Девятнадцатый Турнир, 1997-1998

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1997 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается.
Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)
Фольклор

Задача 2.(3)
Докажите, что уравнение $x^2+y^2-z^2=1997$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
Н. Васильев

Задача 3.(4)
В квадрате ABCD точки K и M принадлежат сторонам BC и CD соответственно, причём AM - биссектриса угла KAD.
Докажите, что длина отрезка AK равна сумме длин отрезков DM и BK.
Фольклор

Задача 4.
а)(2) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3*3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б)(4) Та же задача для доски 4*4.
М. Вялый

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 26 октября 1997 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями:
$x_1=19$; $x_2=97$; $x_{n+2}=x_n-(1/x_{n+1})$.
Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этогочлена.
А. Берзиньш

Задача 2.(3)
M - середина основания BC треугольника ABC.
Постройте прямую l, пересекающую треугольник и параллельную его основанию, такую, что её отрезок, заключенный внутри треугольника, виден из точки M под прямым углом.
Фольклор

Задача 3.(5)
Первоначально на каждом поле доски 1*n стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нём шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на стоящий там столбик и объединяется с ним.
Докажите, что за n-1 ход можно собрать все шашки на одной клетке.
А. Шаповалов

Задача 4.(5)
Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности в точке C, а второй - в точке D. Пусть B - ближайшая точка к прямой CD. Прямая CB пересекла вторую окружность второй раз в точке E.
Докажите, что AD - биссектриса угла CAE.
П. Кожевников

Задача 5.(8)
Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу.
Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?
А. Шаповалов

Задача 6.(9)
Каждая сторона правильного треугольника разбита на 10 равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на 100 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.
Какое максимальное число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трёх направлений?
Р. Женодаров

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1997 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(2+3)
а)(2) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3*3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б)(3) Та же задача для доски 4*4.
М. Вялый

Задача 2.(3)
a и b - две данные стороны треугольника.
Как подобрать третью сторону c так, чтобы точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной c делили эту сторону на три равных отрезка? При каких a и b такая сторона c существует? (Рассматривается вневписанная окружность, касающаяся стороны c и продолжений сторон a и b.)
Фольклор

Задача 3.(4)
Докажите, что уравнение
$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=6$
имеет бесконечно много решений в целых числах.
Н. Васильев

Задача 4.(4)
На шахматной доске 5*5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка - единственная.
А. Канель-Белов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 26 октября 1997 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
CM и BN - медианы треугольника ABC, P и Q - точки соответственно на AB и AC такие, что биссектриса угла C треугольника одновременно является биссектрисой угла MCP, а биссектриса угла B - биссектрисой угла NBQ. Оказалось, что AP=AQ. Следует ли из этого, что треугольник ABC равнобедренный?
В. Сендеров

Задача 2.(1+2+4)
Верны ли утверждения:
а)(1) Если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
б)(2) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
в)(4) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию (то есть с помощью поворота и параллельного переноса), то его можно разбить отрезком на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию.
С. Маркелов

Задача 3.(3+3)
Перемножаются все выражения вида
$\pm 1^{1/2} \pm 2^{1/2} \pm \ldots \pm 99^{1/2} \pm 100^{1/2}$
(при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат
а)(3) целое число,
б)(3) квадрат целого числа.
А. Канель-Белов

Задача 4.(4+4)
а)(4) На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного 6-угольника, причём у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой.
Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём каждая - только одним гвоздём?
б)(4) Тот же вопрос про правильные 5-угольники.
А. Канель-Белов

Задача 5.(8)
Дима придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякое зашифрованное слово расшифровывается однозначно. Серёжа убедился (с помощью компьютера), что если зашифровать слово длиной не больше 10000 букв, то результат расшифровывается однозначно.
Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы, под "словом" мы понимаем любую последовательность букв, независимо от того, имеет ли она смысл.)
Д. Пионтковский, С. Шалунов

Задача 6.(7+7)
Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.
а)(7) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трёх направлений, если n=10?
б)(7) Тот же вопрос для n=9.
Р. Женодаров

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1998 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех - Аня, меньше всех - Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока - 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются
Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех - Аня?
А. Шаповалов

Задача 2.(3)
Шахматный король обошёл всю доску 8*8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку.
Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.
В. Произволов

Задача 3.(3)
AB и CD - отрезки, лежащие на двух сторонах угла (O - вершина угла, A лежит между O и B, C - между O и D). Через середины отрезков AD и BC проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках M и N (M, A и B лежат на одной стороне угла; N, C и D - на другой).
Докажите, что OM/ON=AB/CD.
В. Сендеров

Задача 4.(4)
Для каждого трёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трёхзначных чисел, складываем.
Сколько получится? (Пояснение: берётся произведение всех цифр трёхзначного числа, так что если хотя бы одна из цифр - ноль, то и произведение - ноль).
Г. Гальперин

Задача 4 (давалась в г. Кирове Кировской обл. вместо предыдущей задачи 4).
Незнайка решал уравнение, в левой части которого стоял многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, а в правой - 0. Он нашёл корень 1/7. Знайка, заглянув к нему в тетрадь, увидел только первые два слагаемых многочлена: $19x^3+98x^2$ и сразу сказал, что ответ не верен.
Обоснуйте ответ Знайки.
И. С. Рубанов

Задача 5.(5)
Барон Мюнхгаузен утверждает, что смог разрезать некоторый равнобедренный треугольник на три треугольника так, что из любых двух можно сложить равнобедренный треугольник.
Не хвастает ли барон?
А. Шаповалов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1 марта 1998 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Существует ли такой набор из 10 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?
Фольклор

Задача 2.(3)
На стороне AB параллелограмма ABCD (или на её продолжении) взята точка M такая, что $\angle MAD=\angle AMO$, где O - точка пересечения диагоналей параллелограмма.
Докажите, что MD=MC.
М. Смуров

Задача 3.(4)
Шесть игральных костей нанизали на спицу так, что каждая может вращаться независимо от остальных (протыкаем через центры противоположных граней). Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях костей.
Докажите, что можно так повернуть кости, чтобы это число делилось на 7. (На гранях стоят цифры от 1 до 6, сумма цифр на противоположных гранях равна 7.)
Г. Гальперин

Задача 4.(4)
Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Жители деревни стали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли он. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы.
Определите и вы, чему она равна.
Б. Френкин

Задача 5.(7)
Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца).
Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?
И. С. Рубанов

Задача 6.(8)
За круглым столом сидят десять человек, перед каждым - несколько орехов. Всего орехов - сто. По общему сигналу каждый передает часть своих орехов соседу справа: половину - если у него(*у того, **кто** передаёт* - Ред.) было чётное число или один орех плюс половину остатка - если нечётное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности.
Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.
А. Шаповалов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1998 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось составить некоторый прямоугольник из нескольких подобных между собой непрямоугольных треугольников.
Можно ли ему верить? (Среди подобных треугольников могут быть иравные).
А. Федотов

Задача 2.(3)
Для каждого четырёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех четырёхзначных чисел, складываем.
Сколько получится? (Пояснение: берётся произведение всех цифр четырёхзначного числа, так что если хотя бы одна из цифр - ноль, то и произведение - ноль).
Г. Гальперин

Задача 3.(3)
В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8*8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? (Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.)
А. Шаповалов

Задача 4.(4)
Положительные числа A, B, C и D таковы, что система уравнений

$$x^2 + y^2 = A$$
$$|x| + |y| = B$$

имеет m решений, а система уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = C$$
$$|x| + |y| + |z| = D$$

имеет n решений. Известно, что $m > n > 1$.
Найдите m и n.
Г. Гальперин

Задача 5.(5)
В угол вписана окружность, O - её центр. Через точку A, симметричную точке O относительно одной из сторон угла, провели к окружности касательные, точки пересечения которых с дальней от точки A стороной угла - B и C.
Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на биссектрисе данного угла.
И. Шарыгин

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1 марта 1998 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Докажите неравенство:
$a^3/(a^2+ab+b^2) + b^3/(b^2+bc+c^2) + c^3/(c^2+ca+a^2) \geq (a+b+c)/3$.
(a, b, c - положительные числа).
Г. Алиханов

Задача 2.(4)
Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник - квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон).
Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.
Фольклор

Задача 3.(2+3)
а)(2) На доске выписаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность - неотрицательное число. После семи таких операций на доске будет только одно число. Может ли оно равняться 97 ?
б)(3) На доске выписаны числа $1, 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{10}$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность - неотрицательное число. После нескольких таких операций на доске будет только одно число.
Чему оно может быть равно?
А. Шаповалов

Задача 4.(5)
Внутренняя точка M выпуклого четырёхугольника ABCD такова, что треугольники AMB и CMD - равнобедренные (AM=MB, CM=MD) и у каждого угол при вершине M равен 120^o.
Докажите, что найдётся точка N такая, что треугольники BNC и DNA - правильные.
И. Шарыгин

Задача 5.(6)
Назовём лабиринтом шахматную доску 8*8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе - плохим.
Каких лабиринтов больше - хороших или плохих?
А. Шаповалов

Задача 6.(6+6)
а)(6) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные - картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту.
Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
б)(6) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?
Г. Гальперин по мотивам книги М. Гарднера

ЈЕСЕЊЕ КОЛО
Пробна варијанта

8 – 9 РАЗРЕД

1. *По непокретном ескалатору човек силази брже него што се пење. Да ли ће човек брже сићи а затим се попети по ескалатору који се пење (креће се навише) или се попети а затим сићи по ескалатору који се спушта (креће се наниже)? (Претпоставља се да су све брзине о којима се говори – константне, при чему је брзина ескалатора иста и при пењању и при спуштању, а брзина човека и при пењању и при силажењу је већа од брзине ескалатора.)*

Решење: Означимо са v_s, v_p и v_e редом брзине човека при спуштању и пењању и брзину ескалатора. Нека је t_1 време за које човек сиђе, а затим се попне по ескалатору који се пење, t_2 време за које се човек попне, а затим сиђе по ескалатору који се спушта, а s дужина ескалатора. Тада је

$$t_1 = \frac{s}{v_s - v_e} + \frac{s}{v_p + v_e}, t_2 = \frac{s}{v_p - v_e} + \frac{s}{v_s + v_e}.$$

Даље је

$$t_1 - t_2 = \frac{2sv_e(v_p^2 - v_s^2)}{({v_s}^2 - {v_e}^2)({v_p}^2 - {v_e}^2)}.$$

Како је $v_p < v_s$ по услову задатка, следи да је $t_1 < t_2$.

2. *Доказати да једначина*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

има бесконачно много решења по x, y и z у скупу целих бројева.

Решење: Нека је $z = x + 1$. Тада дата једначина има облик

$$x^2 + y^2 - (x+1)^2 = 1997.$$

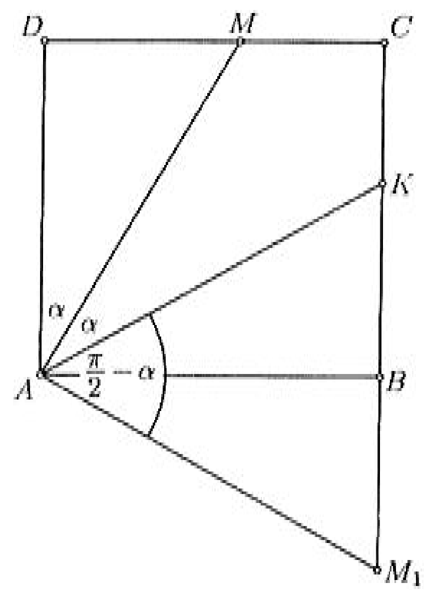
Сређивањем ове једначине по y добијамо

$$y^2 - 1997 = 2x + 1,$$

одакле закључујемо да за свако $k \in Z$ постоји решење облика $(2k^2 - 999, 2k, 2k^2 - 998)$, што значи да полазна једначина има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

3. *Тачке K и M леже редом на страницама BC и CD квадрата $ABCD$, при чему је AM симетрала угла $\angle KAD$. Доказати да је $AK = DM + BK$.*

Решење: Ротацијом око тачке A за $\frac{\pi}{2}$, троугао AMD се пресликава у троугао AM_1B (слика 1.).



Слика 1

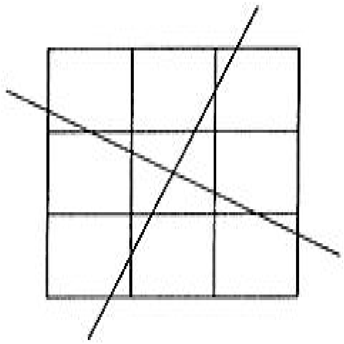
Означимо угао $\angle DAM$ са α. Тада је $\angle KAM_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Међутим,

$\angle AM_1K = \angle AMD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, одакле следи да је троугао KAM_1 једнакокрак, па је $KA = KM_1$. Како је $KM_1 = KB + BM_1 = KB + DM$, то је $KA = BK + DM$, што је и требало доказати.

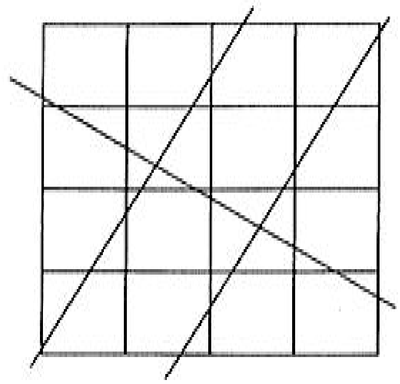
4. *(а) Одредити најмањи број правих којима се могу разрезати сва поља табле 3×3. Нацртати те праве и доказати да се то не може постићи са мањим бројем правих. (Поље се сматра разрезаним ако права пролази кроз неку унутрашњу тачку тога поља.)*

(б) Исти задатак за таблу 4×4.

Решење: (а) Одговор: 2. Докажимо да се описано резање не може постићи са једном правом. Претпоставимо супротно. Како једна права може сећи највише четири унутрашње линије, то она може сећи највише пет поља. Контрадикција. Пример резања са две праве је дат на слици 2.



Слика 2



Слика 3

(б) Одговор: 3. Једна права може сећи највише шест унутрашњих линија, које одређују седам поља. Дакле, са две праве је могуће разрезати највише 14 поља, што значи да су за описано резање потребне бар три праве. Пример резања са три праве је дат на слици 3.

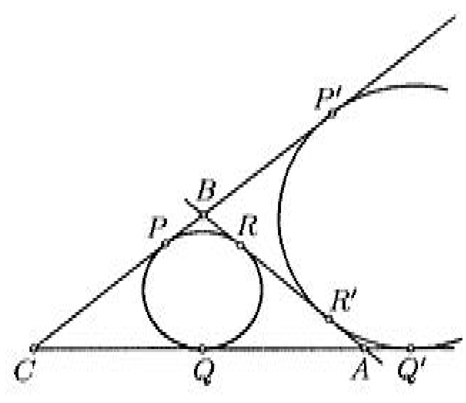
10 – 11 РАЗРЕД

5. *Исти као четврти задатак.*

Решење: Види решење претходног задатка.

6. *Нека су a и b две странице троугла. Како изабрати трећу страницу c тако да је њене тачке додира са уписаном и споља уписаном кружницом деле на три једнака дела? За које a и b таква страница c постоји? (Посматра се споља уписана кружница која додирује страницу c и продужетке друге две странице.)*

Решење: Означимо са P, Q, R тачке додира уписане кружнице , а са P', Q', R' тачке додира споља уписане кружнице са страницама a, b, c редом (слика 4.).



Слика 4

Из једнакости одговарајућих тангентних дужи добијамо следеће:

$BR = BP = AR' = AQ' = \frac{c}{3}$ и $BR' = BP' = AR = AQ = \frac{2c}{3}$.

Како је $CP' = CQ'$ следи $a + \frac{2c}{3} = b + \frac{c}{3}$, одакле је $c = 3(b-a)$. Овакво c постоји за $b > a$, а из неједнакости троугла добијамо $a > \frac{b}{2}$, па тражена страница c постоји за $\frac{b}{2} < a < b$.

7. *Доказати да једначина*

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6$$

има бесконачно много решења по x, y и z у скупу целих бројева.

Решење: Дата једначина се лако трансформише у њој еквивалентну

$$(x-y)(y-z)(x-z) = 6.$$

Уређена тројка $(x, y, z) = (k, k-2, k-3)$, где $k \in Z$, генерише бесконачно много решења по x, y и z у скупу целих бројева.

8. *На шаховској табли 5×5 распоређен је максималан број скакача, тако да се никоја два не бију. Доказати да је такав распоред јединствен.*

Решење: Нека су поља дате табле обојена црно и бело (као код шаховске табле), при чему су угаона поља црна. Максималан број скакача који се могу поставити на дату таблу тако да се никоја два не бију је 13, а максимум се достиже када су скакачи постављени на сва црна поља. Заиста,разбијмо таблу на парове поља (сваки пар садржи једно црно и једно бело поље), као што је приказано на слици 5. (при чему неспарено остаје централно поље).

5	7	11	6	4	5
4	6	12	5	11	10
3	8	7	13	3	4
2	12	9	1	10	2
1	1	8	2	9	3
	a	b	c	d	e

Слика 5

Са слике се види да не могу на оба поља из једног пара бити скакачи, те није могуће распоредити више од 13 скакача. Претпоставимо да је на датој табли постављено тачно 13 скакача, тако да се никоја два не бију. Тада је на тачно једном пољу из сваког пара постављен скакач и један скакач је на централном пољу. Зато су поља која бије централни скакач ($a2$,$a4$,$b1$,$b5$,$d1$,$d5$,$e2$ и $e4$) слободна, па на $a3$,$b2$,$b4$,$c1$,$c5$,$d2$,$d4$ и $e3$ морају бити скакачи. Одавде закључујемо да су и поља $b3$,$c2$,$c4$ и $d3$ слободна, те су преостала четири скакача постављена на поља $a1$,$a5$,$e1$ и $e5$.

Основна варијанта

8 – 9 РАЗРЕД

9. *Дат је низ $\{x_n\}$ дефинисан са:*

$$x_1 = 19,\ x_2 = 97;\ x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Доказати да се међу члановима овог низа налази нула и одредити редни број тог члана.

Решење: Посматрајмо низ $\{y_n\}$, за који је : $y_n := x_n \cdot x_{n+1}$. Из особина низа $\{x_n\}$ закључујемо: $y_1 = 19 \cdot 97$, $y_{n+1} = y_n - 1$. Одавде је очигледно:

$$y_n = 19 \cdot 97 - (n-1) \text{ за све } n \geq 1.$$

Дакле, $y_{k-1} = 1$, $y_k = 0$, за $k = 19 \cdot 97 + 1$, тј. $x_{k-1}x_k = 1$ и $x_k x_{k+1} = 0$. Из прве једначине је $x_k \neq 0$, па из друге следи $x_{k+1} = 0$. Према томе, редни број члана низа $\{x_n\}$ који је једнак нули је $k + 1 = 19 \cdot 97 + 2 = 1845$.

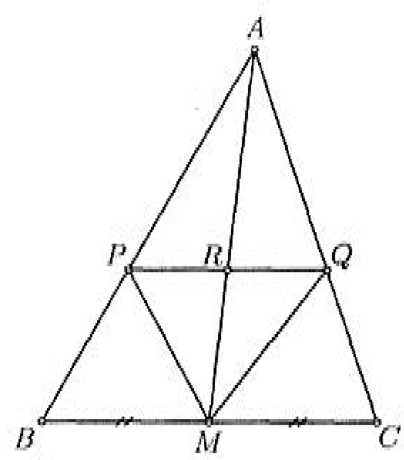
10. *Нека је M средиште странице BC троугла ABC. Конструисати праву l, која сече троугао и паралелна је страници BC, тако да се одсечак те праве, одређен страницама троугла, види из тачке M под правим углом.*

Решење: Анализа:

Претпоставимо да је права l конструисана и нека су P, Q и R њене тачке пресека са AB, AC и AM редом (слика 6).

Очигледно је: $\triangle APR \sim \triangle ABM$ и $\triangle ARQ \sim \triangle AMC$. Из прве од ових сличности имамо: $PR : BM = AR : AM$, а из друге $RQ : MC = AR : AM$, што заједно, због $BM = MC$, даје: $PR = RQ$.

Како је по претпоставци троугао PMQ правоугли, следи: $RP = RQ = RM$. Из једнакокраког троугла MRQ је: $\angle RMQ = \angle RQM = \angle CMQ$ (углови са паралелним крацима). Дакле, MQ је симетрала $\angle CMA$. Аналогно је MP симетрала $\angle BMA$.



Слика 6

Конструкција:

Конструишимо тачку P на страници AB такву да је MP симетрала угла BMA, а затим тачку Q на AC, да је MQ симетрала угла CMA. Тражена права l је баш права PQ.

11. *На сваком пољу табле $1 \times n$ налази се жетон. Првим потезом је дозвољено преместити произвољан жетон на суседно поље (било које од два суседна, за жетоне који нису крајњи). На тај начин формира се стуб од два жетона. У наредним потезима се сваки стуб може преместити у произвољном смеру, за онолико поља, колико жетона садржи (наравно, у оквиру табле). Ако се стуб премешта на непразно поље, тада се он поставља на врх постојећег стуба и сједињује се са њим. Доказати да се са $n-1$ потеза могу сви жетони поставити на исто поље.*

Решење: Нумеришимо поља табле бројевима $1, 2, \ldots, n$ редом. Означимо са $i \to j$ пребацивање свих жетона који се налазе на i−том пољу на j−то поље. Ако је $n = 2k-1$, онда се жетони доводе на поље 1 следећим низом од $n-1$ потеза:

$$k \to (k+1), (k+1) \to (k-1), (k-1) \to (k+2),$$

$$(k+2) \to (k-2), \ldots, 2 \to (2k-1), (2k-1) \to 1.$$

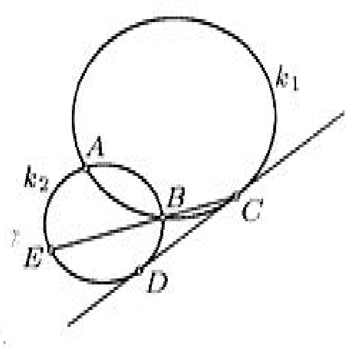
Ако је $n = 2k$, онда аналогним низом потеза:

$$k \to (k+1), (k+1) \to (k-1), (k-1) \to (k+2), \ldots, 2 \to (2k-1), (2k-1) \to 1, 1 \to 2k,$$

дужине $n-1$, доводимо све жетоне на последње поље.

12. *Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Њихова заједничка тангента додирује k_1 у тачки C, а k_2 у тачки D. Нека се тачка B налази на мањем растојању од праве CD, него тачка A. Ако права CB сече кружницу k_2 по други пут у тачки E, доказати да је AD симетрала угла CAE.*

Решење: Приметимо да су углови $\angle EAD$ и $\angle EBD$ подударни као периферијски над истим луком (слика 7.).



Слика 7

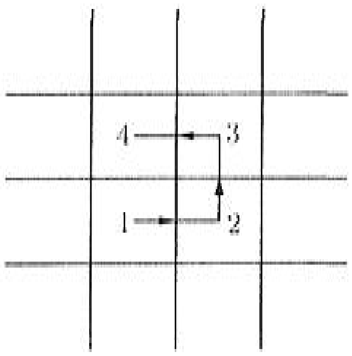
Даље, на основу теореме о углу између тетиве и тангенте, следи подударност углова $\angle CAB$ и $\angle DCB$, као и $\angle DAB$ и $\angle CDB$. Одавде је:

$$\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \angle DCB + \angle CDB = \angle EBD,$$

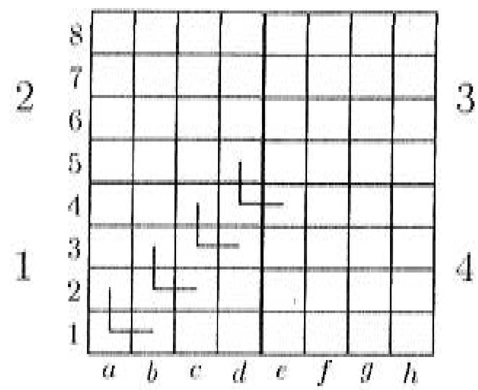
па следи $\angle CAD = \angle EAD$, тј. AD је симетрала $\angle EAC$.

13. *Коцка, чије су стране обојене црном и белом бојом, постављена је једном својом страном на поље шаховске табле и прокотрљана по њој, тако да се коцка нашла на сваком пољу тачно једанпут. Да ли је могуће обојити коцку и прокотрљати је по табли, тако да се боја поља и боја стране којом коцка належе на поље увек поклапају?*

Решење: Претпоставимо да је то могуће учинити. Тада не постоји део путање коцке који два пута узастопно промени правац на исту страну, као што је приказано на слици 8.



Слика 8



Слика 9

Заиста, ако би постојала таква путања, и ако би, на пример, поља 1 и 3 била црна, а поља 2 и 4 бела, тада би на пољу 1 доња страна коцке била црна, али би кретањем као на слици:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4,$$

доспела у ситуацију да се на пољу 4, које је беле боје, поново нађе та иста страна, што би било у супротности са претпоставком. Назовимо описану путању забрањеном. Поделимо, сада, дату шаховску таблу на четири подтабле 4×4. Тада се у бар две подтабле не налазе ни почетак ни крај путање коцке. Претпоставимо да се у подтабли 1 не налази ни почетак ни крај путање. Тада при проласку кроз доње лево угаоно поље, коцка мора имати путању као на слици 9.

Будући да не постоји забрањена путања, следи да ће коцка при проласку кроз поље b_2 имати путању као на слици 9. Аналогним разматрањем закључујемо да ће коцка имати исту путању и при проласку кроз поља c_3 и d_4. Ако ни у подтабли 2 нема почетка ни краја путање, онда, аналогно, полазећи од h_1 долазимо до истог облика путање у пољу e_4. Међутим, тада би при проласку кроз d_4 и e_4 коцка имала забрањену путању. Аналогно долазимо у контрадикцију ако у подтаблама 3 или 4 нема почетка ни краја путање. Тиме је претпоставка да постоји описано бојење коцке доведена у контрадикцију.

14. *Све странице правилног троугла разбијене су на 10 једнаких делова и кроз све деоне тачке су постављене праве паралелне страницама троугла. На тај начин је троугао разбијен на 100 малих троуглова. Троуглови који се налазе између две суседне паралелне праве образују траку. Наћи максималан број означених троуглова, таквих да никоја два троугла не припадају истој траци, гледано по свим правцима.*

Решење: (Види задатак 20.)

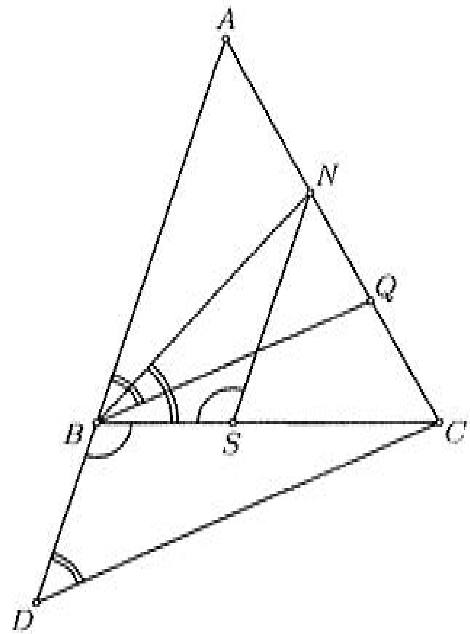
Основна варијанта

10 – 11 РАЗРЕД

15. *У троуглу ABC, CM и BN су тежишне линије. Нека су P и Q тачке правих AB и AC, редом, такве да је симетрала угла ACB истовремено и симетрала угла MCP, а симетрала угла ABC истовремено и симетрала угла NBQ. Ако је $AP = AQ$, да ли је троугао ABC једнакокраки?*

Решење: Означимо са D тачку полуправе AB такву да је $CD \| BQ$ (слика 10.). На основу сличности троуглова ABQ и ADC имамо

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AB + BD}.$$



Слика 10

На основу услова задатка је $\angle ABQ = \angle CBN$, а по избору тачке D је $\angle CDB = \angle ABQ$, те је $\angle CDB = \angle CBN$. Ако је S средиште странице BC, онда је $\angle BSN = 180° - \angle CSN = 180° - \angle CBA = \angle CBD$. Следи да су троуглови BSN и DBC слични, па је

$$\frac{BD}{BC} = \frac{SB}{SN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AB} = \frac{BC}{AB},$$

одакле је $BD = \frac{BC^2}{AB}$. Даље добијамо $AQ = \frac{AC \cdot AB^2}{AB^2 + BC^2}$. Аналогно, $AP = \frac{AB \cdot AC^2}{AC^2 + BC^2}$, па је услов $AP = AQ$ еквивалентан са $(AB - AC)(BC^2 - AB \cdot AC) = 0$. Према томе, $BC^2 = AB \cdot AC$ је довољан услов за $AP = AQ$, па не мора бити $AB = AC$.

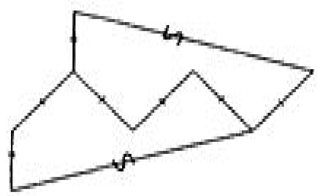
16. *Да ли су тачна следећа тврђења:*

(а) Ако се многоугао може разбити на два подударна многоугла помоћу изломљене линије, тада се он може разбити на два подударна многоугла и помоћу дужи.

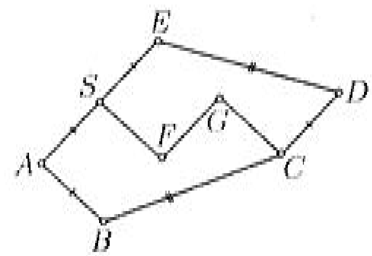
(б) Ако се конвексан многоугао може разбити на два подударна многоугла помоћу изломљене линије, тада се он може разбити на два подударна многоугла и помоћу дужи.

(в) Ако се конвексан многоугао може разбити изломљеном линијом на два многоугла, који се могу пресликати један на другог помоћу подударности која очувава оријентацију тј. ротацијом или транслацијом, тада се он може разбити на таква два многоугла и помоћу дужи.

Решење: (а) Не. На слици 11. је дат пример који показује нетачност тврђења.



Слика 11



Слика 12

Фигуру са слике можемо изломљеном линијом поделити на две подударне. Ако би је једном дужи могли поделити на две подударне фигуре, онда би та дуж морала полазити из јединог конкавног угла и полoвити обим фигуре на слици. Та дуж је јединствено одређена и лако се види да не дели шестоугао са слике на два подударна дела.

(б) Не. Пример је петоугао $ABCDE$ дат на слици 12.

(Координате тачака су $A(0,0)$, $B(1,-1)$, $C(4,0)$, $D(5,1)$, $E(2,2)$, $S(1,1)$, $F(2,0)$, $G(3,1)$.) Лако се доказује подударност шестоуглова $ABCGFS$ и $SEDCGF$. Ако претпоставимо да помоћу дужи можемо дати петоугао поделити на два подударна дела, закључујемо да је један крај те дужи на страници AE (јер AE није подударна ниједној од преосталих страница) и да је други крај наспрамно теме C (да би обе фигуре биле четвороуглови). Даље то мора бити баш дуж CS (да би половила обим петоугла), а то је немогуће, што се лако види.

(в) Да. Претпоставимо да се неки конвексан многоугао може изломљеном линијом $L_0L_1\dots L_k$ ($k \geq 2$, L_0 и L_k припадају рубу полазног многоугла, а могу бити и сама његова темена) поделити на два директно подударна многоугла $\mathcal{M}$: $L_0L_1\dots L_kL_{k+1}\dots L_m$ ($m > k$) и $\mathcal{M}' : L'_mL'_{m-1}\dots L'_{k+1}L'_k\dots L'_1L'_0$ (темена оба многоугла су узимана у истом смеру), при чему је $L'_i = L_i$, за $i = 0, 1, \dots, k$, а L_i и L'_i су темена полазног многоугла за $i = k+1, \dots, m$.

Нека је ρ директна трансформација подударности која $\mathcal{M}$ преводи у $\mathcal{M}'$. Тада из $\rho(L_i) = L'_j$ следи: $\rho(L_{i+1}) = L'_{j-1}, \rho(L_{i+2}) = L'_{j-2}, \dots, \rho(L_j) = L'_i$.

Нека је $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ произвољно. Тада из $\rho(L_i) = L'_j$ следи: $\rho(L_j) = L'_i$, те је $\angle L_i = \angle L'_j$ и $\angle L_j = \angle L'_i$ (ради се о унутрашњим угловима многоуглова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$). Због $\angle L_i + \angle L'_i = 360^\circ$ акко $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, следи $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

Дакле трансформацијом ρ се скуп $\{L_1, L_2, \dots, L_{k-1}\}$ пресликава у $\{L'_1, L'_2, \dots, L'_{k-1}\}$, а то је могуће једино ако је:

$$\rho : L_0L_1\dots L_kL_{k+1}\dots L_m \to L'_kL'_{k-1}\dots L'_0L'_m\dots L'_{k+1}.$$

Тада је очигледно $p : L_0L_kL_{k+1}\dots L_m \to L'_kL'_0L'_m\dots L'_{k+1}$, што значи да је уз помоћ дужи L_0L_k полазни многоугао подељен на два директно подударна многоугла $L_0L_kL_{k+1}\dots L_m$ и $L_kL_0L'_m\dots L'_{k+1}$.

17. *Множе се изрази облика:*

$$\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\dots\pm\sqrt{100}$$

за све могуће комбинације знакова.

Доказати да је резултат овог множења:

(а) цео број,

(б) квадрат целог броја.

Решење: Доказаћемо општије тврђење:

Ако је $P(x_1,\dots,x_n)=\prod_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{-1,1\}^n}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)$ полином по непознатим $x_1,\dots,x_n$, $n\geq 2$, који се добија множењем свих израза облика $\pm x_1\pm x_2\pm\dots\pm x_n$, онда је $P(x_1,\dots,x_n)=(Q(x_1^2,\dots,x_n^2))^2$, где је Q неки полином са целобројним коефицијентима. Очигледно,

$$\begin{aligned}
P(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{-1,1\}^n\\ \alpha_1=1}}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)\cdot\\
&\quad\cdot\prod_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{-1,1\}^n\\ \alpha_1=-1}}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)=\\
&= \prod_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{-1,1\}^n\\ \alpha_1=1}}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)\cdot(-1)^{2^{n-1}}\cdot\\
&\quad\cdot\prod_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{-1,1\}^n\\ \alpha_1=1}}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)=\\
&= \left(\prod_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{-1,1\}^n\\ \alpha_1=1}}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)\right)^2=\\
&= (R(x_1,\dots,x_n))^2
\end{aligned}$$

за

$$R(x_1,\dots,x_n)=\prod_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{-1,1\}^n\\ \alpha_1=1}}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n).$$

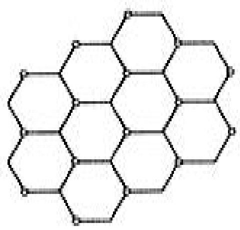
Како је $R(x_i)=R(-x_i)\cdot(-1)^{2^{n-1}}=R(-x_i)$ за $i=1$, $R(x_i)=R(-x_i)$ за $1<i\leq n$, следи да је R полином у коме свака непозната учествује са парним експонентом, тј. $R(x_1,\dots,x_n)=Q(x_1^2,\dots,x_n^2)$, где је Q неки полином са целобројним коефицијентима. Из управо доказаног, за $n=100$, $x_1=\sqrt{1}, x_2=\sqrt{2},\dots,x_n=\sqrt{100}$, следи да је $P(\sqrt{1},\sqrt{2},\dots,\sqrt{100})=(Q(1,2,\dots,100))^2$, што је очигледно квадрат целог броја.

18. *(а) На столу се налази неколико једнаких салвета у облику правилног шестоугла (прекривања су дозвољена), при чему је код сваке једна од страница паралелна једној истој правој. Да ли је увек могуће закуцати у сто неколико* *ексера, тако да све салвете буду прикуцане, при чему је свака прикуцана тачно једним ексером?*

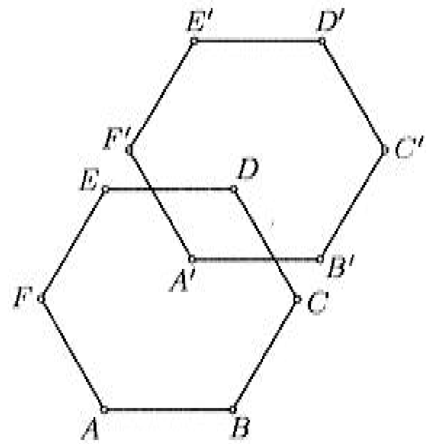
(б) Исто питање за салвете у облику правилног петоугла.

Решење: (а) Одговор: Да.

Нека је дато неколико подударних шестоуглова у равни, при чему су сви они транслаторно подударни, тј. одговарајуће странице су им паралелне. Конструишимо шестоугаону мрежу, са шестоугловима транслаторно подударним датим шестоугловима, али тако да ни један чвор мреже не лежи на рубу неког од датих шестоуглова. За сваки шестоугао мреже означимо свако друго теме, почевши од доњег левог (слика 13.).



Слика 13

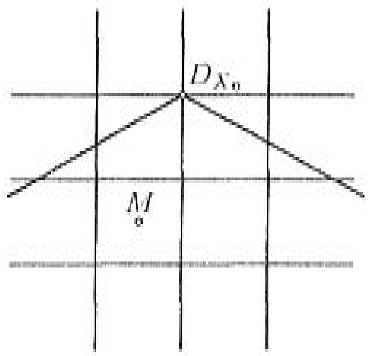


Слика 14

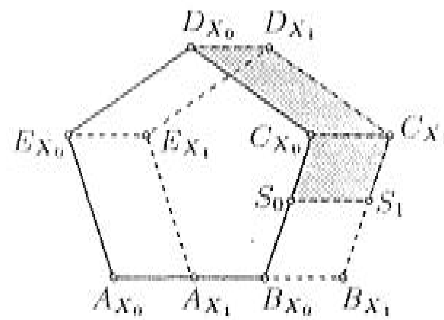
Докажимо да сваки од датих шестоуглова садржи тачно једну од означених тачака. Нека је $ABCDEF$ произвољан од датих шестоуглова и нека је $A'B'C'D'E'F'$ онај шестоугао мреже који садржи горње десно теме шестоугла $ABCDEF$, као на слици 14. Ако су S и S' средишта ових шестоуглова, онда из $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{S'D'}$ следи да је $ASD'S'$ паралелограм, тј. средиште SS' је истовремено и средиште AD'. Аналогно закључујемо да је то и средиште BE', CF', DA', EB' и FC', те су шестоуглови $ABCDEF$ и $D'E'F'A'B'C'$ централно симетрични. Зато из чињенице да се D налази у унутрашњости $D'E'F'A'B'C'$, следи да се A' налази у унутрашњости $ABCDEF$, а A' је, по претпоставци, једна од означених тачака. Аналогним разматрањем доказујемо да ниједан од уочених шестоуглова не садржи више од једне уочене тачке. Претпоставимо да се A' и A'' налазе у унутрашњости шестоугла $ABCDEF$. Тада су A' и A'' доње леве тачке за неке шестоуглове мреже. Међутим, тада та два шестоугла садрже тачку D, а то је немогуће.

(б) Одговор: Не.

Посматрајмо у Декартовој координатној равни петоугао $A_0B_0C_0D_0E_0$, чија је страница A_0B_0 постављена у смеру x-осе, испод x-осе, а теме D_0 се налази у координатном почетку. За сваку тачку X, чије су координате (x, y), $x = x_1 + \frac{1}{100}x_2$, $y = y_1 + \frac{1}{100}y_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{-100, -99, \ldots, 99, 100\}$, посматрајмо петоугао $A_X B_X C_X D_X E_X F_X$, транслаторно подударан са $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$, такав да је $D_X \equiv X$. Лако се уочава да је таквих петоуглова укупно 201^4, дакле, коначан број. Претпоставимо да се могу одабрати неке тачке у равни, тако да у сваком, на овај начин конструисаном петоуглу, има тачно једна одабрана тачка. Тада у петоуглу $A_0B_0C_0D_0E_0$ мора постојати нека одабрана тачка, рецимо $M(x_M, y_M)$. Лако се проверава да је $-1 < x_M < 1$ и $-2 < y_M < 0$. Тачка M се мора налазити у неком квадрату странице $\frac{1}{100}$, чија су темена тачке D_X. Уочимо, међу изабраним петоугловима, онај чије је теме D_{X_0} једно од два горња темена квадрата, који се налази непосредно изнад оног у коме је тачка M (види слику). Лако је проверити да тачка M мора бити унутар оног петоугла. Нека је $\vec{v} = (\frac{5}{100}, 0)$. Посматрајмо петоугао за који је $D_{X_1} = D_{X_0} + \vec{v}$ (слика 15.).



Слика 15



Слика 16

Тачка M мора бити изван тог петоугла, јер $D_{X_1}E_{X_1}$ не сече квадрат у коме је тачка M. Нека је S_0 средиште $B_{X_0}C_{X_0}$, а S_1 средиште $B_{X_1}C_{X_1}$. Како у петоуглу $A_{X_1}B_{X_1}C_{X_1}D_{X_1}E_{X_1}$ мора бити бар једна одабрана тачка M', то се она налази или у области осенченој на слици 16. или у паралелограму $B_{X_0}B_{X_1}S_1S_0$. Ако је у осенченој области, тада посматрамо један од уочених петоуглова који садржи S_1 и чије је теме B_{X_2} најближе могуће тачки S_1. Будући да и темена B_X уочених петоуглова чине мрежу подударну оној коју чине темена D_X, следи да се S_1 налази у неком квадрату те мреже, па можемо узети за B_{X_2} доњи десни угао тог квадрата, те је $[S_1B_{X_2}] \leq \frac{1}{100}\sqrt{2}$. Лако се закључује да је B_{X_2} између паралелних правих $B_{X_0}S'$ и $E_{X_0}D_{X_0}$, где је $S' \in B_{X_1}S_1$ и $[B_{X_1}S'] = [B_{X_0}B_{X_1}] = \frac{5}{100} = \frac{1}{10}B_{X_1}S_1$. Одавде следи да је тачка M са исте стране $D_{X_2}E_{X_2}$ као и B_{X_2}. Лако се проверава да и за остале странице петоугла $A_{X_2}B_{X_2}C_{X_2}D_{X_2}E_{X_2}$, тачка M са исте стране као и неко теме петоугла, те следи да је M у његовој унутрашњости. Међутим, тај петоугао садржи осенчену област, па и тачку M', што је контрадикција са условом да је у сваком петоуглу одабрана тачно једна тачка. Дакле, M' мора бити у унутрашњости $B_{X_0}B_{X_1}S_1S_0$. Аналогно добијамо да мора постојати одабрана тачка M'', која је у унутрашњости паралелограма $A_{X_0}T_0T_1A$, где је T_0 средиште $A_{X_0}E_{X_0}$, $\overrightarrow{AA_{X_0}} = \vec{v}$. Посматрајмо сада онај петоугао чије је теме C_{X_3} најближе могуће тачки S_1 и S_1 је у његовој унутрашњости. Лако се види да је $[C_{X_3}S_1] < \frac{3}{100}$. Даље, имамо да је $[C_{X_3}E_{X_3}] = d$, где је d дијагонала петоугла и $d = 1 \cdot 2 \cdot \sin 54^\circ > \sqrt{2}$, па је $[C_{X_3}E_{X_3}] > [S_1T_1] = [S_0T_0] + \frac{5}{100} + \frac{5}{100} = \frac{d+1}{2} + \frac{10}{100}$, одакле је $\frac{d-1}{2} > \frac{1}{10}$, односно, $d > 1,2$, што је очито тачно. Следи да је цео трапез $B_{X_1}S_1T_1A$ садржан у петоуглу $A_{X_3}B_{X_3}C_{X_3}D_{X_3}E_{X_3}$, па се у њему налазе и две одабране тачке M' и M'', што је контрадикција.

19. *Дима је измислио тајну шифру: свако слово се замењује са речју дужине највише 10 слова. Шифра је добра ако се свака шифрована реч дешифрује једнозначно. Серјожа је помоћу рачунара утврдио да се све могуће речи, са не више од 10000 слова, дешифрују једнозначно. Да ли одавде следи да је шифра добра? (Азбука има 33 слова, а под речју се подразумева произвољан низ слова, независно од тога да ли реч има смисла.)*

Решење: За сваку шифру назовимо суфиксом дужине k, реч коју чине последњих k слова шифре. За сваку реч имамо тачно један суфикс дужине k, за све $k \geq 1$ и k мање од дужине речи. Стога је укупан број различитих суфикса за све 33 шифре највише $33 \cdot 9 = 297$. Ако се нека реч са више од 10000 слова може двозначно декодирати, онда то значи да постоје шифре $r_1, \ldots, r_s$ и $t_1, \ldots, t_q$, такве да су $r_1 r_2 \ldots r_s$ и $t_1 t_2 \ldots t_q$ идентичне. Како свака шифра има највише 10 слова, а укупан број слова у речи $r_1 \ldots r_s \equiv t_1 \ldots t_q$ је преко 10000, то мора бити $s \geq 1000$ и $q \geq 1000$. Нека је то најмања реч са преко 10000 слова, која се може декодирати на два начина. Дефинишимо низ уређених парова речи на следећи начин: $x_1 = (r_1, t_1)$ и ако је $x_n = (r_1 \ldots r_a, t_1 \ldots t_b)$ онда је

$$x_{n+1} = \begin{cases} (r_1 \ldots r_a, t_1 \ldots t_b t_{b+1}), & \text{ако је } t_1 \ldots t_b \text{ префикс од } r_1 \ldots r_a \\ (r_1 \ldots r_{a+1}, t_1 \ldots t_b), & \text{ако је } r_1 \ldots r_a \text{ префикс од } t_1 \ldots t_b \end{cases}$$

за $n = 1, 2, \ldots, s + q - 2$. Очигледно је да су обе компоненте за x_{s+q-2} једнаке $r_1 \ldots r_s \equiv t_1 \ldots t_q$. Ако би компоненте неког члана x_l, означимо их са x_1^l и x_2^l, биле једнаке, онда би се већ та реч $x_1^l \equiv x_2^l$ могла двозначно декодирати. За сваки члан низа x_i, $i = 1, 2, \ldots, s + t - 3$, посматрајмо суфикс y_i, чијим се додавањем с десне стране једној компоненти низа добија друга. Ових суфикса има најмање $s+q-3 \geq 1997$, па, будући да су то суфикси шифри, морају постојати два једнака. Заиста, ако је $x_n = (r_1 \ldots r_a, t_1 \ldots t_b)$ и $t_1 \ldots t_b$ префикс од $r_1 \ldots r_a$, онда мора бити y_n суфикс шифре r_a. Нека је $y_i \equiv y_j$, $1 \leq i < j \leq s + q - 3$.

Одређености ради, нека је $x_i = (r_1 \ldots r_a, t_1 \ldots t_b)$, $x_j = (r_1 \ldots r_a \ldots r_c, t_1 \ldots t_b \ldots t_d)$ и $r_1 \ldots r_a y_i \equiv t_1 \ldots t_b$, $r_1 \ldots r_a \ldots r_c \equiv t_1 \ldots t_b \ldots t_d y_j \equiv t_1 \ldots t_b \ldots t_d y_i$. Тада су речи $r_1 \ldots r_a t_{d+1} t_{d+2} \ldots t_s$ и $t_1 \ldots t_b r_{c+1} r_{c+2} \ldots r_q$ једнаке, што је контрадикција са претпоставком о минималности речи $r_1 \ldots r_s \equiv t_1 \ldots t_q$. Према томе, ако се свака реч са мање од 10000 слова може једнозначно декодирати, онда то важи и за све речи са коначно много слова.

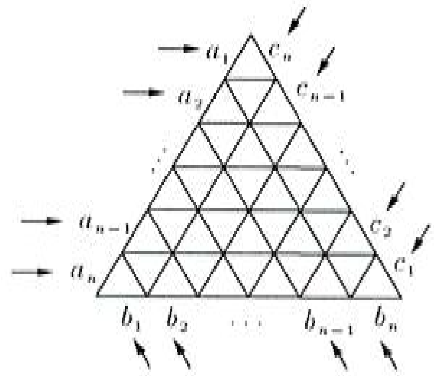
20. *Све странице правилног троугла су разбијене на n једнаких делова и кроз све деоне тачке су постављене праве паралелне страницама троугла. На тај начин је троугао разбијен на n^2 малих троуглова. Троуглови који се налазе између две суседне паралелне праве образују траку.*

(а) Наћи максималан број означених троуглова, таквих да никоја два троугла не припадају истој траци, гледано по свим правцима, за $n = 10$,

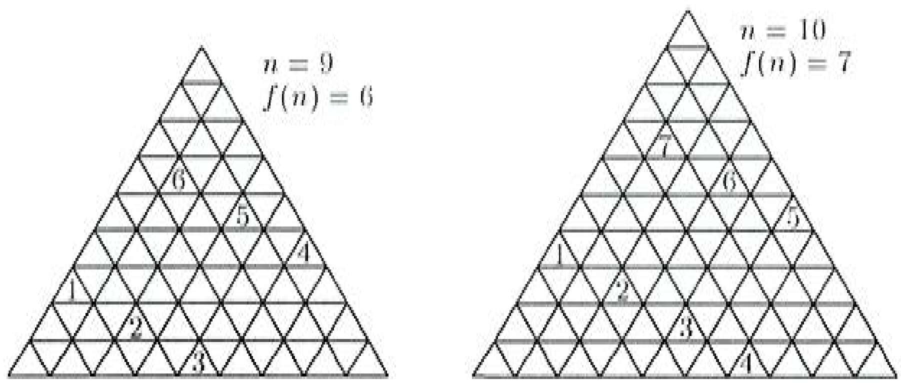
(б) за $n = 9$.

Решење: Означимо са $f(n)$ највећи могући број троуглова, који се може изабрати при подели страница полазног троугла на n делова, тако да никоја два не леже у истој траци. Уочимо, прво, да је $f(2) = 1$ и $f(n+1) \leq f(n) + 1$, јер ако из троугла са страницама издељеним на $n+1$ делова избацимо најдужу траку, тј. ону која се налази уз страницу, у којој се може наћи највише један изабрани мали троугао, добијамо троугао чије су странице издељене на n делова. Одавде следи да је $f(n) \leq n - 1$. Ако је за $n \geq 5$, $f(n) = n - 1$, онда или у траци означеној са

a_1 постоји одабрани троугао или у траци означеној са a_2 (види слику). У првом случају, у троуглу без трака b_n и c_n, мора бити још бар $f(n)-1=n-2$ изабраних троуглова, тј $f(n-2)\geq n-2$, што је немогуће. У другом случају, нека је изабран, рецимо, троугао осенчен на слици 17.



Слика 17



Слика 18

Јасно је да и у траци b_n мора бити означен бар један од изабраних (у супротном је $f(n-1)\geq n-2$), па, избацујући траке b_n, b_{n-1} и c_n, добијамо $f(n-3)\geq f(n)-2=n-3$. Контрадикција. Дакле, за $n\geq 5$ је $f(n-1)\leq n-2$. Ако је $n\geq 9$ и $f(n)=n-2$, тада постоји изабрани троугао у најмање једној од трака a_1, a_2 и a_3. Ако постоји изабран троугао у a_1, тада закључујемо $f(n-2)\geq f(n)-1=n-3$, што је контрадикција. Аналогним разматрањем, налазимо да троугао не може да се налази у a_2. Нека се троугао налази у траци a_3. Одређености ради, узмимо да се означени троугао налази у пресеку трака b_{n-1} и c_{n-1}. У тракама b_n и c_n морамо, такође, имати изабране троуглове, па искључивањем свих наведених трака, добијамо троугао странице подељене на $n-4$ делова, у којем се налази бар $f(n)-3$ троуглова, тј. $f(n-4)\geq f(n)-3=n-5=(n-4)-1$, што је контрадикција. Дакле, за $n\geq 9$ је $f(n)\leq n-3$. Из горњег резултата је $f(9)\leq 6$ и $f(10)\leq 7$. Строге једнакости важе за означавања приказана на слици 18.