Републички натпревар 2008

I година

1. Колку делители на бројот 30^{2008} не се делители на бројот 20^{2007}?

Решение. Бидејќи $30^{2008}=2^{2008}\cdot 3^{2008}\cdot 5^{2008}$ и $20^{2007}=2^{4014}\cdot 5^{2007}$, тогаш сите делители на 30^{2008} кои не се делители на 20^{2007} се од вид:

1) $2^k\cdot 3^l\cdot 5^m$, $l=1,...,2008, k,m=0,1,...,2008$ и нив ги има вкупно $2008\cdot 2009^2$ или од вид:

2) $2^k\cdot 5^m$, $m=2008$, $k=0,1,2,...,2008$ и нив ги има $1\cdot 2009=2009$.

Значи, има вкупно $2008\cdot 2009^2+2009$ делители на бројот 30^{2008} не се делители на бројот 20^{2007}.

2. Нека за реалните броеви x,y,z и a важат равенствата $x+y+z=a$ и

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}. \tag{1}$$

Докажи дека $x=a$ или $y=a$ или $z=a$..

Решение. Заради равенството (1), броевите x,y,z и a се ненулти. Според тоа $x+y+z\neq 0$, и заради равенството $x+y+z=a$ добиваме

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{a}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) го добиваме равенството

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z},$$

Кое последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)=xyz,$$

$$x^2y+xy^2+xyz+xyz+y^2z+yz^2+zx^2+xyz+z^2x=xyz,$$

$$x^2(y+z)++yz(y+z)+xy(y+z)+xz(y+z)=0,$$

$$(y+z)(x^2+xy++yz+zx)=0,$$

$$(y+z)[x(x+y)+z(x+y)]=0,$$

т.е. со неравенството

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0. \tag{3}$$

Од равенството $x+y+z=a$ добиваме дека

$$x+y=a-z,\ y+z=a-x,\ z+x=a-y,$$

и ако замениме во (3) добиваме

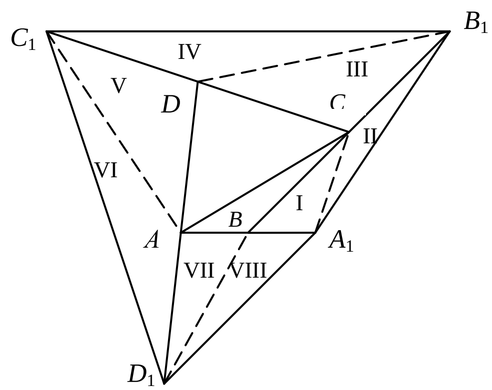
$$(a-z)(a-x)(a-y)=0.$$

Од последното равенство следува дека барем еден од броевите $a-x, a-y, a-z$ е еднаков на нула. Значи, $x=a$ или $y=a$ или $z=a$.

3. Даден е конвексен четириаголник *ABCD* со плоштина *P*. Ја продолжуваме страната *AB* преку *B* до A_1, така што $\overline{AB}=\overline{BA_1}$, потоа *BC* преку *C* до B_1, така што $\overline{BC}=\overline{CB_1}$, па *CD* преку *D* до C_1, т.ш. $\overline{CD}=\overline{DC_1}$ и *DA* преку *A* до D_1, така што $\overline{DA}=\overline{AD_1}$. Колкава е плоштината на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$?

Решение. Ги спојуваме *A* со C_1, *B* со D_1, *C* со A_1, *D* со B_1. Тогаш,

$$P_{\triangle ABC}=P_I=P_{II}$$
$$P_{\triangle BCD}=P_{III}=P_{IV}$$
$$P_{\triangle CDA}=P_V=P_{VI}$$
$$P_{\triangle DAB}=P_{VII}=P_{VIII}$$



каде што

$P_I=P_{\triangle BA_1C}$, $P_{II}=P_{\triangle CA_1B_1}$,

$P_{III}=P_{\triangle DCB_1}$, $P_{IV}=P_{\triangle C_1DB_1}$,

$P_V=P_{\triangle C_1DA}$, $P_{VI}=P_{\triangle C_1D_1A}$,

$P_{VII}=P_{\triangle AD_1B}$, $P_{VIII}=P_{\triangle BD_1A_1}$

Имаме:

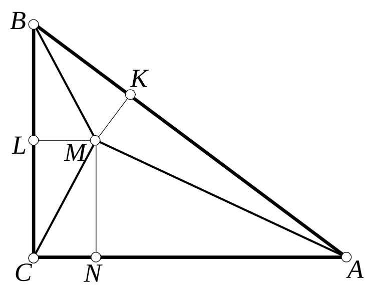
$$P_{\triangle ABC}+P_{\triangle BCD}+P_{\triangle CDA}+P_{\triangle DAB}=P_I+P_{III}+P_V+P_{VII}=$$
$$=P_{II}+P_{IV}+P_{VI}+P_{VIII}=2P$$
$$P_1=P+(P_I+P_{II}+P_{III}+P_{IV}+P_V+P_{VI}+P_{VII}+P_{VIII})=P+(2P+2P)=5P.$$

4. Страните на еден триаголник имаат должини $a=3$, $b=4$ и $c=5$. Дали постои точка во внатрешноста на триаголникот која е на растојание помало од 1 од секоја од страните на триаголникот.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој $\overline{BC}=a=3$, $\overline{AC}=b=4$ и $\overline{AB}=c=5$ се должините на страните. Заради равенството

$$a^2+b^2=3^2+4^2=5^2=c^2,$$

според обратната теорема на Питагора триаголникот е правоаголен.



Нека M е точка од внатрешноста на траиголникот која е на растојание помало од 1 од секоја страна на триаголникот ABC. Нека точките K, L и N се подножја на нормалите повлечени од точката M кон страните AB, BC и CA соодветно (види цртеж). Тогаш отсечките MK, ML и MN се висини во триаголниците AMB, BMC и CMA соодветно. При тоа

$$P_{ABC} = P_{AMB} + P_{BMC} + P_{CMA}. \qquad (1)$$

Ако $\overline{MK} = x, \overline{ML} = y$ и $\overline{MN} = z$, тогаш според претпоставката на задачата $x, y, z < 1$. Од друга страна

$$P_{BMC} + P_{CMA} + P_{AMB} = \frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6 = P_{ABC},$$

што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува дека таква точка M не постои.

II година

1. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека ако $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ е цел број, тогаш тој е точен квадрат.

Решение. Нека $a, b \in N$ и $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = k \in Z$. Од последното равенство следува дека

$$a^2 b + b^2 - a = kab, \qquad (1)$$

од каде следува дека $b \mid a$. Нека $a = bq$, $q > 0$, $q \in Z$. Со замена во (1) добиваме

$$b^3 q^2 + b^2 - bq = kb^2 q,$$

а по делење со b ($b > 0$) добиваме

$$b^2 q^2 + b - q = kbq, \qquad (2)$$

од каде следува дека $q \mid b$. Нека $b = qt$, $t > 0$, $t \in Z$. Со замена во (2) добиваме

$$q^4 t^2 + qt - q = kq^2 t,$$

а по делењето со q ($q > 0$), добиваме

$$q^3 t^2 + t - 1 = kqt, \qquad (3)$$

од каде следува дека $t \mid 1$ и од $t > 0$ добиваме дека $t = 1$. Потоа, од $b = qt$ и $t = 1$, добиваме дека $b = q$. Од $a = bq$ и $b = q$, добиваме дека $a = b^2$. И конечно, од $k = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ и $a = b^2$ добиваме дека

$$k = b^2 + \frac{b}{b^2} - \frac{1}{b} = b^2,$$

што требаше и да се докаже.

2. Нека $a > 0$. Докажи дека за секое реално решение x на равенката $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) важи

$$x \geq \frac{4q - (p+a)^2}{4a}. \qquad (1)$$

Решение. Равенката има реални решенија, па затоа $\sqrt{p^2-4q}\geq 0$. Во (1) ставаме $x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ и даденото неравенство го трансформираме во еквивалентни неравенства

$$p^2-4q\pm 2a\sqrt{p^2-4q}+a^2\geq 0\Leftrightarrow(\sqrt{p^2-4q}\pm a)^2\geq 0 .$$

Јасно, последново неравенство е секогаш точно, што значи дека е точно неравенството (1).

3. Дадени се $2n$ ($n>1$) точки кои лежат во една рамнина. Правата p лежи во истата рамнина и не минува низ ниту една од дадените точки. Докажи дека правата сече не повеќе од n^2 отсечки чии краеви се во дадените точки.

Решение. Нека дадените точки и правата p лежат во рамнината π.Правата p ја дели рамнината π на две полурамнини π_1 и π_2. Ако во едната полурамнина лежат m точки, тогаш во другата полурамнина лежат $2n-m$ точки. Отсечки на кои двете крајни точки им се во иста полурамнина правата не ги сече. Правата ги сече отсечките, со крајни точки во дадените, на кои едниот крај му е во полурамнината π_1 а другиот крај им е во полурамнината π_2. Такви отсечки има $m(2n-m)$. Бидејќи

$$n^2-m(2n-m)=n^2-2nm+m^2=(n-m)^2\geq 0,$$

добиваме дека $n^2\geq m(2n-m)$.

Значи, правата не сече повеќе од n^2 отсечки.

4. Во даден петаголник $ABCDE$, точките K,L,M,N се средини на страните на петаголникот AB,BC,CD,DE соодветно. Нека точките P,Q се средини на отсечките KM,LN соодветно. Докажи дека PQ и AE се паралелни и дека $\overline{AE}=4\overline{PQ}$.

Решение. Нека со F ја означиме средината на дијагоналата AD на петаголникот (направи цртеж). Го разгледуваме четириаголникот $ADCB$. Во него е впишан четириаголник $KFML$ чии темиња се средини на страните на четириаголникот $ADCB$ и јасно $KFML$ е паралелограм. Во паралелограмот дијагоналите се преполовуваат, па точката P, која е средина на отсечката KM, е таква да $P\in LF$ и истовремено е средина и на отсечката LF. Во триаголникот LFN , отсечката PQ е средна линија и $PQ\parallel FN$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{FN}$. Од триаголникот ADE може да се заклучи дека FN е средна линија и $FN\parallel AE$ и $\overline{FN}=\frac{1}{2}\overline{AE}$. Конечно $PQ\parallel FN\parallel AE$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{FN}=\frac{1}{4}\overline{AE}$, што значи дека PQ и AE се паралелни и притоа важи $\overline{AE}=4\overline{PQ}$.

III година

1. Во правоаголен триаголник со катети a и $b, a>b$, важи равенството

$$\lg\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b-\lg 2).$$

Најди ги аглите на триаголникот.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$\lg\frac{a-b}{2}=\lg\sqrt{\frac{ab}{2}},$$

па затоа

$$\frac{a-b}{2}=\sqrt{\frac{ab}{2}}\Leftrightarrow\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{ab}{2}\Leftrightarrow a^2-4ab+b^2=0.$$

Јасно $a>b>0$ и ако поделиме со b^2 добиваме квадратна равенка по $\frac{a}{b}$ во облик $(\frac{a}{b})^2-4\frac{a}{b}+1=0$, чии решенија се $\frac{a}{b}=2\pm\sqrt{3}$. Но $\frac{a}{b}>1$, па затоа $\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}$. Од друга страна $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$, па затоа $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}$. Можни се две решенија по α како агол во правоаголен триаголник и тоа $\alpha=75^0$ или $\alpha=15^0$, но како $a>b$ мора и $\alpha>\beta$, односно $\alpha=75^0$ и $\beta=15^0$.

2. α е произволен агол, а β и γ се остри агли. Докажи дека постои агол x за кој $\sin x=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

Решение. Доволно е да покажеме дека $\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$ е вредност од интервалот $[-1,1]$, а оттаму истата соодветствува на вредност на $\sin x$ за некој агол x. Од условот на задачата, односно од тоа што β и γ се остри агли важат следниве неравенства: $\cos\beta>0, \cos\gamma>0$, а оттаму и $\cos\beta\cdot\cos\gamma>0$. Во исто време заради ограниченоста на функцијата $\cos x$ важи $\cos\alpha\le 1$. Ако го помножиме неравенството $\cos\alpha\le 1$ со неравенството $\cos\beta\cdot\cos\gamma>0$ добиваме

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\le\cos\beta\cdot\cos\gamma,$$

односно

$$-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\ge-\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

Од адиционите теореми важи и

$$\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\cos(\beta-\gamma)\le 1.$$

Тогаш

$$0<\sin\beta\cdot\sin\gamma\le 1-\cos\beta\cdot\cos\gamma\le 1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma,$$

а оттука

$$0<\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\le 1,$$

што требаше да се докаже. Значи постои агол x за кој $\sin x = \frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

3. Реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_{2008}$ ги задоволуваат неравенствата

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & - & 5a_2 & + & 4a_3 & \geq & 0 \\ a_2 & - & 5a_3 & + & 4a_4 & \geq & 0 \\ a_3 & - & 5a_4 & + & 4a_5 & \geq & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2007} & - & 5a_{2008} & + & 4a_1 & \geq & 0 \\ a_{2008} & - & 5a_1 & + & 4a_2 & \geq & 0\,. \end{array}$$

Ако се знае дека $a_1 = 2$, одреди ги $a_2, a_3, ..., a_{2008}$.

Решение. Нека постои $i \in \{1, 2, 3, ..., 2008\}$ така што $a_i - 5a_{i+1} + 4a_{i+2} > 0$ (ако $i+1 = 2009$, тогаш $a_{i+1} = a_1$, $a_{i+2} = a_2$; ако $i+2 = 2009$, тогаш $a_{i+2} = a_1$). Во тој случај, ако ги собереме неравенствата, би добиле $0 > 0$. Заради добиената контрадикција, добиваме дека $a_i - 5a_{i+1} + 4a_{i+2} = 0$, $i = 1, 2, 3, ..., 2008$ (ако $i+1 = 2009$, тогаш $a_{i+1} = a_1$, $a_{i+2} = a_2$; ако $i+2 = 2009$, тогаш $a_{i+2} = a_1$).

Значи, неравенствата стануваат равенства и добиваме систем:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_1 & - & 5a_2 & + & 4a_3 & = & 0 \\ a_2 & - & 5a_3 & + & 4a_4 & = & 0 \\ a_3 & - & 5a_4 & + & 4a_5 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2007} & - & 5a_{2008} & + & 4a_1 & = & 0 \\ a_{2008} & - & 5a_1 & + & 4a_2 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Од првото равенство добиваме

$$a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3)\,.$$

Од второто равенство добиваме

$$a_2 - a_3 = 4(a_3 - a_4)\,.$$

Ако замениме во претходното равенство, добиваме

$$a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3) = 4^2(a_3 - a_4)\,.$$

Од третото равенство имаме

$$a_3 - a_4 = 4(a_4 - a_5)\,.$$

Ако замениме во претходното равенство, добиваме

$$a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3) = 4^2(a_3 - a_4) = 4^3(a_4 - a_5)\,.$$

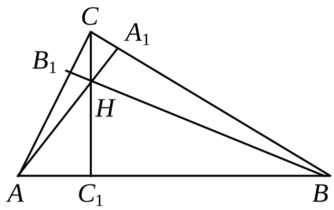
Ако ваквата постапка ја повториме со четворото, петтото, …, двеилјади и осмото равенство, добиваме

$$a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3) = 4^2(a_3 - a_4) = 4^3(a_4 - a_5) = ... = 4^{2008}(a_1 - a_2)\,.$$

Од равенството $a_1-a_2=4^{2008}(a_1-a_2)$ добиваме $a_1-a_2=0$, односно $a_1=a_2$. Според тоа $a_2=2$. Од првата равенка добиваме $4a_3=8$, т.е. $a_3=2$. Аналогно од втората равенка добиваме $a_4=2$, од третата $a_5=2$, …., од двеилјади и шестата равенка $a_{2008}=2$.

Значи, $a_1=a_2=...=a_{2008}=2$.

4. Нека H е ортоцентарот во $\triangle ABC$ и нека A_1,B_1,C_1 се подножјата на висините спуштени од A,B,C соодветно. Нека $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}=2008$. Пресметај го производот $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}\cdot\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}\cdot\frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}$.



Решение. Имаме,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+1=\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+\frac{\overline{HA_1}}{\overline{HA_1}}=\frac{\overline{AA_1}}{\overline{HA_1}}=\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle HBC}}.$$

Слично,

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}+1=\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle HCA}} \text{ и } \frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}+1=\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle HAB}}.$$

Да означиме со $x=P_{\triangle HBC}$, $y=P_{\triangle HCA}$, $z=P_{\triangle HAB}$, тогаш $P_{\triangle ABC}=x+y+z$. Со овие ознаки и претходните трансформации, равенството $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}=2008$ преминува во

$$\frac{x+y+z}{x}-1+\frac{x+y+z}{y}-1+\frac{x+y+z}{z}-1=2008,$$

што е еквивалентно со

$$(x+y+z)(yz+xz+xy)=2011xyz.$$

Производот што треба да се пресмета е

$$\left(\frac{x+y+z}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{x+y+z}{y}-1\right)\cdot\left(\frac{x+y+z}{z}-1\right)=\frac{y+z}{x}\cdot\frac{x+z}{y}\cdot\frac{x+y}{z}=\frac{(y+z)\cdot(x+z)\cdot(x+y)}{xyz}$$
$$=\frac{(x+y+z)\cdot(yz+xz+xy)-xyz}{xyz}=\frac{2011xyz-xyz}{xyz}=2010.$$

IV година

1. Најди го збирот на сите нескратливи дропки со именител 7 кои се наоѓаат меѓу природните броеви a и b, $a<b$.

Решение. Да ги запишеме a и b во обликот $\frac{7a}{7}$ и $\frac{7b}{7}$. Сите дропки со именител еднаков на 7, вклучувајќи ги и a и b може да се запишат како

$$\frac{7a}{7},\frac{7a+1}{7},\frac{7a+2}{7},....,\frac{7b-1}{7},\frac{7b}{7}. \qquad (1)$$

Од нив, само

$$\frac{7a}{7}, \frac{7a+7}{7}, \frac{7a+14}{7}, ..., \frac{7b-7}{7}, \frac{7b}{7} \qquad (2)$$

се скратливи. Збирот на нескратливите дропки ќе ја пресметаме така што од збирот на сите дропки од низата (1) ќе го одземеме збирот на броевите од низата (2).

Збирот на броевите од низата (1) е збир на броеви од аритметичка прогресија со прв член $\frac{7a}{7}$ и разлика $\frac{1}{7}$. Вкупниот број на собироци ќе го определиме од равенството

$$b = a + (n-1)\frac{1}{7},$$

$$7b = 7a + n - 1,$$

$$n = 7b - 7a + 1.$$

Значи, збирот на броевите од аритметичката прогресија (1) е :

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{7b-7a+1}{2}[2a + (7b - 7a + 1 - 1)\frac{1}{7}] = \frac{7b-7a+1}{2}(a+b).$$

Броевите од низата (2) се исто така членови на аритметичка прогресија во која разликата е еднаква на 1 и последен член b, па бројот на нејзини членови е

$$b = a + (k-1)\cdot 1,$$

$$k = b - a + 1.$$

Значи, нивниот збир е еднаков на

$$\frac{b-a+1}{2}(2a + (b - a + 1 - 1)) = \frac{b-a+1}{2}(a+b).$$

Конечно, бараната сума е:

$$S = \frac{(b+a)(7b-7a+1)}{2} - \frac{(b+a)(b-a+1)}{2} = \frac{b+a}{2}(7b - 7a + 1 - b + a - 1)$$

$$= \frac{b+a}{2}(6a - 6b) = 3(a^2 - b^2).$$

2. Нека $a_1, a_2, ..., a_{2008}$ се реални броеви такви што

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2008} = 0 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_{2008}^2 = 502 \end{cases}. \qquad (1)$$

Одреди ја максималната вредност за a_{2008}. Најди барем една низа од вредности $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ во која таа се достигнува.

Решение. Според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ имаме

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{2007})^2 = (1\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + ... + 1\cdot a_{2007})^2$$

$$\leq (\underbrace{1^2 + 1^2 + ... + 1^2}_{2007-\text{пати}})(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2007}^2) \qquad (2)$$

$$= 2007(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2007}^2).$$

Равенство се достигнува ако и само ако $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \frac{a_3}{1} = ... = \frac{a_{2007}}{1}$, односно

$$a_1 = a_2 = ... = a_{2007}.$$

Равенствата (1) ќе ги запишеме во вид

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2007} = -a_{2008} \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_{2007}^2 = 502 - a_{2008}^2 \end{cases}$$

и ако замениме во (2) добиваме

$$(-a_{2008})^2 \leq 2007(502 - a_{2008}^2).$$

Значи, $a_{2008}^2 \leq \frac{2007 \cdot 502}{2008} = \frac{2007}{4}$, од каде добиваме $|a_{2008}| \leq \frac{\sqrt{2007}}{2}$.

За било која низа реални броеви $a_1, a_2, ..., a_{2007}$, за која $a_1 = a_2 = ... = a_{2007}$ е исполнето $|a_{2008}| \leq \frac{\sqrt{2007}}{2}$. Според тоа, $(a_{2008})_{\max} = \frac{\sqrt{2007}}{2}$.

3. Најди ги сите реални функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x^2 - y^2) = (x-y)[f(x) + f(y)]. \tag{1}$$

Решение. Нека f е функција која е решение на равенката (1). Ако избереме $x = y$, добиваме

$$f(x^2 - x^2) = (x-x)[f(x) + f(x)],$$
$$f(0) = 0 \cdot [2f(x)] = 0.$$

Значи, $f(0) = 0$.

Ако во равенката (1) замениме $y = -x$, добиваме

$$f[x^2 - (-x)^2] = [x - (-x)][f(x) + f(-x)],$$
$$f(0) = 2x[f(x) + f(-x)],$$
$$0 = -2x[f(x) + f(-x)].$$

Бидејќи последното равенство е исполнето за секој $x \in \mathbb{R}$, добиваме

$$f(x) + f(-x) = 0,$$
$$f(-x) = -f(x).$$

Значи, f е непарна функција.

Ако y го замениме со $-y$, и од тоа што f е непарна функција, равенката (1) го добива обликот

$$f(x^2 - (-y)^2) = [x - (-y)][f(x) + f(-y)],$$
$$f(x^2 - y^2) = (x+y)[f(x) - f(y)] \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$(x-y)[f(x) + f(y)] = f(x^2 - y^2) = (x+y)[f(x) - f(y)],$$

односно

$$(x-y)[f(x) + f(y)] = (x+y)[f(x) - f(y)],$$
$$xf(x) - yf(x) + xf(y) - yf(y) = xf(x) + yf(x) - xf(y) - yf(y),$$

$$-yf(x)+xf(y)=yf(x)-xf(y),$$
$$2yf(x)=2xf(y).$$

Ако избереме $y=1$ и воведеме ознака $f(1)=k$, добиваме $f(x)=kx$, каде $k\in\mathbb{R}$. Не е тешко да се провери дека секоја функција од облик $f(x)=kx$ е решение на равенката (1).

4. Најди ги сите трицифрени броеви кои се еднакви збирот на факториелите од нивните цифри!

Решение. Имаме

$$100a+10b+c=a!+b!+c!$$
$$a!+b!+c!<1000 \quad \Rightarrow \quad \max(a,b,c)\le 6$$

бидејќи $7!>1000,\ 6!<1000$. Понатаму, бидејќи $4!+4!+4!<99$ од $a!+b!+c!>99$ следува дека еден од a, b или c мора да е 5 или 6.

Ако еден од броевите е 6, $a!+b!+c!>6!=720$, па мораме да го исклучиме 6. Тогаш $\max(a,b,c)=5$. Има три можности:

а) 5 да е на местото на стотките: $5bc$, но не може. Најголемиот број што се добива е $5!+5!+5!=360<500$.

б) 5 да е на местото на десетките: $a5c$

Најголем таков број е $4!+5!+5!=264$, па на местото на стотките би бил 1 или 2, т.е.

$$150,\quad 1!+5!+0!\ne 150$$
$$151,\quad 1!+5!+1!\ne 151$$
$$152,\quad 1!+5!+2!\ne 152$$
$$153,\quad 1!+5!+3!\ne 153$$
$$154,\quad 1!+5!+4!\ne 154$$
$$155,\quad 1!+5!+5!\ne 155$$
$$254,\quad 2!+5!+4!<200$$
$$255,\quad 2!+5!+5!\ne 255$$

в) 5 да е на местото на единиците: $ab5$

Ако е 1 или 2 на место на стотки, тогаш исто како во б) се покажува дека важи само за $1!+4!+5!=145$.