

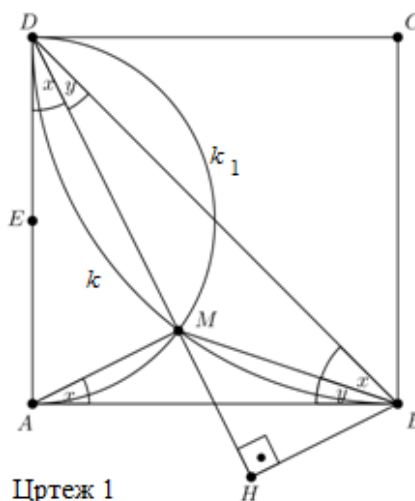
Драгољуб Милошевиќ,
Горњи Милановац

КВАДРАТ И ТОЧКА

Елементарните геометриски фигури често пати имаат неочекувани својства, за чиј доказ најчесто се доволни знаењата со кои се стекнуваш во училиштето. Во оваа статија ќе разгледаме низа вакви својства поврзани со квадратот и точка M . За таа цел најпрво ќе ја разгледаме следнава задача.

Задача 1. Нека е даден квадрат $ABCD$ и точката M нека е пресек на полукружницата со дијаметар AD и кружницата $k(C, BC)$ (цртеж 1). Докажи ги следниве равенства:

- 1) $\angle AMB = 135^\circ$,
- 2) $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$,
- 3) $\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{DM}^2$,
- 4) $P_{\triangle AMD} = P_{\triangle BMD}$,
- 5) $P_{\triangle ABM} = \frac{1}{10}P_{\square ABCD}$.



Решение. 1) Позната ни е следнава теорема: Во произволна кружница централниот агол е два пати поголем од периферниот агол над истиот лак на кружницата. Во нашите разгледувања ќе ги користиме следниве последици на оваа теорема:

- a) Периферниот агол над дијаметарот на произволна кружница е еднаков на прав агол, т.е. тој е еднаков на 90° .
- b) Аголот меѓу тетивата и тангентата повлечена во една од крајните точки на тетивата на произволна кружница е еднаков на периферниот агол над тетивата.

Со E да ја означиме средината на страната AD на квадратот $ABCD$. Аголот $\angle MAB = x$ е агол меѓу тангентата AB и тетивата AM на кружницата $k_1(E, AE)$, а аголот $\angle MBA = y$ е агол меѓу тангентата AB и тетивата BM на кружницата k . Затоа $\angle ADM = \angle MAB = x$ и $\angle BDM = \angle MBA = y$ (цртеж 1). Бидејќи

$$45^\circ = \angle ADB = \angle ADM + \angle BDM = x + y, \text{ т.е. } x + y = 45^\circ,$$

од триаголникот $\triangle ABM$ имаме:

$$\angle AMB = 180^0 - (\angle MAB + \angle ABM) = 180^0 - (x + y) = 180^0 - 45^0,$$

а оттука $\angle AMB = 135^0$.

2) Триаголниците ABM и BDM имаат еднакви агли, па затоа се слични, што значи дека $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{AB} : \overline{BD}$. Оттука, заради $\overline{BD} = \overline{AB}\sqrt{2}$, добиваме $\overline{AM} : \overline{MB} = 1 : \sqrt{2}$, т.е. $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$.

3) Од $\angle AMD = 90^0$, како периферен агол над дијаметар, следува дека триаголникот AMD е правоаголен. Сега од Питагоровата теорема следува: $\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 = \overline{AD}^2$. Од, $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$, т.е. $\overline{BM}^2 = 2\overline{AM}^2$ и $\overline{AD} = \overline{CM}$ добиваме

$$\begin{aligned} \overline{BM}^2 + \overline{DM}^2 &= (\overline{AM}^2 + \overline{AM}^2) + \overline{DM}^2 = \overline{AM}^2 + (\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2) \\ &= \overline{AM}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2. \end{aligned}$$

4) Нека е H подножјето на нормалата од тачката B на првата DM (цртеж 1). Триаголникот BMH е рамнокрак и правоаголен бидејќи

$$\angle BHM = 90^0, \angle BMH = 180^0 - 135^0 = 45^0, \angle MBH = 45^0.$$

Од Питагоровата теорема применета на овој правоаголен триаголник имаме: $\overline{BH}^2 + \overline{MH}^2 = \overline{BM}^2$. Одовде, заради $\overline{BH} = \overline{MH}$ важи $2\overline{BH}^2 = \overline{BM}^2$ или $\overline{BH}^2 = \frac{1}{2}\overline{BM}^2$, т.е. $\overline{BH} = \frac{\overline{BM}}{\sqrt{2}}$. Плоштината на триаголникот BDM е

$$P_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \frac{\overline{BM}}{\sqrt{2}},$$

а на правоаголниот триаголник AMD е

$$P_{\triangle AMD} = \frac{1}{2}\overline{AM} \cdot \overline{DM}.$$

Бидејќи $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$, имамъ:

$$P_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \frac{\overline{AM}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \overline{AM},$$

па је $P_{\triangle AMD} = P_{\triangle BDM}$.

5) Докажавме дека триаголниците ABM и BDM се слични, пришто се должините на страните на триаголникот BDM поголеми $\sqrt{2}$ пати од должините на соодветните страни на триаголникот ABM . Тоа, пак, значи дека

$$P_{\triangle BDM} = (\sqrt{2})^2 P_{\triangle ABM},$$

односно $P_{\triangle BDM} = 2P_{\triangle ABM}$. Бидејќи

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_{ABCD} &= P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABM} + P_{\triangle BDM} + P_{\triangle AMD} \\ &= P_{\triangle ABM} + 2P_{\triangle BDM} = P_{\triangle ABM} + 2 \cdot 2P_{\triangle ABM} \end{aligned}$$

Имамо $P_{\triangle ABM} = \frac{1}{10} P_{ABCD}$. ■

Задача 2. Равенството 3) важи за произволна точка M из внатрешноста на даден квадрат $ABCD$.

Решение. Нека правата која ја содржи тачку M и е паралелна со страните AD и BC ги сече страните AB и CD во тачките E и F соодветно (цртеж 2). Тогаш

$$\overline{AE} = \overline{DF} = m \text{ и } \overline{BE} = \overline{CF} = a - m.$$

Од Питагоровата теорема применета на триаголниците AEM и BME , имаме

$$\overline{ME}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{AM}^2 - m^2 \text{ и } \overline{ME}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 - (a - m)^2,$$

а оттука добиваме

$$\overline{AM}^2 - m^2 = \overline{BM}^2 - (a - m)^2.$$

На сличен начин добиваме

$$\overline{CM}^2 - (a - m)^2 = \overline{DM}^2 - m^2.$$

Со собирање на последните две равенства го добиваме равенството

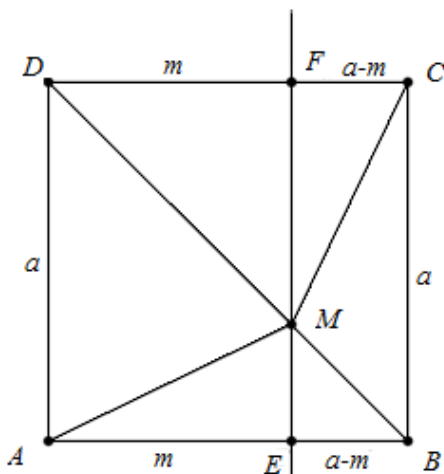
$$\overline{AM}^2 - m^2 + \overline{CM}^2 - (a - m)^2 = \overline{BM}^2 - (a - m)^2 + \overline{DM}^2 - m^2,$$

од каде следува равенството

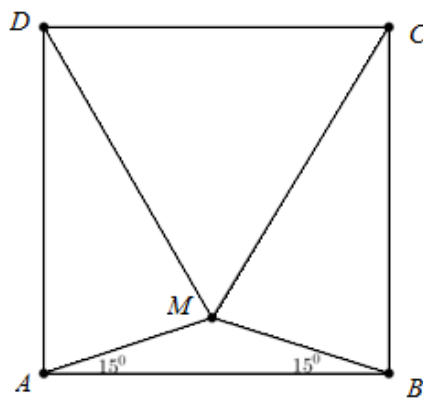
$$\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{DM}^2. \blacksquare$$

Задачи за самостојна работа

1. Ако се P и Q подножја на нормалите од тачката M на страните AB и AD , соодветно (цртеж 1), колку изнесува $\overline{MP} : \overline{MQ}$?
2. Нека во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е избрана точка



Цртеж 2



Цртеж 3

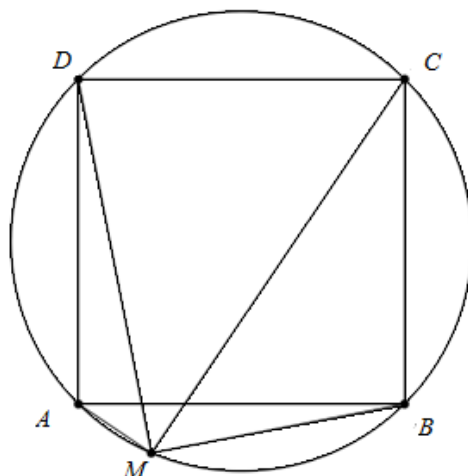
M таква да е $\angle ABM = \angle BAM = 15^\circ$ (цртеж 3). Докажи дека $\triangle CDM$ е рамностран.

3. На малиот лак AB на кружницата опишана околу квадратот $ABCD$ произволно е избрана точка M . Дали важи равенството

$$\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{DM}^2$$

(цртеж 4)?

4. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a . Точката E е средина на страната BC , а точката F е подножје на нормалата од



Цртеж 4

A на отсечката DE . Докажи дека $\triangle ABM$ е рамнокрак.

5. а) Докажи дека во произволен триаголник ABC важи равенството

$$\overline{AM}^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}, \quad (\overline{AM} \text{ е тежишна линија}).$$

б) Ако е точката P во внатрешноста на квадратот $ABCD$, со помош на претходното равенство докажи дека $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ