Ристо Малчески
Скопје

НЕКОЛКУ ЗАДАЧИ ОД КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЈА

Комбинаторната геометрија е најмлада гранка на геометријата. Проблемите кои се предмет на проучување на оваа област воглавном се поврзани со наоѓање на оптимални распореди на точки или геометриски фигури. Покрај задачите од споменатиот вид во комбинаторната геометрија спаѓаат и задачите со покривање и расекување на геометриски фигури. На пример, еден од постарите проблеми од овој вид е задачата на Кеплер, која тој ја поставил во седумнаесеттиот век и која гласи: Кој е најголемиот број еднакви топки кои може да се допираат на иста таква топка (топките не се преклопуваат). Оваа задача успешно ја решил Ван дер Варден во средината на минатиот век.

Во ова наше дружење ќе се осврнеме на неколку задачи кои припаѓаат на оваа интересна гранка на геометријата или кои се многу блиски до неа.

Задача 1. Дали може рамностран триаголник да се покрие со два помали рамнострани триаголници?

Решение. Секој од двата помали рамнострани триаголници може да покрие најмногу едно теме од поголемиот триаголник. Според тоа, со два помали рамнострани триаголници можеме да покриеме најмногу две од трите темиња на дадениот рамностран триаголник, па затоа бараното покривање не е можно. ■

Задача 2. Дали во рамнината може да се распоредат 2021 отсечки така што секоја отсечка сече точно по 3 од преостанатите отсечки, при што не постојат три отсечки кои имаат заедничка точка.

Решение. Нека претпоставиме дека бараниот распоред е можен. Тогаш секоја од дадените 2021 отсечки сече точно по 3 отсечки, а во производот $3\cdot 2021$ секоја пресечна точка е броена два пати (еднаш кога p ја сече q, а втор пат кога q ја сече p), вкупниот број пресечни точки е $\frac{3\cdot 2021}{2}$, што не е можно бидејќи $\frac{3\cdot 2021}{2}$ не е природен број. Конечно од добиената противречност следува дека барањето распореддување не е можно. ■

Задача 3. Во рамнината се дадени 2022 точки, така што меѓу било кои три точки постојат две чие растојание е помало од 1. Докажи дека сите точки можат да се покријат со два круга со радиус 1.

Решение. Имаме 2022 точки, што значи имаме конечен број точки. Според тоа, постојат конечен број отсечки чии крајни точки се дадените точки. Затоа постои отсечка со максимална должина, т.е. отсечка која не е пократка од ниту една од другите отсечки. Нека е тоа отсечката AB.

Ако должината на AB е помала од 1, тогаш сите точки можат да се покријат со круг со радиус 1 и центар, на пример, во точката A.

Ако должината на AB е поголема од 1, тогаш да опишеме кругови k_1 и k_2 со радиус 1 и центри A и B соодветно. Нека C е произволно избрана точка од преостанатите 2020 точки. Од условот на задачата следува дека $\overline{AC}<1$ или $\overline{BC}<1$, т.е. $C\in k_1$ или $C\in k_2$. Значи, било која од преостанатите 2020 точки припаѓа или на k_1 или на k_2, т.е. сите точки се покриени со круговите k_1 и k_2. ■

Задача 4. Квадар со целобројни страни има волумен 2008. Да се определи најмалиот број на коцки со целобројни должини на рабовите на кој може да се подели ваков квадар.

Решение. Рабовите на квадарот можат да бидат со следниве должини $(1,1,2008)$, $(1,2,1004)$, $(1,4,502)$, $(1,8,251)$, $(2,2,502)$ и $(2,4,251)$.

Ако барем еден раб на квадарот има единична должина, тогаш бројот на коцки е еднаков на 2008.

Ако квадарот е со рабови $(2,4,251)$, тогаш коцките можат да имаат рабови со должина 1 или 2. (мора да има коцки од двата вида бидејќи еден раб на квадарот има непарна должина). Лесно се гледа дека во овој случај бројот на коцките е поголем од $2008:8=251$.

Останува можноста кога квадарот да е со рабови $(2,2,502)$. Во овој случај дадениот квадар можеме да го поделиме на 251 коцка со должина на раб 2.

Значи најмалиот број на коцки со целобројни должини на рабови на кој може да се подели даден квадар целобројни должини на рабови и волумен 2008 е 251. ■

Задача 5. Дали е можно дадена коцка да се подели на 2008 помали коцки: (Коцките не мора да се сите со еднаква должини на работ.)

Решение. Ќе докажеме дека дадената поделба е можна.

Прво ќе докажеме дека дадена коцка може да се подели на 251 помала коцка. Ја делиме дадената коцка на $6\cdot 6\cdot 6=216$ помали еднакви коцки. Потоа некои 5 од нив ги делиме на $2\cdot 2\cdot 2=8$ помали еднакви коцки. Така дадената коцка е поделена на вкупно $211+5\cdot 8=251$ помала коцка.

Да се вратиме на задачата. Прво дадената коцка ја делиме на $2\cdot 2\cdot 2=8$ помали еднакви коцки, а потоа секоја од овие коцки ја делиме со постапката објаснета претходно на по 251 коцка. Со ова дадената коцка е поделена на 2008 коцки. ■

Задача 6. Дадени се $2n+3$ точки во рамнината така што никои три не се колинеарни и никои четири не лежат на иста кружница. Докажи дека постои кружница која минува низ три од дадените точки и n од преостанатите точки се наоѓаат во нејзината внатрешност.

Решение. Од дадените $2n+3$ точки избираме две A и B такви што сите преостанати точки се на иста страна од правата определена со овие две точки (таква права постои, зошто?).

Сега преостануваат $2n+1$ точка. Од принципот на Дирихле следува дека постојат $n+1$ точка $C_i, i=1,2,...,n+1$ такви што $\measuredangle AC_iB\leq 90^\circ$ или постојат точки $D_i, i=1,2,...,n+1$ такви што $\measuredangle AD_iB\geq 90^\circ$.

Нека постојат $n+1$ точка $C_i, i=1,2,...,n+1$ такви што $\measuredangle AC_iB\leq 90^\circ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\measuredangle AC_iB>\measuredangle AC_{i+1}B$ за $i=1,2,...,n$. Строго неравенство важи бидејќи меѓу дадените точки не постојат четири кои лежат на една кружница. Тогаш кружницата опишана околу триаголникот $AC_{n+1}B$ во својата внатрешност ги содржи точките $C_i, i=1,2,...,n$, т.е. содржи n точки.

Нека постојат $n+1$ точка $D_i, i=1,2,...,n+1$ такви што $\measuredangle AD_iB\geq 90^\circ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\measuredangle AD_iB<\measuredangle AD_{i+1}B$ за $i=1,2,...,n$. Строго неравенство важи бидејќи меѓу дадените точки не постојат четири кои лежат на една кружница. Тогаш кружницата опишана околу триаголникот AD_1B во својата внатрешност ги содржи точките $D_i, i=2,3,...,n+1$, т.е. содржи n точки. ■

Забелешка. Во решението на претходната задача, откако ќе ги избереме точките A и B, преостанатите $2n+1$ точка да ги означиме со C_i, $i=1,2,3,...,2n+1$ така што $\measuredangle AC_iB<\measuredangle AC_{i+1}B$. Ја разгледуваме кружницата опишана околу триаголникот ABC_{n+1}. Јасно, оваа кружница ги содржи точките $C_i, i=1,2,...,n$ и не ги содржи точките $C_1, i=n+2,...,2n+1$, што значи дека постои кружница која минува низ три од дадените точки и е таква што точно n точки се содржат во нејзината внатрешност и точно n точки се надвор од неа.

Задача 7. Во рамнината се дадени 2022 точки. Некои од нив се поврзани со отсечки.

Докажи дека постојат барем две точки од кои излегуваат еднаков број на отсечки.

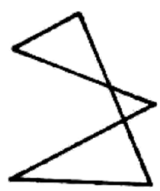
Решение. Имаме 2022 точки, па затоа од секоја од нив излегуваат најмногу 2021 отсечка. Можни се два случаја.

Прв случај. Постои точка од која не излегува ниту една отсечка. Тогаш не е можно од една точка да излегуваат 2021 отсечки, бидејќи во спротивно ќе постои отсечка која ги поврзува овие две точки. Според тоа, во овој случај од секоја точка излегуваат најмногу 2020 отсечки, па овие точки можеме да ги распоредиме во 2021 класи: во класата на оние од кои не излегува ниту една отсечка, во класата на оние од кои излегува една отсечка итн. во класата на оние од кои излегуваат 2020 отсечки. Според тоа, имаме 2021 класи точки, па како вкупно се 2022 точки, од принципот на Дирихле следува дека постои класа во која има најмалку две точки, т.е. постојат две точки од кои излегуваат еднаков број на отсечки.

Втор случај. Не постои точка од која не излегува ниту една отсечка, т.е. од секоја точка излегува најмалку една отсечка. Но, тогаш од секоја точка излегува најмалку една, а најмногу 2021 отсечка, па точките повторно можеме да ги распределиме во 2021 класи. Јасно, бидејќи се 2022 точки, повторно од принципот на Дирихле следува дека постои класа во која има најмалку две точки, т.е. постојат две точки од кои излегуваат еднаков број на отсечки. ■

Задача 8. Во рамнината е даден 2021-аголник. Дали може да се повлече права p која ги сече сите негови страни, а не минува низ ниту едно негово теме?

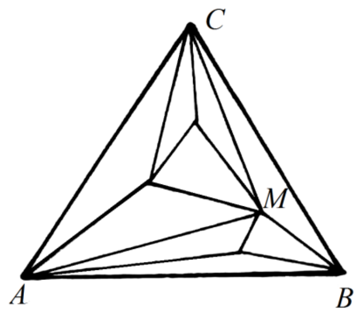
Решение. Јасно, ако многуаголникот е конвексен, тогаш не постои права која ги задоволува условите на задачата. Нека сега претпоставиме дека многуаголникот не е конвексен, туку може да биде било каков многуаголник, како на пример многуаголникот на цртежот десно, чии



страни меѓусебно се сечат. Потоа да претпоставиме дека дадената права p може да се повлече. Нека AB е произволна страна на многуаголникот. Според претпоставката правата p ја сече страната AB и не минува ниту низ точката A, ниту низ точката B, па затоа точките A и B се од различни страни на p. Од произволноста на страната AB следува дека за секоја страна нејзините крајни точки се на различни страни на p. Последното значи дека на секоја страна од p се наоѓа еднаков број на темиња. Но, последното не е можно бидејќи многуаголникот има 2021 теме. Според тоа, не е можно да се повлече права p која ги сече сите страни на дадениот многуаголник, а не минува низ ниту едно негово теме. ■

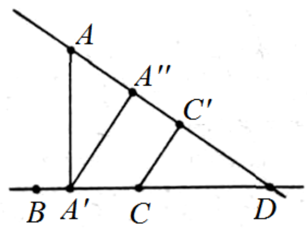
Коментар. Тврдењето на задачата важи за било кој $(2n+1)-$аголник, каде $n \in \mathbb{N}$, при што доказот е идентичен.

Задача 9. Во рамнината се дадени седум точки такви што меѓу нив нема три колинеарни, а три од нив A, B и C се темиња на триаголник во чија внатрешност се останатите четири точки. Овие седум точки ги поврзуваме со отсечки се додека целиот триаголник ABC не го разложиме на помали триаголници кои не се преклопуваат, а чии темиња се во дадените точки (цртеж десно). Колку мали триаголници добивме?



Решение. Разложувањето може да се направи на повеќе начини. Со пребројување може да се констатира дека секогаш се добиваат девет мали триаголници. Во општ случај бројот на малите триаголниц ќе го определиме така што ќе го определиме збирот на внатрешните агли на малите триаголници и ќе го поделиме со 180° (збирот на внатрешните агли на еден триаголник е 180°). Нека M е било која од дадените точки во внатрешноста на триаголникот ABC (види цртеж). Тогаш збирот на оние агли чие теме е точката M е 360°. Аналогно важи и за другите внатрешни точки на триаголникот ABC. Според тоа, збирот на внатрешните агли чии темиња се внатрешните четири точки е $4 \cdot 360^\circ = 1440^\circ$. На овој збир треба да му го додадеме збирот на внатрешните агли на триаголниците во точките A, B и C. Нивниот збир е еднаков на збирот на внатрешните агли на триаголникот ABC, т.е. на 180°. Според тоа, збирот на сите внатрешни агли на делбените триаголници е $1440^\circ + 180^\circ = 1620^\circ$. Конечно, бројот на делбените триаголници е еднаков на $1620^\circ : 180^\circ = 9$. ■

Задача 10. Во рамнината се дадени 2022 точки такви што на секоја права која минува низ две од дадените 2022 точки лежи барем ушпте една од тие точки. Докажи дека сите 2022 точки лежат на една права.



Решение. Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно, т.е. дека сите точки не лежат на една права. Ќе конструираме нормални отсечки (нормали) од секоја од дадените точки на секоја права која не ја содржи таа точка и која минува низ две од дадените точки. Меѓу овие нормали постои барем една од која ниту една друга нормала не е помала. Нека тоа е нормалата од точката A на правата p која минува низт точките B и C (цртеж десно). Со A' да го означиме подножјето на нормалата од точката A на правата p. Според условот на задачата на правата p постои уште една од дадените точки, различна од B и C. Нека е тоа точката D. Една од точките B, C и D е меѓу другите две точки. Нека тоа е точката C. Со A'' и C' соодветно да ги означиме подножјата на нормалите повлечени од точките A' и C на правата AD. Бидејќи

$$AA' > A'A'' > CC',$$

добиваме дека постои нормала која е пократка од нормалата повлечена од точата A на правата p, што е противречност. ■

Забелешка. Задачата прв пат е поставена во 1893 година и е решена во 1933 година, односно дури по 40 години од нејзиното поставување.

Задача 11. Бела рамнина на произволен начин е испрската со црна боја. Докажќи дека постојат две истобојни точки кои се наоѓаат на растојание $2022\,cm$.

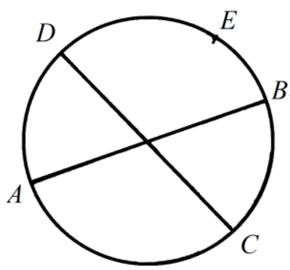
Решение. *Прв начин*. Нека A е бела точка. Конструираме кружница со центар A и радиус $2022\,cm$. Можни се два случаја: на кружницата има барем една бела точка и на кружницата нема ниту една бела точка. Во првиот случај со B да ја означиме белата точка. Тогаш $AB = 2022\,cm$ и доказот е завршен. Во вториот случај во кружницата впишуваме правилен шестаголник $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$. Јасно,

$$C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_5C_6 = C_6C_1$$

и доказот е завршен.

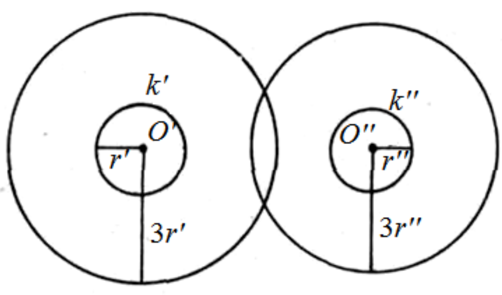
Втор начин. Конструираме рамностран триаголник со должина на страна $2022\,cm$. Бидејќи имаме само две бои, а триаголникот има три темиња од принципот на Дирихле следува дека барем две темиња се истобојни, а растојанието меѓу нив е точно $2022\,cm$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 12. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со црна боја. Докажи дека во таа рамнина постои правоаголен триаголник чија хипотенуза е со должина $1cm$ и чии темиња се истобојни.



Решение. Од задача 11 следува дека постојат две истобојни точки кои се на растојание $1cm$. Со A и B да ги означиме двете истобојни точки, да кажеме бели. Сега конструираме кружница со дијаметар AB (цртеж десно). Ако на кружницата постои бела точка C различна од A и B, тогаш бидејќи $\measuredangle ACB = 90^\circ$ бараниот триаголник е $\triangle ABC$. Ако таква точка не постои, тогаш сите точки на кружницата, освен точките A и B, се црни, па можеме да земеме било кои три точки C, D, E различни од A и B такви што CD е дијаметар. Јасно $\triangle CDE$ е бараниот триаголник. ■

Задача 13. Во рамнина се дадени 2022 кругови кои покриваат нејзин дел со плоштина $1m^2$. Докажи дека може да се изберат неколку од овие кругови кои не се сечат, а збирот на нивните плоштини е поголем од $\frac{1}{9}m^2$.



Решение. Нека k' е круг со центар во точката O' и радиус r' кој е поголем од сите други радиуси. Да ги отстраниме сите кругови кои го сечат кругот k'. Притоа од круговите ослободивме плоштина која не е поголема од $9P'$, која лежи во кругот со сентар во O' и радиус $3r'$, каде P' е плоштината на кругот k' (цртеж горе десно).

Нека k'' е круг со центар O'' чиј радиус r'' е поголем од сите преостанати радиуси. Да ги отстраниме сите кругови кои го сечат овој круг. Притоа, слично како претходно се ослободивме од кругови со плоштина која не е поголема од $9P''$, каде P'' е плоштината на кругот k''.

Оваа постапка ја продолжуваме се додека „има“ кругови. Бидејќи сите претходни кругови се опфатени со круговите чии радиуси се еднакви на $3r', 3r'', \dots$, добиваме $9P' + 9P'' + \dots > 1m^2$, т.е. $P' + P'' + \dots > \frac{1}{9} m^2$, што и требаше да се докаже. ■

Задачи за самостојна работа

1. Во рамнина се дадени 10 прави. Докажи дека во таа рамнина постои права која не е паралелна ниту со една од дадените прави.
2. Во рамнина се дадени 4000 точки такви што меѓу нив не постојат три колинернри точки. Докажи дека може да се конструираат 1000 четириаголници кои немаат заеднички точки, а чии темиња се дадените точки.
3. Во рамнината се дадени n прави такви што низ пресекот на било кои две од дадените прави минува трета права. Докажи дека сите n прави минуваат низ една точка.
4. Докажи дека во множеството дијагонали на конвексен десетаголник може да се најдат две кои се сечат под агол помал од 6°.
5. Во рамнината се дадени $2n$ точки. Докажи дека постои права p која не содржи ниту една од дадените точки и која рамнината ја дели на две полурамнини такви што секоја полурамнина содржи по n точки.
6. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со црна боја. Докажи дека постојат три истобојни точки кои лежат на една права и се такви што едната од нив е средина на отсечката чии краеви се другите две точки.
7. Бела рамнина на произволен начин е испрскана со црна боја. Докажи дека во таа рамнина постои рамностран триаголник чии темиња се истобојни.