Математичке игре погађања

верзија 1.0: 24.2.2015.

Душан Ђукић

1. У краљевству има 100 мудраца. Краљ тестира мудраце на следећи начин: построји их у ред и сваком стави на главу белу или црну капу тако да сваки мудрац види капе свих испред њега, али не види своју, нити оне иза њега. Потом мудраци један по један покушавају да погоде боју своје капе, и ко промаши бива кажњен. Колико највише мудраца се може спасти?

   Решење. Могу се спасти сви осим можда једног. Последњи мудрац у реду, који види све остале капе, жртвује се тако што каже "бела" ако је број црних капа испред њега паран, а "црна" ако није. Сада први мудрац испред њега, видевши капе испред себе, зна боју своје капе, затим онај испред њега, видевши капе испред себе и чувши одговор колеге, зна боју своје капе, итд.

2. Имамо n непровидних кутија које су поређане у ред и спојене. У једној од њих (не знамо којој) крије се миш. Млада партизанка покушава да убије миша бомбом. У сваком кораку она убацује бомбу у једну кутију. Ако се миш у том тренутку налази унутра, он ће страдати, а ако није унутра, помериће се надесно из своје кутије у суседну. Ако дође до крајње десне кутије, миш остаје у њој. Колико је најмање бомби потребно партизанки да би са сигурношћу убила миша?

   Решење. Довољно је $[\frac{n}{2}]+1$ бомби. Партизанка може да баци i-ту бомбу у $(2i-1)$-ту кутију за $1 \leqslant i \leqslant [\frac{n}{2}]$, а последњу бомбу у n-ту кутију. На овај начин, ако је x почетна позиција миша и $1 \leqslant x \leqslant [\frac{n}{2}]$, убија га x-та бомба, док га за $x > [\frac{n}{2}]$ убија последња бомба у n-тој кутији.

   Претпоставимо сада да партизанка има само $[\frac{n}{2}]$ бомби и да их баца редом у кутије $k_1, \dots, k_{[\frac{n}{2}]}$. За кутију x кажемо да је лоша ако миша чија је почетна позиција x убија i-та бомба, тј. $x = k_i - i + 1$. Свака од партизанкиних бомби чини највише једну од кутија $1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]+1$ лошом. Тако бар једна кутија није лоша, тј. миш неће умрети ако се у почетку налази у тој кутији.

3. Група разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима $1, 2, \dots, 2011$. Преко дана они држе благо у једној од ових пећина, а ноћу га премештају у једну од суседних пећина. Алибаба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Алибаба има стратегију којом са сигурношћу може да пронађе благо у коначно много покушаја?

   Решење. Претпоставимо за сад да је првог дана благо у пећини са парним бројем. Алибаба прво проверава пећину 2010. Ако не нађе благо, онда је оно у парној пећини са бројем не већим од 2008, а наредног дана је у непарној пећини са бројем не већим од 2009. Зато Алибаба сутрадан улази у пећину 2009; ако опет не нађе благо, наредног дана ће ући у пећину 2008, итд, док 2009-тог дана не провери пећину 2. Ако још није нашао благо, то ће значити да је полазна претпоставка погрешна и да је благо у почетку било у непарној пећини. Дакле, 2010-тог дана благо *јесте* у парној пећини, па Алибаба може да понови своју стратегију и тако сигурно пронађе благо.

4. Мађионичар треба да израчуна површину датог конвексног 2008-угла. Он може да изабере две тачке на граници многоугла (то могу да буду темена или тачке које деле одређену страницу у датом односу), а публика му саопштава површину мањег од два дела на које дуж одређена тим двема тачкама дели многоугао. Доказати да у 2006 питања мађионичар може да нађе површину многоугла.

   Решење. Нека је $AA_1A_2 \dots A_{2007}$ дати многоугао и нека је M_i средиште странице A_iA_{i+1} за $i = 1, \dots, 2006$. Показаћемо да бирањем парова (A, M_i) мађионичар може да постигне циљ. Означимо са T_i површину троугла AA_iA_{i+1}, а са S_i одговор који добија на питање о пару (A, M_i). Мађионичару је довољно да одреди све T_i.

Нека је AL права која полови површину многоугла. Вредности S_i расту до праве AL, а потом опадају, тј. $S_1 < \cdots < S_n \geqslant S_{n+1} > \cdots > S_{2006}$ за неко n. Како је $S_i = 2(T_1 + \cdots + T_{i-1}) + T_i$ за $i = 1, \ldots, n-1$, мађионичар одавде може да одреди $T_1, \ldots, T_{n-1}$. На сличан начин одређује и $T_{n+1}, \ldots, T_{2006}$. Најзад, имамо $S_n = 2\min\{T_1+\cdots+T_{n-1}, T_{n+1}+\cdots+T_{2006}\} + T_n$, одакле се добија T_n.

5. Татјана је замислила полином $P(x)$ чији су коефицијенти из скупа $\mathbb{N}_0$. Даница жели да одреди тај полином. Она у једном потезу изговара цео број k, а Татјана јој саопштава вредност $P(k)$. Наћи најмањи број потеза потребних Даници да открије Татјанин полином.

   Решење. Један потез није довољан: нпр. на основу вредности $P(k) = k$ Даница не може да се определи између полинома $P(x) = x$ и $P(x) = k$.

   Два потеза су довољна. За $k = 1$ Даница сазнаје $P(1) = n$, из чега закључује да су сви коефицијенти полинома P не већи од n. Потом за $k = n + 1$ Даница сазнаје $P(n+1) = m$. Из добијеног одговора она једнозначно одређује коефицијенте полинома P као цифре броја m у систему са основом $n + 1$.

6. У квадратну таблицу 7×7 Милош је уписао све природне бројеве од 1 до 49. Ђорђе треба да одгонетне распоред бројева у таблици. Он може да изабере квадрат који покрива нека поља таблице и да Милошу постави питање који се бројеви налазе унутар тог квадрата. Колико најмање питања Ђорђе треба да постави да би на основу Милошевих одговора сазнао распоред свих бројева у таблици?

   Решење. Кажемо да питање о квадрату K *раздваја* поља A и B ако квадрат K садржи тачно једно од та два поља. Милош ће остварити циљ ако и само ако, за свака два поља таблице, бар једно његово питање их раздваја. Посматрајмо 24 ивична поља таблице. Свако питање ће раздвојити највише два пара суседних ивичних поља, што значи да је Милошу потребно бар 12 питања. С друге стране, он може да оствари циљ питањима о квадратима странице 1, 2 и 3 са једним теменом у темену таблице.

7. Вања је замислио природан број x од 1 до 1000, а Ања покушава да га погоди. У сваком кораку она одабере скуп бројева A и Вањи поставља питање "Да ли x припада скупу A?". Колико питања је потребно Ањи да са сигурношћу погоди број x?

   Решење. Нека је n број Ањиних питања. Да би Ања могла увек да погоди број x, сви бројеви од 1 до 1000 би морали да генеришу различите низове одговора *да* и *не*, а низова одговора има 2^n. Зато мора бити $2^n \geqslant 1000$, па Ањи треба бар 10 питања.

   Десет питања је довољно. За $i = 1, \ldots, 10$, у i-том питању Ања пита "да ли је i-та бинарна цифра броја x отпозади јединица", што јој омогућује да одреди све бинарне цифре броја x.

8. Бројеви од 1 до 100 су записани неким редом. У једном питању можемо да сазнамо међусобни редослед произвољних 50 бројева. Доказати да помоћу пет питања можемо да откријемо редослед свих 100 бројева.

   Решење. Поделимо бројеве у групе A и B од по 50 бројева. Прво питамо за редослед бројева групе A, а затим за редослед групе B. У трећем питању питамо за редослед првих 25 бројева из групе A и првих 25 из групе B. У четвртом питамо за редослед последњих 25 бројева из A и последњих 25 из B. Тако после четири питања знамо првих 25 и последњих 25 бројева траженог редоследа, а у петом питању распоредимо преосталих 50 бројева.

9. Дато је $n \in \mathbb{N}$. Милош и Аца играју следећу игру против Ђолета. Прво Ђоле поставља $2n$ карата означених бројевима $1, 2, \ldots, 2n$ у један ред на столу. Пошто погледа распоред карата, Милош може (али не мора) да одабере две карте и замени им места. Затим се све карте окрену лицем надоле, а столу прилази Аца. Ђоле каже

било који број од 1 до $2n$, а Аца окреће карте како би пронашао карту са тим бројем. Милош и Аца побеђују ако Аца нађе тражену карту у највише n покушаја, а иначе побеђује Ђоле. Ко има победничку стратегију? (Милош и Аца се могу договарати само пре почетка игре.)

Решење. Распоред карата на столу можемо да посматрамо као пермутацију π бројева $1,\dots,2n$. Ако Ђоле каже број k, Аца ће покушати да нађе карту k отварајући карте на местима $k,\pi(k),\pi^2(k),\dots,\pi^{r-1}(k)$, где је r дужина циклуса пермутације коме припада број k. Тако ће Аца победити ако сви циклуси пермутације π имају дужину не већу од n. Пермутацију ће таквом учинити Ацин савезник Милош. Наиме, у пермутацији π постоји највише један циклус дужине веће од n (ако не постоји, Милош не мора ништа да ради): нека је то циклус $i,\pi(i),\dots,\pi^{s-1}(i)$ $(s>n)$. Заменом карата i и $\pi^n(i)$ Милош дели овај циклус на два циклуса дужина n и $s-n$, чиме постиже циљ.

10. (а) Два играча изводе трик с картама. Први извлачи пет карата из шпила од 52 карте (који је промешао неко из публике), погледа их, а онда их поређа на сто слева надесно, и то једну лицем надоле, а остале лицем нагоре. Тада други играч погађа скривену карту. Доказати да се играчи могу договорити тако да трик увек буде успешан.

(б) Исто питање, с тим да први играч излаже четири карте слева надесно лицем нагоре, а пету уопште не изложи.

Решење. (а) Нумеришимо карте бројевима од 1 до 52. Сваки распоред приказаних карата a,b,c,d представља један од 24 могућа поретка ($a<b<c<d$, $a<b<d<c$, итд), што заједно са позицијом скривене карте даје 120 могућности. То је сасвим довољно да одреди пету карту.

(б) Две од извучених карата имају исту боју: нека су то g и h. Можемо да их означимо тако да је $g-h\in\{1,2,3,4,5,6\} \pmod{13}$. Први играч скрива карту g и прво излаже карту h. Други сада зна да непозната карта има исту боју као h и једну од вредности $h+1,\dots,h+6$, а коју од тих шест, једнозначно ће одредити распоред преостале три карте.

11. Стојимо поред округлог стола за којим седи укупно 30 људи, паметних и глупих, при чему знамо да глупих нема више од G. Питамо сваког од њих да ли му је десни сусед паметан или глуп. Паметан каже истину, а глуп некад истину а некад лаж. За које највеће G ћемо увек бити у стању да на основу одговора идентификујемо бар једног паметног човека?

Решење. Посматрајмо најдужи низ одговора "паметан" (рецимо дужине p) и последњег човека A за којег је дат такав одговор. Претпоставимо да је A глуп. Тада је њега паметним назвао глупак, кога је такође глупак назвао паметним итд, дакле имамо бар $p+1$ глупака заредом. С друге стране, тада не можемо да имамо више од $p+1$ паметних људи заредом јер би онда они дали дужи низ одговора "паметан". То значи да међу преосталих $29-p$ људи има бар $[\frac{29-p}{p+2}]$ глупака, што укупно даје бар $p+1+[\frac{29-p}{p+2}]>(p+2)+\frac{31}{p+2}-3\geqslant 2\sqrt{31}-3>8$, дакле бар 9 глупака, тако да за $G<8$ можемо да идентификујемо једног паметног човека.

С друге стране, за $G=9$, ако глупаци седе на местима $1,2,3,4,5,11,16,21,26$, можемо да добијемо периодичне одговоре - да људи на местима $5,10,15,20,25,30$ одговоре "глуп", а сви остали "паметан". Исте одговоре бисмо могли да добијемо и ако заротирамо распоред за $5,10,15,20,25$ места, тако да не можемо да тачно одредимо ниједног паметног човека.

12. Дечаци и девојчице, којих је укупно n^2, распоређени су у квадрат $n\times n$. За сваку врсту или колону, као и за сваку од $2(2n-1)$ дијагонала, знамо колико у њој има девојчица. За које n су нам ови подаци увек довољни да одредимо позиције свих девојчица? За које позиције можемо увек са сигурношћу рећи да ли су на њима девојчице или дечаци?

Решење. Означимо $a_{ij}=1$ ако је у пресеку i-те врсте и j-те колоне девојчица, а $a_{ij}=0$ ако је дечак.

За $n=1,2$ тривијално одређујемо све a_{ij}. Такође, за $n=3$, знајући a_{11} и a_{13} налазимо a_{12}; слично налазимо a_{21},a_{23},a_{32} и a_{22}.

За $n=4$ знамо $a_{11},a_{14},a_{41},a_{44}$. Даље, знајући $v_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}$, $k_1=a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}$, $d_2=a_{12}+a_{21}$ и $d_3=a_{13}+a_{22}+a_{31}$, добијамо $a_{22}=d_3-(v_1+k_1)+(2a_{11}+a_{14}+a_{41}+d_2)$. Слично налазимо a_{23},a_{32},a_{33}. С друге стране, осталих 8 вредности није могуће одредити јер распоред у коме је $a_{12}=a_{24}=a_{43}=a_{31}=1$ и $a_{13}=a_{34}=a_{42}=a_{21}=0$ даје исте податке као распоред у коме је $a_{12}=a_{24}=a_{43}=a_{31}=0$ и $a_{13}=a_{34}=a_{42}=a_{21}=1$.

За $n=5$ знамо четири угаоне вредности. Усредсређујући се на подквадрате 4×4 закључујемо да није могуће одредити вредност ни у једном другом пољу различитом од централног. С друге стране, централно поље се може одредити: знајући $a_{11}+a_{12}+a_{21}$, $a_{15}+a_{14}+a_{25}$, $a_{55}+a_{54}+a_{45}$ и $a_{51}+a_{41}+a_{52}$, налазимо $a_{13}+a_{31}+a_{35}+a_{53}$, а одатле и $a_{22}+a_{24}+a_{42}+a_{44}$; најзад, знајући збирове по великим дијагоналама налазимо a_{33}.

За $n\geqslant 6$, усредсређујући се на подквадрате 5×5, видимо да у општем случају није могуће одредити ниједну вредност осим угаоних.

13. Слепи миш се креће дуж реалне праве тражећи своју кућу која је у тачки A. Он полази из координатног почетка O и зна да има бар метар до куће, али не зна на коју страну му је кућа нити колико је тачно далеко, а неће је видети док не удари у њу. Доказати да слепи миш може да осмисли стратегију која ће му гарантовати да ће пронаћи кућу не прелазећи пут дужи од $9\cdot OA$. Може ли се константа 9 поправити?

Решење. Нека је x координата куће. Слепи миш ће летети путањом $OA_1A_2A_3A_4\dots$, где је A_i тачка с координатом $(-2)^{i-1}$. Да би дошао до тачке x, $4^{n-1}<x\leqslant 4^n$, он прелази пут дужине $6(1+4+4^2+\dots+4^{n-1})+x=2(4^n-1)+x<9x$. Слично, док не дође до тачке $-x$, $\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}<x\leqslant\frac{1}{2}\cdot 4^n$, прећи ће пут дужине $2(1+2+2^2+\dots+2^{2n})+x=2^{2n+2}-2+x<9x$.

Претпоставимо да постоји путања $OA_1A_2A_3\dots$ којом слепи миш може да се креће тако да до сваке тачке x долази путем не дужим од kx, где је k константа. Нека је, без смањења општости, $(-1)^{i-1}a_i$ $(a_i>0)$ координата тачке A_i. Да би дошао до тачке $x>a_n$ за n непарно, односно $x<-a_n$ за n парно, слепи миш мора да пређе пут дужине бар $2(a_1+a_2+\dots+a_{n+1})+x$. Одавде следи да је $a_1+a_2+\dots+a_{n+1}\leqslant\frac{k-1}{2}a_n$ за све n. Означимо $b_n=\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n+1}}{a_n}$. Како је $b_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, применом А-Г неједнакости добијамо $b_{n+1}^2\geqslant\frac{4a_na_{n+2}}{a_{n+1}^2}b_n$. Множењем последње неједнакости за $n=1,2,\dots,t$ добијамо $(\frac{k-1}{2})^{t+1}\geqslant b_2b_3\cdots b_tb_{t+1}^2\geqslant 4^tb_1\frac{a_1a_{t+2}}{a_2a_{t+1}}>4^t\cdot\frac{b_1a_1}{a_2}$, одакле је најзад $(\frac{k-1}{8})^{t+1}>\frac{b_1a_1}{4a_2}$ за свако $t\in\mathbb{N}$, а то је могуће једино ако је $\frac{k-1}{8}\geqslant 1$, тј. $k\geqslant 9$.

14. Мађионичар има шпил од 52 карте. Његов асистент зна распоред карата у шпилу и жели у што мање питања да омогући гледаоцима да и они погоде распоред карата (симетрични распореди се сматрају истим). У сваком питању асистент именује две карте, а мађионичар саопштава гледаоцима колико има карата у шпилу између те две карте. Колико најмање питања је потребно асистенту да постигне свој циљ?

Решење. Показаћемо да је 34 питања довољно. Означимо карте у шпилу бројевима од 1 до 52 редом. Асистент прво поставља питања о картама 1 и 52 (тако гледаоцима ставља на знање да су ове две карте крајње), а затим о картама 1 и 3 (чиме обавештава публику о позицији карте 3). У наредном пару потеза, асистент поставља питања о картама $(51,2)$, а затим о картама $(51,49)$. Након ова два питања публика зна да је распоред $1,2,3,?,\dots,?,49,?,51,52$ или $1,51,3,49,?\dots,?,2,52$. Следећи пар асистентових питања биће $(4,50)$ и $(4,6)$. Након ових питања друга могућност распореда отпада (не постоје две неодређене карте између којих је 45 других). Тако су сада могући распореди $1,2,3,4,?,6,?\dots,?,49,50,51,52$ и $1,2,3,50,?,\dots,?,6,49,4,51,52$. Асистент наставља поступак питањима $(48,5)$, $(48,46)$, $(7,47)$, $(7,9)$, $(45,8)$, $(45,43)$, итд, закључно са 33-ћим питањем $(25, 29)$. Сада постоје два могућа распореда: $1, \dots, 24, 25, ?, ?, 28, 29, \dots, 52$ и $1, \dots, 24, 29, ?, ?, 28, 25, 30, \dots, 52$. Најзад, његово последње питање $(25, 26)$ једнозначно одређује распоред карата.

С друге стране, 33 питања није довољно. Посматрајмо граф са 52 темена која одговарају картама и 33 гране које одговарају питањима. Тај граф има бар $52 - 33 = 19$ компонената повезаности, па међу њима постоји компонента са два темена $\{A, B\}$, или постоје две компоненте $\{A\}$ и $\{B\}$ са по једним теменом. У оба случаја карте A и B би могле да замене места, а да се одговори не промене.

15. Дати су природни бројеви k и n. Играчи A и B играју следећу игру. На почетку игре A бира константу N и саопштава је, а онда замишља природан број $x \leqslant N$ о коме играч B покушава да добије информације. У сваком питању B бира произвољан скуп $S \subset \mathbb{N}$ и пита играча A да ли x припада S. Играч B може да поставља питања колико жели. Играч A одговара са *да* или *не*, али може да лаже; једино ограничење је да не сме да лаже $k + 1$ пута узастопно. Циљ играча B је да одабере скуп X са највише n елемената такав да $x \in X$. Доказати да:

   (а) ако је $n \geqslant 2^k$, онда B може да оствари циљ.

   (б) за свако довољно велико k постоји природан број $n \geqslant 1,99^k$ такав да B не може гарантовати победу.

Решење. За одговор o играча A на питање "*да ли је $x \in S$*" кажемо да је *несагласан* са бројем b ако је $o =$*да* и $b \notin S$, или $o =$*не* и $b \in S$.

(а) Показаћемо да, у ма ком скупу Y са $2^n + 1$ бројева, B може са сигурношћу да одреди бар један број који није x. Претпоставимо без смањења општости да је $Y = \{0, 1, \dots, 2^n\}$. Играч B почиње тако што понавља питање "*да ли је $x = 2^n$*". Ако $k + 1$ пут за редом добије одговор *не*, он зна да је $x \neq 2^n$. У супротном, кад добије одговор *да*, он редом поставља питања "*да ли је i-та бинарна цифра броја x једнака 1*" за $i = 1, 2, \dots, n$. Ма какви да су одговори, сви они су несагласни са неким бројем b, $0 \leqslant b \leqslant 2^n - 1$. Имајући у виду претходни одговор *да* о броју 2^n, B може да закључи да је $x \neq b$.

(б) Нека је $1 < \lambda < 2$. За свако $i = 1, \dots, N$, нека $a_i(m)$ означава текући број узастопних одговора након m-тог питања који су несагласни са i. Посматрајмо величину $\phi(m) = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{a_i(m)}$. Јасно је да A постиже циљ уколико може да одговара тако да важи $\phi(m) < \lambda^{k+1}$ за свако m.

Означимо са S_m скуп бројева са којима би одговор *да* у m-том питању био несагласан. Ако A у m-том питању одговори *да*, важи $a_i(m) = a_i(m-1) + 1$ за $i \in S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \notin S_m$, па је $\phi(m) = f_1 = \lambda \sum_{i \in S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i \notin S_m} 1$. С друге стране, ако A одговори *не*, онда је $a_i(m) = a_i(m-1) + 1$ за $i \notin S_m$ и $a_i(m) = 0$ за $i \in S_m$, па је $\phi(m) = f_2 = \lambda \sum_{i \notin S_m} \lambda^{a_i(m-1)} + \sum_{i \in S_m} 1$. Како је $f_1 + f_2 = \lambda \phi(m-1) + N$, у m-том питању A може да одговори тако да буде $\phi(m) \leqslant \frac{\lambda}{2} \phi(m-1) + \frac{N}{2}$.

У почетку је $\phi(0) = N$. На основу претходног, једноставна индукција показује да A може да бира одговоре тако да увек важи $\phi(m) \leqslant \frac{N}{2-\lambda}$. Специјално, ако је $N < (2-\lambda)\lambda^{k+1}$, онда је $\phi(m) \leqslant \lambda^{k+1}$, те A има победничку стратегију.

Најзад, ако је $1,99 < \lambda < 2$, за довољно велико k важи $(2-\lambda)\lambda^{k+1} > 1,99^k + 1$, чиме је тврђење доказано.

Београд, 2015