# Nejednakost Popoviciua i njene primjene

*Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina*

Ovdje ćemo opisati interesantnu nejednakost Tiberiua Popoviciua, poznatog rumunjskog matematičara rođenog 1906. godine, koju je objavio 1965. godine, a koja glasi:

*Ako je funkcija* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *konveksna, tada za sve brojeve* $x, y, z \in [a, b]$ *vrijedi nejednakost*

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right)\right]. \tag{1}$$

*Ako je funkcija* $f$ *konkavna, tada u (1) vrijedi suprotna nejednakost, tj.*

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \leq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right)\right]. \tag{2}$$

Dokaz ove nejednakosti može se naći, npr. u [7].

*Dokaz.* Ne smanjujući općenitost, možemo pretpostaviti da je $x \leq y \leq z$. Ako je $y \leq \frac{x+y+z}{3}$, onda je $\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x+z}{2} \leq z$ i $\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{y+z}{2}$. Prema tome, postoje $s, t \in [0, 1]$ tako da je

$$\frac{x+z}{2} = \frac{x+y+z}{3} \cdot s + (1-s) \cdot z, \tag{1'}$$

$$\frac{y+z}{2} = \frac{x+y+z}{3} \cdot t + (1-t) \cdot z. \tag{1''}$$

Zbrajajući jednakosti (1') i (1''), dobivamo

$$\frac{x+y-2z}{2} = (s+t) \cdot \frac{x+y-2z}{3},$$

a odavde $s + t = \frac{3}{2}$.

Kako je funkcija $f$ konveksna, imamo

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) \leq s \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-s)f(z),$$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq t \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-t)f(z),$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Zbrajanjem ovih triju nejednakosti dobiva se nejednakost (1), što je i trebalo dokazati.

Slučaj $\frac{x+y+z}{3} < y$ promatra se na sličan način, pričem imamo $x \leq \frac{x+z}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}$ i $x \leq \frac{y+z}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}$.

**Napomena 1.** Ako je funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ konkavna, u (1) vrijedi suprotna nejednakost koja se dokazuje analogno.

Sada ćemo dati nekoliko primjena ove nejednakosti koje su u vezi s trokutom, a novodobivene nejednakosti će biti i poboljšanja nekih nejednakosti iz [3].

**Nejednakost 1.** Dokazati da za svaki trokut $ABC$ vrijedi nejednakaost

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{s}{2R}, \tag{3}$$

gdje su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ njegovi unutarnji kutovi, $s$ poluopseg i $R$ polumjer opisane mu kružnice.

*Dokaz.* Promatrajmo funkciju $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$. Imamo $f'(x)=\cos x$, te $f''(x)=-\sin x\leqslant 0$, $\forall x\in[0,\pi]$, tj. funkcija je konkavna na intervalu $I=[0,\pi]$, pa iz (2) za $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ imamo

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\leq\frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

a odavde, zbog $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, tj.

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\ \text{ te}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}:$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{3}\leq\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right),$$

odnosno, zbog

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R},$$

vrijedi nejednakost (3). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$, tj. ako je trokut jednakostraničan.

**Napomena 2.** Nejednakost (3) je bolja od nejednakosti 2.27 u [3] koja ima oblik

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}>2.$$

**Nejednakost 2.** Dokazati da za svaki trokut s kutovima $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vrijedi nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\geq\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}, \tag{4}$$

gdje su $R$ i $r$ polumjeri opisane i upisane kružnice tom trokutu.

*Dokaz.* U ovom slučaju ćemo promatrati funkciju $f(x)=\cos x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Kako je $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x\leq 0$, $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, tj. funkcija je konkavna na intervalu $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, iz (2) za $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ imamo

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} + \frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} \le \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

a odavde radi $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, tj.

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \quad \text{te}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} :$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{3} \le \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right),$$

odnosno zbog

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R},$$

vrijedi nejednakost (4). Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

**Napomena 3.** Nejednakost (4) je bolja od ove u 2.9 u [3]

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} > 1.$$

**Nejednakost 3.** Za svaki šiljastokutan trokut s kutovima $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \ge \frac{2s}{r} - 3\sqrt{3}. \tag{5}$$

*Dokaz.* Ovaj puta ćemo promatrati funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Kako je $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, te $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, funkcija $f$ je konveksna na intervalu $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pa iz (1), za $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} + \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3} \ge \frac{2}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} + \right),$$

a odavde radi $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, tj.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \text{te}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r} :$$

$$\sqrt{3} + \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3} \ge \frac{2}{3}\cdot\frac{s}{r},$$

odnosno, vrijedi nejednakost (5).

**Napomena 4.** Kako je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, iz (5) dobijemo nejednakost

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \geq \frac{2s}{r}-3\sqrt{3}. \tag{6}$$

**Napomena 5.** Nejednakosti (5) i (6) su bolje nego ove u 2.30 i 2.32 u [3]

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3}, \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3},$$

jer je $\frac{2s}{r}-3\sqrt{3} \geq 3\sqrt{3} \iff s \geq 3\sqrt{3}r$, a ovo je nejednakost u 5.11 u [3]. Jednakost u (5) ili (6) vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

**Nejednakost 4.** Dokazati da za svaki trokut s kutovima $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vrijedi nejednakost

$$|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| \leq \frac{r^2}{2R^2}. \tag{7}$$

*Dokaz.* Uzmimo funkciju $f(x)=\ln|\cos x|$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Kako je

$1^\circ$ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ : $f(x)=\ln\cos x$, $f'(x)=-\operatorname{tg}x$, $f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}<0$, te

$2^\circ$ $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ : $f(x)=\ln(-\cos x)$, $f'(x)=-\operatorname{tg}x$, $f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}<0$,

dana funkcija je konkavna za $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, pa iz (2) za $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\ln|\cos\alpha|+\ln|\cos\beta|+\ln|\cos\gamma|}{3}\\
&\leq \frac{2}{3}\left(\ln\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\ln\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}+\ln\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\right)\\
&\iff \quad -3\ln 2+\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| \leq 2\ln\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right).
\end{aligned}$$

Odavde zbog $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}$ imamo

$$-3\ln 2+\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| \leq 2\ln\frac{r}{4R}, \quad \text{tj.}$$

$$\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| \leq \ln\left(\frac{r^2}{16R^2}\cdot 8\right)$$

odnosno, vrijedi nejednakost (7).

**Napomena 6.** Ako je trokut tupokutan, tada je $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<0$. Ako je trokut šiljastokutan, onda je $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\geq 0$. Dakle, u slučaju šiljastokutnog trokuta iz (7) dobivamo

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{r^2}{2R^2}.$$

Ova nejednakost je bolja od nejednakosti 2.24 u [3], koja glasi

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8},$$

jer je $\frac{r^2}{2R^2}\leq\frac{1}{8}\Leftrightarrow R\geq 2r$, a ovo je poznata Eulerova nejednakost.

Jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

**Nejednakost 5.** Dokazati da za svaki šiljastokutni trokut, čiji kutovi zadovoljavaju uvjete $\frac{\pi}{4} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$, vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geq \frac{\sqrt{3}s^2}{9r^2}. \tag{8}$$

*Dokaz.* Promatrajmo funkciju $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Kako je $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}$, $f''(x) = \frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x} > 0$, dana funkcija je konveksna na promatranom intervalu. Iz (1) dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\ln \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} + \frac{1}{3}(\ln \operatorname{tg}\alpha + \ln \operatorname{tg}\beta + \ln \operatorname{tg}\gamma) \\
&\geq \frac{2}{3}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \ln \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} + \ln \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \\
\iff \quad &\ln\sqrt{3} + \frac{1}{3}\ln(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma) \geq \frac{2}{3}\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right),
\end{aligned}$$

odnosno

$$\ln\left[\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot (\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)\right] \geq \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^2,$$

a odavde

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Koristeći poznatu jednakost

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r}$$

dobivamo nejednakost (8). Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

## Literatura


[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] O. Bottema and others, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] G. H. Eckstein, *O demonstraţie elementara a inegalităţii lui, Popoviciu*, Revista matematica din Timişoara, Vol. 2 (XXII), nr. 1 (1991), p. 7.

[5] D. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[6] J. Pečarić, *Konveksne funkcije. Nejednakosti*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[7] T. Popoviciu, *Sur certaines inégalités qui caracterisent les fonctions convexes*, An. Sti. Univ. "Al. I. Cusa". Iassi Sect. I a Math. (N.S.) 11B(1965), 155–164.