}$, за секој $k=\overline{1,n}$.

Тогаш е исполнето и следново неравенство

$$a_1+\dots+a_n \geq \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n} \, .$$

<u>Доказ</u>. Имаме

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)(\overline{2k-1}\cdot\overline{2k}\cdot a_k)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2\cdot a_1)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2\cdot a_1+3\cdot 4\cdot a_2)+$$

....

$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)(1\cdot 2\cdot a_1+\dots+\overline{2n-1}\cdot\overline{2n}\cdot a_n)$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и условот следува дека

$$1\cdot 2\cdot a_1+\cdots+\sqrt{2k-1}\cdot\sqrt{2k}\cdot a_k\geq k\,,$$

па користејќи дека првиот множител во секој собирок од горното равенство е позитивен, се добива дека важи

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k &\geq \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\ &=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-2\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})\\ &=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

<u>Пример</u> 11. (ВМО’08) Дали постои низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ од позитивни реални броеви т.ш. за секој природен број n исполнето е

$$\text{и}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leq 2008\quad ?$$

<u>Решение.</u> Нека низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ од позитивни реални броеви го задоволува првиот од наведените услови. Користејќи ја Абеловата трансформација, за $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$ се добива

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n-1}A_k(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2})+A_n\frac{1}{n^2}\\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1}k^2(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2})+1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{k+1}+k}{(k+1)^2}+1\leq\\ &\leq 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}+1=2H_n-1\end{aligned}$$

Со

$$H_n\overset{def}{=}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

е означен т.н. n-ти хармониски број. Во облик

$$\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2\geq\frac{(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k)^2}{\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2}\quad ,$$

неравенството на Коши-Шварц, за $x_k = \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ и $y_k = \frac{1}{\sqrt{a_k}}$ кажува дека

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq \frac{(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}} \geq \frac{H_n{}^2}{2H_n - 1} \geq \frac{H_n}{2}.$$

Познато дека $H_n \to \infty$, $n \to \infty$. Со тоа е покажано дека двата услова не може да бидат истовремено исполнети. Таква низа не постои.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија