КЛАСЕ СРЕДИНА И ГЕОМЕТРИЈСКА ИЛУСТРАЦИЈА СРЕДИНА ДВА БРОЈА
(I ДЕО)

Борислав Мићић, Бањалука

Средња вредност, у најопштијем смислу, за позитивне реалне бројеве a и b назива се сваки реалан број који лежи између ових бројева (тај број може, коначно, и да се поклапа са једним од тих бројева).

Ако бројеви a и b нису једнаки међу собом, тада према самој дефиницији постоји бесконачно много средњих вредности за њих. Из тог бесконачног скупа често се издвајају средине, које су образоване од датих бројева помоћу неких правила, формула итд.

За позитивне реалне бројеве a и b најпознатије су следеће средње вредности, које се данас посматрају као класичне средине:

1) $A_2 = A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$ (аритметичка средина);

2) $G_2 = G(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$ (геометријска средина);

3) $H_2 = H(a,b) = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$ (хармонијска средина);

4) $K_2 = K(a,b) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (средњи степен другог реда или квадратна средина бројева).

Ове средине могу се дефинисати за 3, 4 и уопште за n било којих позитивних реалних бројева, али ми ћемо се овде ограничити само на средње вредности два броја јер нам је циљ да у равни геометријски представимо ове величине.

Какав је однос између ових средина? Одговор на то питање је следећи:

За било које позитивне бројеве a и b вреди:

$$H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b) \le K(a,b), \tag{I}$$

тј.

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Знаци једнакости вреде ако и само ако је $a = b$.

Први појам о аритметичкој и геометријској средини два броја потиче још од питагорејаца. Они су вероватно знали и за неједнакост $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$. Први доказ ове неједнакости дао је Еуклид.

Алгебарски докази за неједнакости (I) нису сложени, а могу се наћи и у неким средњошколским уџбеницима математике. Наш циљ је сада да дамо само геометријске илустрације овог ланца неједнакости, тј. да на разне начине представимо ове средине и чисто геометријским аргументима докажемо неједнакости између њих. Но, пре тога размотримо једну општије задану средину $C_2^{[\alpha]}(a_1, a_2)$ позитивних реалних бројева a_1 и a_2, која је дефинисана формулом

$$C_2^{[\alpha]}(a_1, a_2) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

за било које $\alpha \neq 0$. Ова дефиниција važi такође за било коју n-торку позитивних реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$, али ми ћемо се овде ограничити само на два броја.

Није тешко показати да сваки број који је одређен овом формулом лежи између бројева a_1 и a_2, тј. да је њоме заиста задана средина тих бројева.

Средњу вредност позитивних реалних бројева a_1, a_2, задану овом формулом, називамо *средњи степен реда α или степена средина реда α тих бројева.* У ствари, том формулом задана је једна шира *класа* $C^{[\alpha]}$ средина, којој припадају и наведене основне средине као специјални случајеви. Заиста, лако се види да је

$$C_2^{[-1]}(a_1, a_2) = H_2(a_1, a_2); \quad C_2^{[1]}(a_1, a_2) = A_2(a_1, a_2); \quad C_2^{[2]}(a_1, a_2) = K_2(a_1, a_2).$$

Може се показати да је и *геометријска средина* такође специјалан случај степене средине, тј. да је

$$G(a_1, a_2) = \sqrt{a_1 \cdot a_2} = \lim_{\alpha \to 0} C^{[\alpha]}(a_1, a_2),$$

па је и њу згодно означити са $C^{[0]}(a_1, a_2)$ и посматрати је као степену средину реда нула. Доказ последњег тврђења није сложен[1], али он излази изван оквира школског програма.

Може се доказати следеће важно својство степених средина.

СВОЈСТВО 1. *Ако је $\alpha < \beta$, тада је $C^{[\alpha]}(a_1, a_2) \leq C^{[\beta]}(a_1, a_2)$, при чему знак једнакости се достиже ако и само ако је $a_1 = a_2$.*

Пошто потпун доказ ове тврдње захтева додатна средства и више простора, а није нам овде нужан, изостављамо га. (Може се наћи у књизи "Inequalities" од П.П. Коровкина, Mir Publishers, 1975.).

Специјално, важи ланац неједнакости (*1*)

$$C_2^{[-1]}(a_1, a_2) \leq C_2^{[0]}(a_1, a_2) \leq C_2^{[1]}(a_1, a_2) \leq C_2^{[2]}(a_1, a_2),$$

тј.

$$H_2(a_1, a_2) \leq G_2(a_1, a_2) \leq A_2(a_1, a_2) \leq K_2(a_1, a_2).$$

---

[1] На пример, помоћу Лопиталовог правила добијамо:

$$\lim_{\alpha \to 0} \ln C^{[\alpha]}(a_1, a_2) = \lim_{\alpha \to 0} \ln \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(a_1^\alpha + a_2^\alpha) - \ln 2}{\alpha} \overset{(\text{Л.П.})}{=}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a_1^\alpha \ln a_1 + a_2^\alpha \ln a_2}{a_1^\alpha + a_2^\alpha} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2}{2} = \ln \sqrt{a_1 \cdot a_2}, \text{ откуда } \lim_{\alpha \to 0} C^{[\alpha]}(a_1, a_2) = \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Сада пређимо на разматрање геометријске интерпретације ових основних средина из класе степених средина.

Пример 1. *Нека је у правоуглом троуглу ABC (слика 1.) $\overline{CD}$ висина на хипотенузу, тачка O центар описане кружнице, $AD = a$, $DB = b$, $\overline{DE} \perp \overline{CO}$. Тада је*

$$а)\ OC = \frac{a+b}{2} = A(a,b) \qquad б)\ DC = \sqrt{ab} = G(a,b)$$

$$в)\ CD = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = H(a,b) \qquad г)\ CD \le DC \le OC.$$

Доказ. а) Очигледно,

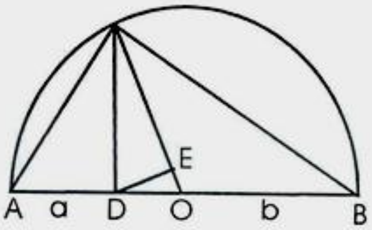
$$OC = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

б) Троуглови ADC и BDC су слични. (Зашто?) Отуда следи

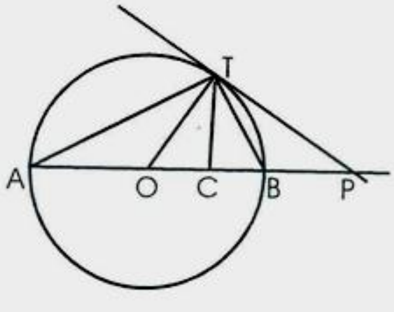
$$CD : a = b : CD, \quad \text{тј. } CD^2 = ab, \quad \text{одакле} \quad CD = \sqrt{ab}. \tag{2}$$

в) Из сличности правоуглих троуглова OCD и CDE следи $CD : CO = CE : CD$, тј. $CD^2 = CO \cdot CE$. Отуда $CE = \dfrac{CD^2}{CO}$, па заменом (1) и (2) добијамо

$$CE = \frac{CD^2}{CO} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = H(a,b). \tag{3}$$



Слика 1.



Слика 2.

г) Како у сваком правоуглом троуглу катета није већа од хипотенузе, то у правоуглом ΔOCD вреди неједнакост: $CD \le CO$. Једнакост се постиже само у случају када се тачке D и O поклапају, тј. када је $a = b$. С обзиром на (1) и (2) доказана је неједнакост

$$G(a,b) \le A(a,b), \quad \text{тј. } \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}. \tag{4}$$

Дакле, геометријска средина два броја a и b није мања од аритметичке средине тих бројева. Једнакост се постиже само у случају када је $a = b$.

У правоуглом ΔOCD је $CE \leq CD$, па с обзиром на (2) и (3) доказана је неједнакост

$$H(a,b) \leq G(a,b), \quad \text{тј. } \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{a \cdot b}. \tag{5}$$

Дакле, хармонијска средина два броја a и b није мања од геометријске средине тих бројева. Једнакост се постиже само у случају када је $a = b$.

Како је $CE \leq CD$ и $CD \leq CO$, то можемо писати

$$CE \leq CD \leq CO.$$

Дакле, добили смо геометријску илустрацију уређења између хармонијске, геометријске и аритметичке средине два позитивна броја, тј.

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \quad \text{или} \quad \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}. \tag{6}$$

Једнакости се постижу ако и само ако се тачке O, D и E поклапају, а то значи ако и само ако је $a = b$.

Пример 2. *Посматрајмо опет правоугли троугао ABT, око кога је описана кружница $k(O, OT)$ (слика 2.). Нека је PT тангента повучена у тачки T кружнице и $\overline{TC} \perp \overline{AB}$. Нека је сада $AP = a_1$, $BP = a_2$. Тада је:*

а) $OP = \dfrac{AP + BP}{2} = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, *б)* $TP = \sqrt{AB \cdot BP} = \sqrt{a_1 a_2}$,

в) $CP = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}}$, *г)* $CP \leq TP \leq OP$.

Доказ. Из $OP = OB + BP$ следи

а) $$OP = \frac{2OB + 2BP}{2} = \frac{2OB + BP + BP}{2} = \frac{AP + BP}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}. \tag{7}$$

б) Троуглови APT и BPT су слични, јер имају подударне углове. Заиста, угао код темена P је заједнички; $\angle BTP = \angle OTA$, јер су им нормални краци, $PT \perp OT$ и $BT \perp AT$. Даље, $\angle OTA = \angle OAT$, као углови на основици $\overline{AT}$ једнакокраког троугла ATO. Дакле,

$$\angle BTP = \angle OAT = \angle PAT.$$

Из сличности троуглова APT и BPT следи

$$TP : AP + BP : TP, \quad TP^2 = AP \cdot BP,$$

тј.

$$TP = \sqrt{AP \cdot BP} = \sqrt{a_1 a_2}. \tag{8}$$

в) У правоуглом ΔOTP дуж $\overline{TC}$ је висина на хипотенузи $\overline{OP}$. Из сличности троуглова OTP и TCP (Зашто?) следи $TP : OP = CP : TP$, одакле $CP \cdot OP = TP^2$. С обзиром на (7) и (8), добијамо

$$CP = \frac{TP^2}{OP} = \frac{a_1 a_2}{\frac{a_1 + a_2}{2}} = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}. \tag{9}$$

г) Како је у правоуглом троуглу TPC, $CP \leq TP$, у правоуглом троуглу OTP, $TP \leq OP$, следи

$$CP \leq TP \leq OP,$$

што даје неједнакости (6) за хармонијску, геометријску и аритметичку средину.

Пример 3. *а) Ако је у правоуглом троуглу дужина хипотенузе једнака полузбиру два позитивна реална броја x и y, дужина једне катете полуразлици тих бројева, тада је дужина друге катете геометријска средина, а дужина њене нормалне пројекције на хипотенузу хармонијска средина бројева x и y.*

б) Ако је у правоуглом троуглу дужина једне катете једнака полузбиру, а друге полуразлици позитивних бројева x и y, тада је дужина хипотенузе једнака квадратној средини бројева x и y.

Доказ. а) Нека је у правоуглом троуглу ABC (слика 3.) дужина хипотенузе $AB = c = \dfrac{x+y}{2}$, а дужина катете $BC = a = \dfrac{x-y}{2}$. Тада је, према Питагориној теореми, дужина друге катете

$$AC = b = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = \sqrt{xy}.$$

Дужина њене нормалне пројекције на хипотенузу је

$$AD = p = \frac{b^2}{c} = \frac{xy}{\frac{x+y}{2}} = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Како је у правоуглом троуглу ADC, $AD \leq AC$, то је $H(x,y) \leq G(x,y)$. У правоуглом троуглу ABC је $AC \leq AB$, а то значи $G(x,y) \leq A(x,y)$.

б) Посматрајмо сада правоугли троугао ABE на истој сл. 3, у коме је, по претпоставци, $AB = c = \dfrac{x+y}{2}$ дужина катете $\overline{AB}$, а $BD = a = \dfrac{x-y}{2}$ дужина катете $\overline{BD}$. Дужина хипотенузе $\overline{AE}$ је тада

$$AE = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = K(x,y).$$

Како је у правоуглом троуглу ABE, $AB \leq AE$, то је

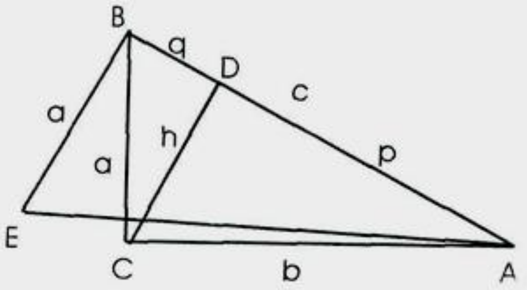
$$A(x,y) \leq K(x,y).$$

Због транзитивности релације " $\leq$ " важи

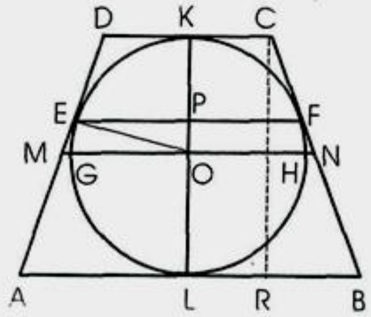
$$AD \leq AC \leq AB \leq AE.$$

Дакле, доказали смо ланац неједнакости

$$H(x,y) \leq G(x,y) \leq A(x,y) \leq K(x,y).$$



Слика 3.



Слика 4.

Приметимо да се за сваки правоугли троугао са страницама a, b и c могу наћи бројеви x, y који задовољавају наведене неједнакости, а једнакости посматраних средина се постижу само кад је троугао дегенерисан, тј. кад му је једна катета равна нули, рецимо $a = 0$, друга катета b једнака хипотенузи c, која се истовремено подудара са нормалном пројекцијом p.

Размотримо даље како се помоћу трапеза могу представити посматране средине два броја и доказати неједнакости између тих средина

Пример 4. *У једнакокраки трапез $ABCD$, са дужинама основица $AB = a$, $CD = b$, уписана је кружница (слика 4.). Нека је $\overline{EF}$ тетива која спаја додирне тачке E и F кракова са кружницом, $\overline{MN}$ средња линија трапеза и $\overline{GH}$ пречник кружнице. Тада је*

$$EF = \frac{2ab}{a+b}, \quad GH = \sqrt{ab}, \quad MN = \frac{a+b}{2} \quad и \quad EF \leq GH \leq MN.$$

Неједнакости прелазе у једнакости ако су паралелне стране трапеза једнаке, тј. $a = b$.

Доказ. Прво приметимо да је дужина кракова овог трапеза $AD = BC = \frac{a+b}{2}$. (Зашто?). Из правоуглог троугла BCR добијамо висину трапеза

$$RC^2 = BC^2 - BR^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab; \quad RC = \sqrt{ab}.$$

Пречник круга $\overline{KL}$ лежи на симетрали трапеза и $KL = RC = \sqrt{ab}$. Тиме је доказано да је дужина пречника уписане кружнице једнака геометријској средини дужина основица трапеза, тј. $GH = \sqrt{ab}$.

Већ је познато да је дужина средње дужи трапеза $MN = \dfrac{a+b}{2}$.

Докажимо сада да је дужина тетиве $\overline{EF}$ једнака хармонијској средини дужина основица трапеза. Правоугли троуглови OEP и OEM су слични, јер су им подударни одговарајући углови. Отуда следи

$$EP : OE = OE : OM, \quad \text{тј.} \quad EP : \frac{1}{2}\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{ab} : \frac{1}{4}(a+b),$$

одакле је $EP = \dfrac{ab}{a+b}$, па је $EF = 2 \cdot EP = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Будући да било која тетива није већа од пречника круга, а пречник уписаног круга није већи од средње дужи трапеза, добијамо ланац неједнакости

$$EF \leq GH \leq MN.$$

Пример 5. *Дат је трапез $ABCD$ с основицама $AB = a$ и $CD = b$ $(b < a)$ (слика 5.).*

1) Нека је дуж $\overline{EF}$ паралелна основицама трапеза и пролази пресециштем дијагонала трапеза. Тада је $EF = \dfrac{2ab}{a+b}$.

2) Нека дуж $\overline{PQ}$, која је паралелна основицама трапеза $ABCD$, разбија трапез на два слична трапеза. Тада је $PQ = \sqrt{ab}$.

3) Нека дуж $\overline{RT}$, која је паралелна основицама трапеза $ABCD$, дели трапез на два трапеза $ABTR$ и $RTCD$ једнаких површина. Тада је $RT = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

4) Ако је $\overline{MN}$ средња линија трапеза $ABCD$, тада је $MN = \dfrac{a+b}{2}$ (добро познато).

5) $EF \leq PQ \leq MN \leq RT$.

Доказ. 1) Троуглови ACD и ASE су слични. Отуда

$$AC : AS = CD : ES \Rightarrow (AS + SC) : AS = b : ES \Rightarrow ES = \frac{b \cdot AS}{AS + SC}. \qquad (*)$$

Троуглови ABS и CDS су слични, па вреди $AS : SC = a : b$, одакле $AS = \dfrac{a \cdot SC}{b}$. Замењујући (*), добијамо $ES = \dfrac{ab}{a+b}$, па је $EF = 2 \cdot ES = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

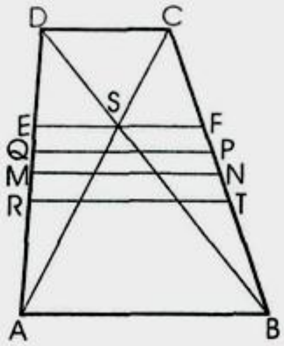
2) Ако је трапез $ABPQ$ сличан трапезу $PQCD$, тада је $a : PQ = PQ : b$, одакле $PQ = \sqrt{ab}$.

3) Нека је $RT = x$ (слика 6.). Тада је по услову $\dfrac{(a+x) \cdot HT}{2} = \dfrac{(x+b) \cdot TK}{2}$, тј.

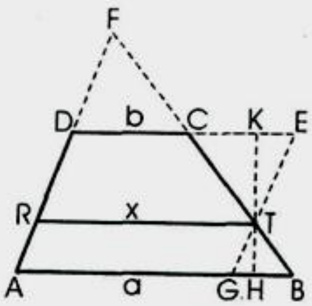
$$\frac{a+x}{x+b} = \frac{TK}{HT}. \qquad (*)$$

Из сличности троуглова GBT и CET, где је $GB = a-x$ и $CE = x-b$, налазимо

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{TK}{HT}. \qquad (**)$$



Слика 5.



Слика 6.

Из једнакости (*) и (**) добијамо

$$\frac{a+x}{x+b} = \frac{x-b}{a-x}, \quad a^2 - x^2 = x^2 - b^2, \text{ одакле } x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

5) С обзиром да дуж $\overline{RT}$ дели трапез на два дела једнаких површина, јасно је да се та дуж налази између средње дужи $\overline{MN}$ и основице $\overline{AB}$ трапеза. Оставља се читаоцу да закључи (покаже) да се дуж PQ налази између дужи EF и MN. У том случају доказано је да важи

$$EF \leq PQ \leq MN \leq RT, \text{ тј. } \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

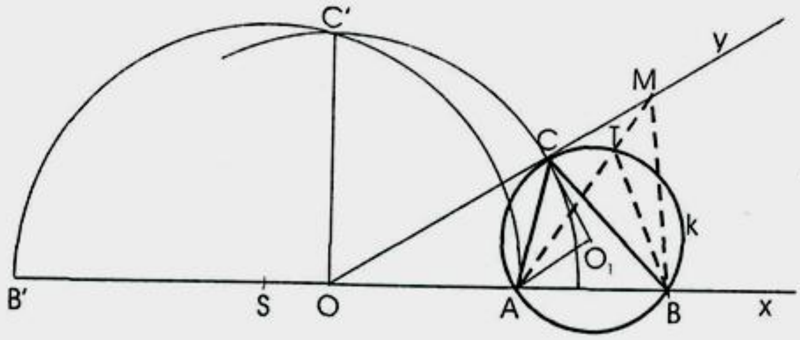
Очигледно, неједнакости прелазе у једнакости ако и само ако су основице трапеза једнаке тј. $a = b$.

Задатак 1. Ако је у једнакокраком троуглу дужина крака геометријска средина дужине основице и висине која одговара основици, доказати да је основица два пута већа од висине.

Решење. Ако су a, h и b редом дужине основице, висине и крака, тада из $b^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$ и $b^2 = ah$ следи $(a-2h)^2 = 0$, тј. $a - 2h = 0$, $a = 2h$.

Задатак 2. На једном краку оштрог угла xOy дате су произвољно две тачке A и B. Одредити на другом краку тог угла тачку C тако да $\angle ACB$ буде највећи. Конструисати тачку C помоћу лењира и шестара.

Решење. Нека је k кружница с центром O_1 која пролази тачкама A и B и додирује крак Oy у тачки C. Та тачка је тражена тачка (слика 7.).



Слика 7.

Доказ. Заиста, нека је M било која друга тачка на краку Oy, $M \neq C$. Тада је $\angle AMB < \angle ATB$ (јер је $\angle ATB$ спољашњи угао троугла BMT код темена T). Како је $\angle ACB = \angle ATB$ (периферијски над истим луком), то је $\angle AMB < \angle ACB$ за било коју тачку $M \in Oy$, различиту од C.

Конструкција. $\triangle OAC \sim \triangle OCB$, јер је $\angle AOC = \angle BOC = \angle xOy$ и $\angle OCA = \angle ABC$, јер је угао између тетиве и тангенте у крајњој тачки тетиве једнак периферијском углу над том тетивом.

Из сличности ових троуглова следи

$$OA : OC = OC : OB, \quad OC^2 = OA \cdot OB, \quad OC = \sqrt{OC \cdot OB}.$$

Дакле, OC је геометријска средина од OA и OB, па дуж $\overline{OC}$ можемо конструисати на следећи начин. Узмимо тачку B' на продужетку крака Ox тако да је она симетрична са тачком B у односу на тачку O, тј. $OB' = OB$. Опишимо кружницу са центром у тачки $S \in \overline{AB'}$ која полови дуж $\overline{AB'}$ и полупречником $SA = \dfrac{OA + OB'}{2}$. Тада је

$$OC' = \sqrt{OA \cdot OB'} = \sqrt{OA \cdot OB} = OC.$$

Према томе, тачка C ће бити пресечна тачка кружног лука описаног око центра O, полупречника OC' и крака Oy.

Задатак 3. Полупречник основе праве кружне купе једнак је R, а њена висина је једнака H. Који од ваљака, уписаних у ту купу има највећу површину омотача?

Решење. Означимо са r и h полупречник и висину ваљка који је уписан у купу (слика 8.). Имамо:

$$\triangle AOV \sim \triangle CO_1V \Rightarrow R : r = H : (H - h), \qquad r = \frac{R(H-h)}{H}.$$

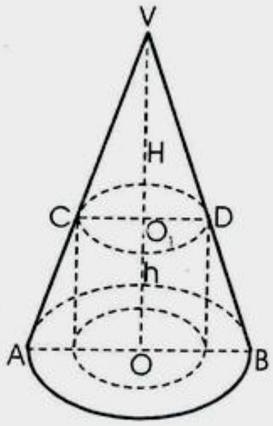
Површина омотача ваљка је

$$M = 2r\pi h = \frac{2R\pi h(H-h)}{H}.$$

Дакле, површина омотача зависи само од висине h, па можемо писати:

$$M(h) = \frac{2R\pi}{H}h(H-h),\ 0 < h < H.$$

Површина $M(h)$ постиже највећу вредност за оне вредности h за које је и производ $h(H-h)$ највећи.



Слика 8.

Како је $h > 0$, $H-h > 0$, то применом неједнакости између геометријске и аритметичке средине имамо $h(H-h) \leq \left(\frac{h+H-h}{2}\right)^2 = \frac{H^2}{4}$. Дакле, највећа вредност за $h(H-h)$ је $\frac{H^2}{4}$, а постиже се онда кад је $h = H-h$, тј. кад је $h = \frac{H}{2}$. Пошто вредност $h = \frac{1}{2}H$ лежи у интервалу $0 < h < H$, највећа површина омотача уписаног ваљка је

$$M(h)_{\max} = M\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{1}{2}R\pi H,$$

а постиже се кад је висина уписаног ваљка једнака половини висине купе.

И без неједнакости могли смо добити:

$$M(h) = \frac{2R\pi}{H}h(H-h) = -\frac{2R\pi}{H}(h^2 - Hh) = -\frac{2R\pi}{H}\left(h - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{R\pi H}{2}.$$

Одавде се види да је

$$M(h)_{\max} = \frac{1}{2}R\pi H,\ \text{за}\ h = \frac{1}{2}H.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2002/03 година