Марија Попоска
Охрид

ХИПОТЕЗИ НА ГОЛБАХ И ОЈЛЕР

Како што знаеме, множеството природни броеви е составено од прости броеви, сложени броеви и бројот 1, кој не е ниту прост, ниту сложен број. Со проблеми поврзани со простите и сложените броеви се занимавале математичарите од најстарите цивилизации. Многу од проблемите кои биле поставувани низ вековите биле решени, но има и такви проблеми кои и денес не се решени. Така, Евклид во своето капитално дело *Елементи* докажал дека постојат бесконечно многу прости броеви, а Ератостен формулирал едноставен алгоритам за одделување на простите броеви, кој денес е познат како *Ератостеново сито*. Понатаму, познато е дека секој сложен број може да се претстави како производ на два или повеќе прости броеви. Оттука логично е прашањето: *Дали секој сложен број може да се претстави како збир на прости броеви*? Јасно, одговорот на ова прашање е позитивен, но интересно е кој е најмалиот број прости броеви кои се потребни за да еден сложен број се претстави како збир на прости броеви?

Во врска со ова прашање германскиит математичар Христијан Голдбарх (1690-1764), тогашен член на Петроградската акдемија на науките во своето писмо од 7 јуни 1742 година, испратено до Леонард Ојлер (1707-1783), ја искажал следната хипотеза:

Секој непарен број поголем од 5 може да се претстави како збир од три прости броја.

Ова свое тврдење Голдбарх го поткрепил со равенствата

$$7=2+2+3, 9=3+3+3, 11=2+2+7, 13=3+5+5, ...$$

при некои броеви може да се прикажат и на повеќе начини како збир на три непарни прости броја. Меѓутоа, Голдбарх немал доказ дека ова тврдење е точно за секој непарен прост број.

Ојлер се заинтересирал за добиениот проблем и во врска со истиот ја формулирал следнава хипотеза:

Секој парен број поголем од 2, може да се претстави како збир на два прости броја.

Бидејќи секој непарен природен број поголем од 5 може да се претстави како збир на простиот број 3 и парен број поголем од 2, заклучуваме дека од Ојлеровата хипотеза следува Голдбаховата хипотеза. Притоа, точноста на Ојлеровата хипотеза за парните броеви помали од 31 следува од равенствата

$4=2+2, 6=3+3, 8+3+5, 10=5+5=3+7, 12=5+7,$

$14=7+7=3+11, 16=3+13=5+11, 18=5+13=7+11,$

$20=3+17=7+13, 22=3+19=5+17, 24=5+19=7+17=11+13,$

$26=3+23=7+19=13+13, 28=5+23=11+17,$

$30=7+23=11+19=13+17.$

Како што можеме да видиме, некои од парните броеви како збир од два прости броја може да се претстават на повеќе начини. На долниот цртеж е прикажан бројот на начините на кои даден парен број може да се претстави како збир на два прости броја.

...

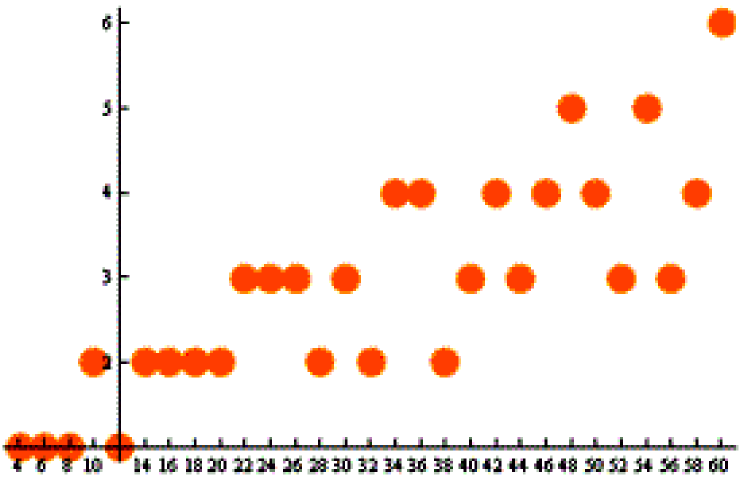
$\{52=5+47, 52=11+41, 52=23+29\}$

$\{54=7+47, 54=11+43, 54=13+41, 54=17+37, 54=23+31\}$

$\{56=3+53, 56=13+43, 56=19+37\}$

$\{58=5+53, 58=11+47, 58=17+41, 58=29+29\}$

$\{60=7+53, 60=13+47, 60=17+43, 60=19+41, 60=23+37,$



Голем број математичари пробувале да ја докажат точноста на некоја од овие две хипотези, но до денес во тоа целосно никој не успеал. Сепак, изминативе 280 години се постигнати неколку значајни резултати. Имено, во 1930 година рускиот математичар Шнирељман (1905-1938) успеал да докаже дека постои извесен број k таков што секој број n може да се претстави како збир на најмногу k прости броеви. Според тоа, кога би се докажало дека $k=3$, тогаш имаме доказ на Голдбаховата хипотеза. Но, покасно е докажано само дека k не е поголем од 20. Значаен резултат во врска со Голбаховата и Ојлеровата хипотеза, во 1937 година, дал рускиот математичар Виноградов кој ја докажал следнава теорема:

Постои константа C таква што секој непарен број , N поголем од C, може да се претстави како збир на три прости броја $N = p_1 + p_2 + p_3$.

Ова било важно откритие, но се однесувало само на непарните броеви, а освен тоа било констатирано и дека C е некој многу голем број. Во 1995 година резултатот на Шнирељман значително го подобрил Ремер кој докажал дека секој парен број може да се претстави како збир на најмногу шест прости броја. Меѓу резултатите поврзани со Голдбаховата и Ојлеровата хипотеза ќе го спомeнеме и резултатот на Чен Цзин-жун кој во 1966 година докажал дека секој доволно голем парен број може да се претстави како збир на два прости броја или како збир на прост и полупрост број (број кој е производ на два прости броја). На пример:

$$100=23+7\cdot 11 \text{ и } 2000=17+3\cdot 661.$$

Со развојот на информатичките технологии хипотезите на Голдбах и Ојлер стануваат интересни и за информатичарите. Така, со помош на компјутер, во 2004 година Ојлеровата хипотеза е проверена и докажана за сите парни броеви помали од $2\cdot 10^{17}$.

На крајот од ова наше дружење, уште да спомeнеме дека Голдбаховата хипотеза во литературата е позната како *слаба хипотеза на Голдбах*, а Ојлеровата хипотеза во литературата е позната како *јака хипотеза на Голдбах*.