Светозар Вукадиновић ♠ Владимир Стојановић

6 MATHEMATISKOP 6

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

ЗА

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

МАТЕМАТИСКОП ♠ Београд 1999.

Светозар Вукадиновић, Владимир Стојановић
MATHEMATISKOP 6
ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА **за четврти разред средњих школе**

Рецензенти:
Др Мирјана Ђорић, ПМФ Београд
Др Ариф Золић, ПМФ Београд

Издаје:
ИП МАТЕМАТИСКОП, н.х. Т. Томшича 6, Београд
тел. (011)413-403 тел/факс (011)340-70-90
E-mail: mate.skop@drenik.net

За издавача
Нада Стојановић, директор

Уредник
Др Нинослав Ћирић

Компјутерски слог
Катарина Бабарогић

ЦИП - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

372.851(075 . 3) (076)

ВУКАДИНОВИЋ, Светозар
Одабрани задаци: за четврти разред средње школе / Светозар Вукадиновић, Владимир Стојановић. – Београд : Математископ, 1998 (Београд: ЛИОН). – 304 стр.: граф. прикази ; 24 cm. – (Mathematiskop; 6)

Тираж 2000.

ISBN 86-7076-003-3
1. Стојановић Владимир

ИД=65494796

Тираж 2000
Штампа: Штампарија "ЛИОН", Београд

САДРЖАЈ

ЧИТАОЦИМА
(ПРОЧИТАЈТЕ ОБАВЕЗНО)

Програм математике за IV разред средње школе је начињен превише амбициозно. Да би га коректно савладао ученик мора бити савршено припремљен и целе школске године изузетно активан.

Ова књига је написана по важећем програму. Ценећи тежину предвиђеног градива настојали смо да неопходну материју обрадимо што приступачније, поштујући класичан методички принцип – од простог ка сложеном. Осим одељака 4.3 и 6.4, настојали смо да не проширујемо већ преобимно градиво. Пред вама је књига из које ћете без великог напора учити математику. Нудимо вам велики избор задатака и сваки је решен. У решењима су коришћене разноврсне идеје и методе.

Следимо општу идеју MATHEMATISKOP-а: што јасније и што коректније увести читаоце у лепоте и тајне математике.

Књига је написана тако да је сваки читалац максимално разуме и користи према својим потребама – ученик да усавршава и проширује своје знање, а наставник да има велики избор како сличних, тако и разноврсних задатака: за предавања и увежбавање (означени са $\triangle$), за писмене задатке и за проверу знања. Дат је и већи број задатака повишеног нивоа, од домаћих до интернационалних такмичења (означени са $*$), тако да и они најјачи имају богат избор.

Упрвих десет глава има 29 цртежа, који су означени бројевима од 1 до 29. У ЈЕДАНАЕСТОЈ ГЛАВИ (Решења задатака) нумерација цртежа поново иде од броја 1 (до 113).

Настојали смо да начинимо књигу која је једна целина, мада обрађује две апсолутно различите теме: математичку анализу и вероватноћу са статистиком. У реализовању ове идеје велики удео имају рецезенти др Мирјана Ђорић и др Ариф Золић. Они су врло пажљиво прочитали рукопис и благовременим, добронамерним примедбама наше напоре учинили лакшим, а резултат лепшим. Због тога смо им веома захвални.

Оним читаоцима, који ће се током даљег школовања поново бавити математиком, препоручујемо да ову књигу, као и MATHEMATISKOP 7, сачувају. Због чега, не морамо објашњавати. Схватиће врло брзо.

У Београду, јун 1998. г.

Аутори

ПРВА ГЛАВА

1 РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

1.1 ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ. ДОМЕН И КОДОМЕН

Ако су D и F непразни скупови и ако је сваком елементу x скупа D, $x \in D$, по неком закону f додељен тачно један елемент y скупа F, $y \in F$, тада кажемо да је на скупу D дефинисана *функција* (пресликавање) f са *вредностима* из скупа F. То записујемо са:

$$(\forall x \in D, \exists_1 y \in F) \ y = f(x) \quad \text{или} \quad f\colon D \to F$$

Скуп D је *домен (област дефинисаности)* функције f. Елемент x је *оригинал* или *аргумент* или *независно променљива величина,* а $f(x)$ је *лик, вредност функције* или *зависно променљива величина.*

Скуп свих вредности функције назива се *кодомен* и означава се са $f(D)$. Очигледно је $f(D) \subset F$.

Ако је $f(D) = F$, онда се пресликавање f назива *сурјекција* (пресликавање *на*).

Ако је $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, пресликавање f се назива *инјекција.*

Ако је f истовремено сурјекција и инјекција, онда је f *бијекција* (пресликавање 1–1, тј. „пресликавање један – један").

У дефиницији функције скупови D и F могу бити произвољни. Ако су *домен и кодомен* функције f подскупови скупа R (скупа реалних бројева) онда је f *реална функција.*

За реалну функцију f кажемо да је дефинисана у тачки x_0, $x_0 \in D$, ако постоји тачно једна (коначна) вредност y_0, $y_0 \in F$, таква да је $y_0 = f(x_0)$, $D, F \subset R$.

Ако је f бијекција тада постоји пресликавање $f^{-1}\colon F \to D$, које се назива *инверзном функцијом* за функцију f. То записујемо са: $x = f^{-1}(y)$.

Ако су f и g функције, такве да $f\colon D \to F$ и $g\colon F \to G$, тада кажемо да је дефинисана *сложена функција* (*копозиција* пресликавања f и g.) То записујемо са $g \circ f\colon D \to G$, односно: $z = (g \circ f)(x)$, $x \in D$, $z \in G$.

Сложене функције су композиције елементарних функција. Под *елементарним функцијама* подразумеваћемо следеће функције:

– константну: $y = c$, c је константа;
– степену: $y = x^n$, $n \in N$;
– целу (полином): $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_0, \ldots, a_n$ су константе;
– разломљену: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P и Q су полиноми и $Q(x) \neq 0$;
– експоненцијалну: $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$;
– логаритамску: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$;
– тригонометријске функције;
– инверзне тригонометријске функције (аркуси).

Користићемо још и скраћене ознаке:

$$(f \pm g)(x) \equiv f(x) \pm g(x), \quad fg(x) \equiv f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

При ранијим изучавањима уочили смо разне начине израчунавања функција: табелом, дијаграмом, аналитички и графички.

$\triangle$ **1.** Познато нам је следеће. Ако су $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ дефинисане функције, тада функција

1) $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ дефинисана је за $\varphi(x) \neq 0$;

2) $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ дефинисана је за $f(x) \geqslant 0$ (паран изложилац корена);

3) $y = \log(f(x))$ дефинисана је за $f(x) > 0$;

4) $y = \arcsin f(x)$ и $y = \arccos f(x)$ дефинисана је за $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Одредити област дефинисаности (домен) за функције.

а) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$; *б)* $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; *в)* $y = \dfrac{1}{x^3 - 9x}$;

г) $y = \dfrac{2x}{x^2 - x - 6}$; *д)* $y = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$; *ђ)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$;

е) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$; *ж)* $y = \sqrt{4 - 2x}$; *з)* $y = 5 + \sqrt{1 - x^2}$;

и) $y = \sqrt{1 - |x|}$; *ј)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$; *к)* $y = \log(\sin x)$;

л) $y = \arcsin \dfrac{2x}{x^2 + 1}$; *љ)* $y = \sqrt{2x - x^2 - x^3}$; *м)* $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$;

н) $y=\sqrt{\sin 2x}$; *њ)* $y=\sqrt{\log(5x-x^2)}$; *о)* $y=\arccos\dfrac{2}{2+\sin x}$;

п) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$; *р)* $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\log(2-x)$;

с) $y=\sqrt{2x}+\log(x+2)-\sqrt[3]{x+1}$; *т)* $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}-\sqrt[3]{\sin x}$;

ћ) $y=\log\bigl(\sin(x-3)\bigr)+\sqrt{16-x^2}$; *у)* $y=(x^2-4)^{-\frac{3}{2}}$;

ф) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; *х)* $y=\log\bigl(\sqrt{3x^2-2x-1}-2(x-1)\bigr)$;

ц) $y=e^{\frac{x}{x^2+9}}-\sqrt{\arccos\dfrac{1}{x^2+1}}+\operatorname{arctg}\bigl(\log(x^2+4)\bigr)$;

ч) $y=(x^2-x-2)^{x^2+x+6}$; *џ)* $y=\log_{x^2}(12+x-x^2)$; *ш)* $y=\log_{x^2-1}(4-x^2)$.

1.2 АНАЛИТИЧКО ИЗРАЖАВАЊЕ ФУНКЦИЈА

Аналитичко изражавање функције је представљање функције у облику једне или више формула. На пример: $y=\sin x$. Или:

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & \text{за } x<0\\ 0, & \text{за } x=0\\ 1, & \text{за } x>0\end{cases}$$

Ово је тзв. *знаковна функција* (signum). Слично је:

$$y=|x|=\begin{cases}x, & \text{за } x\geqslant 0\\ -x, & \text{за } x\leqslant 0\end{cases}$$

(функција апсолутне вредности).

Наведени примери функција имају општи облик $y=f(x)$. То је тзв. *експлицитни* облик (решен по y). Ако је функција дата у облику $f(x,y)=0$, онда је то тзв. *имплицитни облик.* Веза између x и y може бити дата посредно, нпр. преко параметра t: $\left.\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right\}$ ово је тзв. *параметарски* облик функције.

△ **2.** *а)* Ако је $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, одредити $f(0)$, $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x^{-1})}$.

б) Ако је $f(x)=\arccos(\log x)$, одредити: $f(1)$, $f(10)$, $f(0,1)$.

в) Ако је $f(x)=x^3-2x+4$, одредити: $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\bigl(f(x)+f(-x)\bigr)$ и $\psi(x)=\dfrac{1}{2}\bigl(f(x)-f(-x)\bigr)$.

г) Ако је $f(x)=\begin{cases} \arcsin x, & \text{за } -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \operatorname{arctg} x, & \text{за } 0<x<+\infty \end{cases}$, израчунати $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$.

д) Ако је $f(x) = 2x + 3 - |x+2| + \operatorname{sgn}(x-2)$, израчунати $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

ђ) Ако је $f(x) = x^3 - x$ и $\varphi(x) = \sin 2x$, израчунати $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $\varphi(f(1))$, $f(f(1))$, $f(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$.

е) Ако је $f(x) = x$, израчунати $\underbrace{f(f(\ldots f}_{100 \text{ puta}}(100)\ldots))$.

ж) Ако је $f(x) = x^2 + 1$, израчунати $f(x^2)$ и $(f(x))^2$.

з) Ако је $f(x) = x^2 - 2 - \dfrac{1}{x^2}$, доказати да је $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(-x) = f(x)$.

$*$ **3.** Ако је $f(x) = ax^2 + bx + c$, доказати да је: $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) = f(x)$.

$\triangle$ **4.** Ако је $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, одредити $f(f(x))$ и $f\big(f(f(x))\big)$.

$\triangle$ **5.** Ако је $f(x-2) = x^3 - 2x - 1$, израчунати $f(1)$.

$\triangle$ **6.** Ако је $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 4$, израчунати $f(999)$.

$*$ **7.** Израчунати $f(3)$, ако је $f(x) - 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$.

8. Ако функција $y = f(x)$ задовољава услове: $f(x) + 2f(x^{-1}) = 3x$ и $f(x+2) = 3f(x) + 2f(x+1)$, $x \neq 0$, израчунати $f(1111)$ и $f(2222)$.

$\triangle$ **9.** Ако је $f(x) + 5f(-x) = 6x + 12$, одредити $f(x)$.

$\triangle$ **10.** Одредити a и b у функцији $f(x) = ax^2 + bx + 5$, тако да важи једнакост: $f(x+1) - f(x) \equiv 8x + 3$.

$\triangle$ **11.** *а)* Ако је $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, израчунати $f(f(x))$.

б) Ако је $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, израчунати $f\Big(f\Big(f\big(f(f(x))\big)\Big)\Big)$.

$\triangle$ **12.** Одредити $f(x)$ ако је:

а) $f\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right) = 5x + 3$; *б)* $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; *в)* $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$.

$\triangle$ **13.** Ако је $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$, израчунати $f(3)$.

$\triangle$ **14.** Ако је $f(x-1) = x^2$, наћи $f(x)$, $f(x+1)$ и $f^{-1}(x)$.

△ **15.** Нека је $f(x)+f(y)=f(t)$. Израчунати t ако је
а) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; *б)* $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$.

△ **16.** Ако је $f(x)+g(x)=3x+1$ и $f(x)-g(x)=x-1$, израчунати $f(2)+g(3)$, $(f+g)(-1)$, $fg(-2)$.

△ **17.** Написати у експлицитном облику, $y=f(x)$, функције задате формулама.
а) $x-2y+8=0$; *б)* $xy=-8$; *в)* $x^2+y^2=1$;
г) $x^3+y^3=8$; *д)* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; *ђ)* $(1+x)\sin y-x^2=0$;
е) $10^{xy}=0,01$; *ж)* $\log x+\log(y+1)=2$; *з)* $10^{x+y}(x^2-2)=x^3+2$;
и) $x^2-\arccos y=\pi$; *ј)* $10^x+10^y=10$; *к)* $x+|y|=2y$.

△ **18.** Датим функцијама одредити инверзну.
а) $y=2x+2$; *б)* $y=2^x$; *в)* $y=\ln\dfrac{x}{2}$; *г)* $y=x^2+2$; *д)* $y=\operatorname{arctg}2x$;
ђ) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; *е)* $y=\begin{cases} x, & \text{за } x\leqslant 0\\ x^2, & \text{за } x>0\end{cases}$; *ж)* $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$; *з)* $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$.

19. Функцију *а)* $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{за } x\leqslant 0\\ x, & \text{за } x>0\end{cases}$; *б)* $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{за } x>0\\ -1, & \text{за } x<0\end{cases}$
записати помоћу само једне формуле, користећи се знаком апсолутне вредности.

20. Функције из претходног задатка записати помоћу само једне формуле, али без коришћења симбола за апсолутну вредност.

△ **21.** Користећи се записом функције са више формула, изоставити симболе апсолутне вредности и знаковне функције.
а) $y=x|x+3|-3x+5$; *б)* $y=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$;
в) $y=x\operatorname{sgn}(x+3)-2x$; *г)* $y=2x+|x-2|-3\operatorname{sgn}(x+1)$.

△ **22.** Елиминисати параметар t у функцијама.
а) $x=t-1$, $y=t^2$; *б)* $x=\operatorname{arctg}\sqrt{t}$, $y=\sqrt{t+1}$; *в)* $x=r\cos t$, $y=r\sin t$; *г)* $x=a\cos\dfrac{t}{2}$, $y=b\sin\dfrac{t}{2}$;
д) $x=\arcsin t$, $y=t^2$; *ђ)* $x=e^{t^2}$, $y=\operatorname{arctg}t$; *е)* $x=\sqrt{t+1}$, $y=\begin{cases} 2t, & \text{за } t\leqslant 0\\ 0, & \text{за } t>0\end{cases}$; *ж)* $x=|t|+1$, $y^3=t^2$

23. Доказати да је функција $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\neq -1$, инверзна самој себи. Да ли исто важи и за $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$, $x\neq\dfrac{a}{c}$?

△ **24.** Да ли су дате функције идентичне, тј. да ли оне имају једнаке вредности за све вредности независно промењиве x?

а) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{x}$; *б)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $\varphi(x) = \dfrac{x}{x^2}$;
в) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; *г)* $f(x) = \log x^2$ и $\varphi(x) = 2\log x$.

△ **25.** Међу датим функцијама уочити идентичне.

а) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$, $f_4(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

б) $f_1(x) = e^{\ln x}$, $f_2(x) = \ln(e^x)$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$, $f_4(x) = \dfrac{x^2}{x}$.

в) $f_1(x) = 2\log x$, $f_2(x) = \log x^2$, $f_3(x) = 2\log|x|$, $f_4(x) = \dfrac{2}{\log_x 10}$.

г) $f_1(x)=(x-1)^2$, $f_2(x)=|x-1|^2$, $f_3(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)^5}{x-1}}$, $f_4(x)=|x-1|\sqrt{x^2-2x+1}$.

д) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\cdot \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, $f_3(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$, $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{|\sqrt{2}\cos x|}$.

26. Нека је $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Доказати да: $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

27. Ако је $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ и $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, доказати да:
а) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y) + \varphi(x)\cdot\varphi(y)$; *б)* $\varphi(x+y) = f(x)\varphi(y) + f(y)\varphi(x)$.

28. Ако је $x \neq 1$ и $x \neq 2$ и $f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) - 3f\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right) = 0$, доказати да је $f(x) \equiv 0$.

29. За $x \neq 0$ и $x \neq 2$ је $f\left(\dfrac{x-2}{x}\right) + 3f\left(\dfrac{x}{x-2}\right) = x$. Одредити $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

30. Одредити $f(x)$ и $g(x)$ ако је $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + g(2x+1) = 2x$ и $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - g(2x+1) = x$, за $x \neq 1$. Одредити домене за функције $f(x)$ и $g(x)$.

31. Ако је $f(x) = 2x - 1$, одредити x и y, тако да буде $f\left(f(x)\right) = 0$ и $f\left(f(y)\right) = y$.

32. Одредити функцију $g(x)$ ако је $f(x) = x + 2$ и:
а) $f\left(g(x)\right) = 3x$; *б)* $f\left(2 + g(x)\right) = 3x + 1$.

33. Одредити $f(x)$ ако за $g(x) = 3x + 2$ важи: $g\left(x^2 + xf(x)\right) = 3x^2 + 6x + 5$.

$*$ **34.** Дата је функција $f(x) = A\cos x + B\sin x$ (A и B су константе). Ако постоје реални бројеви x_1 и x_2 такви да разлика $x_1 - x_2$ није цео умножак броја π и да је $f(x_1) = f(x_2) = 0$, доказати да за сваки реалан број x важи: $f(x) = 0$.

$*$ **35.** Наћи све функције $f\colon R \to R$, за које важи:
а) $f(x)\cdot f(y) = f(x-y)$ за све $x, y \in R$ и $f(1996) = 1$;
б) $f(x + f(y)) = f(x) + y$.

$*$ **36.** Ако за функцију $f\colon R \to R$ важи: *а)* $f(x) \leqslant x$ за свако $x \in Q$ и *б)* $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ за све $x, y \in R$, доказати да је $f(x) = x$ за свако $x \in R$.

$\triangle$ **37.** Нека је $f(x) = kx + n$. Ако бројеви x_1, x_2, x_3 образују аритметичку прогресију, доказати да и бројеви $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ чине аритметичку прогресију.

$\triangle$ **38.** Нека је $f(x) = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Ако бројеви x_1, x_2, x_3 чине аритметичку прогресију, доказати да бројеви $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ образују геометријску прогресију.

39. Навести пример аналитички задате функције која је:
а) дефинисана само за $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
б) дефинисана само за $-2 < x < 2$;
в) дефинисана за свако $x \in R$, осим за $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

40. Низ функција је дефинисан на следећи начин: $f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x))$, $n \in N$. Израчунати $f_{1995}(1995)$ и $f_{1998}(1998)$.

$*$ **41.** Наћи све реалне функције f, такве да за за све реалне бројеве x и y важи: $f(xy) = f(x)\cdot f(y)$ и $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.

$*$ **42.** Наћи све функције $f\colon Q \to Q$, које задовољавају услове: $f(1) = 2$ и $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$, за све $x, y \in Q$.

$*$ **43.** Нека је дата функција $f\colon R \to R$. Доказати тврђења:
а) Ако $f(x^2) - \big(f(x)\big)^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ за сваки $x \in R$, тада f није инјективна.
б) Ако важе услови (1) и (2): (1) $\forall x, y \in R$ је $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ и (2) *Постоји тачно једно* x_0, $x_0 \in R$ *такво да је* $f(x_0) = 1996$, тада је f инјективна функција.

$*$ **44.** Функција f је дефинисана на скупу целих бројева и задовољава следећи услов: $f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{за } x > 100 \\ f(f(x+11)), & \text{за } x \leqslant 100 \end{cases}$. Доказати да је $f(x) = 91$ за $x \leqslant 100$.

1.3 НЕКЕ ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈА

Овде ћемо истаћи посебне особине којим се одликују поједине функције.

Функција f је *парна* ако је $f(-x) = f(x)$, за свако $x \in D$.

Функција f је *непарна* ако је $f(-x) = -f(x)$, за свако $x \in D$.

Функција f је *непрекидна*, ако ако постоји позитиван број P, такав да $(x+P) \in D$ за свако $x \in D$ и $f(x+P) = f(x)$. Најмањи такав број p назива се периода функције $f(x)$.

Функција f је *ограничена одозго*, ако постоји $M \in R$, тако да за сваки $x \in D$ важи услов: $f(x) \leqslant M$.

Функција f је *ограничена одоздо*, ако постоји $m \in R$, тако да за сваки $x \in D$ важи услов: $f(x) \geqslant m$.

Функција f је *ограничена* ако је ограничена одоздо и одозго.

Функција f је *монотоно опадајућа*, ако за свако $x_1, x_2 \in D$ из $x_2 > x_1$ следи $f(x_2) < f(x_1)$. Ако не важи строга неједнакост, тј. ако је $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, функција је *монотоно нерастућа.*

Функција f је *монотоно растућа*, ако за свако $x_1, x_2 \in D$ из $x_2 > x_1$ следи $f(x_2) > f(x_1)$. (Ако је $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, онда је функција *монотоно неопадајућа.*)

Обратићемо пажњу на *знак* функције f, тј. за које $x \in D$ је $f(x) > 0$, односно $f(x) < 0$.

Ако је $f(x_i) = 0$ за $x_i \in D$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тада су $x = x_i$ *нуле* функције.

Скуп свих тачака $(x, f(x))$, $x \in D$, представља *график* функције.

△ **45.** Утврдити које су од датих функција парне или непарне.
а) $y = x^2 - 3x^4$; *б)* $y = x + x^2$; *в)* $y = x^2 - |x|$; *г)* $y = |x| - x$;
д) $y = x \sin x$; *ђ)* $y = \dfrac{\cos 2x}{3x}$; *е)* $y = x^2 \operatorname{tg} x$; *ж)* $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$;
з) $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$; *и)* $y = \log \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$; *ј)* $y = \log \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$; *к)* $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;
л) $y = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$; *љ)* $y = \dfrac{a^x+1}{a^x-1}$; *м)* $y = 2x - \sin 4x$.

△ **46.** Дате функције представити у облику збира једне парне и једне непарне функције.
а) $y = x^2 - x - 6$; *б)* $y = \operatorname{tg} 2x + \cos 3x - \sin \dfrac{x}{2}$; *в)* $y = x|x| - \sin 2x - x^2 + 2x$;
г) $y = e^x$.

47. Доказати да је $f(x) + f(-x)$ парна, а $f(x) - f(-x)$ непарна функција, за произвољно $f(x)$.

48. Доказати да је функција $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ непарна, ако и само ако је једна од функција $f(x)$ или $\varphi(x)$ парна, а друга непарна.

49. Које су од датих функција периодичне? Одредити периоде свих периодичних функција.

а) $f(x)=\sin 3x$; *б)* $f(x)=\sin^2 x$; *в)* $f(x)=\sin x^2$; *г)* $f(x)=\sin\sqrt{x}$;
д) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$; *ђ)* $f(x)=1+\operatorname{ctg} x$; *е)* $f(x)=x\cos x$; *ж)* $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$;
з) $f(x)=-3$; *и)* $f(x)=[x]$*); *ј)* $f(x)=x-[x]$; *к)* $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$.

△ **50.** Одредити периоде периодичних функција.

а) $f(x)=\sin x+\cos x$; *б)* $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$; *в)* $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;
∗*г)* $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$; *д)* $f(x)=5\sin 2x$; *ђ)* $f(x)=\sin\dfrac{3x}{4}$;
е) $f(x)=2\sin\pi x$; *ж)* $f(x)=-\cos\dfrac{x-1}{2}$; *з)* $f(x)=\cos\dfrac{2x+3}{6\pi}$;
и) $f(x)=\sin x+\cos 2x$; *ј)* $f(x)=2\sin 3x+3\sin 2x$;
к) $f(x)=\sin 2\pi x-2\sin 3\pi x+\sin 5\pi x$; *л)* $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{3}+\sin\dfrac{\pi x}{4}$;
љ) $f(x)=|\sin x|$; ∗*м)* $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$;
∗*н)* Ако је $f(x)=\dfrac{x\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{-x\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ и $f_n(x)=\underbrace{f\Big(f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)\Big)$, доказати да је низ функција $f_n(x)$ периодичан, па израчунати $f_{996}(x)$.

∗ **51.** Доказати да је функција $f(x)=\cos x+\cos ax$, $x\in R$, периодична, ако и само ако је a рационалан број.

∗ **52.** Доказати да је функција $f(x)$ периодична ако за свако $x\in R$ и неко $a\in R$ важи: $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

53. Нека су f и g реалне функције које за све реалне вредности x и y задовољавају услов: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-g(x)g(y)$. Доказати: ако је f периодична функција, тада је и g периодична функција. Да ли из периодичности функције g следи да је f периодична функција?

∗ **54.** Нека је a, $a>0$, реалан број и $f(x)$ реална функција дефинисана за свако реално x, која за свако такво x задовољава услов: $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$.
а) Доказати да је f непрекидна функција.
б) За $a=1$ наћи пример такве функције, $f_1\not\equiv\text{const}$.

△ **55.** Доказати да су ограничене одоздо функције.

а) $y=x^2+2x-8$; *б)* $y=x^4+1$; *в)* $y=\dfrac{4x^4+1}{2x^2}$; *г)* $y=2^x$.

△ **56.** Доказати да су ограничене одозго функције.

---

*) $[x]$ значи: *цео део броја* x, тј: *највећи цео број који није већи од* x.

а) $y = 2x - x^2$; *б)* $y = 1 - 3^{-x}$; *в)* $y = \dfrac{2x^2}{x^4 + 4}$; *г)* $y = \log_{(x^2+2)} 2$.

△ **57.** Доказати да су ограничене функције.

а) $y = 1 - 2\sin x$; *б)* $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$; *в)* $y = \sqrt{9 - x^2}$; *г)* $y = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2}$.

∗ **58.** Ако је функција $y = 1 + a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x$, $a, b, c, d \in R$, позитивна за све реалне бројеве x, доказати да је f ограничена функција.

△ **59.** Испитати монотоност функција. (За оне које нису монотоне за свако x, одредити интервале монотоности.)

а) $y = 3^x$; *б)* $y = \log x$; *в)* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; *г)* $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
д) $y = 3 - 2x$; *ђ)* $y = 2x - 1$; *е)* $y = \operatorname{tg} x$; *ж)* $y = \operatorname{ctg} 2x$;
з) $y = x^2 - 2x + 3$; *и)* $y = |x|$; *ј)* $y = |x| - x$; *к)* $y = \operatorname{sgn} x$.

∗ **60.** Наћи све функције $f\colon R \to R$, које задовољавају услове: (1) $f\,(x + f(y)) + f\,(x + y) + 1$, за све x, y из R; (2) f је строго растућа (тј. $x > y \Rightarrow f(x) > f\,(y)$ за све x, y из R).

61. Одредити нуле функција и интервале у којим су функције позитивне, односно негативне.

а) $f\,(x) = 3^x$; *б)* $f\,(x) = \log_3(x + 2)$;
в) $f\,(x) = x^2 + x + 2$; *г)* $f\,(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;
д) $f\,(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{x^2 - 4}$; *ђ)* $f\,(x) = x|x|$;
е) $f\,(x) = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{3x - 5}}$; *ж)* $f\,(x) = \log \dfrac{2x}{x + 1}$;
з) $f\,(x) = \dfrac{\ln x}{3 - \ln x}$; *и)* $f\,(x) = \cos 2x - \sin x$.

62. Одредити координате заједничких тачака графика функција $F\,(x) = x^2 + 6$ и $f\,(x) = 5|x|$.

63. Одредити две нуле функције $F(x) = f(x) - f\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right)$, ако је познато да је функција $f\,(x)$ дефинисана на интервалу $[-5, 5]$. Наћи све нуле дате функције $F\,(x)$, ако је $f\,(x) = x^2 - 12x + 3$.

64. Нацртати у једном координатном систему графике трију задатих функција:

а) $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x - 2)^2 - 4$;
б) $y = \log_2 x$, $y = \log_2(x + 1)$, $y = 1 + \log_2(x + 1)$;
в) $y = 2^x$, $y = 2^{x-3}$, $y = 2^{x-3} - 2$;
г) $y = \sin x$, $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $y = -2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

ДРУГА ГЛАВА

2 ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

За функцију $y = f(x)$, дефинисану у околини тачке x_0, осим можда у самој тачки x_0, кажемо да има *граничну вредност* y_0, $y_0 \in R$, у тачки x_0, ако за свако x из околине тачке x_0 и свако $\varepsilon > 0$ постоји позитиван број $\delta(\varepsilon)$, такав да је за $0 < |x - x_0| < \delta$ испуњена неједнакост $\left| f(x) - y_0 \right| < \varepsilon$.

Тада пишемо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Важи следећа теорема: Нека је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Тада је: (1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$; (2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = A \cdot B$ и

(3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

За функцију $y = f(x)$, дефинисану на неком интервалу $(a, +\infty)$, важи: Ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји број $M(\varepsilon)$, $M(\varepsilon) \in (a, +\infty)$, такав да $x > M(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - y_0 \right| < \varepsilon$, тада је y_0 *гранична вредност дате функције када* $x \to +\infty$. Пишемо: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$. Слично се дефинише и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Ако је функција $y = f(x)$ дефинисана у околини тачке x_0, осим можда у самој тачки x_0, и за свако $M > 0$ постоји број $\delta(M)$, $\delta(M) > 0$, такав да из $|x - x_0| < \delta(M)$ следи $f(x) > M$, тада кажемо да $y = f(x)$ *тежи ка* $+\infty$ кад $x \to x_0$, што пишемо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Слично описујемо случај кад $f(x) \to -\infty$.

2.1 ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЈЕДНОСТАВНИЈИХ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ

Посматраћемо изразе, који кад $x \to x_0$ имају неки од следећих облика: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$.*) Користићемо и чињенице које смо уп-

*) Видети MATHEMATISKOP 7, стране 255 – 260.

означили израчунавајући границе низова: (1) $\frac{k}{\infty} \to 0$, где је k реална константа. (2) Ако је $k \neq 0$, тада $\frac{k}{0} \to \infty$, где смо са 0 означили промењљиву величину која тежи ка 0.

△ **65.** Израчунати следеће граничне вредности.

а) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+2}{x^2+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+5x+1}{3x+4}+1\right)$; *в)* $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x^4-x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+3}{x-1}$; *д)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

△ **66.** Лако је утврдити следеће: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ =**)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^m\left(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} \frac{a_0}{x^m}\right)}{x^n\left(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \frac{b_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} \frac{b_0}{x^n}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n},$$ јер сви разломци у загради имају облик: $\frac{k}{\infty} \to 0$. Пошто поделимо степене x^m и x^n, добијамо: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} 0, & \text{за } m<n \\ \frac{a_m}{b_n}, & \text{за } m=n \\ \infty, & \text{за } m>n \end{cases}$. (Ово је карактеристично за изразе $\frac{\infty}{\infty}$.)

Користећи ова и слична разматрања израчунати:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+2x-3x^3}{1-3x^2+2x^3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^2}{x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x-3}{3000x+75}$; *д)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x}{x^4-x+5}$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x}{x^2+2x+96}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2(2x-3)^2}{x^5-4x}$; *ж)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$; *з)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x-3}{\sqrt{x^4-3x+1}}$;

и) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{5+x\sqrt{x}}$; *ј)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}$; *к)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

л) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$; *љ)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^3-2x-3x}}$; *м)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+\sin x}{\sin x - x}$;

н) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{a^x+1}$, $a>0$; *њ)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$, $a>1$; *о)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$, $a>0$;

п) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3-3x+2)}{\ln(x^6+2x^4+3x)}$; *р)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(3+10^{3x})}{\log(10^{5x}+5)}$.

67. Израчунати граничне вредности $(\infty-\infty)$.

**) $x\to\infty$ значи исто што и $x\to\pm\infty$. Са $P_m(x)$ и $P_n(x)$ означили смо полиноме m-тог и n-тог степена.

△ *а)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; △ *б)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3}{4x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

△ *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; △ *г)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$;

△ *д)* $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$; △ *ђ)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$;

△ *е)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x}\right)$; *ж)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$;

△ *з)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$; *и)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$;

ј) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$; *к)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+a_1x+b_1}+\sqrt{x^2+a_2x+b_2}+\cdots+\sqrt{x^2+a_nx+b_n}-nx\right)$;

љ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-x^2+2}-\sqrt{x^2+x}\right)$;

68. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ у случају кад је $f(a)=g(a)=0$, често се једноставно решава тако, што се неком лако уочљивом трансформацијом добије: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$. Користећи се овом и сличним идејама, израчунати:

△ *а)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; △ *б)* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

△ *в)* $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+3x}{x^2+6x+9}$; △ *г)* $\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

△ *д)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; △ *ђ)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}$, $p,q\in N$;

△ *е)* $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; △ *ж)* $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{3x+24}{\sqrt[3]{x}+2}$;

△ *з)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; △ *и)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x^2}$;

△ *ј)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2+1}-1}{2x^2}$; △ *к)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$;

△ *л)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; *љ)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}{x^2-4x-4}$; *н)* $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

њ) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$; *о)* $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^3+4x^2+4x}\right)$;

п) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; *р)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

с) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; *т)* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

ћ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, $n\in N$; *у)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{P(x)+1}-1}{x}$, где је $n\in N$ и $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

2.2 ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ КОЈЕ СЕ СВОДЕ НА $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$ И $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}}$ *)

У пракси ове две граничне вредности се користе у облику $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin(u(x))}{u(x)}=1$ и $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{1-\cos(u(x))}{(u(x))^2}=\dfrac{1}{2}$.

69. Израчунати граничне вредности.

$\triangle$ *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; $\triangle$ *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

$\triangle$ *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 5x}{\sin 3x}$; $\triangle$ *г)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

$\triangle$ *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$; $\triangle$ *ђ)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

$\triangle$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; $\triangle$ *ж)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$;

$\triangle$ *з)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$; $\triangle$ *и)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

ј) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$; *к)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

л) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$; *љ)* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$; *н)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

њ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; *о)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$;

п) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$; *р)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x}{x^2}$;

70. Користећи одговарајуће смене променљиве, израчунати граничне вредности, свођењем на идеје из претходног задатка.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x$; *б)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

---

*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{\cos x}\right)$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; *ж)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$; *и)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

ј) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$; *к)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 3x}$;

л) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\pi+\operatorname{arcctg} x)$; *љ)* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

м) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$; *н)* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.3 НЕКЕ СЛОЖЕНИЈЕ ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ

Граничне вредности израза који имају облик: 1^∞, 0^0 и ∞^0, као и неки од раније наведених облика ($\frac{0}{0}$ и сл.), могу се погодним трансформацијама решавати коришћењем познатих граничних вредности:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \quad \text{специјално:} \ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha}$$

Слично случају 2.2, рачунамо нпр: $\lim\limits_{u(x)\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$, и сл.

71. Израчунати следеће граничне вредности.

△ *а)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$; △ *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$; △ *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^x$;

△ *г)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x^2}$; △ *д)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^{nx}$; △ *ђ)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

△ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; △ *ж)* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$; △ *з)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; *ј)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; *к)* $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; *љ)* $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{x+1}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$; $\triangle$ *м)* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(\ln(x+1)-\ln x\big)$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; *њ)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$, $a>0$;

о) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\log x-1}{x-10}$; $\triangle$ *п)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$; *р)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)}$;

$\triangle$ *с)* $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$; $\triangle$ *т)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$; $\triangle$ *ћ)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$;

у) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; *ф)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$; *х)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\big(\cos(e^{2x}-1)\big)}{x\sin x}$;

ц) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt[3]{1+\sin x}}{x}$; *ч)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x-a}$, $a>0$.

2.4 ЛЕВИ И ДЕСНИ ЛИМЕС. НЕПРЕКИДНОСТ

Број y_0 представља *леву граничну вредност* функције $y=f(x)$ у тачки x_0, ако за свако ε, $\varepsilon>0$, постоји број $\delta(\varepsilon)$, такав да ако је $x_0-\delta<x<x_0$, тада је $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. То записујемо овако: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=y_0$.

Ако у претходној дефиницији важи услов: $x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-y_0|<\varepsilon$, тада број y_0 називамо *десном граничном вредношћу*. Тада пишемо: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=y_0$.

Ако постоји лева и десна гранична вредност у тачки x_0 и ако су оне једнаке, тада функција у тој тачки има граничну вредност и: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Функција $y=f(x)$ је *непрекидна у тачки* x_0 ако има границу у тој тачки и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Функција је *непрекидна на интервалу* (a,b) ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала.

Ако је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0\neq f(x_0)$ или не постоји $f(x_0)$, тада је x_0 *тачка прекида* функције.

Ако су $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне функције, тада су непрекидне функције $f\pm g$ и $f\cdot g$, као и функција $\dfrac{f}{g}$, под условом да је $g(x)\neq 0$.

Промену аргумента x од тачке x_1 до тачке x_2 означићемо са $\Delta x=x_2-x_1$. Одговарајућу промену функције: $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ називамо *прираштајем функције.* Прираштај функције у тачки чија је апсциса x једнак је:

$$\boxed{\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)}$$

Функција $f(x)$ је *непрекидна у свакој тачки у којој је* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

72. Израчунати леве и десне граничне вредности у датој тачки x_0.

а) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$, $x_0=2$; *б)* $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$, $x_0=-1$; *г)* $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-4}$, $x_0=-2$;

д) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x_0=0$; *ђ)* $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, $x_0=0$;

е) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$, $x_0=0$; *ж)* $f(x)=\dfrac{x-|x|}{x}$, $x_0=0$;

з) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{за } x<0\\ x-1, & \text{за } x\geqslant 0,\ x_0=0\end{cases}$; *и)* $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{за } x\leqslant 1\\ 2x-1, & \text{за } x>1,\ x_0=1.\end{cases}$

73. Дефинисати $f(x_0)$ тако да функција $f(x)$ буде непрекидна.

а) $f(x)=\begin{cases}x^2-5, & \text{за } x<3\\ x+1, & \text{за } x>3,\ x_0=3;\end{cases}$ *б)* $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$; *г)* $f(x)=x\operatorname{ctg}x$, $x_0=0$;

д) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$, $x_0=0$; *ђ)* $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

е) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$, $x_0=2$; *ж)* $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$, $x_0=0$.

74. Одредити бројеве a и b, тако да функција $f(x)$ буде непрекидна.

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{за } x\neq 2\\ a, & \text{за } x=2\end{cases}$; *б)* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{за } x\neq 0\\ a, & \text{за } x=0\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{за } x\neq 0\\ a, & \text{за } x=0\end{cases}$; *г)* $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{за } x\leqslant 1\\ 3-ax^2, & \text{за } x>1\end{cases}$;

д) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{x}, & \text{за } x\neq 0\\ a, & \text{за } x=0\end{cases}$; *ђ)* $f(x)=\begin{cases}2\sin x, & \text{за } x\leqslant -\dfrac{\pi}{2}\\ a\sin x+b, & \text{за } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x, & \text{за } x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

75. Наћи прираштај функције.

а) $y=2x-3$; *б)* $y=x^2-x$; *в)* $y-\sqrt{x}$; *г)* $y=\dfrac{1}{x}$; *д)* $y=\sin x$; *ђ)* $y=e^x$.

76. Испитати непрекидност функције.

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{за } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 3-x^2, & \text{за } 1<x\leqslant 2 \end{cases}$; *б)* $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{за } |x|\leqslant 1 \\ |x-1|, & \text{за } |x|>1 \end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2}{x-2}, & \text{за } x\neq 2 \\ 6, & \text{за } x=2 \end{cases}$; *г)* $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{за } x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{за } x=0 \end{cases}$;

д) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{за } x\neq 0 \\ 0, & \text{за } x=0 \end{cases}$; *ђ)* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x^3}{1+x}, & \text{за } x\neq -1 \\ 3, & \text{за } x=-1 \end{cases}$;

е) $y=x^2$; *ж)* $y=\sqrt{x}$ за $x\geqslant 0$;

з) $y=\sin x$; *и)* $y=2^x$.

2.5 АСИМПТОТЕ ФУНКЦИЈА

Права $x=a$ је *вертикална асимптота* функције $f(x)$ ако је $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.

Права $y=b$ је *хоризонтална асимптота слева,* ако $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$, односно $y=b_1$ је *хоризонтална асимптота здесна,* ако $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b_1$.

Права $y=kx+n$, $k\neq 0$, је *коса асимптота слева,* ако је $\lim\limits_{x\to -\infty}\big(f(x)-kx-n\big)=0$, односно $y=k_1x+n_1$, $k_1\neq 0$, је *коса асимптота здесна,* ако је $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(f(x)-k_1x-n_1\big)=0$. Коефицијенте k, n, k_1, n_1 налазимо по формулама

$$\boxed{k=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad n=\lim_{x\to -\infty}\big(f(x)-kx\big)}$$

$$\boxed{k_1=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad n_1=\lim_{x\to +\infty}\big(f(x)-k_1x\big)}$$

Вертикалне асимптоте се могу наћи само у тачкама прекида.

Лева и десна асимптота су у општем случају различите. Постојање леве асимптоте није условљено постојањем десне, и сл.

△ **77.** Одредити асимптоте функције.

а) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$; *б)* $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$; *в)* $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$;

г) $f(x)=x-\sqrt{x^2+x-2}$; *д)* $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; *ђ)* $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$;

е) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-6}+x+2$; *ж)* $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}$; *з)* $f(x)=\dfrac{\ln x+2}{\ln x}$;

и) $f(x)\sqrt{|x^2+4x+3|}-x$; *ј)* $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$; *к)* $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$.

ТРЕЋА ГЛАВА

3 ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ ФУНКЦИЈА

3.1 ПОЈАМ ПРВОГ ИЗВОДА ФУНКЦИЈЕ

Ако је функција $y = f(x)$ дефинисана у околини тачке x_0, тада је *први извод функције* $f(x)$ у тачки x_0, у ознаци $f'(x_0)$, следећа гранична вредност (ако постоји):

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Тада за $y = f(x)$ кажемо да је *диференцијабилна* у тачки x_0.

Ако ова гранична вредност постоји и коначна је у свакој тачки интервала (a, b), на којем је функција дефинисана, тада је $f'(x)$ први извод ове функције на интервалу (a, b), а за функцију кажемо да је *диференцијабилна* на том интервалу.

Према начину дефинисања првог извода, очигледно се могу уочити лева и десна гранична вредност, па истичемо *леви извод*, $f'_-(x_0)$, и *десни извод*, $f'_+(x_0)$, у тачки x_0.

78. Израчунати по дефиницији извод функције.

$\triangle$ *а)* $f(x) = x^2 + x - 12$; $\triangle$ *б)* $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$; $\triangle$ *в)* $f(x) = \sqrt{x}$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $\triangle$ *д)* $f(x) = \cos x$; $\triangle$ *ђ)* $f(x) = e^x$;

е) $f(x) = 2^x$; *ж)* $f(x) = \ln|x|$; *з)* $f(x) = \sin 2x$.

79. Израчунати леве и десне изводе дате функције у датој тачки.

а) $f(x) = |x - 1|$, $x_0 = 1$; *б)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$; *г)* $f(x) = \sin|x|$, $x_0 = \pi$.

3.2 ТАБЛИЦЕ И ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦИРАЊА

Израчунавање извода по дефиницији је мукотрпан посао. Наводимо следеће *таблице извода* и *правила*, које користимо као доказане формуле.

ТАБЛИЦА ИЗВОДА*)

$c' = 0$ (c је константа)	$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$x' = 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦИРАЊА

$$y = c\cdot f(x) \Rightarrow y' = c\cdot f'(x)$$
$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$y = f(x)\cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x) \neq 0$$

ИЗВОД СЛОЖЕНЕ ФУНКЦИЈЕ

$y = f(u)$ и $u = \varphi(x) \Rightarrow y' = f'(u)\cdot u'$

Специјално: $y = \ln(f(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

ИЗВОД ИНВЕРЗНЕ ФУНКЦИЈЕ

$y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y) \Rightarrow y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, где индекс означава зависно промењиву.

△ **80.** Израчунати први извод (без коришћења правила за извод сложене функције).

*) Наведена таблица није минимална. Дати су изводи неких функција, као нпр. $\frac{1}{x}$, које треба запамтити због честе употребе.

а) $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4a$; *б)* $y = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2$; *в)* $y = x^3 - \sqrt[3]{x^2}$
г) $y = x^3 - 3^x$; *д)* $y = \sin x + \cos x$; *ђ)* $y = \pi x^2 + ax + b$;
е) $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\pi}{x\sqrt{x}}$; *ж)* $y = x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$; *з)* $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$;
и) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; *ј)* $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$; *к)* $y = (\arcsin x + \arccos x)^n$;
л) $y = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$; *љ)* $y = xe^x$; *м)* $y = x \arcsin x$;
н) $y = e^x \cos x$; *њ)* $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$; *о)* $y = (x^2 - 3x)e^x$.

△ **81.** Израчунати први извод функције.

а) $y = \frac{x}{e^x}$; *б)* $y = \frac{x}{x^2+1}$; *в)* $y = \frac{2}{x^3-1}$;
г) $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$; *д)* $y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$; *ђ)* $y = \frac{x^2+x-1}{x^3+1}$;
е) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; *ж)* $y = \frac{x}{1-\cos x}$; *з)* $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$;
и) $y = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$; *ј)* $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$; *к)* $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$;
л) $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$; *љ)* $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; *м)* $y = \frac{2\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

△ **82.** Одредити $f'(x_0)$ у следећим случајевима.

а) $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 4$; *б)* $f(x) = \frac{x^2-5x-1}{x^3}$, $x_0 = 2$;
в) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $x_0 = 0$; *г)* $f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}$, $x_0 = 2$;
д) $f(x) = \frac{a-x}{1+x}$, $x_0 = 1$; *ђ)* $f(x) = x\left(1+\sqrt{x^3}\right)$, $x_0 = 0$.

△ **83.** Израчунати први извод сложене функције.

а) $y = \arccos x\sqrt{x}$; *б)* $y = \ln \sin x$; *в)* $y = \ln^2 x - \ln \ln x$;
г) $y = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$; *д)* $y = \frac{1}{\ln^2 x}$; *ђ)* $y = \sqrt{1+e^{-x}}$;
е) $y = \sqrt{1-x^2}$; *ж)* $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; *з)* $y = \ln^3 x$;
и) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; *ј)* $y = \frac{x^3}{(1-x)^2}$; *к)* $y = \cos^2 x$;
л) $y = \sin x^3$; *љ)* $y = \cos^3 4x$; *м)* $y = \sin^2 \frac{1}{x}$;
н) $y = \sin(\cos x)$; *њ)* $y = 3\sin^2 x - 2\sin x^3$; *о)* $y = \sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$;
п) $y = (\arcsin x)^2$; *р)* $y = \arcsin \frac{2}{x}$; *с)* $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$;
т) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$; *ћ)* $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$; *у)* $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$.

△ **84.** Израчунати први извод функције.

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$; *б)* $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; *в)* $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$; *г)* y^{3^x};

д) $e^{\arcsin 2x}$; *ђ)* $y=\ln\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}$; *е)* $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

ж) $y=\operatorname{arctg}\ln\dfrac{1}{x}$; *з)* $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2}$; *и)* $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

ј) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; *к)* $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

л) $y=\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$; *љ)* $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$;

м) $y=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$; *н)* $y=\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; *њ)* $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

85. Доказати импликације.

а) $y=xe^{-x}\Rightarrow xy'=(1-x)y$; *б)* $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}\Rightarrow xy'=(1-x^2)y$;

в) $y=\ln\dfrac{1}{1+x}\Rightarrow xy'+1=e^y$; *г)* $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow(1-x^2)y'-xy=1$;

д) $y=\dfrac{1}{1+x+\ln x}\Rightarrow xy'=y^2\ln x-y$;

ђ) $y=\dfrac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow\sqrt{1+x^2}(y-xy'-x^3y')=1$.

86. Функција у имплицитном облику (није решена по y) може се диференцирати коришћењем правила за извод сложене функције. Нпр. из: $y^2-2x\sin y+x^2=0$, налазимо: $2yy'-2\sin y-2x\cos y\cdot y'+2x=0$, а одавде: $y'=\dfrac{x-\sin y}{x\cos y-y}$. Поступајући слично, израчунати изводе функција у имплицитном облику.

а) $y^2-2xy+b^2=0$; *б)* $\cos(xy)=x$; *в)* $xy-\ln y=1$;

г) $y=x+\operatorname{arctg}y$; *д)* $e^y=x+y$; *ђ)* $\ln y+\dfrac{x}{y}=\pi$;

е) $y=\cos(x+y)$; *ж)* $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; *з)* $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

3.3 ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ФУНКЦИЈЕ

Функција $y=f(x)$ дефинисана на интервалу (a,b), диференцијабилна је у тачки x_0, $x_0\in(a,b)$, ако њен прираштај у x_0 има облик: $\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+a(\Delta x)\cdot\Delta x$, где је A величина независна од Δx, а величина $a(\Delta x)\to 0$, кад $\Delta x\to 0$. Показује се да је $A=f'(x_0)$. Израз $A\Delta x$, тј. $f'(x_0)\Delta x$ назива се *диференцијалом* функције $f(x)$ у тачки x_0. Имајући у виду функцију $y=x$ и њен диференцијал $dy=\Delta x$, то ћемо диференцијал независно промењиве означити са $dx = \Delta x$, па имамо коначно:

$$\boxed{dy_0 = f'(x_0)dx}$$

за функцију диференцијабилну у произвољној тачки $x \in (a, b)$ имамо:

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

Имајући на уму чињеницу да се вредност израза $a(\Delta x)\cdot \Delta x$, за довољно мало Δx, може занемарити, добијамо формулу за *приближно израчунавање промене функције у тачки* x_0.

$$\boxed{\Delta f\,(x_0) \approx f'(x_0)\cdot \Delta x}$$

Како је $\Delta f\,(x_0) = f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)$, *приближну вредност функције* у околини тачке x_0 добијамо по формули:

$$\boxed{f\,(x_0 + \Delta x) \approx f\,(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x}$$

Правила диференцирања за израчунавање извода у прилагођеном облику се користе и за израчунавање диференцијала.

△ **87.** Наћи диференцијал функције.
а) $y = x^2 - 2x + 3$; *б)* $y = e^x$; *в)* $y = 2\arcsin x + \arccos x$;
г) $y = \sqrt[3]{x}$; *д)* $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; *ђ)* $y = \cos 2x$;
е) $y = \dfrac{\ln x}{2 - \ln x}$; *ж)* $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$.

△ **88.** Израчунати приближно промену дате функције у датој тачки x_0, при датој промени Δx независно промењиве.
а) $f\,(x) = 3x^2 - x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$; *б)* $f\,(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,41$;
в) $f\,(x) = 2^x$ $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,4$; *г)* $f\,(x) = \operatorname{tg} x$ $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = 3°$.

89. Доказати формуле за израчунавање приближне вредности корена, за $a > 0$.
а) $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$, $|x| \leqslant a^2$; *б)* $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$, $|x| \leqslant a^n$.

△ **90.** Користећи се диференцијалом израчунати приближне вредности.
а) $\sqrt[3]{1,02}$; *б)* $\sqrt[10]{1000}$; *в)* $\sqrt[4]{17}$; *г)* $\cos 61°$; *д)* $\sin 31°$;
ђ) $\operatorname{tg} 44°$; *е)* $\arcsin 0,54$; *ж)* $\operatorname{arctg} 1,05$; *з)* $\log 0,9$.

3.4 ВИШИ ИЗВОДИ

Изводи вишег реда се дефинишу индуктивно. Тако други извод представља извод првог извода:

$$\boxed{y'' = (y')'}, \quad \text{односно} \quad \boxed{f''(x) = (f'(x))'}$$

Даље, трећи извод представља извод другог извода:

$$\boxed{y''' = (y'')'}$$

Уопште, n-ти извод је извод $(n-1)$-ог извода:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'}$$

$\triangle$ **91.** Наћи други извод функције.

а) $y = x^6 - 4x^3$; *б)* $y = (x^2+1)^3$; *в)* $y = e^{2x-1}$;
г) $y = \operatorname{arctg} x$; *д)* $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; *ђ)* $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$;
е) $y = e^{\sqrt{x}}$; *ж)* $y = \sqrt{1-x^2}$; *з)* $y = \dfrac{1}{1+x^2}$;
и) $y = \ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$; *ј)* $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; *к)* $y = (\arcsin x)^2$.

$\triangle$ **92.** Наћи трећи извод функције.

а) $y = xe^{-x}$; *б)* $y = \cos^2 x$; *в)* $y = \dfrac{1}{1-x}$;
г) $y = \ln(1+x)$; *д)* $y = \ln\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; *ђ)* $y = e^{x^2}$;
е) $y = \arccos x$; *ж)* $y = \operatorname{arctg} x$; *з)* $y = \ln\sqrt{x+1}$.

$\triangle$ **93.** Израчунати вредност извода у датој тачки.

а) $f(x) = (x+10)^6$, $f'''(-6) = ?$; *б)* $f(x) = \sin^2 x$, $f'''(\pi) = ?$;
в) $f(x) = e^{2x}$, $f''(0) = ?$; *г)* $f(x) = x^3 \ln x$, $f^{IV}(1) = ?$.

94. Доказати да се n-ти извод израчунава по датој формули. Користити математичку индукцију.

а) $y = e^x$, $y^{(n)} = e^x$;
б) $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2} + x\right)$;
в) $y = \ln(1+x)$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

95. Наћи формулу за израчунавчње n-тог извода дате функције.

а) $y = e^{-x}$; *б)* $y = \cos 2x$; *в)* $y = \dfrac{1}{1-x}$;
г) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$; *д)* $y = x^k$, $k < n$; *ђ)* $y = x^n$;
е) $y = \sqrt{1+x}$; *ж)* $y = \sqrt[3]{2-x}$; *з)* $y = \dfrac{2}{1-x^2}$.

ЧЕТВРТА ГЛАВА

4 ПРИМЕНЕ ИЗВОДА

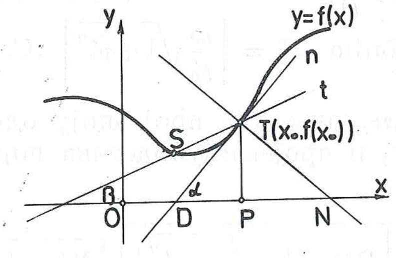
4.1 ПРИМЕНЕ ПРВОГ ИЗВОДА

Дефиниција тангенте:

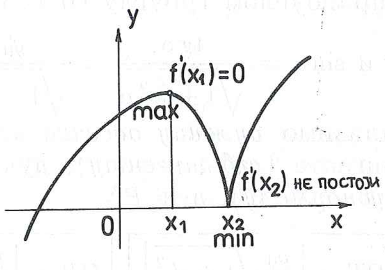
> **Тангента функције** *$y = f(x)$ у тачки x_0 је гранични положај сечице у тој тачки, кад дужина пресечне тетиве тежи нули.*

На сл. 1, кад $S \to T$, тада $d(S,T) \to 0$ и сечица s тежи тангенти t.

Права n, кроз тачку T, нормална на тангенту t, назива се *нормалом* функције $y = f(x)$ у тачки T.



Сл. 1



Сл. 2

Геометријско значење првог извода: вредност првог извода функције у тачки x_0 је коефицијент правца тангенте у тој тачки. Отуда добијамо једначине тангенте и нормале у тачки T.

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)}$$

ТАНГЕНТА:	НОРМАЛА:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$	$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Угао под којим се секу две криве је оштар или прав угао одређен тангентама датих кривих у пресечној тачки. Оштар угао између сечице и тангенте криве у пресечној тачки, називамо углом под којим права сече криву.

Из дефиниције првог извода се лако изводе закључци о *монотоности* функција.

Функција је монотоно растућа на интервалу (a, b) ако и само ако је $f'(x) > 0$ на том интервалу.

Функција је монотоно опадајућа на интервалу (a, b) ако и само ако је $f'(x) < 0$ на том интервалу.

Ако је $f'(x_0) = 0$, тачка x_0 је *стационарна*.

Одавде даље закључујемо: ако је функција $y = f(x)$ дефинисана у тачки x_0 и први извод у x_0 мења знак, тада је $f(x)$ *локални екстремум* функције. ($f(x_0)$ је *локални максимум* ако постоји околина тачке x_0, $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, таква да је $f(x_0) > f(x)$ за свако $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Ако је пак $f(x_0) < f(x)$ онда имамо *локални минимум*.) Може се доказати, ако је $f(x_0)$ локални екстремум, тада је $f'(x_0) = 0$ или први извод не постоји у тачки x_0. (Видети сл. 2.)

Дужина одсечка тангенте, на сл. 1 дуж DT, лако се израчунава у правоуглом троуглу DPT. Наиме $\dfrac{PT}{DT} = \sin\alpha$. Како је $PT = f(x_0) = y_0$ и $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{y_0'}{\sqrt{1 + {y_0'}^2}}$ биће $DT = \left| \dfrac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + {y_0'}^2} \right|$. Слично налазимо *дужину одсечка нормале,* дуж NT, пројекцију одсечка тангенте (*субтангенту*), дуж DP, и пројекцију одсечка нормале (*субнормалу*), дуж PN.

$$\boxed{DT = \left| \frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + {y_0'}^2} \right|} \quad \boxed{DP = \left| \frac{y_0}{y_0'} \right|} \quad \boxed{DN = \left| y_0\sqrt{1 + {y_0'}^2} \right|} \quad \boxed{NP = |y_0 y_0'|}$$

△ **96.** Написати једначину тангенте криве $y = x - \dfrac{1}{x}$ у тачки пресека са осом Ox.

△ **97.** Написати једначину нормале дате криве

а) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ у тачки чија је апсциса $x_0 = 3$;

б) $y = 2 - \sqrt{x}$ у тачки пресека са симетралом првог квадранта.

в) $y = x^2 - 4x + 5$ у тачкама пресека са правом $x - y + 1 = 0$.

△ **98.** Написати једначине тангенте и нормале дате криве у датој тачки.

а) $y=\frac{1}{x}$, $x_0=-\frac{1}{2}$; *б)* $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$; *в)* $y=x^3+2x^2-4x+3$, $T(-2,\,5)$;
г) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $T(1,\,0)$; *д)* $y=\operatorname{tg}2x$, $T(0,\,0)$; *ђ)* $y=e^{1-x^2}$, $y_0=1$;
е) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$, $y_0=0$; *ж)* $y=\arccos 3x$, $x_0=0$.

△ **99.** Саставити једначину тангенте дате криве.
а) $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$, паралелну оси Ox;
б) $y=x^2(x-2)^2$, паралелну оси Ox;
в) $y=x^3+x-2$, паралелну правој $y=4x-1$;
г) $y=x^2-7x+3$, паралелну правој $5x+y-3=0$;
д) $y=x^3+3x^2-5$, нормалну на праву $2x-6y+1=0$.

△ **100.** Саставити једначину нормале дате криве.
а) $y=x\ln x$, паралелну правој $x-y+7=0$;
б) $y=\frac{1}{1+x^2}$, нормалну на осу Ox.

101. Тетива сече параболу $y=x^2-2x+5$ у тачкама чије су апсцисе $x_1=1$, $x_2=3$. Написати једначину тангенте која је паралелна датој тетиви.

102. Права p, која пролази кроз координатни почетак, сече параболу $y=x^2-6x+6$ у темену. Написати једначину нормале параболе која је нормална на правој p.

103. Доказати да се тангенте на криву $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, постављене у тачкама са ординатом $y_0=1$, секу у координатном почетку.

104. Дата је парабола $y=x^2-x+1$. Саставити једначине нормала у тачкама чије су апсцисе: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=\frac{5}{2}$. Доказати да ове нормале имају једну заједничку тачку.

105. У тачки $(1,\,2)$ параболе $y^2=4x$ израчунати дужине одсечака тангенте, нормале, субтангенте и субнормале.

106. Доказати да је субнормала хиперболе $x^2-y^2=a^2$ у свакој тачки једнака апсциси те тачке.

107. Израчунати углове које тангенте криве $y=x^2-x$, конструисане у тачкама: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\frac{1}{2}$, одређују са осом Ox.

108. Одредити угао под којим дата крива сече осу Ox у координатном почетку
а) $y=\sin x$ *б)* $y=\operatorname{tg}x$; *в)* $y=\sin 2x$.

109. Доказати да је крива $y=x^5+5x-12$ у свим својим тачкама нагнута према оси Ox под оштрим углом.

110. Израчунати угао под којим се секу криве.

а) $x^2 - y^2 = 5$ и $4x^2 + 9y^2 = 72$; *б)* $y^2 = x^2$ и $y = x^3$;
в) $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$; *г)* $y = (x-2)^2$ и $y = -x^2 + 6x - 4$;
д) $x^2 + y^2 = 8x$ и $y^2 = \dfrac{x^3}{2-x}$; *ђ)* $x^2 + y^2 - 4x = 1$ и $x^2 + y^2 + 2y = 9$;
е) $x^2 = 4y$ и $y^2 = \dfrac{8}{x^2+4}$; *ж)* $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ и $y = \dfrac{x^2+4x+8}{16}$.

△ **111.** Доказати да су монотоно растуће функције.

а) $y = x^3 + x$; *б)* $y = x - \operatorname{arctg} x$; *в)* $y = \dfrac{x^2-1}{x}$, $x \neq 0$.

△ **112.** Доказати да функција $y = \sqrt{2x - x^2}$ расте на интервалу $(0, 1)$, а опада на интервалу $(1, 2)$.

△ **113.** Одредити интервале монотоности функција.

а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$; *б)* $y = x^4 - 2x^2 - 5$; *в)* $y = x - e^x$;
г) $y = 2x^2 - \ln x$; *д)* $y = x + \cos x$; *ђ)* $y = (x-2)^5(2x+1)^4$;
е) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$; *ж)* $y = \dfrac{x}{x-2}$; *з)* $y = x^2(x-3)$; *и)* $y = (x-3)\sqrt{x}$.

△ **114.** Наћи екстремуме функција.

а) $y = 2x^3 - 3x^2$; *б)* $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$; *в)* $y = x^2(x-12)^2$; *г)* $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$;
д) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; *ђ)* $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$; *е)* $y = \sqrt[3]{x} - \dfrac{x}{3}$; *ж)* $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.

115. Испитати екстремуме функције.

а) $y = x - \ln(1+x)$; *б)* $y = x - \ln(1+x^2)$; *в)* $y = x \ln x$;
г) $y = x \ln^2 x$; *д)* $y = \dfrac{e^x}{x}$; *ђ)* $y = x^2 e^{-x}$.

△ **116.** Наћи најмању (m) и највећу (M) вредност функције.

а) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; *б)* $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

117. Наћи најмању и највећу вредност функције на датом интервалу.

а) $y = x^3 - 3x + 3$, $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$; *б)* $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-2, 2]$;
в) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-6, 8]$; *г)* $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \in [0, 4]$;
д) $y = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; *ђ)* $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}$, $x \in [0, 1]$.

△ **118.** Од свих реалних бројева наћи онај који има најмањи збир трећег и четвртог степена.

△ **119.** Од комада скице дужине 30cm направити правоугаоник највеће површине.

△ **120.** У одсечак параболе $y = 12 - x^2$, одређен осом Ox, уписати правоугаоник максималне површине.

121. У круг је уписан трапез, коме је већа основа пречник датог круга. Одредити углове трапеза, тако да површина трапеза буде највећа.

$*$ **122.** Два темена правоугаоника налазе се на кривој $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, а друга два на правој $y = 1$. Одредити положај темена на кривој, тако да површина правоугаоника буде највећа.

$\triangle$ **123.** Од картона облика квадрата 18×18 треба изрезати четири једнака квадрата, тако да се од преосталог дела направи кутија без поклопца, максималне запремине.

$\triangle$ **124.** Кроз тачку $A(1,4)$ поставити праву тако да збир одсечака које права одређује на позитивним деловима координатних оса, буде најмањи.

125. На кривој $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ наћи тачку у којој тангента са осом Ox одређује угао φ, тако да $|\varphi|$ има највећу вредност.

126. Запремина правилне тростране призме је v. Колика је основна ивица, ако је површина призме минимална?

127. Направити резервоар облика правилне четворостране призме, тако да се за покривање дна и зидова утроши што мање керамичких плочица, а да му капацитет буде $32\,\mathrm{m}^3$.

128. У лопту полупречника r уписати ваљак, тако да му површина омотача буде највећа.

129. Око полулопте полупречника r описати купу минималне запремине, тако да је база купе у равни великог круга полулопте.

$\triangle$ **130.** У лопту запремине v уписати ваљак највеће запремине. Колика је запремина ваљка?

$\triangle$ **131.** У праву купу полупречника r и висине H уписати ваљак максималне запремине.

132. Одредити централни угао исечка, полупречника r, тако да се од њега може направити омотач купе максималне запремине.

133. Одредити максималну запремину купе дате изводнице s.

134. Израчунати висину купе највеће запремине, уписане у лопту полупречника r.

135. Израчунати висину купе најмање запремине, описане око лопте полупречника r.

136. Који од цилиндара дате запремине V има најмању површину?

137. Око цилиндра датог полупречника r и висине H описати праву купу најмање запремине, тако да им се равни и центри база поклапају.

$*$ **138.** Дата је функција: $y = x^3 + px + q$.
а) Ако је M локални максимум, а m локални минимум дате функције, доказати да је $Mm = q^2 + \frac{4}{27}p^3$.
б) Одредити p и q тако да је $M - m = 4$ и да је -2 нула функције.

$*$ **139.** Користећи се изводима израчунати збир.
а) $S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$;
б) $S_2 = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots + (-1)^n x^{2n-1}$;
в) $S_3 = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4x^3 + \cdots + n^2x^{n-1}$.

140. Доказати да је функција $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$ константа за $x \geqslant 1$.

4.2 ПРИМЕНЕ ДРУГОГ ИЗВОДА

Потребан услов за локални екстремум функције f у тачки x_0, диференцијабилне у тој тачки је $f'(x_0) = 0$.

Ако је функција f диференцијабила у тачки x_0 и $f'(x_0) = 0$, *довољан услов* за локални максимум у тој тачки, је $f''(x_0) < 0$ а за локални минимум $f''(x_0) > 0$.

Функција $y = f(x)$ је *конвексна* на интервалу $[a, b]$ ако је за свако $x \in (a, b)$ испуњен услов $f(x) < \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$*) Ако, пак, важи услов $f(x) > \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$, функција је *конкавна* на интервалу $[a, b]$.

Ако је функција $f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и има у свакој тачки други извод, тада је функција f конвексна на том интервалу ако и само ако је $f''(x) > 0$, за свако $x \in (a, b)$.

Функција $f(x)$, дефинисана на интервалу (a, b), која у свакој тачки тог интервала има други извод, *конкавна* је на интервалу (a, b) ако и само ако је $f''(x) < 0$, за свако $x \in (a, b)$.

Нека је функција $f(x)$ дефинисана у тачки x_0 и у околини тачке x_0 и диференцијабилна у тој околини. Ако $f''(x)$ постоји и мења знак при проласку аргумента кроз тачку x_0, тада је $(x_0, f(x_0))$ *превојна тачка* функције $f(x)$.

$\triangle$ **141.** Користећи први и други извод (потребан и довољан услов) наћи екстремуме функција.
а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; *б)* $y = x^2(2 - x)^2$; *в)* $y = \dfrac{x}{\ln x}$;
г) $y = x^2e^{-x}$; *д)* $y = x + \sqrt{1 - x}$; *ђ)* $y = \sqrt{2 - x^2}$.

---

*) Овако дефинишемо конвексну функцију, „испупчену гледајући одоздо". Неки аутори под конвексном функцијом подразумевају функцију чији је график „испупчен гледајући одозго".

△ **142.** Одредити k у функцији $y = k\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$, тако да она за $x = \frac{\pi}{3}$ има локални екстремум.

143. Ако функција $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ има локалне екстремуме за $x = 1$ и $x = 2$, доказати да је тада за $x = 1$ минимум, а за $x = 2$ максимум.

144. Доказати да је конкавна функција.

а) $y = \sqrt[3]{x^2}$; *б)* $y = \ln(x^2 - 1)$.

145. Доказати на је конвексна функција.

а) $y = x\operatorname{arctg} x$, $\forall x \in R$; *б)* $y = x^4\ln|x| - 5x + 2$, $x \neq 0$.

146. Да ли је функција $f(x) = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ у околини тачака $A(1, 11)$ и $B(3, 3)$ конвексна или конкавна?

147. Одредити превојне тачке функција.

а) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$; *б)* $y = \cos x$; *в)* $y = \sqrt[3]{x+2}$; *г)* $y = \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$.

△ **148.** Одредити интервале конкавности и конвексности, као и превојне тачке функције.

а) $y = (x+1)^4$; *б)* $y = (x+1)^4 + e^x$; *в)* $y = (x+2)^6 + 2x + 2$;
г) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$; *д)* $y = \frac{1}{x+3}$; *ђ)* $y = x^2\ln x$;
е) $y = \ln(1 + x^2)$; *ж)* $y = \operatorname{arctg} x - x$.

149. За које вредности a и b тачка $(1, 3)$ је превојна тачка криве $y = ax^3 + bx^2$?

150. Одредити a и b, тако да $A\left(2, \frac{5}{2}\right)$ буде превојна тачка криве одређене једначином: $x^2y + ax + by = 0$. Наћи потом и остале превојне тачке.

* 4.3 ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

Ако функције $y = f(x)$ и $y = g(x)$, кад $x \to a$ (може бити $a = \infty$) обе теже ка 0 или обе теже ка ∞ и диференцијабилне су у околини тачке a, тада је $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, ако је $g'(x) \neq 0$ и постоји лимес с десне стране. Ово је тзв. *Лопиталово правило.*

Комбиновањем Лопиталовог правила и раније научених метода, решићемо једноставно и неке сложене лимесе. Нпр.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{-(1-\cos x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{6}.$$

*) Није предвиђено за редовну наставу.

151. Користећи се Лопиталовим правилом израчунати граничне вредности.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; *в)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x\sin x}$; *ж)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$; *з)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

152. Навести разлоге због којих се не може применити Лопиталово правило у случају

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\cos x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

153. Користећи се идентитетом $a\cdot b=\dfrac{a}{\frac{1}{b}}$, $b\neq 0$, наћи граничне вредности користећи се Лопиталовим правилом.

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$; *б)* $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$; *в)* $\lim\limits_{x\to +0} x\ln^3 x$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

154. Користећи се идејом слично претходном задатку, применити Лопиталово правило на израчунавање следећих граничних вредности.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; *в)* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$; *д)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

155. Израз облика $m=a^b$ можемо свести на количник на следећи начин (за $a>0$ и $m>0$): $\ln m=\ln a^b=b\ln a=\dfrac{\ln a}{\frac{1}{b}}$. Тако можемо израчунати нпр. $\lim\limits_{x\to +0} x^x=m$: $\ln m=\lim\limits_{x\to +0} x\ln x=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +0}(-x)=0$. (Овде смо на крају применили Лопиталово правило). Даље имамо: $\ln m=0\Rightarrow m=e^0=1$, тј. $\lim\limits_{x\to +0} x^x=1$. Поступајући слично израчунати граничне вредности.

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; *ђ)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

ПЕТА ГЛАВА

5 ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА - ЦРТАЊЕ ГРАФИКА

Као што смо написали у одељку 1.3, график функције $y = f(x)$ је скуп свих тачака $(x, f(x))$, за све $x \in D$. Наравно, све ове тачке не можемо одредити. Стога за цртање графика у координатној равни xOy одређујемо карактеристичне тачке (нуле, екстремуме, превојне тачке, тачке прекида) и друге карактеристичне особине (асимптоте, монотоност, конкавност, и сл.). То се може учинити на разне начине, по различитим редоследима рачунања. Овде предлажемо једну *шему за испитивање функција и цртање графика,* шему за коју смо се уверили да је практична и систематична. Испитивања ћемо груписати у 5 тачака: *)

1° *Област дефинисаности функције.*

2° *а) Нуле функције* (Пресеци са осом Ox, ако их има и ако можемо да их одредимо.)

б) Знак функције (ако можемо да га одредимо).

в) Разне особине које могу олакшати испитивање и цртање графика: *парност* (симетричност графика), *периодичност, пресек са осом Oy.*

3° *Асимптоте:*

а) Вертикалне (понашање функције у околини тачака прекида)

б) Хоризонталне $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right.$ и $\left.\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

в) Косе: $y = kx + n$.

4° *Изводи*

а) Знак y' (монотоност и екстремуми)

б) Знак y'', (конкавност и превојне тачке)

5° *Цртање графика:* уношењем података, као што је приказано у наредном примеру, као и у примерима из МАТХЕМАТИСКОПА 7 (стр. 273 – 279) и спајањем карактеристичних тачака добијамо линију која представља график испитиване функције.

---

*) Погледати: MATHEMATISKOP 7 – МАТЕМАТИКА ЗА МАТУРАНТЕ, одељак 4.4. Тамо је детално решено 6 карактеристичних функција у Примеру 28. и још 6 у задатку за вежбање 256.

Пример. Испитати функцију $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ и нацртати њен график

Решење. 1° Функција је дефинисана за $x - 1 \neq 0$, тј. за $x \neq 1$.

2° *а) Нуле* функције: $f(x) = 0$ за $2x - 1 = 0$, тј. за $x = \dfrac{1}{2}$.

б) Знак функције налазимо користећи се приложеном шемом. Дакле: $f(x) > 0$ за $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ и $f(x) < 0$ за $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.

	$\frac{1}{2}$	1	
$2x-1$	$- - - -$	$+ + +$	$+ + + + + + +$
$(x-1)^2$	$+ + + +$	$+ + +$	$+ + + + + + + +$
$f(x)$	$- - - -$	$+ +$	$+ + + + + +$

ЗНАК ФУНКЦИЈЕ

в) Функција није периодична, парна, ни непарна. Пресек са осом Oy је $f(0) = -1$.

3° *Асимптоте*

а) Испитајмо тачку прекида $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1-0-1)^2} = \frac{1}{(-0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1+0-1)^2} = \frac{1}{(+0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Права $x = 1$ је вертикална асимптота.

б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$, па је $y = 0$ хоризонтална асимптота слева и здесна.

в) С обе стране има хоризонталну асимптоту, па нема косу.

4° *Изводи*

а) $y' = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$. Знак y' дајемо шемом $y_{\min} = f(0) = -1$, тј. $M(0, -1)$

	0	1	
$-x$	$+ + +$	$-$	$- - -$
$x-1$	$- - - - -$	$- -$	$+ + +$
y'	$-$	$+$	$-$
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	min		

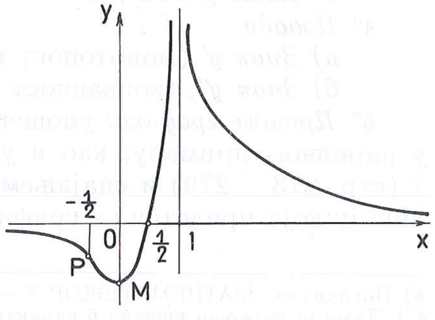
б) $y'' = \dfrac{4x+2}{(x-1)^4}$, па је $\operatorname{sgn}(y'') = \operatorname{sgn}(4x+2)$;

	$-\frac{1}{2}$	1	
y''	$- - -$	$+ + + +$	$+ + + + + +$

$x = -\dfrac{1}{2}$ је превојна тачка

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{8}{9}$, тј. $P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{8}{9}\right)$.

На основу израчунатих података цртамо график, сл. 3



Сл. 3.

$\triangle$ **156.** Поступајући слично претходном примеру, испитати функцију и нацртати њен график.

а) $y = x^4 - 2x^2$; *б)* $y = x^3 - 3x^2$;
в) $y = (x-1)^2(x+2)$; *г)* $y = (x^2-1)^3$;
д) $y = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$; *ђ)* $y = (x+3)^3 - 4(x+1)$;
е) $y = x^2 - 2|x| + x + 2$; *ж)* $y = |x^2 + 2x| - 3$;
з) $y = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} + x$; *и)* $y = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\operatorname{sgn}(x-1)}$.

Испитати функцију и нацртати график.

157. $\triangle$ *а)* $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; $\triangle$ *б)* $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$;
$\triangle$ *в)* $y = \dfrac{x^2}{x+1}$; $\triangle$ *г)* $y = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$;
$\triangle$ *д)* $y = \dfrac{3x-1}{(x+1)^2}$; $\triangle$ *ђ)* $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;
е) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; *ж)* $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;
з) $y = \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+1}$; *и)* $y = \dfrac{(x-2)^3}{x^2+1}$.

$\triangle$ **158.** *а)* $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$; *б)* $y = 3x + \dfrac{1}{x^3}$;
в) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$; *г)* $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}$.

159. *а)* $y = \dfrac{x}{x^3+3x}$; *б)* $y = \dfrac{x^3}{x^3-2x^2+x}$;
в) $y = \dfrac{8x+8}{x^3+x^2-4x-4}$; *г)* $y = \dfrac{x^3-x}{x^3+2x^2+x}$.

160. *а)* $y(x^3-1) = x^4$; *б)* $y(x-1) = x^3$;
в) $y(x+1)^2 = 2x+1$; *г)* $xy = (x-1)(x-2)$;
д) $y = \big((x-1)(x-2)(x-3)\big)^{-1}$; *ђ)* $y = 9(x-1)^2(x+1)^{-3}$.

161. *а)* $y = \dfrac{x}{|x-1|}$; *б)* $y = \dfrac{|x|}{x-x^3}$;
в) $y = \dfrac{x|x|}{x-1}$; *г)* $y = \dfrac{x+|x|}{|x^2-1|-3}$.

162. $\triangle$ *а)* $y = |x-1|\sqrt{x}$; $\triangle$ *б)* $y = |x|\sqrt{1-x^2}$;
$\triangle$ *в)* $y = x\sqrt{x+3}$; *г)* $y = \sqrt{x^3-3x}$;
$\triangle$ *д)* $y = x - \sqrt{x^2-x-6}$; $\triangle$ *ђ)* $y = \sqrt{x^2+4x+3} + x - 2$;
е) $y = x + 1 + \sqrt{|x^2+2x-3|}$; *ж)* $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$.

з) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$; *и)* $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

163. △ *а)* $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 3x$; △ *б)* $y = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$;
в) $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$; *г)* $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$;
д) $y = x\sqrt[3]{x-1}$; *ђ)* $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

164. △ *а)* $y = \sin^2 x - 2\sin x$; △ *б)*)* $y = \sin 2x + 2\cos x$;
в) $y = 2\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$; *г)* $y = 2\sin x + \cos 2x + 3$;
д) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$; *ђ)* $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

165. △ *а)* $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$; *б)* $y = x \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;
*в)**)* $y = x - 2\operatorname{arctg} x$; *г)* $y = x - 2\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$;
д) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^2-1}$; *ђ)* $y = \arccos\dfrac{-2x}{x^2+1}$.

166. *а)* $y = x^2 \ln x$; *б)* $y = (x-1)\ln^2(x-1)$;
в) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; *г)* $\ln(x^2+1)$;

167. △ *а)* $y = xe^{-\frac{1}{2}}$; *б)* $y = xe^{-x}$;
в) $y = (2+x^2)e^{-x^2}$; *г)* $y = (3-x^2)e^{-x}$;

$*$ **168.** Дата је функција $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 2$.
а) Одредити реалан параметар a, тако да функција има екстремну вредност за $x = -1$.
б) За добијену вредност параметра a испитати функцију и нацртати график.

$*$ **169.** Дата је функција $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. За $n \in N$ означимо: $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$, где је $f^1(x) = f(x)$.

Нацртати график функције $f^{1990}(x)$.

$*$ **170.** Дата је функција $y = xe^{-\alpha x^2}$, где је α позитивна константа.
а) Испитати ток ове функције за произвољно α и нацртати график за $\alpha = 2$.
б) Екстремне тачке дате функције мењају са α свој положај у равни xOy. Одредити криву $y = f(x)$ којој припадају све те екстремне тачке.

---

*) У задацима б, в, г, д, ђ испитивање обавити без одређивања превојних тачака.
**) У задацима 165. в) и г) не можемо да израчунамо нуле функције.

ШЕСТА ГЛАВА

6 НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Ако је $y = f(x)$ непрекидна функција на интервалу (a, b), онда на том интервалу постоји функција $F(x)$, таква да је $F'(x) = f(x)$. $F'(x)$ је *примитивна функција* функције $f(x)$.

Ако је $F'(x) = f(x)$, онда је $F(x)+C$ *неодређени интеграл* функције $f(x)$, где је C *произвољна* (интеграциона) *константа.* То означавамо са:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Очигледно важе особине:

$$\boxed{\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx, \ \ k \text{ је константа}}$$

$$\boxed{\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx}$$

$\triangle$ **171.** Користећи се дефиницијом неодређеног интеграла, тј. користећи се примитивном функцијом, израчунати следеће интеграле.

а) $\int 2dx$; *б)* $\int e^{-x}dx$; *в)* $\int \sin 3x dx$; *г)* $\int \dfrac{dx}{x}$

д) $\int x dx$; *ђ)* $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; *е)* $\int 10^{2x}dx$; *ж)* $\int (2x-1)dx$;

з) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$; *и)* $\int \dfrac{dx}{x+5}$; *ј)* $\int \dfrac{dx}{2x-7}$; *к)* $\int \dfrac{2x dx}{x^2+1}$.

6.1 ТАБЛИЦЕ ИНТЕГРАЛА *)

Поступајући слично претходном задатку налазимо следеће основне интеграле

$\int dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \text{ специјално: } \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \text{ специјално: } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Корисно је запамтити и ово:

$$\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + C \quad \left(\text{јер је } \Big(\ln\lvert f(x)\rvert\Big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

△ **172.** Користећи се таблицама израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$; *б)* $\displaystyle\int \left(\frac{x^2-3}{x}\right)dx$; *в)* $\int 3^x dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x+\sqrt{x})^3}{x\sqrt{x}}dx$ *д)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; *ђ)* $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$; *ж)* $\displaystyle\int \frac{dx}{3+x^2}$; *з)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$;

и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; *ј)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; *к)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$.

△ **173.** Погодним алгебарским трансформацијама довести подинтегралне функције на облике дате у таблици, па израчунати интеграле.

---

*) Ово су *практичне таблице*, а не тзв. *минималне таблице*. Нпр. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx$, па може да се примени случај $\int x^k dx$, $k\neq-1$. Због тога у минималним таблицама немамо $\int \frac{dx}{x^2}$, а такође ни $\int x dx$.

а) $\int x\sqrt[3]{x}dx$; *б)* $\displaystyle\int \frac{x-x^2e^x}{x^2}dx$; *в)* $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2+4}$;

г) $\displaystyle\int \frac{xdx}{a+x}$; *д)* $\displaystyle\int \frac{1-3x}{x+3}dx$; *ђ)* $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx$; *ж)* $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$; *з)* $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2dx}{x^3+x}$;

и) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$; *ј)* $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{9x^2+1}dx$; *к)* $\displaystyle\int \frac{(2x^2+1)dx}{x^2+x^4}$;

л) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; *љ)* $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+3}$; *м)* $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x}$, $b \neq 0$.

$\triangle$ **174.** Израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x}}{x}dx$; *б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x^2}}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-5x^2}}$; *д)* $\displaystyle\int \frac{3-2x\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$; *ђ)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}-2-2x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

$\triangle$ **175.** Свођењем на табличне интеграле израчунати.

а) $\int 3^xe^xdx$; *б)* $\int 2^{2x}a^xdx$, $a>0$; *в)* $\displaystyle\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$;

г) $\int (e^x-1)^2dx$; *д)* $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$; *ђ)* $\int e^{-3x+1}dx$;

е) $\int 4^{2-3x}dx$; *ж)* $\displaystyle\int \frac{2^x-3^x}{4^x6^x}dx$; *з)* $\displaystyle\int \frac{(2^{x+1}-3^{x-1})^2}{6^x}dx$.

$\triangle$ **176.** Користећи познате обрасце из тригонометрије свести на табличне интеграле и израчунати.

а) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$; *б)* $\int \operatorname{tg}^2 dx$; *в)* $\int \operatorname{ctg}^2 xdx$;

г) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}dx$; *д)* $\int \cos^2 xdx$; *ђ)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$;

е) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^2 x-\cos 2x}$; *ж)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 2x\operatorname{tg}^2 2x}$; *з)* $\displaystyle\int \frac{2dx}{\cos 2x+1}$;

и) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-1}{\cos 2x-1}$; *ј)* $\int(\sin 3x-\cos 3x)^2dx$; *к)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

л) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$; *љ)* $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$; *м)* $\displaystyle\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx$;

н) $\int(\arcsin x+\arccos x)dx$; *њ)* $\int \sin x\cos 3xdx$; *о)* $\int \sin x\cos 3x\sin 5xdx$.

177. Користећи формулу $\displaystyle\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)|+C$, израчунати интеграле.

$\triangle$ *а)* $\int \operatorname{tg} xdx$; $\triangle$ *б)* $\int \operatorname{ctg} xdx$; $\triangle$ *в)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x}$;

△ *г)* $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}$; *д)* $\int \frac{dx}{x(x-1)}$; *ђ)* $\int \frac{dx}{x^2+x}$;

е) $\int \frac{dx}{a+bx}$, $b \neq 0$; *ж)* $\int \frac{dx}{4-x^2}$; *з)* $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$;

и) $\int \frac{x+2}{x^2+4}$; *ј)* $\int \frac{\sin x\cos x dx}{2\cos 2x+1}$; *к)* $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$.

6.2 СМЕНА ПРОМЕНЉИВЕ ПОД ИНТЕГРАЛОМ

(I) Ако интеграл има облик $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, уводимо смену:

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi(x) = t \Rightarrow \varphi'(x)dx = dt, \text{ па је} \\ \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = \cdots = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C\end{array}}$$

(II) Често се сменом $x = \varphi(t)$, где је $\varphi(t)$ диференцијабилна и *строго монотона* (дакле – *инверзибилна*) функција, подинтегрална функција доведе на погодан облик (облик који знамо да интегралимо):

$$\boxed{\begin{array}{l}x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt, \text{ и } t = \varphi^{-1}(x) \text{ па је} \\ \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \cdots = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C\end{array}}$$

△ **178.** Користећи се указаним сменама израчунати интеграле.

а) $\int \cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{3\pi}{5}\right)dx$ (смена: $\frac{2x}{3}-\frac{3\pi}{5}=t$);

б) $\int x^2(ax^3+b)^2dx$ (смена: $ax^3+b=t$);

в) $x\sin x^2dx$ (смена: $x^2=t$);

г) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$ (смена: $\arcsin x = t$);

д) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+5}$ (смена: $x^2-2x+5=t$);

ђ) $\int \frac{dx}{1+2e^x}$ (смена: $e^{-x}=t$);

е) $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{tg}x)\cos^2 x}$ (смена: $1+\operatorname{tg}x=t$);

ж) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$ (смена: $\sqrt{x}=t$);

з) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ (смена: $\ln x = t$);

и) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$ (смена: $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=t$).

△ **179.** Користећи се указаном сменом, или неком другом, израчунати интеграле:

а) $\int \sin^3 x dx$ (смена: $\cos x = t$.) (*Напомена:* ако је подинтегрална функција облика $\sin^p x \cos^q x$, $p, q \in N$, користимо смене: 1° $\sin x = t$, ако је q непаран број; 2° $\cos x = t$, ако је p непаран број; 3° Ако су и p и q парни, извршимо прво трансформације $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, па смене као 1° и 2°.)

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ (смена: $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). (*Напомена:* ако је подинтегрална функција облика $f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$, тада уводимо смену $x = a \operatorname{tg} t$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, или $x = a \operatorname{ctg} t$, $x \in (0, \pi)$.)

в) $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2} dx$ (смена: $x = 2\cos t$, $t \in (0, \pi)$). (*Напомена:* ако је подинтегрална функција облика $f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$, уводимо смену $x = a \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, или $x = a \cos t$, $t \in (0, \pi)$.)

г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$ (смена: $x = t^6$, $t \geqslant 0$);

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (смена: $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$);

ђ) $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$ (смена: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$) (*Напомена:* често се функције рационалне по $\sin x$ и $\cos x$ интеграле сменом $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, којом се израчунава: $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$).

е) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$ (смена: $\operatorname{tg} x = t$).

△ **180.** Погодно изабраном сменом израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int \frac{x dx}{2x^2+3}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+2}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx$; *д)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx$; *ђ)* $\displaystyle\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$;

е) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{3x-1} dx$; *ж)* $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{4-x^2}$; *з)* $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$;

и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$; *ј)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$; *к)* $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$;

л) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$; *љ)* $\int \cos^3 x dx$; *м)* $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}$.

181. Израчунати следеће интеграле.

△ *а)* $\int \frac{2\cos x dx}{\sin^3 x}$; △ *б)* $\int x\sqrt{x+2}dx$; △ *в)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-1}$;

△ *г)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$; △ *д)* $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$; △ *ђ)* $\int \frac{dx}{3e^{-x}+e^x}$;

е) $\int \frac{\sin x\cos x dx}{4\sin^6 x+4\cos^6 x-1}$; △ *ж)* $\int \frac{x^2+3x-2}{x^2+4}dx$; △ *з)* $\int \sin^4 x dx$;

△ *и)* $\int \frac{x dx}{x^2-7x+13}$; △ *ј)* $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{6x-x^2}}$; △ *к)* $\int \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$;

л) $\int \frac{dx}{x\ln x(1+\ln x)}$; △ *љ)* $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; *м)* $\int \frac{\sqrt{1+\cos\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

△ **182.** Израчунати интеграле (рационалне функције):

а) $\int (2x-7)^6 dx$; *б)* $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$; *в)* $\int \frac{x dx}{(x+1)^3}$;

г) $\int \frac{dx}{3x^2+5}$; *д)* $\int \frac{x^2 dx}{x^6+1}$; *ђ)* $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$;

е) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; *ж)* $\int \frac{(2x-1)dx}{4x^2-4x+17}$; *з)* $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$;

и) $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$; *ј)* $\int \frac{(x+2)dx}{4x^2+4x+5}$; *к)* $\int \frac{x^2 dx}{(1-x)^{15}}$.

183. Израчунати интеграле (тригонометријске функције):

△ *а)* $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$; △ *б)* $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$; △ *в)* $\int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$;

△ *г)* $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2-\sin^4 x}}$; △ *д)* $\int \cos^3 x\sin 2x dx$; △ *ђ)* $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}$;

△ *е)* $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}$; *ж)* $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x dx$;

з) $\int \sin^3 6x\cos 6x dx$; △ *и)* $\int x\operatorname{ctg}(x^2+1)dx$; △ *ј)* $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x dx}{\cos x}$;

△ *к)* $\int \frac{1-\sin 2x}{\cos^2 x}dx$; *л)* $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin 4x dx$;

љ) $\int \frac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x}dx$; *м)* $\int \frac{\cos 2x dx}{1+\sin x\cos x}$; *н)* $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}}$;

△ *њ)* $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$; △ *о)* $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; △ *п)* $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;

р) $\int \sin^5 3x dx$; *с)* $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; *т)* $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$;

ћ) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$; *у)* $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$; *ф)* $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

х) $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\cos^2 x+2\cos x}$; *ц)* $\int \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\frac{dx}{3-5\cos x}$.

184. Израчунати интеграле (ирационалне функције)

△ *а)* $\int x\sqrt{1-x^2}dx$; △ *б)* $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$; △ *в)* $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

△ *г)* $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; △ *д)* $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ △ *ђ)* $\frac{1}{3}\int \frac{2dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

△ *е)* $\int \frac{2xdx}{1-\sqrt[3]{x+1}}$; △ *ж)* $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$; △ *з)* $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

и) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}$; △ *ј)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; △ *к)* $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{5x^2+1}}$;

△ *л)* $\int \frac{(5-3x)dx}{\sqrt{4-3x^2}}$; △ *љ)* $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; △ *м)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

△ *н)* $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; *њ)* $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$; *о)* $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

п) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$; *р)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; *с)* $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$;

т) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$; *ћ)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; *у)* $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

185. Израчунати интеграле:

△ *а)* $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\cdot\frac{dx}{x}$; △ *б)* $\int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}$; △ *в)* $\int \sin(\ln x)\cdot\frac{dx}{x}$;

△ *г)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$; △ *д)* $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$; △ *ђ)* $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)dx}{\sin 2x}$;

△ *е)* $\int \frac{\sin x dx}{e^{\cos x}}$; △ *ж)* $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$; △ *з)* $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$;

△ *и)* $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$; *ј)* $\int \frac{dx}{2^x+3}$; *к)* $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$;

л) $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$; △ *љ)* $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2dx}{1+x^2}$; △ *м)* $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$;

н) $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$; *њ)* $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$; *о)* $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

п) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$; *р)* $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; *с)* $\int \sqrt{\frac{\ln|x\sqrt{x^2+1}|}{x^2+1}}dx$;

т) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}+x\ln(x^2+1)+1}{1+x^2}dx$; *ћ)* $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}$; *у)* $\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}$.

6.3 ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Ако су $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ диференцијабилне функције, тада важи тзв. *формула парцијалне интеграције:*

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Ова метода се обавезно користи када подинтегралне функције садрже логаритамске и инверзне тригонометријске функције, а не могу се сменом свести на табличне интеграле. Такође је корисна метода код подинтегралних функција облика $P(x)e^x$, $P(x)\sin x$, $\sin xe^x$, и сл.

△ **186.** Методом парцијалне интеграције израчунати следеће интеграле.

а) $\int \ln x dx$; *б)* $\int 3x^2 \ln x dx$; *в)* $\int \ln^2 x dx$;
г) $\int x^n \ln^2 x dx$, $n \in N$; *д)* $\displaystyle\int \ln \frac{x}{x+1} dx$; *ђ)* $\int xe^{-x} dx$;
е) $\int (x^2 + 5x)e^{2x} dx$; *ж)* $\int \operatorname{arctg} x dx$; *з)* $\int \arcsin x dx$;
и) $\int x \sin 3x dx$; *ј)* $\int x^2 \cos x dx$; *к)* $\int \ln(x^2 + a^2) dx$;
л) $\displaystyle\int \frac{x}{2^x} dx$; *љ)* $\int x \sin x \cos x dx$; *м)* $\displaystyle\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$;
н) $\int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$; *њ)* $\displaystyle\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x+1}}$; *о)* $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

187. Израчунати интеграле.

△ *а)* $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$; △ *б)* $\int (\arcsin x)^2 dx$; △ *в)* $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x) dx}{x}$;
г) $\int (x \cos x)^2 dx$; *д)* $\int 4x \arcsin x dx$; △ *ђ)* $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$;
△ *е)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; △ *ж)* $\displaystyle\int x \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| dx$; △ *з)* $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$;
и) $\int 2x(\operatorname{arctg} x)^2 dx$; *ј)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$; *к)* $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$;
л) $\displaystyle\int \frac{x^2 e^x dx}{(x+2)^2}$; *љ)* $\int \ln(\sin x) \cos x dx$; *м)* $\displaystyle\int e^{-x}\left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$;
н) $\displaystyle\int \frac{(\ln x - 1) dx}{\ln^2 x}$.

188. Нека је $P = \int \sin^2 x dx$. Применимо формулу парцијалне интеграције, узевши да је $u = \sin x$, $dv = \sin x dx$. Одавде је $du = \cos x dx$ и $v = \int \sin x dx = -\cos x$. Тада је: $P = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\dfrac{1}{2} \sin 2x + x - \displaystyle\int \sin^2 x dx$, односно: $P =$

$-\frac{1}{2}\sin 2x + x - P$. Добили смо једначину по непознатој P, која даје услов: $2P = x - \frac{1}{2}\sin 2x$. Одавде је $\int \sin^2 x dx = P = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Поступајући слично наведеном примеру израчунати интеграле.

$\triangle$ *а)* $\int \cos^2 3x dx$; $\triangle$ *б)* $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\triangle$ *в)* $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$;
$\triangle$ *г)* $\int \sqrt{1-x^2}dx$; $\triangle$ *д)* $\int e^{\arcsin x}dx$; $\triangle$ *ђ)* $\int e^{2x}\cos x dx$;
е) $\int \sin(\ln x)dx$; *ж)* $\int 3^{-x}\sin 2x dx$; *з)* $\int e^{-x}(\sin x - \cos x)^2 dx$;
и) $\int xe^{2x}\cos 3x dx$; *ј)* $\int 2x(e^{-x}\sin x)^2 dx$; *к)* $\int \cos^2(\ln x)dx$.

189. Уводећи најпре погодну смену, израчунати следеће интеграле парцијалном интеграцијом.

$\triangle$ *а)* $\int e^{-\sqrt{x}}dx$; $\triangle$ *б)* $\int x^5 e^{x^2}dx$; $\triangle$ *в)* $\int x\cdot\sin\sqrt{x}dx$;
$\triangle$ *г)* $\int \arcsin\frac{1}{x}dx$; $\triangle$ *д)* $\int \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})dx$; $\triangle$ *ђ)* $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx$;
е) $\int e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)dx$; *ж)* $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$; *з)* $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2(1+x^2)}$;
и) $\int \frac{x\operatorname{arctg} x dx}{(1+x^2)^2}$; *ј)* $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; *к)* $\int \frac{\arcsin x dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

190. Нека је $P_n = \int x^n e^x dx$, $n \in N$. Парцијалном интеграцијом: $u = x^n$, $dv = e^x dx$, добијамо: $P_n = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$. Последњи интеграл се од почетног разликује само у изложиоцу степена x, па можемо написати:$P_n = x^n e^x - nP_{n-1}$ Оваква веза се назива *рекурентном формулом.*

Поступајући слично, наћи рекурентне формуле за следеће интеграле, $(n \in N)$.

$\triangle$ *а)* $P_n = \int x^n e^{-x}dx$; $\triangle$ *б)* $P_n = \int \sin^n x dx$; $\triangle$ *в)* $P_n = \int \cos^n x dx$;
$\triangle$ *г)* $P_n = \int \ln^n x dx$; *д)* $P_n = \int x^{2n}e^x dx$; *ђ)* $P_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$;
е) $P_n = \int \sqrt{(1-x^2)^n}dx$; *ж)* $P_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$; *з)* $P_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$.

191. Користећи резултате из претходног задатка, израчунати интеграле.

$\triangle$ *а)* $\int x^3 e^{-x}dx$; $\triangle$ *б)* $\int x^4 e^x dx$; $\triangle$ *в)* $\int \ln^3 x dx$;
$\triangle$ *г)* $\int \sin^4 x dx$; $\triangle$ *д)* $\int \sin^3 x dx$; $\triangle$ *ђ)* $\int \cos^5 x dx$;
е) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; *ж)* $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$; *з)* $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3}$;
и) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; *ј)* $\int \operatorname{tg}^3 x dx$; *к)* $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

*) 6.4 ИНТЕГРАЦИЈА НЕКИХ РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Користићемо идеју тзв. Кошијевог проблема.**) Ако је степен полинома бројиоца већи или једнак степену имениоца, тада поделимо бројилац имениоцем, ради издвајања *целог* дела. Затим раставимо именилац на чиниоце и применимо Кошијеву идеју. На пример:

$$P = \int \frac{x^3+2x}{x^2-x-2}dx = \int\left(x+1+\frac{5x+2}{(x+1)(x-2)}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x+\int\frac{5x+2}{(x+1)(x-2)}dx.$$

Сада рачунамо: $\dfrac{5x+2}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2} = \dfrac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$. Мора бити $5x+2 \equiv A(x-2)+B(x+1)$. За $x=2$ имамо $12 \equiv 3B$, па је $B=4$. За $x=-1$ имамо $-3=-3A$ и $A=1$. (Могли смо и овако поступити: $5x+2 \equiv (A+B)x+B-2A$, па A и B налазимо из услова: $A+B=5 \wedge B-2A=2$. Одавде је $A=1$, $B=4$.) Даље је:

$$P = \frac{x^2}{2}+x+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{4dx}{x-2} = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x+1|+4\ln|x-2|+C.$$

Напомена: Имамо, на пример:

$$\frac{x-2}{x(x+3)^2(x^2+5)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+5}, \text{ итд.}$$

192. Израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int\frac{(x+3)dx}{x(3-x)}$; *б)* $\displaystyle\int\frac{xdx}{(2x-1)(x-1)}$; *в)* $\displaystyle\int\frac{4dx}{(x-1)(x+3)}$;

г) $\displaystyle\int\frac{(6-12x)dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}$; *д)* $\displaystyle\int\frac{(15-x)dx}{x(x+3)(x+5)}$; *ђ)* $\displaystyle\int\frac{(4x+7)dx}{2x^2-3x-2}$;

е) $\displaystyle\int\frac{(2x+4)dx}{4x-x^2}$; *ж)* $\displaystyle\int\frac{4dx}{x^3-4x}$; *з)* $\displaystyle\int\frac{(2x^2+3x-1)dx}{x^3-x^2-6x}$;

193. Израчунати следеће интеграле:

а) $\displaystyle\int\frac{2x^2dx}{(x-2)^3}$; *б)* $\displaystyle\int\frac{(x^2-3x+2)dx}{x^3+2x^2+x}$; *в)* $\displaystyle\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2dx$

г) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}$; *д)* $\displaystyle\int\frac{(x^2-14x-21)dx}{(x^2-3x-10)^2}$; *ђ)* $\displaystyle\int\frac{(x^2-10)dx}{x^4-5x^2+4}$;

194. Израчунати следеће интеграле (имениоци не могу да се разложе на саме линеарне чиниоце).

---

*) Није предвиђено за редовну наставу

**) Видети MATHEMATISKOP 3, задатак 806.

а) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$; б) $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$; в) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$;
г) $\int \frac{(2x^3+x^2)dx}{x^4+6x^2+9}$; д) $\int \frac{(x^3+x-1)dx}{x^4+4x^2+4}$; ђ) $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

195. Израчунати интеграле (степен бројиоца није већи од степена имениоца).

а) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$; б) $\int \frac{2x^3-9x^2+4x-1}{x^3-5x^2+4x}dx$; в) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;
г) $\int \frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^5+2x^3+x}dx$; д) $\int \frac{x^5-7x+3}{x^3+3x}dx$; ђ) $\int \frac{2x^4-5x^2+19}{x^3-3x+2}dx$.

6.5 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Једначина облика $f(x,y,y')=0$ је *диференцијална једначина првог реда,* по непознатој функцији y.

Једначина облика $f(x,y,y',y'')=0$ је *диференцијална једначина другог реда,* по непознатој функцији y.

Опште решење диференцијалне једначине првог реда је облика $F(x,y,C)=0$, где је C произвољна (интеграциона) константа. За разне вредности константе C добијамо тзв. *партикуларна решења,* која у општем случају представљају неке криве у равни Oxy. Скуп свих ових кривих (опште решење) називамо *фамилијом кривих* које задовољавају дату једначину. Помоћне услове за елиминацију интеграционих константи из општег решења називамо *почетним условима.*

1° *Диференцијална једначина која раздваја промењиве* је она која може да се напише у облику:

$$\boxed{y' = f(x)\cdot\varphi(y).}$$

Решава се на следећи начин. Како је $y' = \frac{dy}{dx}$, биће:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y) \iff \frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \iff \int\frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Неки облици једначина другог реда

2° Диференцијална једначина:

$$\boxed{y''=k,\quad k\in R}$$

решава се овако: $y'=\int kdx + C_1$, тј. $y'=kx+C_1$, а затим $y=\int(kx+C_1)dx$, тј.

$$\boxed{y=\frac{kx^2}{2}+C_1x+C_2}$$

3° Диференцијална једначина: $\boxed{y'' = k^2 y, \quad k \in R}$ има опште решење:

$$\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}}$$

4° Диференцијална једначина: $\boxed{y'' = -k^2 y}$ има опште решење:

$$\boxed{y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx}$$

△ **196.** Проверити да ли дата диференцијална једначина има понуђено решење:

а) $2yy' = x$, $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3$; *б)* $y'' = x^2 + y^2$, $y = \dfrac{1}{x}$;
в) $y' = e^{-2x}$, $y = Ce^x + 2e^{-2x}$; *г)* $2yy'' - y'^2 = 0$, $y = 2(x - C)^2$;
д) $y'' - 2y' + y = e^x$, $y = C_1 x e^x - 2C_2 x^2 e^x$; *ђ)* $(x - y + 1)y' = 1$, $y = x + Ce^y$, $y \neq 0$.

△ **197.** Решити диференцијалне једначине (наћи опште решење).

а) $y' = x + 2$; *б)* $y' = -\dfrac{x}{y}$; *в)* $y' = 1 + y^2$;
г) $yy' = xe^{x^2+y^2}$; *д)* $xy' - y = y^2$; *ђ)* $xyy' = 1 - x^2$;
е) $y' \operatorname{tg} x = y$; *ж)* $xy' - y = 1 + x^2 y'$; *з)* $y' = 10^{x+y}$;
и) $xy^2 + x + y'(y - x^2 y) = 0$; *ј)* $\sqrt{1 - y^2} + yy'\sqrt{1 - x^2} = 0$;
к) $\operatorname{tg} x \sin^2 y + y' \cos^2 x \operatorname{ctg} y = 0$; *л)* $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

198. Уводећи погодну смену, решити диференцијалну једначину.

а) $y' - \cos(x + y) = 0$; *б)* $2x + 3y - 1 + y'(4x + 6y - 5) = 0$;
в) $y' \sin(2y - 2x + 4) = \cos(x - y - 2)$; *г)* $y'e^y = e^{x^2} + e^y - 2xe^{x^2}$.

199. Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине које задовољава дате почетне услове (тј. наћи опште решење, па помоћу додатног услова елиминисати интеграциону константу).

а) $y' \sin 2x = 2y \ln y$ и $y = \left(\dfrac{\pi}{4}\right) = e$ тј. за $x = \dfrac{\pi}{4}$ је $y = e$;
б) $(x^2 + 3)y' - 2xy = 0$ и $y(0) = 6$;
в) $(x^2 y - y)y' + xy^2 + x = 0$ и $y(0) = 1$;
г) $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$ и $y(0) = 1$;
д) $y - 2 = y'(x + 2x^2)$ и $y(1) = 1$.

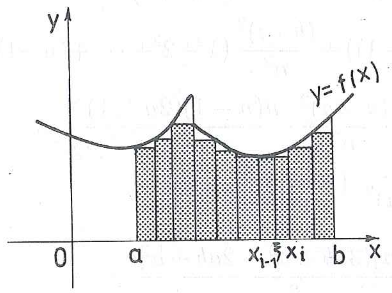
△ **200.** Решити диференцијалне једначине другог реда.

а) $y'' = 2$; *б)* $y'' = x$; *в)* $y'' = 3x + 2$;
г) $y'' = y$; *д)* $y'' = -y$; *ђ)* $y'' - 4y = 0$
е) $y'' + 9y = 0$; *ж)* $y'' - 2y = 0$; *з)* $y'' + 3y = 0$.
и) $y'' + 4y = 0$, а $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ и $y'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

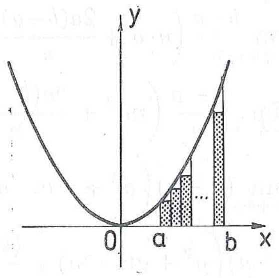
СЕДМА ГЛАВА

7 ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Нека је $f(x)$ функција ограничена и са коначно много прекида на интервалу $[a, b]$. Нека је овај интервал подељен на n делова. Тада збир $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$ називамо *интегралним збиром.* Рачунамо: $a = x_0$ и $b = x_n$, а још је $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Геометријски овај збир претставља површину осенчену на сл. 4.



Сл.4



Сл.5

Одређеним интегралом, у ознаци $\int_a^b f(x)dx$, називамо следећу граничну вредност:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max(x_i - x_{i-1}) \to 0}} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i)}$$

Ако ова граница постоји и коначна је, онда је $f(x)$ *интеграбилна функција* на интервалу $[a,b]$.

На пример: Израчунајмо $\int\limits_a^b x^2dx$, по горе наведеној дефиницији.

Решење. Интервал $[a,b]$ поделимо на n једнаких делова: $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$, а за ξ_i узмимо вредност са левог краја сваког интервала. *Интегрални збир* ће представљати збир површина правоугаоника уписаних у део параболе, сл. 5. Тада је:

$$\int\limits_a^b x^2dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot a^2+\frac{b-a}{n}\cdot\left(a+\frac{b-a}{n}\right)^2+\frac{b-a}{n}\cdot\left(a+2\frac{b-a}{n}\right)^2+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{b-a}{n}\cdot\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)^2\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left(a^2+a^2+2a\frac{b-a}{n}+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+a^2+\right.$$

$$\left.+2a\cdot 2\frac{b-a}{n}+2^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+\cdots+a^2+2a(n-1)\frac{b-a}{n}+(n-1)^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left(n\cdot a^2+\frac{2a(b-a)}{n}(1+2+\cdots+(n-1))+\frac{(b-a)^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left(na^2+\frac{2a(b-a)}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(b-a)\left(a^2+a(b-a)\cdot\frac{n-1}{n}+(b-a)^2\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right)=$$

$$=(b-a)\left(a^2+a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{3}\right)=\frac{(b-a)(3ab+b^2-2ab+a^2}{3}=$$

$$=\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3}=\frac{b^3-a^3}{3}.$$

201. Поступајући слично претходном примеру, израчунати по дефиницији одређене интеграле.

а) $\int\limits_0^1 2xdx.$ *б)* $\int\limits_a^b e^xdx.$ *в)* $\int\limits_1^3 (x^2-2x)dx.$

$\triangle$ **202.** Користећи се дефиницијом одређеног интеграла, доказати следеће особине.

а) $\int\limits_a^a f(x)dx=0;$ *б)* $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx;$

в) $\int\limits_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int\limits_a^b f(x)dx$, c је константа;

г) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

д) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow \int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$;

ђ) $f(-x) = f(x) \Rightarrow \int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$;

е) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

ж) $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

7.1 ЊУТН – ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА

Између неодређеног и одређеног интеграла постоји веза у виду тзв. *Њутн – Лајбницове* формуле. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[a, b]$, тада:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{где је} \quad F'(x) = f(x)}$$

△ **203.** Користећи се Њутн – Лајбницовом формулом израчунати одређене интеграле.

а) $\int\limits_1^2 \left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 dx$; *б)* $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx$; *в)* $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

г) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-4x+4}$; *д)* $\int\limits_2^3 \frac{2dx}{x^2-1}$; *ђ)* $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$;

е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$; *ж)* $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; *з)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$;

и) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$; *ј)* $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx$; *к)* $\displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$;

л) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \frac{x^2 dx}{x^2+4x+4}$; *љ)* $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} (e^{-x}+1)^2 \cdot e^x dx$; *м)* $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+e^{-x}}$.

204. Користећи се интегралним збиром и дефиницијом одређеног интеграла, доказати:

△ *а)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$;

△ *б)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+n)^2}{n^3}=\frac{7}{3}$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=\frac{1}{2}$;

△ *г)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$;

д) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$;

ђ) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1},\ k>0.$

7.2 СМЕНА ПРОМЕНЉИВЕ КОД ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

(I) Ако интеграл има облик $\displaystyle\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, где су $f(\varphi(x))$, $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ непрекидне функције на интервалу $[a,b]$, тада се сменом: $\varphi(x)=t$ добија

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(x)=t,\ \ \varphi'(x)dx=dt,\ \ \varphi(a)=t_1,\ \ \varphi(b)=t_2:\\ \int\limits_a^b (\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt\end{gathered}}$$

(II) Интеграл облика $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$ често се сменом $x=\psi(t)$ своди на облик погодан за решавање, при следећим условима:

1° Функција $y=f(x)$ је непрекидна на интервалу $[a,b]$.

2° Функција $\psi(t)$ је диференцијабилна, а $\psi(t)$, $\psi'(t)$ и $f(\psi(t))$ су непрекидне на интервалу $[t_1, t_2]$, где је $\psi(t_1) = a$ и $\psi(t_2) = b$ и $\psi(t)$ је строго монотона на $[t_1, t_2]$. Тада:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \psi(t), \quad dx = \psi'(t)dt, \quad t_1 = \psi(a), \quad t_2 = \psi(b) \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\psi(t))\psi'(t)dt \end{array}}$$

△ **205.** Погодном сменом израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; *б)* $\displaystyle\int_1^2 xe^{-x^2}dx$; *в)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2dx}{x^3+1}$; *д)* $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; *ђ)* $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(4x-6)dx}{x^2-3x+1}$;

е) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$; *ж)* $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$; *з)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

и) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$; *ј)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; *к)* $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

л) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; *љ)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$; *м)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9 dx}{(1+x^5)^3}$.

206. Сменом израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}dx$; *б)* $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$; *в)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$;

г) $\displaystyle\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; *д)* $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; *ђ)* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$;

е) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; *ж)* $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; *з)* $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}dx}{e^x+3}$;

и) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; *ј)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; *к)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-\cos x}$;

л) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x}$; *љ)* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4 x dx$; *м)* $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ a>0$;

н) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{ax-x^2}dx,\ a>0$; *њ)* $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; *о)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x-e^{-x}}}$.

207. Решити једначине.

а) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}$; *б)* $\displaystyle\int_{\ln 2}^x \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \frac{\pi}{6}$.

7.3 ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА

За функције $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$, диференцијабилне на интервалу $[a,b]$, важи формула за парцијалну интеграцију:

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

$\triangle$ **208.** Користећи се парцијалном интеграцијом израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$; *б)* $\displaystyle\int_1^e \ln^3 x dx$; *в)* $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$;

г) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{2x}dx$; *д)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; *ђ)* $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin x dx$;

е) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$; *ж)* $\displaystyle\int_0^2 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$; *з)* $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin x dx$;

и) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$; *ј)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; *к)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin^2 x dx$.

290. Израчунати интеграле.

а) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$; *б)* $\displaystyle\int_1^4 e^{-\sqrt{x}}dx$; *в)* $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arctg} x^2 dx$;

г) $\int\limits_{-1}^{1} x(\arcsin x^2)^2 dx$; *д)* $\int\limits_{1}^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$; *ђ)* $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\arcsin\frac{1}{x}dx$.

210. Слично *Задатку* 190 одредити рекурентне формуле за интеграле, $(n \in N)$:

а) $P_n = \int\limits_0^1 x^{2n}e^{-x}dx$; *б)* $P_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$; *в)* $P_n = \int\limits_1^{e} \ln^n x dx$;

г) $P_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^n x}$; *д)* $P_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x dx$;

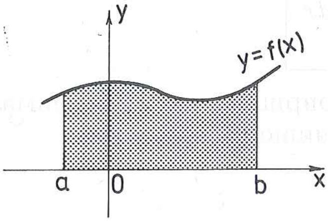
ђ) $P_n = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, па израчунати интеграл: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$;

е) $P_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, па израчунати интеграле: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$.

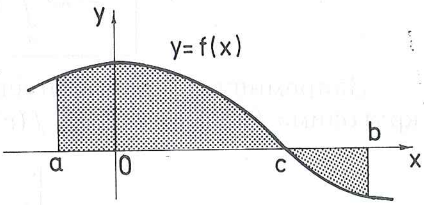
7.4 ПРИМЕНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

А) Површина P равне површи, ограничене осом Ox, кривом $y = f(x)$ и правим $x = a$ и $x = b$, осенчене на сл. 6 и сл. 7, дефинише се формулом:

$$\boxed{P = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx}$$



Сл. 6



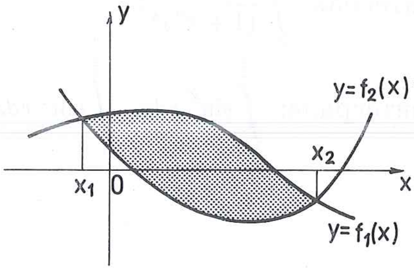
Сл. 7

Према формули, на сл. 7 је $P = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx.$

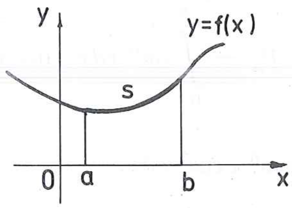
Ако је површ ограничена са две криве, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, као на сл. 8, њена површина је:

$$\boxed{P = \int\limits_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx}$$

где су x_1 и x_2 решења једначине $f_1(x) = f_2(x)$.



Сл. 8



Сл. 9

Дужину s лука криве $y = f(x)$, између тачака чије су апсцисе a и b, сл. 9, дефинишемо преко интеграла:

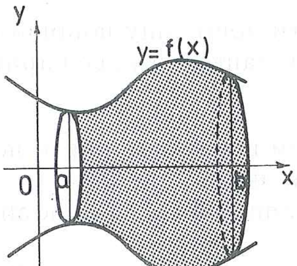
$$\boxed{s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx}$$

Површину P површи (омотача), која настаје обртањем лука криве $y = f(x)$ са сл. 9, дефинишемо формулом:

$$\boxed{P = 2\pi \int\limits_a^b |\, f(x)\,| \sqrt{1 + y'^2}dx.}$$

Запремину тела ограниченог обртном површи са сл. 10 и двама круговима (полупречника $f(a)$ и $f(b)$) дефинишемо формулом:

$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b y^2 dx}$$



Сл. 10

211. Израчунати површине површи ограничених датим линијама.

△ *а)* $y=x(x-1)^2,\ y=0;$

б) △ $y=4x-x^2,\ y=0;$

△ *в)* $y=x(x-1)(x-2),\ y=0;$

△ *г)* $y^3=x,\ y=1,\ x=8;$

△ *д)* $y=x^2,\ y=8$, за $x\geqslant 1;$

△ *ђ)* $y=x^3,\ y=8,\ x=0;$

△ *е)* $y=\cos x,\ y=0$, за $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2};$

△ *ж)* $y=\sin x,\ y=0,\ x\in[0,100\pi];$

△ *з)* $y=x-x^2\sqrt{x},\ y=0;$

△ *и)* $y=(x^2+2x)e^{-x},\ y=0;$

△ *j)* $y=\ln x,\ y=0,\ x=e^2;$

△ *к)* $y=\operatorname{tg}x,\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{3};$

л) $xy=k^2,\ x=2,\ x=6;$

љ) $y^2=2x+1,\ x-y-1=0;$

△ *м)* $y=2x,\ x^2=2y,\ y=x^2;$

н) $x^2+y^2=a^2;$

њ) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1;$

△ *о)* $y^2=2x,\ x^2=2y;$

п) $y^2+18x=16,\ y^2-24x=48;$

р) $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ x^2=2y;$

△ *с)* $y=2x^2e^x,\ y=-x^3e^x;$

т) $y=\ln x,\ y=\ln^2 x;$

△ *ћ)* $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right];$

у) $y=\arcsin x,\ y=-\arccos x,\ -1\leqslant x\leqslant 1;$

ф) $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=0;$

х) $y^2=4x,\ y=\sqrt{x^3};$

ц) $y=2x-x^2,\ y=-x;$

ч) $y=x^3,\ y=4x.$

212. Израчунати површине површи ограничених датим кривим.

△ *а)* $x^2+4y^2=4,\ x^2-2y^2=2$, (три дела);

б) $x^2+y^2=4,\ x^2-2y^2=1$, (три дела);

△ *в)* $x^2+y^2=8,\ y^2=2x;$

г) $x^2+y^2=16,\ x^2=12(y-1);$

△ *д)* $x^2+y^2=16,\ y^2=6x;$

ђ) $y=2-x^2,\ y^3=x^2;$

е) $(y-x)^2=x^5,\ x=4;$

ж) $y^2=x(x-1)^2;$

з) $(y-\arcsin x)^2 = x - x^2$; *и)* $y^2 = x^2 - x^4$.

$\triangle$ **213.** Израчунати површину површи ограничену осом Oy, параболом $y = x^2 - 7x + 3$ и тангентом ове параболе, паралелном правој $5x + y + 1 = 0$.

$\triangle$ **214.** Израчунати површину равне површи ограничене делом дате криве између две њене тангенте:
а) $y = -x^2 + 4x - 3$ са тангентама, чије додирне тачке имају апсцисе 0 и 3;
б) $x^2 + y^2 = 25$ са тангентама из тачке $A\left(\dfrac{25}{3}, 0\right)$.

$\triangle$ **215.** Израчунати површину равне површи ограничене датом кривом и њеном датом нормалом:
а) $y^2 = x$ и њена нормала у тачки $N(1, 1)$;
б) $y^2 = 6x$ и њена нормала која сече осу Ox под углом од $-\dfrac{\pi}{4}$;
в) $y = \arcsin \dfrac{x-1}{2}$ и њена нормала која је паралелна правој $2x+y+5 = 0$, за $x \geqslant 0$.

216. Израчунати дужину лука дате криве

$\triangle$ *а)* $x^2 + y^2 = a^2$; $\triangle$ *б)* $y = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$;

$\triangle$ *в)* $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $x \in [0, 2]$; $\triangle$ *г)* $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$;

$\triangle$ *д)* $y = \ln\sqrt{x} - \dfrac{1}{4}x^2$, $x \in [1, e]$; $\triangle$ *ђ)* $y = \ln(\sqrt{x^2-1} - x)$, $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{10}]$;

е) $4y^2 = x^3$, од $O(0, 0)$ до $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$; *ж)* $y = \arcsin(e^{-x})$, $x \in [0, 1]$;

$\triangle$ *з)* $y = \dfrac{\sqrt{x}}{6}(x - 12)$, $x \in [0, 12]$; *и)* $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$, за $x \in [0, 1]$;

ј) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$; *к)* $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \geqslant 0$;

л) $18y^2 = x(2x-3)^2$, $x \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right)$; *љ)* $y = \dfrac{1}{2}\arccos x - \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2}$.

217. Израчунати запремину тела које настаје обртањем дате равне површи око осе Ox.

$\triangle$ *а)* $y^2 = 4x$, $x \leqslant 1$; $\triangle$ *б)* $y = 3x - x^2$, $y \geqslant 0$;

$\triangle$ *в)* $y = 2x^2$, $y \leqslant 2$; *г)* $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$;

$\triangle$ *д)* $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$; *ђ)* $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$;

$\triangle$ *е)* $y = \cos^2 x$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; *ж)* $y = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$;

$\triangle$ *з)* $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; *и)* $y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 1$;

$\triangle$ *ј)* $y = \arcsin x,\ x \geqslant 0;$ *к)* $\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

$\triangle$ **218.** Израчунати запремину тела које настаје обртањем око осе Ox равне површи ограничене:

а) кривим $y = x^2$ и $y^2 = x$;

б) кругом $x^2 + y^2 = 25$ и његовим тангентама из тачке $A\left(\dfrac{25}{3},\ 0\right)$;

в) параболом $y = x^2 - 4x + 3$ и њеним тангентама у тачкама чије су апсцисе 1 и 3.

219. Израчунати површину омотача обртног тела које настаје ротирањем датог лука око осе Ox.

а) $y^2 = 12x,\ x \leqslant 9;$ *б)* $3y = x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$

$\triangle$ *в)* $x^2 + y^2 = r^2;$ *) $\triangle$ *г)* $y = \sin x,\ x \in [0,\ \pi];$

д) $y = \cos x,\ x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right];$ *ђ)* $y = \operatorname{tg} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4};$

$\triangle$ *е)* $y = \dfrac{1}{4}(x^2 - \ln x^2),\ x \in [1,\ e];$ $\triangle$ *ж)* $y = \dfrac{\sqrt{x}}{3}(x-3),\ 0 \leqslant x \leqslant 3;$

з) $y = \ln(\sqrt{x^2-1} + x),\ x \in [1,\ 2];$ *и)* $x^2 + (y-q)^2 = r^2\ \ q > r.$

За сваки од наведених случајева (од *а)* до *и)*) израчунати и запремину овог сложеног тела. *)

220. Користећи се погодно изабраном функцијом, помоћу одређеног интеграла, израчунати:

а) запремину ваљка висине h и полупречника r;

б) запремину купе висине h и полупречника r;

в) запремину зарубљене купе висине h и полупречника r_1 и r_2, $r_1 > r_2$;

г) запремину лопте полупречника r;

д) запремину лоптиног одсечка полупречника r и висине h.

221. Користећи се погодно изабраном функцијом, помоћу одређеног интеграла, израчунати:

а) површину ваљка полупречника r и висине h;

б) површину купе полупречника r, висине h и изводнице s;

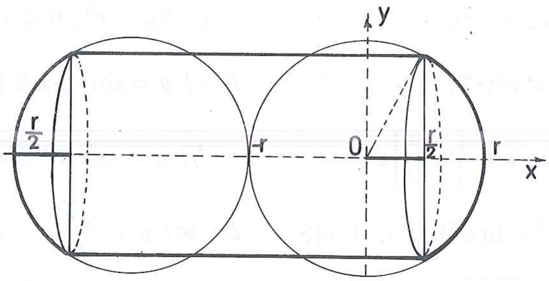
*) У случајевима в) и и) ротирамо затворене криве. Први даје *сферу*, а други тзв. *торус* (као аутогума).

в) зарубљене купе висине h, полупречника r_1 и r_2, $r_1 > r_2$, и изводнице s;

г) лопте полупречника r;

д) сферне калоте полупречника r и висине h.

222. Полупречници сфера на сл. 11 имају дужину r. Колика је запремина цистерне, на слици истакнута дебљим линијама? Користити се одређеним интегралима.



Сл. 11

ОСМА ГЛАВА

8 КОМБИНАТОРИКА

8.1 ПЕРМУТАЦИЈЕ

Нека је задан скуп коначног броја елемената (предмета, бројева, живих бића), тада се свако уређење свих датих елемената у облику једног низа назива *пермутацијом*. Број пермутација од n елемената једнак је:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ (чита се „ен факторијел“)} . \tag{1}$$

Број пермутација од n елемената међу којима се налази r $(r < n)$ једнаких елемената једнак је:

$$\overline{P_n}(r) = \frac{n!}{r!}. \tag{2}$$

Број пермутација од n елемената међу којима се налазе две групе елемената: једна са r $(r < n)$ елемената једнаких међу собом и друга са s елемената $(s < n,\ r + s \leqslant n)$ једнаких међу собом, једнак је:

$$\overline{P_n}(r, s) = \frac{n!}{r!s!}. \tag{3}$$

Код одређивања редоследа пермутација служимо се правилима према којима су састављени лексикони (лексикографски редослед пермутација!).

Факторијели поседују особину:

$$n! = n \cdot (n-1)!. \tag{4}$$

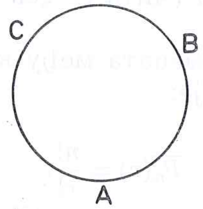
Ова једнакост има смисла за $n > 1$. Природно је одредити $0!$ тако да ова једнакост остане тачна и за $n = 1$, то јест да буде испуњено

$1! = 1 \cdot 0!$, што значи да се мора прихватити $0! = 1$. Најчешће се користе вредности $n!$ за $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$; дајемо следећу табелу

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Факторијели већих бројева могу се оценити помоћу Стирлингове формуле (J. Stirling, 1692–1770, шкотски математичар): $n! \approx n^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n}$.

Посебну врсту распоређивања чине тзв *цикличне пермутације*, које срећемо на пример приликом размештања особа око округлог стола. Под *округлим столом*, у математичком смислу, подразумевамо идеално округао, оријентисан сто, са необележеним местима за седење. Сва места су равноправна. То значи, ако округли сто заротирамо заједно са особама које су поседале или без њих, нећемо добити нов распоред. На слици 12 су приказане три особе A, B, C за округлим столом. Очигледно је да исти распоред особа око стола представљају пермутације ABC, BCA и CAB.



Сл. 12

Два распореда за округлим столом се разликују ако бар једна особа има бар једног (левог или десног) различитог суседа.

Дакле, једна или две особе могу се поставити око округлог стола само на један начин, три особе на два начина (ABC или ACB). Уопште, n елемената можемо разместити око округлог стола на $(n-1)!$ начина.

Распоред око округлог стола своди се на распоред у низу, ако сто „расечемо“ на једном месту и „исправимо“ га. Тај објекат, на којем је извршен „пресек“ фиксира се на првом месту, а остале распоређујемо на уобичајен начин.

Посебна врста цикличних пермутација је *огрлица*. Различити распореди елемената огрлице пребројавају се као и распореди особа око округлог стола, али овде треба узети у обзир да се огрлица може окретати у простору за 180°. Тако, огрлица са три елемента ABC, када се обрне за 180° постаје ACB. Због тога, од три елемента може да се сачини само једна огрлица. Уопште од n елемената може се начинити $\frac{1}{2}(n-1)!$ огрлица.

△ **223.** Записати све пермутације елемената скупова:
а) $\{1, 2, 3\}$; *б)* $\{a, b, c, d\}$.

△ **224.** Колико у скупу има елемената ако се зна да број пермутација тих елемената није већи од 1000?

△ **225.** Колико се петоцифрених бројева са различитим цифрама може сачинити од цифара 0, 1, 2, 3, 4?

△ **226.** Која је по реду пермутација
а) 3412 у низу пермутација формираних од елемената 1, 2, 3, 4?
б) 42153 у низу пермутација формираних од елемената 1, 2, 3, 4, 5?

△ **227.** Наћи 59-ту пермутацију елемената a, b, c, d, e.

△ **228.** *а)* Има ли међу пермутацијама слова речи ОБЛАК још нека реч чије се значење користи у свакодневном говору?
б) Има ли међу пермутацијама слова речи АВДНУ нека реч која се користи у нашем језику?

△ **229.** За које вредности n важи једнакост:
а) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 12$; *б)* $\dfrac{2n+1)!}{(2n-1)!} = 20$; *в)* $\dfrac{n!}{(n-1)!-(n-2)!} = 3!$;
г) $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!+(2n+1)!} = 21$.

230. Упростити израз: *а)* $\dfrac{240!}{239!5!} + \dfrac{40!}{38!4!} + \dfrac{18!}{17!3!}$; *б)* $\dfrac{(2n)!}{2^n}$;
в) $\dfrac{3!}{n(n-1)}\left[\dfrac{(n+2)!}{3(n^2-4)(n-3)!} + \dfrac{n!}{2(n-2)!}\right]$.

231. Решити неједначину: *а)* $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$; *б)* $\dfrac{(n+1)!}{n(n-2)!} \leqslant 16$.

△ **232.** Са колико нула се завршавају факторијели:
а) 10!; *б)* 20!; *в)* 50! *г)* 100!

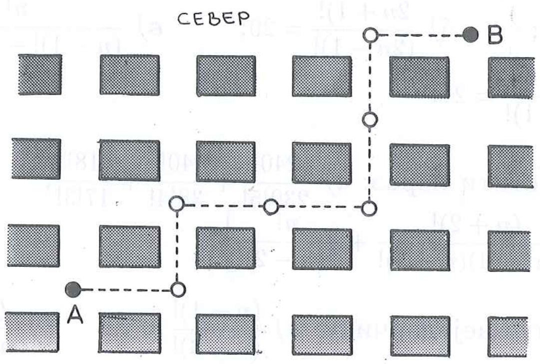
△ **233.** Нека је $n \geqslant 2$. Колико има пермутација елемената скупа бројева $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ код којих су елементи 1и 2 суседни?

△ **234.** На колико начина могу да седну око стола са означених 12 места 6 младића и 6 девојака тако да никоје две особе супротног пола на седе једна до друге?

△ **235.** *а)* Колико има пермутација елемената скупа бројева $\{1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10\}$ код којих је сваки од елемената 8, 9, 10 на свом месту?
б) Колико има пермутација елемената скупа бројева $\{1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10\}$ код којих бар један од елемената 8, 9, 10 није на свом месту?

△ **236.** За слова сваке од следећих речи:
а) СРБИЈА; *б)* БЕОГРАД; *в)* ЈУГОСЛАВИЈА; *г)* КАЈМАКЧАЛАН одредити колико има различитих пермутација.
д) Ако се слова речи БЕОГРАД поређају азбучним редом: АБГДЕОР и добијена пермутација прихвати за прву, која је у лексикографском редоследу пермутација БЕОГРАД?

△ **237.** На слици 13 је приказан један део плана града. Између блокова кућа, који су приказани правоугаоницима, пролазе улице паралелне правцима Исток–Запад и Север–Југ. На колико начина се може доћи са трга A до трга B, ако се при кретању држимо правила да се крећемо од Запада ка Истоку и од Југа ка Северу (трг A је на југозападној страни града, а трг B је на северозападној страни града).



Сл. 13

На слици 13 је цртицама назначена једна од могућих маршута од A до B.

$*$ **238.** На колико начина се могу осам белих шаховских фигура (два топа, два коња, два ловца, краљ и дама) поставити на првом реду шаховске табле?

239. *а)* На неком састанку пет људи A, B, C, D, E треба да одрже реферате. На колико начина се може сачинити редослед говорника?
б) На колико начина се може сачинити редослед говорника ако B мора да говори после A (није неопходно да говори непосредно после A)?
в) На колико начина се може сачинити редослед говорника ако B мора да говори непосредно после A?

$\triangle$ **240.** Колико четвороцифрених бројева можемо формирати од цифара броја 245325?

241. Одредити све оне природне бројеве n за које је $k = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ потпун квадрат природног броја?

242. Доказати да је $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

$*$ **243.** Израчунати збир: $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)! = 1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + \cdots + n^2(n+1)!$

$\triangle$ **244.** За округли сто сели су 1. јануара 6 државника из 6 земаља. Договарали су се о важним стварима и заседали су сваког дана, али сваки пут у другом распореду. Саветовање је завршено оног дана кад су исцрпљене све могућности различитог распоређивања државника. Када је то било?

$\triangle$ **245.** На колико се начина могу распоредити за округлим столом 5 дечака и 5 девојчица, а да особе истог пола не седе једна до друге?

$\triangle$ **246.** Од 12 витезова округлог стола свака два суседа су у завади. На колико начина они могу између себе изабрати двочлану делегацију за посету краљу Артуру, а да чланови делегације нису у завади?

247. За округлим столом треба распоредити 9 људи: 3 наставника, 3 родитеља и 3 ученика, тако да су међу било које три узастопно изабране особе по један наставник, родитељ и ученик (не мора овим редом). На колико се начина то може учинити?

248. Око округлог стола треба распоредити 3 наставника, 3 дечака и 3 девојчице, тако да између свака два наставника буде један дечак и једна девојчица. На колико се начина то може учинити?

$\triangle$ **249.** Колико различитих огрлица можемо начинити од 8 перли (бисерних куглица) различитих боја, ако се сваки пут користе све перле?

△ **250.** Огрлица је начињена од 20 по облику и величини једнаких перли, и то 5 белих, 5 жутих, 5 плавих и 5 црвених, тако да су сваке четири узастопне перле различито обојене?
а) Колико се различитих огрлица може начинити низањем ових перли?
б) Колико се различитих огрлица, пет пута већих од претходних, може начинити уз исте услове од 100 перли (по 25 од сваке боје)?

△ **251.** Колико се огрлица може начинити од 16 перли из претходног задатка (по 4 од сваке боје), тако да се између сваке две беле перле нађу по једна жута, плава и црвена (не мора бити у том редоследу)?

△ **252.** Наруквица у облику затвореног ланца, начињена је од нумерисаних алки, и то 5 сребрних и 5 платинских. Алке су повезане наизменично, тако да су сваке две узастопне од различитих метала. На колико начина можемо саставити ову наруквицу?

8.2 ВАРИЈАЦИЈЕ

Ако из скупа $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ издвојимо подскуп од k ($k < n$) елемената, онда се произвољан поредак тих k елемената назива *варијацијом* k-те класе од n елемената (без понављања). Користи се још и назив k- варијација или варијација дужине k. Две варијације се сматрају различитим, ако се разликују било саставом елемената било поретком елемената. Број варијација k-те класе од n елемената (без понављања) обележавамо са V_n^k (обележава се и са A_n^k, где је A почетно слово француске речи arrangement – размештај, уређење). Он је једнак:

$$V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{5}$$

Тако су $V_n^1 = n$, $V_n^2 = n(n-1)$, $V_n^3 = n(n-1)(n-2)$, ... За $k = 0$: $V_n^0 = 1$, а за $k = n$: $V_n^n = P_n = n!$.

Ако су формиране варијације k-те класе од n елемената, онда се варијације $k+1$-ве класе добијају тако што се свакој варијацији k-те класе дода по један елемент од преосталих $n-k$ елемената, па је

$$V_n^{k+1} = V_n^k \cdot (n-k) \tag{6}$$

Варијације са понављањем од n елемената скупа A k-те класе је сваки коначан низ од k елемената скупа A. Две варијације са понављањем $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}$ и $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jk}$ сматрају се различитим ако макар и на једном месту имају различите елементе скупа A, то јест ако је макар за једно r $(1 \leqslant r \leqslant k)$ $a_{ir} \neq a_{jr}$. Број различитих варијација са понављањем k-те класе од n елемената обележавамо са $\overline{V}_n^k$, $(k \lesseqgtr n)$. Он је једнак

$$\overline{V}_n^k = n^k. \tag{7}$$

Ако у некој варијацији са понављањем елемент a_i стоји на p места кажемо да се a_i у датој варијацији понавља p пута.

За варијацију елемената a_1, $a_2, \ldots,$ a_m кажемо да је типа $(k_1,$ $k_2, \ldots,$ $k_m)$ када се у њој елемент a_1 појављује k_1 пута, елемент a_2 се појављује k_2 пута,..., елемент a_m се појављује k_m пута. Класа овакве варијације је $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$, па како овај збир садржи све елементе, онда је према уопштењу формуле (3):

$$V_{k_1+k_2+\cdots+k_m}^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = P_{k_1+k_2+\cdots+k_m}(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} \tag{8}$$

△ **253.** Колико има троцифрених бројева који се састоје од различитих цифара?

△ **254.** Колико се природних бројева може сачинити од цифара 1, 2, 3, 4, 5?

△ **255.** Дат је скуп од четири слова $\{a, b, c, d\}$. Формирати све варијације друге класе (без понављања) од датих слова. Како се помоћу варијација друге класе добијају варијације треће класе од датих слова?

256. Показати да је $V_n^{n-1} = V_n^n = P_n = n!$.

△ **257.** Од колико различитих елемената може да се састави 210 варијација од 2 елемента у свакој?

△ **258.** Одредити n ако је *а)* $V_n^5 = 18V_{n-2}^4$, *б)* $V_n^{n-3} = nP_{n-2}$.

△ **259.** Доказати једнакост $V_{n-1}^k = V_n^k - kV_{n-1}^{k-1}$.

△ **260.** Формирати варијације друге, треће и четврте класе са понављањем од елемената a и b.

△ **261.** Колико може бити различитих телефонских бројева у граду ако су телефонски бројеви означени са 6 и 7 цифара и ако ниједан не почиње нулом?

△ **262.** Колико има бројева са највише четири цифре које припадају скупу $\{1, 2, 3\}$?

∗ **263.** Ако се регистарске таблице на аутомобилима састоје од два слова азбуке, која има 30 слова, и иза њих четвороцифреног броја (од 0000 до 9999), онда је број различитих таблица једнак
А) $435 \cdot 10^4$, Б) $9 \cdot 10^6$, В) $64 \cdot 10^5$, Г) 94000, Д) не знам.
Нађи тачан одговор*).

264. Слова у Морзеовој азбуци састоје се од симбола: тачака и црта. Колико слова је могуће саставити ако свако слово садржи највише пет ових симбола?

△ **265.** Новчић се баца у вис пет пута. Записује се низ слова Г и П, где Г означава страну која се зове „грб“ а П означава страну која се зове „писмо“. Ова слова се записују оним редоследом како се појављује горња страна новчића после бацања (једна од могућих реализација је на пример ГГПГП). Колико може бити различитих исхода приликом пет бацања новчића?

266. *а)* На колико начина се могу разместити три различите куглице у четири различите кутије, ако у свакој кутији може да се стави произвољан број куглица?
б) На колико начина се могу разместити k различитих куглица у n различитих кутија, ако у свакој кутији може да се стави произвољан број куглица?

267. Од осам људи треба изабрати четворицу и распоредити их на четири радна места. На колико начина се то може учинити?

268. За финалну трку на 100 м квалификовало се 8 тркача. На колико начина тркачима могу бити подељена златна, сребрна и бронзана медаља?

△ **269.** Колико има различитих резултата ако коцку за игру бацимо четири пута (стране коцке су обележене бројевима од 1 до 6)?

270. *а)* Колико се аутомобила у једном граду може регистровати ако се користе четвороцифрени, петоцифрени и шестоцифрени бројеви и ако они не почињу нулом?
б) Ако би се на регистарским таблицама ставила два произвољна слова азбуке и три произвољне цифре, да ли би се добио већи број могућности за регистровање аутомобила него у случају *а)*?

271. На тикету спортске прогнозе за сваки од 12 фудбалских сусрета прогнозери уписују 1, 0 или 2 зависно од тога да ли предвиђају да победи домаћи тим (1), да игра нерешено са гостујућим тимом (0) или да победи гостујући тим (2). Колико треба попунити

*) Овај задатак је био једно од тест питања на квалификационом испиту из математике за упис на Техничке факултете, Математичку физику и Факултет за физичку хемију у Београду, 30. 06. 1995.

„комбинација" да би се са сигурношћу добило дванаест погодака?

$\triangle$ **272.** Колико се четвороцифрених бројева може саставити од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 тако да у сваком броју буде јединица (цифра 1)?

8.3 КОМБИНАЦИЈЕ

За дати скуп од n елемената међу којима нема једнаких сваки подскуп састављен од k од тих n елемената зове се *комбинација* k-те класе. Број свих комбинација k-те класе од n елемената обележава се са C_n^k. Једночлане, двочлане, трочлане, четворочлане, петочлане итд комбинације зову се и униони, амбе, терне, кватерне, квинтерне итд. Празна комбинација зове се нулион; она не обухвата ниједан од датих елемената.

Како се пермутовањем комбинација k-те класе добијају све варијације k-те класе од n елемената без понављања, имамо

$$V_n^k = C_n^k P_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

одакле је, према формулама (1) и (5):

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{9}$$

За сваки природан број n и свако $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ број $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ означава се и са $\dbinom{n}{k}$ (чита се „ен над ка"):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{10}$$

Бројеви $\dbinom{n}{k}$ називају се *биномни коефицијенти* јер се појављују као коефицијенти у развоју бинома $(a+b)^n$ (види следећу тачку). Биномни коефицијенти $\dbinom{n}{k}$ једнаки су јединици за $k=0$ и $k=n$:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1.$$

Најчешће се користе следеће особине биномних коефицијената:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{11}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \tag{12}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{13}$$

△ **273.** Израчунати: *а)* $\binom{16}{4}$;, *б)* $\binom{12}{9}$; *в)* $\binom{100}{97}$.

△ **274.** Показати да је: *а)* $\binom{7}{6} = \frac{7}{6}\binom{6}{5}$ и уопште: $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$,
б) $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$ и уопште особина (12).

△ **275.** Израчунати: *а)* $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{10}{3}$;
б) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$;
в) $\binom{5}{5}\binom{4}{1} + \binom{5}{4}\binom{4}{2} + \binom{5}{3}\binom{4}{3}$.

276. Доказати једнакости:
а) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n+1}$;
б) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} = \binom{n+3}{n+1}$;
в) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$.

△ **277.** Показати да је збир $\binom{n+k}{2} + \binom{n+k+1}{2}$ потпун квадрат.

278. Израчунати: $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

△ **279.** Решити једначине: *а)* $\binom{n}{3} = 20$; *б)* $V_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$;
в) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = 9n^2 - 14n$, $n \geqslant 3$; *г)* $C_{n+1}^{n-2} + 2C_{n-1}^3 = 7(n-1)$.

△ **280.** Решити неједначине: *а)* $\binom{n}{5} < \binom{n}{3}$; *б)* $\binom{2n}{7} > \binom{2n}{5}$;
в) $\binom{19}{n-1} < \binom{19}{n}$; *г)* $\binom{15}{n-2} > \binom{15}{n}$.

△ **281.** Доказати једнакост $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$.

282. Одредити све комбинације (без понављања) прве, друге и треће класе од слова a, b, c, d, e, f и помоћу формуле за C_6^k, $k = 1, 2, 3$ провери њихов број.

△ **283.** У кутији се налази 5 белих и 6 црних куглица. На колико начина може да се изабере 7 куглица из кутије тако да су међу њима 3 беле и 4 црне куглице?

△ **284.** У кутији је 10 белих и 4 црне куглице. На колико начина могу се узети три куглице из кутије?

△ **285.** Од 15 ученика треба изабрати уредника и четири дописника за школске новине. На колико начина се то може урадити?

286. Из једног одељења матураната 5 ученика жели да студира математику, 4 физику и 3 хемију. На колико начина се може формирати петочлана група у којој ће бити бар два будућа математичара, бар један физичар и бар један хемичар?

△ **287.** У равни је дато n тачака, при чему никоје три тачке не припадају једној правој. Колико је правих одређено датим тачкама.

△ **288.** У клупама у разреду има 28 места за седење. На колико се начина може на овим седиштима разместити 25 ученика?

△ **289.** На колико различитих начина може да се подели 12 различитих предмета на три лица A, B и C тако да свако од њих добије по 4 предмета?

290. На колико начина може да се подели шпил од 36 карата за игру на два једнака дела, тако да у свакој половини шпила буду по два кеца?

291. Два учесника шаховског турнира напустили су турнир одигравши сваки по 3 партије. Колико је било учесника на почетку турнира, ако су укупно одигране 84 партије?

292. На једнокружном шаховском турниру сваки шахиста је половину својих поена освојио у партијама са десет најслабије пласираних играча. Колико је било играча на турниру?

293. Кошаркашка екипа се састоји од 10 играча? Тренеру је дозвољено да у току игре само три пута измени састав екипе на терену. У сваком моменту на терену је 5 играча. На колико начина тренер може да изврши дозвољене измене, тако да се састави екипа разликују?

294. На колико начина се могу изабрати три броја из скупа природних бројева $\{1, 2, \dots, 30\}$ тако да њихов збир буде паран број?

295. Природан број n може да се прикаже у облику збира природних бројева на 2^{n-1} начина. Доказати.

$\triangle$ **296.** *а)* На једној правој налази се n тачака а на другој правој која је паралелна првој налази се m тачака. Колико се може конструисати троуглова чија су темена те тачке?
б) Нека се паралелним правама из *а)* дода трећа права њима паралелна са r тачака на њој, али тако распоређених да никоје три тачке на трима паралелним правим не леже на једној правој која би секла све три паралелне праве. Колико се још троуглова може конструисати?

297. Свака страница квадрата подељена је на n делова. Колико се може конструисати троуглова чија су темена тачке поделе на страницама квадрата?

$*$ **298.** Од 10 ученика треба изабрати 6, тако да Милица буде изабрана само ако је заједно са Мирком. На колико начина је могуће извршити избор?

$*$ **299.** У једној колони стоје 5 мушкараца и 3 жене. На колико се начина може формирати колона, под условом да две жене не буду једна до друге?

$*$ **300.** На колико начина можемо за округли сто поставити 4 дечака и 2 девојчице, тако да девојчице не седе једна до друге?

$*$ **301.** На зиду је у низу окачено 10 слика. Треба скинути 4 слике, али да не буду суседне. На колико начина то можемо извести?

$*$ **302.** За округлим столом краља Артура седе 12 витезова. Сваки од њих је у свађи са својим суседима. Треба изабрати 5 витезова да ослободе заробљену принцезу. На колико се начина то може учинити а да су међу изабраним витезовима сви међу собом у слози?

$*$ **303.** На колико се начина 10 људи може распоредити у три групе, тако да у првој групи буде двоје, а у другој троје?

$*$ **304.** Колико целих ненегативних решења има једначина: $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, $n \in N$?

$*$ **305.** Доказати да једначина $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, где је $n \in N$, има $\binom{n-k}{k-1}$ решења у скупу природних бројева.

$*$ **306.** Четири риболовца су уловили 12 риба. На колико начина се то могло десити ако:
а) Не мора сваки риболовац имати улов?
б) Знамо да је сваки риболовац уловио бар по једну рибу?

$*$ **307.** Писмену вежбу из математике радило је 20 ученика. На колико начина могу бити оцењени? (Све оцене су целе: 1, 2, 3, 4, 5.) Кад је професор саопштио да је било свих врста оцена од 1 до 5 (бар по једна), број могућих распореда оцена се смањио. Колико износи у овом случају?

308. Три ученице су купиле 12 блуза. На колико начина су то учиниле ако:
а) Свака је купила по четири блузе а све блузе су различите?
б) Свака је купила бар по једну блузу?
в) Не знамо да ли је свака купила блузу?
(У случајевима *б)* и *в)* све блузе су једнаке.)

$*$ **309.** Нека је q реалан број, $q \neq 1$. Ако је:
$$A_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \text{ и } B_n = 1 + \frac{1+q}{2} + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+q}{2}\right)^n,$$
доказати да је
$$C_{n+1}(1) + C_{n+1}(2)A_1 + C_{n+1}(3)A_2 + \cdots + C_{n+1}(n+1)A_n = 2^n \cdot B_n,\ C_n(k) = \binom{n}{k}.$$

310. На колико начина се могу поређати у низ n нула и k јединица, тако да никоје две јединице нису суседне?

311. *Задатак размештања куглица у кутије.*
а) Размештај три куглице у три кутије. Ако са a, b и c обележимо куглице онда укупан број размештаја три куглице у три кутије износи $3^3 = 27$. Наведимо све случајеве:

1. $\{abc| - | - \}$
2. $\{ - |abc| - \}$
3. $\{ - | - |abc\}$
4. $\{ ab | c | - \}$
5. $\{ ac | b | - \}$
6. $\{ bc | a | - \}$
7. $\{ ab | - | c \}$
8. $\{ ac | - | b \}$
9. $\{ bc | - | a \}$
10. $\{a|bc|-\}$
11. $\{b|ac|-\}$
12. $\{c|ab|-\}$
13. $\{a|-|bc\}$
14. $\{b|-|ac\}$
15. $\{c|-|ab\}$
16. $\{-|ab|c\}$
17. $\{-|ac|b\}$
18. $\{-|bc|a\}$
19. $\{-|a|bc\}$
20. $\{-|b|ac\}$
21. $\{-|c|ab\}$
22. $\{a|b|c\}$
23. $\{a|c|b\}$
24. $\{b|a|c\}$
25. $\{b|c|a\}$
26. $\{c|a|b\}$
27. $\{c|b|a\}$

б) Случај једнаких куглица. У овом случају не чинимо разлику између таквих размештаја као што су на пример 4, 5 и 6. Сада имамо 10 различитих могућности:

1. $\{\bullet\bullet\bullet\mid - \mid - \}$	6. $\{\bullet\mid\bullet\bullet\mid-\}$
2. $\{ - \mid\bullet\bullet\bullet\mid - \}$	7. $\{\bullet\mid-\mid\bullet\bullet\}$
3. $\{ - \mid - \mid\bullet\bullet\bullet\}$	8. $\{-\mid\bullet\bullet\mid\bullet\}$
4. $\{\bullet\bullet\mid\bullet\mid - \}$	9. $\{-\mid\bullet\mid\bullet\bullet\}$
5. $\{\bullet\bullet\mid - \mid\bullet\}$	10. $\{\bullet\mid\bullet\mid\bullet\}$

У овом случају смо разместили три једнаке куглице у три различите кутије. Ако би пак и кутије биле једнаке, онда бисмо добили свега три различита размештаја куглица:

$$\{\bullet\bullet\bullet\mid-\mid-\mid\},\quad \{\bullet\bullet\mid\bullet\mid-\},\quad \{\bullet\mid\bullet\mid\bullet\}$$

то јест или би се нашла по једна куглица у свакој кутији, или би у једној кутији (свеједно у којој од три!) биле две куглице у другој кутији била би једна куглица а трећа кутија била би празна, или би све три куглице биле у једној кутији а две кутије биле би празне

У општем случају размештаја r куглица у n кутија број могућих исхода брзо расте са порастом r и n. У случају $r = 3$ куглице у $n = 4$ кутије постоји 81 размештај $3^4 = 81$.

Модел куглица и кутија је упрошћен опис многих практичних размештаја. Тако
– Расподела рођендана r људи у току године одговара размештају r куглица у $n = 365$ кутија (када година има 365 дана).
– Могућа појава r саобраћајних незгода у току недеље је један од могућих размештаја r куглица у $n = 7$ кутија.
– Ученици се класификују по оценама из математике, то јест ученици су куглице, а оцене кутије.
– Лифт прима r путника и зауставља се на n спратова. Расподела излаза путника по спратовима је аналогна размештају r куглица у n кутија.

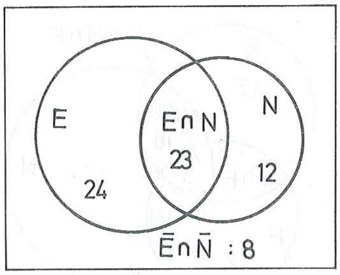
в) Размотрити детаљније размештаје $r = 7$ куглица у $n = 7$ кутија (кутије можемо да интерпретирамо као дане недеље, а куглице као телефонске позиве, писма, посете...).

Ограничимо се на случај када кутије садрже 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0 куглица, при чему поредак ових бројева није битан. Наћи укупан број размештаја 7 куглица у 7 кутија под датим ограничењима.

г) Шест куглица треба разместити у 12 кутија. На колико начина се то може урадити али тако да 10 кутија остану празне?

312. *Формула укључивања и искључивања*
а) Уводни пример. У једном научном институту ради 67 истраживача. Од њих 47 знају енглески језик, 35 – немачки и 23 – оба

језика. Колико истраживача у институту не зна ни енглески ни немачки језик?



Сл. 14

E – скуп истраживача који знају енглески

$\overline{E} \cap \overline{N}$ – скуп истраживача који не знају ни енглески ни немачки

Да бисмо решили овај задатак потребно је поделити цео колектив истраживача на групе које немају заједничке чланове. Прву групу чиниће они који знају само енглески: њих има $47 - 23 = 24$. Другу групу чине они који знају само немачки: њих има $35-23 = 12$. Значи укупан број истраживача који знају бар један од два језика је $23+24+12 = 59$. Како укупно има 67 истраживача у институту, то $67 - 59 = 8$ истраживача не зна ни енглески ни немачки језик. Овај одговор написаћемо на следећи начин (видети слику 14):

$$8 = 67 - (23 + 24 + 12)$$

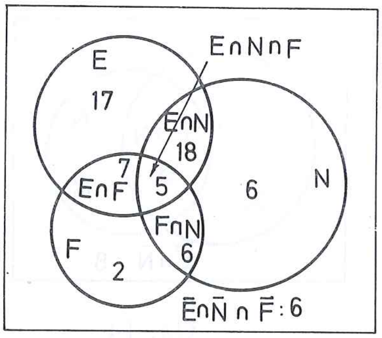
$$\text{или } 8 = 67 - 23 - (47 - 23) + (35 - 23)$$

$$\text{или } 8 = 67 - 47 - 35 + 23.$$

Тако, видимо да би се добио број истраживача који не знају ни енглески ни немачки језик потребно је да се од укупног броја истраживача одузме број истраживача који знају енглески, затим број истраживача који знају немачки и на крају се додаје број истраживача који знају оба језика.

б) Проширење примера а). Нека се, за исти институт, зна да француски језик знају 20 истраживача, енглески и француски – 12 истраживача, немачки и француски – 11 истраживача а сва три језика знају 5 истраживача. Такође желимо да одредимо број истраживача у институту који не знају ниједан од ова три језика.

Да бисмо решили овај пример уочимо да истраживача
– који говоре енглески и француски (без немачког) има $12-5=7$
– који говоре немачки и француски (без енглеског) има $11-5=6$.



Сл. 15

Значи, број истраживача који знају само француски износи $20-7-6-5=2$. Ови истраживачи улазе у број оних истраживача (из *a)*) који не знају енглески и немачки језик. Значи, број истраживача који не знају ниједан од три наведена језика, једнак је $8-2=6$. Овај резултат напишимо и на следећи начин (видети слику 15):

$$6 = 8-2 = 67-47-37+23-(20-7-6-5))$$
$$\text{или } 6 = 67-47-37+23-20+(12-5)+(11-5)+5$$
$$\text{или } 6 = 67-47-37-20+23+12+11-5.$$

Последњу формулу напишимо помоћу одговарајућих симбола:

$$n(\overline{E}\cap\overline{N}\cap\overline{F}) = n-n(E)-n(N)-n(F)+n(E\cap N)+n(E\cap F)+n(N\cap F)-n(E\cap N\cap F)$$

где је
n – укупан број истраживача,
$n(E)$ – број истраживача који знају енглески,
$n(N)$ – број истраживача који знају немачки,
$n(F)$ – број истраживача који знају француски,
$n(E\cap N)$ – број истраживача који знају енглески и немачки,
$n(E\cap F)$ – број истраживача који знају енглески и француски,
$n(N\cap F)$ – број истраживача који знају немачки и француски,
$n(E\cap N\cap F)$ – број истраживача који знају сва три језика,
$n(\overline{E}\cap\overline{N}\cap\overline{F})$ – број истраживача који не знају ни један језик.

Тако смо дошли до тзв. *формуле укључивања и искључивања*. Написана у општим симболима ова формула може и шире да се користи. Наиме, својство познавања језика можемо да заменимо другим својствима људи, предмета или бројева. Тако илуструјмо ову формулу и на следећем примеру.

в) У скупу бројева од 1 до 100 наћи колико њих нису дељиви ни са 2 ни са 3 ни са 5.

Значи, својства знања језика истраживача овде замењујемо својствима дељивости бројева. Овде је $n = 100$. Свака од ознака $n(2)$, $n(3)$, $n(5)$, $n(2\cap 3)$, $n(2\cap 5)$, $n(3\cap 5)$, $n(2\cap 3\cap 5)$ означава број оних бројева који су дељиви са 2, са 3, са 5, са 2 и 3 односно са 6, са 2 и 5 односно са 10, са 3 и 5 односно са 15 и са 2 и 3 и 5 односно са 30. Треба израчунати број оних бројева који нису дељиви ни са 2 ни са 3 ни са 5 то јест треба одредити $n(\overline{2}\cap\overline{3}\cap\overline{5})$.

Према формули укључивања и искључивања имамо

$$n(\overline{2}\cap\overline{3}\cap\overline{5}) = n - n(2) - n(3) - n(5) + n(2\cap 3) + n(2\cap 5) + n(3\cap 5) - n(2\cap 3\cap 5) =$$

$$= 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

Значи, између природних бројева од 1 до 100 има 26 бројева који нису дељиви ни са 2 ни са 3 ни са 5.

Формула укључивања и искључивања може се формулисати и у општем облику. Нека је S коначан скуп од n предмета који могу да поседују неко од својстава $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Уведимо ознаке

$n(\alpha_i)$ – број предмета из скупа S са обележјем α_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

$n(\alpha_i \cap \alpha_j)$ – број предмета из скупа S који истовремено поседују и обележје α_i и обележје α_j $(i \neq j)$.

....

$n(\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \cdots \cap \alpha_r)$ – број предмета из скупа S који истовремено поседују сва својства.

$n(\overline{\alpha}_1 \cap \overline{\alpha}_2 \cap \cdots \cap \overline{\alpha}_r)$ – број предмета из скупа S који не поседују ни једно од ових обележја.

Сада је

$$\begin{aligned} n(\overline{\alpha}_1 \cap \overline{\alpha}_2 \cap \cdots \cap \overline{\alpha}_r) = n &- n(\alpha_1) - n(\alpha_2) - \cdots n(\alpha_r) + \\ &+ n(\alpha_1 \cap \alpha_2) + n(\alpha_1 \cap \alpha_3) + \cdots + n(\alpha_{r-1} \cap \alpha_r) - \\ &- n(\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3) - n(\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_4) - \cdots - n(\alpha_{r-2} \cap \alpha_{r-1} \cap \alpha_r) + \\ &+ \cdots + (-1)^r n(\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cdots \cap \alpha_r). \end{aligned}$$

г) Колико има бројева између 1 и 250 који нису дељиви ни са 2 ни са 5 ни са 7 ни са 11?

д) У неком разреду сваки ученик учи бар један од три страна језика:

18 учи енглески — 10 учи енглески и немачки
15 учи немачки — 7 учи енглески и француски
9 учи француски — 6 учи француски и немачки

а 5 ученика учи сва три језика.

1) Колико ученика има у том разреду?

2) Колико ученика учи само енглески?

3) Колико ученика учи француски и енглески језик али не и немачки?

8.4 БИНОМНА ФОРМУЛА

Степеновање бинома $a+b$, где су a и b произвољни бројеви, доводи до биномне формуле:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = \binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3$$

....

која за произвољну вредност природног броја n гласи:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\binom{n}{n}b^n. \quad (14)$$

Ако се уместо b стави $-b$ формула (14) постаје $\left(\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1\right)$:

$$(a-b)^n = a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots+(-1)^nb^n. \quad (15)$$

Биномне формуле (14) и (15) могу се и краће записати помоћу знака сабирања $\sum$, („сигма“: $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1+x_2+\cdots+x_n$):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k, \qquad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \quad (16)$$

Биномна формула се зове и Њутнова формула по аутору Исаку Њутну (Isaak Newton (1642 – 1727), енглески физичар и математичар).

Доцније је доказано да се биномна формула може користити и у облику

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots \quad , |x| < 1 \qquad (17)$$

где је α произвољан реалан број, то јест биномна формула се може користити и када експонент није природан број.

Бројеви $\binom{n}{k}$, где је n природан број и k природан број или 0 ($k \in N \cup \{0\}$), појављују се као коефицијенти у биномној формули па су зато и названи *биномним коефицијентима*. Од биномних коефицијената за $n = 1$ $\left(\binom{1}{0} = 1, \binom{1}{1} = 1\right)$, за $n = 2$ $\left(\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1\right)$, за $n = 3$ $\left(\binom{3}{0} = 3, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1\right)$,... можемо да формирамо тзв. Паскалов троугао, по Блезу Паскалу (Blaise Pascal (1623 – 1662), француски математичар):

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

....

Сваки ред овог „троугла“ почиње и завршава се јединицом. То су биномни коефицијенти $\binom{n}{0} = 1$ и $\binom{n}{n} = 1$. Сваки преостали члан овог „троугла“ добија се према особини (12) као збир два суседна члана из претходног реда, који су лево и десно изнад њега. Тако је $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$, то јест $4 + 6 = 10$. Два члана произвољног реда подједнако удаљена од левог и десног краја једнака су међу собом (особина (11)): $\binom{5}{1} = \binom{5}{5-1} = 5$, $\binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = 10$. Према особини (13) је $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5} = 1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

△ **313.** Помоћу биномне формуле израчунати:
а) $(a-2b)^5$; *б)* $(2+i)^6$; *в)* $(2-i)^6$, где је $i = \sqrt{-1}$.

$\triangle$ **314.** Израчунати: *а)* $\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{3}-\binom{6}{4}+\binom{6}{5}$;
б) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$.

$\triangle$ **315.** Ако су $a,b\in N$ и ако је збир a^5+b^5 дељив са 5, онда је и бином $(a+b)^5$ дељив са 5. Доказати.

$\triangle$ **316.** *а)* Доказати да је $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{2k}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{2k+1}+\cdots=2^{n-1}$;
б) Доказати да се непаран број предмета од датих n предмета може изабрати на 2^{n-1} начина.

317. Израчунати: *а)* $2^{10}+10\cdot 2^9+\binom{10}{2}2^8+\binom{10}{3}2^7+\cdots+\binom{10}{10}$;
б) $2^{10}-10\cdot 2^9+\binom{10}{2}2^8-\binom{10}{3}2^7+\cdots+\binom{10}{10}$.

318. *а)* Помоћу биномне формуле израчунати $0,95^5$ на четири децимале тачно.
б) Приближно израчунати $1,1^5$ помоћу биномне формуле.
в) Приближно израчунати $\sqrt{10}$ користећи биномну формулу (17).

$\triangle$ **319.** Одредити x у изразу $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ ако је трећи члан развоја 240.

320. *а)* У развоју бинома $\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ биномни коефицијенти петог и десетог члана су једнаки. Одредити онај члан развоја који не садржи x.
б) Збир непарних биномних коефицијената развоја бинома $(ax+x^{-\frac{1}{4}})^n$ једнак је 512. Наћи члан развоја који не садржи x.

321. У развоју бинома $\left(\frac{a\sqrt[6]{a}}{b}-\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[12]{a^7}}\right)^n$ одредити онај члан који не садржи a, ако је збир биномних коефицијената три прва члана једнак 79.

322. У развоју $(1+x)^n$ наћи n ако је коефицијент шестог члана једнак коефицијенту десетог члана.

323. Наћи пети члан развоја бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ ако је однос коефицијената трећег и другог члана једнак $\frac{7}{2}$.

324. У развоју бинома $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ наћи члан у коме се јавља производ ab.

$\triangle$ **325.** Наћи коефицијент уз *а)* x; *б)* x^2; *в)* x^5 у полиному $(1-4x)^6(1+3x)^8$.

326. Наћи збир квадрата свих биномних коефицијената у развоју бинома $(a+b)^n$.

$\triangle$ **327.** *а)* Наћи коефицијент уз x^8 у полиному $(1+x^2-x^3)^9$.
б) Одредити коефицијент уз x^4 у полиному $(1+x-x^2)^9$.

328. Одредити у развоју полинома $(1+x^6+x^8)^{20}$ коефицијент уз степене *а)* x^{28}; *б)* x^{24}; *в)* x^{27}.

$*$ **329.** У развоју бинома $(x+y)^n$ други члан је 240, трећи 720 и четврти 1080. Наћи x, y, n.

$*$ **330.** Доказати да је $(-1)^n+(-1)^{n-1}\binom{3n}{1}10+(-1)^{n-2}\binom{3n}{2}10^2+\cdots+10^{3n}=729^n$.

331. Наћи највећи члан у развоју бинома $(1+\sqrt{2})^{20}$.

332. Који је највећи коефицијент развоја бинома $(a+b)^n$ ако је збир свих коефицијената једнак 4096?

333. Доказати да у биномном развоју $(1+a)^n$, $(a\neq 0)$ не могу бити једнака три узастопна сабирка.

$*$ **334.** Нека је $n\in N$ и $k\in N\cup\{0\}$ и нека је $S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$. Доказати да је

а) $(n+1)^{k+1}=\binom{k+1}{1}S_k+\binom{k+1}{2}S_{k-1}+\binom{k+1}{3}S_{k-2}+\cdots+\binom{k+1}{k}S_1+n+1$;

б) $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$;

в) $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

г) $S_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

$\triangle$ **335.** *а)* Наћи све рационалне чланове у развоју бинома $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{12}$, где је x рационалан број.

б) Колико има рационалних чланова бинома $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$?
в) Збир биномних коефицијената трећег члана од почетка и трећег члана од краја развоја бинома $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^n$ једнак је 9900. Колико је рационалних чланова у том развоју?

$*$ **336.** Доказати да је *а)* 4^n-1 дељив са 3 за свако $n\in N$, *б)* $11^{20}-1$ дељив са 100.

$*$ **337.** Доказати *а)* $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$;
б) $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}$;
в) $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=0$;
г) $\binom{n+p}{k}=\sum_{\substack{r+s=k\\(r,s\geq 0)}}\binom{n}{r}\binom{p}{s}$.

$*$ **338.** Ако је p прост број доказати да је број N, $N=\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}-2$, дељив са p^2.

339. Наћи највећи коефицијент развоја тринома $(a+b+c)^{10}$.

340. Наћи збир свих коефицијената полинома

$$P(x)=(2x^7-3)(x^3-2)^{17}.$$

341. *а)* Наћи члан развоја бинома $(3x+2)^7$ са највећим коефицијентом.
б) Наћи члан развоја бинома $\left(\dfrac{1}{x}+3x\right)^n$ који не садржи x знајући да десети члан овог развоја има највећи коефицијент.
в) Наћи највећи члан развоја бинома $(1+\sqrt{3})^{100}$.

342. *а)* Доказати да је највећи коефицијент у развоју бинома $(x+a)^{2n}$ паран број.
б) Доказати да је за свако $n\in N$ број $(2+\sqrt{3})^n$ непаран.

343. Наћи коефицијент уз x^4 у изразу

$$(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{15}.$$

$*$ **344.** Одредити коефицијент уз x^3 у развоју полинома: $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{100}$.

ДЕВЕТА ГЛАВА

9 ВЕРОВАТНОЋА

9.1 СЛУЧАЈНИ ДОГАЂАЈИ

Експеримент који се под приближно истим условима може поновити велики број пута и чији исход ни у једном понављању експеримента није једнозначно одређен зовемо *случајним* или *статистичким експериментом.* Сваки могући исход статистичког експеримента називамо *елементарним догађајем.* Скуп свих елементарних догађаја зовемо *простор исхода* или *простор елементарних догађаја* и обележавамо га са Ω („омега“).

Када простор елементарних догађаја садржи коначно или пребројиво много елемената, зове се *дискретни простор* елементарних догађаја. *Непрекидан простор* садржи непребројиво много елементарних догађаја.

Ако је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ простор елементарних догађаја неког експеримента, онда се сваки подскуп A скупа Ω зове *случајан догађај* (или краће: догађај). Догађаје обележавамо великим словима $A, B, C, \ldots$, или користимо једно слово са индексима: $A_1, A_2, \ldots$ Исход (или елементаран догађај) ω за који важи $\omega \in A \subset \Omega$ је повољан исход за догађај A.

Догађај Ω се увек реализује и зове се *сигуран догађај. Немогућ догађај* обележавамо са $\varnothing$ (користимо ознаку празног скупа јер не садржи ниједан елемент из Ω).

Ако је догађај A подскуп B, онда то пишемо $A \subset B$ (чита се „A повлачи B“ или „A је део од B“), тада из реализације догађаја A следи реализација догађаја B. Ако је $A \subset B$ и $B \subset A$ онда су догађаји A и B еквивалентни: $A = B$.

Догађај $\overline{A}$ је супротан догађају A (комплементаран догађају A) у односу на Ω ако су му повољни они елементарни догађаји који не припадају A, то јест $\overline{A} = \{\omega \mid \omega \notin A\}$.

Збир $A + B$ (или $A \cup B$) догађаја A и B је догађај који се састоји од свих елементарних догађаја који припадају бар једном од догађаја A или B: $A + B = \{\omega \mid \omega \in A$ или $\omega \in B\}$.

Производ AB (или $A \cap B$) догађаја A и B је догађај који се састоји од елементарних догађаја који припадају и A и B: $AB = \{\omega \mid \omega \in A$ и $\omega \in B\}$. Догађаји A и B су дисјунктни или се узајамно искључују ако је $AB = \varnothing$.

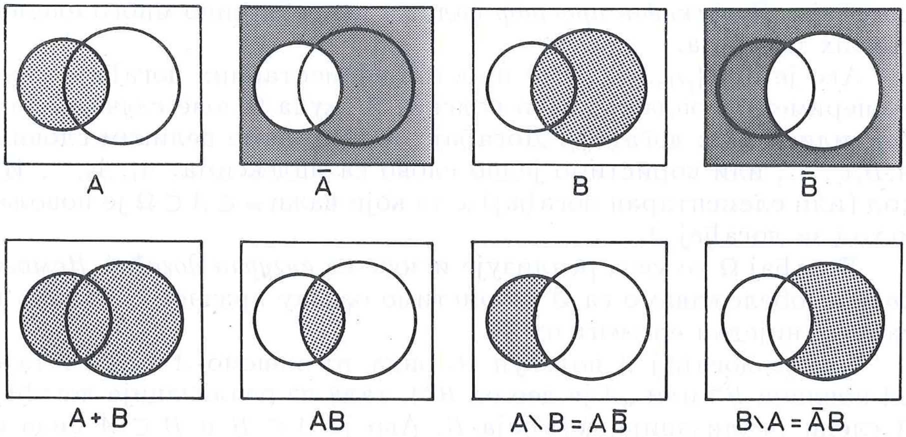
Разлика $A \setminus B$ догађаја A и B је догађај који се састоји од елемената скупа A који не припадају B, то јест $A \setminus B = A\overline{B}$.

Догађаји $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ чине простор елементарних догађаја ако задовољавају услов: $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = \Omega$, $\omega_i\omega_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Догађаји $A_1, A_2, \ldots, A_n$ чине потпун систем догађаја ако задовољавају услов $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$, $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$.

De Morgan-ова правила гласе: $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Ако замислимо експеримент који се састоји у избору тачке унутар квадрата и ако са A обележимо избор тачке у левом кругу унутар квадрата а са B избор тачке у десном кругу унутар квадрата, тада се догађаји A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $A+B$, AB, $A\setminus B$, $B \setminus A$ састоје у избору тачке унутар области шрафираних на одговарајућим фигурама слике 16.



Сл. 16

345. Одредити простор елементарних догађаја када

а) новчић бацимо два пута;

б) новчић бацимо n пута;

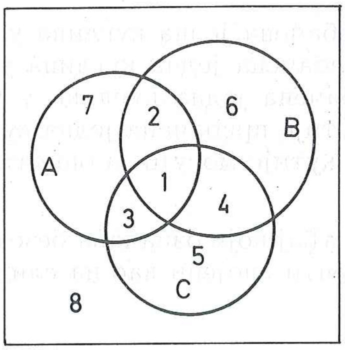
в) новчић бацимо до прве појаве грба;

г) новчић и коцку за игру бацимо једном.

346. Коцка за игру (чије су стране нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6) баца се двапут.
а) Одредити простор елементарних догађаја.
б) Одредити простор елементарних догађаја када посматрамо збирове бројева на коцкама.
в) Одредити следеће догађаје:
A – у оба бацања пао је паран број,
B – појавила се бар једна јединица,
C – у првом бацању појавио се мањи број него у другом бацању,
D – збир бројева на обема коцкама је већи од 8.
г) Ако се коцка баци n пута, одредити простор елементарних догађаја.

347. Ако два играча играју две партије шаха, онда су у свакој партији могућа три исхода: победа првог играча, реми и победа другог играча. Одредити простор елементарних догађаја.

348. Три догађаја A, B и C деле простор елементарних догађаја Ω на осам догађаја који се међусобно искључују (слика 17). Који су то догађаји?



Сл. 17

349. Ако је $A \subset \Omega$ и $B \subset \Omega$ доказати да важи
а) $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$;
б) $A \subset B \Rightarrow B = A + \overline{A}B$;
в) $A + B = AB + \overline{A}B + A\overline{B}$;
г) $AB + C = (A + C)(B + C)$;
д) $A(B + C) = AB + AC$;
ђ) $A + \overline{A} = \Omega,\ A\overline{A} = \varnothing$.

350. Ако су A, B и C произвољни догађаји представити $A+B+C$ у облику збира три догађаја који се међу собом искључују (видети слику 17).

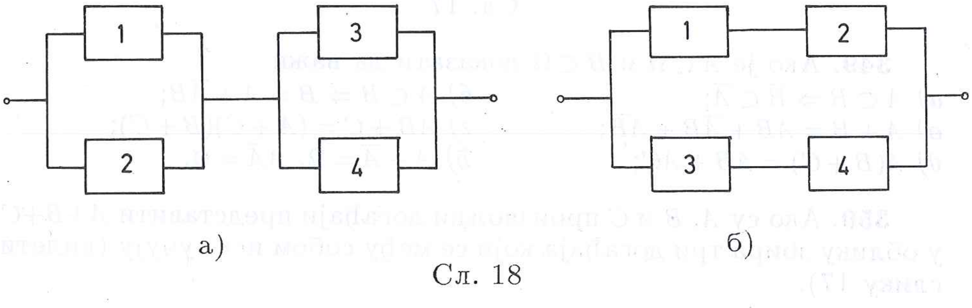
351. *а)* Доказати да догађаји A, $\overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ образују потпун систем догађаја.
б) Доказати да догађаји $A+B$, $\overline{A}\,\overline{B}C$ и $\overline{A+B+C}$ образују потпун систем догађаја (видети слику 13).

352. Дата су три догађаја A, B и C. Изразити догађаје:
а) Реализовао се догађај A а нису се реализовали догађаји B и C.
б) Реализовала су се сва три догађаја.
в) Није се реализовао ниједан од ових догађаја.
г) Реализовао се најмање један од ових догађаја.
д) Реализовао се један од ових догађаја.
ђ) Реализовала се не више од два догађаја.

353. Новчић је бачен три пута. Описати простор елементарних догађаја. Који су елементарни догађаји повољни догађајима:
A – грб се појавио најмање једном,
B – грб је добијен у другом бацању,
C – писмо је добијено у трећем бацању,
D – ниједан грб се није појавио.
У каквој су вези догађаји A и B, $\overline{A}$ и D, B и D? Наћи $A+C$, BC, $\overline{B+C}$, $A(B+C)$.

354. Дате су четири кутије са следећим садржајем: K_1: 2 беле куглице, 4 црне куглице, K_2: 3 беле, 2 црне, K_3: 2 беле, 3 црне, K_4: 4 беле, 1 црна.
Из прве кутије је пребачена једна куглица у другу кутију, затим је из друге кутије пребачена једна куглица у трећу кутију, па је из треће кутије пребачена једна куглица у четврту кутију и на крају је из четврте кутије пребачена једна куглица у прву кутију. Који су састави прве кутије могући и описати како се ти састави реализују?

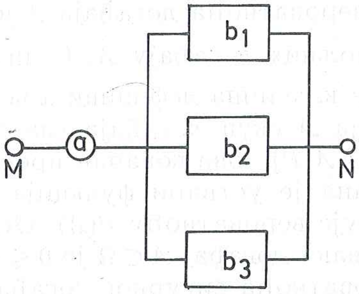
355. Изразити догађај који означава безотказни рад техничког система чији су елементи спојени као на слици 18.



а) б)

Сл. 18

356. Електрично коло између M и N састављено је по шеми на слици 19. Прекид у раду елемента a означимо са A, а прекид у раду елемента b_k означимо са B_k $(k = 1, 2, 3)$. Ако са C означимо прекид у раду електричног кола, како се догађаји C и $\overline{C}$ могу изразити помоћу A и B_k?



Сл. 19

9.2 КОНАЧАН ПРОСТОР ВЕРОВАТНОЋА

Нека је посматраном експерименту придружен простор елементарних догађаја $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Претпоставимо да је експеримент поновљен N пута и да су се исходи $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ реализовали редом $N_1, N_2, \ldots, N_n$ пута, при чему је $N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N$. Ако су догађају A повољни елементарни догађаји $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}$, где је $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n$, тада је број појављивања догађаја A једнак $N_{i_1} + N_{i_2} + \cdots + N_{i_m} = N_A$. Релативна фреквенција догађаја A једнака је $fr(A) = \dfrac{N_A}{N}$. За веће вредности N релативна фреквенција $fr(A)$ тежи вероватноћи $P(A)$ догађаја A (статистичка дефиниција вероватноће).

Случај једнако вероватних исхода – класична или Лапласова (P. Laplace, 1749 – 1827, француски математичар) дефиниција вероватноће: Ако су исходи $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ једнако вероватни, онда је вероватноћа догађаја A $(A \subset \Omega)$ једнака

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

где је m број повољних исхода догађају A а n укупан број исхода посматраног експеримента.

Општи случај; Ако могућим исходима $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ придружимо редом бројеве $p_1, p_2, \ldots, p_n$ који задовољавају услове: $p_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, онда број p_i називамо вероватноћом исхода ω_i. Ако је $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}$ где је $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n$, онда је вероватноћа догађаја A број

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_m} \tag{2}$$

то јест, вероватноћа догађаја A једнака је збиру вероватноћа исхода повољних догађају A. Очигледно, за $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ добија се класична дефиниција вероватноће.

Ако ја $\mathcal{A}$ скуп догађаја (партитивни скуп) скупа Ω, онда се тројка $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ зове коначан простор вероватноћа. Формулом (2) дефинисана је уствари функција P која сваком догађају $A \subset \Omega$ придружује вероватноћу $P(A)$. Особине вероватноће су следеће:

– За сваки догађај $A \subset \Omega$ је $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, (3)

– Вероватноћа сигурног догађаја је $P(\Omega) = 1$, (4)

– У случају када се догађаји A и B искључују ($AB = \varnothing$), онда је вероватноћа збира догађаја $A + B$ једнака

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \tag{5}$$

– У случају када се догађаји A и B не искључују, онда је вероватноћа збира догађаја $A + B$ једнака

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \tag{6}$$

– За сваки догађај A је вероватноћа супротног догађаја $\overline{A}$ једнака

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \tag{7}$$

– Вероватноћа немогућег догађаја је једнака нули: $P(\varnothing) = 0$,(8)

– Ако је $A \subset B$, онда је $P(A) \leqslant P(B)$, (9)

– Вероватноћа разлике догађаја A и B једнака је

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) \tag{10}$$

Када је скуп Ω бесконачан, вероватноће догађаја се не могу израчунавати помоћу формула (1) и (2). У случајевима када се скуп Ω може приказати као ограничен скуп на правој, у равни или у простору може се користити *геометријска дефиниција вероватноће;*

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega} \tag{11}$$

где „мера“ означава дужину, површину или запремину области A односно Ω. Геометријска дефиниција има смисла ако је вероватноћа догађаја пропорционална мери области којом се тај догађај представља, то јест ако два догађаја исте мере имају исту вероватноћу.

357. Баците новчић 100 пута и одредите фреквенцију појављивања грба. Баците , затим, новчић још 100 пута и упоредите добијене фреквенције грба.

358. Претпоставимо да смо експеримент поновили N пута. Нека су A и B догађаји чије су релативне фреквенције у овим N опита респективно једнаке $fr(A)$ и $fr(B)$. Доказати да у овом случају догађај $A+B$ има релативну фреквенцију:

$$fr(A+B) = fr(A) + fr(B) - fr(AB) \tag{12}$$

Ако се догађаји A и B међусобом искључују, тада је $fr(AB)=0$, па је

$$fr(A+B) = fr(A) + fr(B) \tag{13}$$

то јест, релативна фреквенција збира догађаја који се међусобом искључују једнака је збиру релативних фреквенција тих догађаја.

359. Нека $fr(B|A)$ означава релативну фреквенцију догађаја B у оним експериментима од N изведених у којима се десио догађај A. Слично, нека је $fr(A|B)$ релативна фреквенција догађаја A у оним експериментима у којима се десио догађај B.

а) Показати да је $fr(B|A) = \dfrac{N_1}{N_1+N_2}$, $fr(A|B) = \dfrac{N_1}{N_1+N_3}$ (15)

б) Користећи формулу (14) показати да се из формула (15) добијају формуле:

$$fr(A)fr(B|A) = fr(AB) \quad \text{и} \quad fr(B)fr(A|B) = fr(AB) \tag{16}$$

360. Да би се извршила контрола партије од 1000 завртња, на случајан начин је из те партије изабрано 50 завртња. Уочено је да се међу ових 50 случајно изабраних завртња налази један завртањ са дефектном главом и дефектном лозом, 3 завртња имају само дефектне главе и два завртња имају само дефектне лозе.

а) Наћи релативне фреквенције догађаја:

A: дефектна лоза,

B: дефектна глава,

AB и $A+B$.

б) Наћи $fr(A|B)$ и $fr(B|A)$.

361. Галтон је уочио фреквенције боја очију у једној групи очева и синова (извор: K. Pearson, Phil. Trans, A, 1900, 138):

Боје очију синова	Боје очију очева светла	тамна
светла	471	148
тамна	151	230

а) Наћи релативне фреквенције догађаја:

A: боја очију оца је светла,

B: боја очију сина је светла,
AB и $A+B$.
б) Наћи релативну фреквенцију $fr(B|A)$, то јест релативну фреквенцију догађаја B у оним исходима у којима се десио догађај A, или, у нашем примеру, наћи релативну фреквенцију догађаја да син има светле очи када његов отац има светле очи.

362. Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ и P функција на Ω која сваком догађају $A \subset \Omega$ придружује вероватноћу $P(A)$. Израчунати:
а) $P(\omega_4)$, ако је $P(\omega_1) = \frac{1}{12}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = \frac{5}{24}$, $P(\omega_5) = \frac{1}{3}$;
б) $P(\omega_3), P(\omega_4), P(\omega_5)$ ако је $P(\omega_1) = \frac{2}{9}$, $P(\omega_2) = \frac{3}{7}$, $P(\omega_3) = 2P(\omega_4) = 3P(\omega_5)$;
в) $P(\omega_i)$, $i = 2,3,4,5$, ако је $P(\omega_1) = \frac{1}{21}$, $P(\omega_1, \omega_2) = \frac{2}{9}$, $P(\omega_2, \omega_3) = \frac{3}{7}$, $P(\omega_1, \omega_4) = \frac{1}{7}$.

363. Нека се простор елементарних догађаја Ω састоји од 4 елемента: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Које од следећих функција P дефинишу простор вероватноћа на Ω:

а) $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{6}$, $P(\omega_3) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_4) = \frac{1}{3}$;
б) $P(\omega_1) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{7}$, $P(\omega_3) = \frac{3}{7}$, $P(\omega_4) = \frac{2}{21}$;
в) $P(\omega_1) = \frac{2}{3}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_3) = -\frac{1}{3}$, $P(\omega_4) = \frac{1}{3}$;
г) $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = 0$, $P(\omega_4) = 1$;
д) $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{5}$, $P(\omega_3) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_4) = \frac{1}{4}$.

364. Нека је $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Колика је вероватноћа да је случајно изабран број из Ω решење једначине:
а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; *б)* $x^3 - 5 = 0$; *в)* $(x-2)(x-3)(x-4) = 0$?

365. Стране правилног тетраедра нумерисане су бројевима 1, 2, 3, 4. Када на равну подлогу бацимо тетраедар, он се заустави на једној својој страни и број те стране се забележи.
а) Одредити простор елементарних догађаја Ω и скуп одговарајућих вероватноћа.
б) Колика је вероватноћа $P(1)$?
в) Колика је вероватноћа да се појави 1 или 2?
г) $P(1,3) =$?
д) $P(2,3,4) =$?

366. Из кутије у којој се налазе црвене, плаве, беле, жуте и зелене куглице извучена је на сличан начин једна куглица. Ако је вероватноћа да ће бити извучена бела куглица једнака $\frac{3}{7}$ и да ће то бити извучена црвена куглица једнака $\frac{1}{7}$, колика је вероватноћа да ће бити извучена куглица која није ни црвена ни бела?

367. Дате су вероватноће $P(A) = 0,35$, $P(B) = 0,73$ и $P(AB) = 0,14$. Наћи *а)* $P(A+B)$, *б)* $P(A\overline{B})$, *в)* $P(\overline{A}+\overline{B})$, *г)* $P(\overline{A}B)$, *д)* $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

368. Бацимо у вис коцку на чијим су странама назначене од једне до шест тачака. Колика је вероватноћа да се на горњој страни коцке појави паран број тачака?

369. Пет новчића је бачено истовремено. Наћи вероватноћу догађаја A да се појави најмање један грб.

370. Коцка се баца два пута. Наћи вероватноћу
а) да се макар једном појави шест тачака;
б) да збир тачака на обема коцкама буде најмање 10;
в) да се на коцкама појаве различити бројеви.

371. Бацају се три коцке.
а) Колика је вероватноћа догађаја да збир тачака на њима буде мањи од 7?
б) Колика је вероватноћа да је збир тачака на њима 17 или 18?
в) Колика је вероватноћа догађаја A да су најмање два од три добијена броја различита?

372. *а)* Бацају се две коцке док се на њима не добије исти број тачака. Колика је вероватноћа да ће то успети са 1) два, 2) три, 3) n бацања?
б) Бацају се две коцке и елементаран догађај је збир тачака на коцкама. Наћи вероватноћу да се добије збир тачака већи од осам.

373. У кутији се налази b белих и c црних куглица.
а) Из кутије је извучена једна куглица. Колика је вероватноћа да је извучена бела куглица?
б) Извучена је бела куглица и није враћена у кутију. Колика је вероватноћа да је и следећа извучена куглица бела?
в) Ако је $b \geqslant 2$ из кутије су изабране две куглице. Колика је вероватноћа да обе буду беле?
г) Ако извучемо све куглице из кутије осим једне, колика је вероватноћа да је преостала куглица бела?

374. Три кутије садрже по 5 куглица нумерисаних од 1 до 5. Извучена је по једна куглица из сваке кутије. Колика је вероватноћа догађаја A да је збир бројева на куглицама већи од 3?

375. Из кутије у којој се налази n куглица изаберемо случајан број куглица. Колика је вероватноћа догађаја A да је број извучених куглица паран број?

376. Кутија садржи 4 црвене, 4 плаве и 4 беле куглице. Насумице извадимо три куглице. Колика је вероватноћа да извучене куглице буду различитих боја?

377. У кутији се налази 50 белих и 50 црних куглица. Из кутије се насумице бира 50 куглица. Колика је вероватноћа да међу изабраним куглицама има 25 белих и 25 црних куглица?

378. Имамо две кутије: у првој је m белих и n црних куглица, а у другој кутији је r белих и s црних куглица. Из сваке кутије извадимо насумице по једну куглицу. Наћи вероватноћу да изабране куглице буду: *а)* исте боје, *б)* различитих боја.

$*$ **379.** Особа A се клади са особом B да ће на три коцке у једном бацању добити збир бар 14 тачака, а особа B се клади у супротно, то јест да ће збир тачака на куглицама бити мањи од 14. Нека добитак износи 648 динара. Колико треба да уложи особа A, а колико особа B?

$*$ **380.** На случајан начин n особа су се разместили око округлог стола. Колика је вероватноћа да две фиксиране особе седну једна поред друге?

381. Сваком од 4 играча A, B, C, D подељено је по 13 карата из шпила од 52 карте (у коме је по 13 пикова, трефова, херчева и каро-а).
а) Ако играч A није добио кеца, која је вероватноћа да његов партнер B има тачно два кеца?
б) Ако A и B заједно имају 9 трефова, колика је вероватноћа да C и D имају сваки по 2 трефа?

382. Из шпила од 52 карте узима се случајно 5 карата одједном. Колика је вероватноћа да међу извученим картама има:
а) 4 кеца;
б) 4 кеца и један краљ (шпил садржи 4 краља);
в) 3 кеца и 2 краља;
г) 1 кец, 1 краљ, 1 дама, 1 жандар и 1 десетка (у било ком поретку);
д) 3 карте једне врсте (пик, треф, херц или каро) и 2 карте друге

врсте;
ђ) бар један кец?

383. Нека је Ω коначан скуп и $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ простор вероватноћа и $A, B, C, A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ Доказати формуле:
а) $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$;
б) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
в) $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$;
г) $P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots +$
$+(-1)^n P(A_1A_2\ldots A_n)$;
д) $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$;
ђ) $P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

384. Нека је Ω коначан скуп и догађаји $A, B \subset \Omega$.
а) Израчунати вероватноће $P(A)$, $P(B)$, $P(A\overline{B})$ ако је $P(A+B) = \frac{7}{9}$, $P(AB) = \frac{1}{9}$ и $P(\overline{A}) = \frac{5}{18}$. *б)* Израчунати вероватноће $P(AB)$, $P(\overline{A}\,\overline{B})$, $P(\overline{A}+\overline{B})$, $P(\overline{A}B)$, $P(A\setminus B)$, $P(A \triangle B)$ ($A\triangle B$ је тзв. симетрична разлика: $A \triangle B = (A \setminus B) + (B \setminus A)$), ако је $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A+B) = \frac{3}{4}$ и $P(\overline{B}) = \frac{5}{8}$.

385. Бацамо две коцке. Нека је Ω простор елементарних догађаја и A – догађај да је збир тачака непаран, а B – догађај да се бар на једној коцки појавила шестица. Наћи $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A+B)$, $P(A+\overline{B})$, $P(\overline{A}B)$.

386. У једном одељењу IV разреда средње школе од 28 ученика има 12 дечака и 16 девојчица. Половина свих дечака и половина свих девојчица похађа и музичку школу. Колика је вероватноћа да је случајно изабран ученик дечак или да учи музичку школу?

387. У једној средњој школи има 400 ученика од којих се неки баве спортом и то: 180 тренира фудбал, 130 тренира кошарку, 100 тренира рукомет, 40 – фудбал и кошарку, 30 – фудбал и рукомет, 20 кошарку и рукомет а 10 тренира сва три спорта. Колика је вероватноћа да се случајно изабрани ученик бави:
а) бар једним спортом;
б) само једним спортом;
в) бар са два спорта;
г) са сва три спорта.

388. Нека је $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 1200\}$. Наћи вероватноћу да је случајно изабран број из Ω дељив са *а)* 3, *б)* 4, *в)* 3 и 4, *г)* 3 или 4 (или

оба),
д) 3 или 4 али не са оба, *ђ)* 3, није дељив са 5, а дељив је са 4 или 6 (или са оба).

389. Композиција воза има n вагона. Сваки од m путника бира случајно вагон. Која је вероватноћа да се у сваком вагону нађе највише један путник?

390. Трамвај са приколицом на станици је сачекало 5 путника. Колика је вероватноћа да ће три путника ући у предња кола и два путника у приколицу?

391. Цифре 0, 1, 2, ..., 9 поређане су на случајан начин у низ. Колика је вероватноћа да нула и јединица нису суседне?

392. У орману имамо 10 различитих пари ципела. На случајан начин извлачимо 4 ципеле. Наћи вероватноћу да се међу њима налази бар један пар исте врсте.

393. У кутији се налази 10 белих и 20 црних куглица. Из кутије се извлаче једна по једна 13 куглица без враћања. Одредити вероватноћу догађаја да последња изабрана куглица буде бела.

394. Бацају се две коцке али код којих су стране обележене бројевима: 2, 2, 2, 2, 4, 4 и 3, 3, 3, 3, 6, 6. Наћи вероватноћу да на првој коцки падне мањи број него на другој коцки.

395. Унутар круга је на случајан начин изабрана тачка. Колика је вероватноћа да тачка припадне уписаном квадрату?

396. Из интервала $[-1, 1]$ случајно се бирају два броја.
а) Колика је вероватноћа да је збир тих бројева позитиван, а производ негативан?
б) Ако изабране бројеве обележимо са x и y израчунати вероватноћу да једначина $u^2 + xu + y = 0$ има реална решења.

$*$ **397.** Из интервала $[0, 1)$ случајно се бира један број. Одредити вероватноће догађаја A и B да је прва, односно друга цифра у децималном запису изабраног броја једнака нули.

398. На случајан начин делимо дуж на три дела. Колика је вероватноћа да се од добијених делова може саставити троугао?

399. Две особе заказале су састанак у току једног сата на договореном месту уз обавезу чекања 20 минута $\left(\dfrac{1}{3} \text{ сата}\right)$. Колика је вероватноћа сусрета ако је долазак сваке особе једнако вероватан у произвољном тренутку назначеног сата?

400. Воз X стиже у станицу у случајном тренутку у интервалу $(0,T)$ и стоји у станици a минута. Воз Y из супротног правца, независно од воза X, стиже у случајном тренутку у истом интервалу времена и стоји b минута.
а) Наћи вероватноћу да воз X стиже на станицу у интервалу (t_1,t_2), $0<t_1<t_2<T$.
б) Наћи вероватноћу да воз X стигне у станицу пре воза Y.
в) Наћи вероватноћу да се возови сусретну у станици.

401. Воз M и путник N стижу на станицу између 9 и 10 сати независно један од другог и у случајном тренутку. Воз M стоји у станици 10 минута. Путник N жели да отпутује возом M, али када стигне на станицу он чека само t_0 минута и ако за то време наиђе воз, он одлази. Одредити t_0 тако да је вероватноћа да путник N отпутује возом буде једнака 0,5?

9.3 УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА. БАЈЕСОВА ФОРМУЛА. НЕЗАВИСНИ ДОГАЂАЈИ

Нека је $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$, $P(A)>0$, $P(B)>0$. Условна вероватноћа догађаја B под условом да се реализовао догађај A означава се са $P(B|A)$ и одређује се формулом:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad [P(A)>0]. \tag{1}$$

Условна вероватноћа догађаја A под условом да се реализовао догађај B означава се са $P(A|B)$ и одређује се формулом:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad [P(B)>0]. \tag{2}$$

Из формула (1) и (2) добија се формула вероватноће производа догађаја A и B:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B). \tag{3}$$

Вероватноћа производа три догађаја A, B и C једнака је

$$P(A,B,C)=P(AB)P(C|AB)=P(B)P(B|A)P(C|AB). \tag{4}$$

Нека се догађаји $A_1, A_2, \ldots, A_n$ међусобно искључују ($A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$), нека су вероватноће њихових реализација позитивне и нека чине потпун систем догађаја: $A_1+A_2+\cdots+A_n = \Omega$. Ако се догађај B реализује само са једним од догађаја $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (или са A_1, или са A_2, ..., или са A_n), онда се он може разложити на догађаје који се такође искључују међу собом $B = BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$. С обзиром на примене погодно је догађаје $A_1, A_2, \ldots, A_n$ назвати хипотезама (у односу на B). Вероватноће $P(A_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ се називају априорним вероватноћама (њих треба унапред знати пре реализације догађаја B). *Формула потпуне вероватноће* даје вероватноћу догађаја B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \tag{5}$$

Уз претпоставку да се при извођењу експеримента десио догађај B, практично је важно одредити сада и условне вероватноће $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, ..., $P(A_n|B)$ (апостериорне вероватноће хипотеза $A_1, A_2, \ldots, A_n$):

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_kB)}{P(B)} = \frac{P(A_K)P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

Формула (6) позната је као *Бајесова формула* (према Томасу Бајесу, 1702 – 1761, енглеском математичару).

Догађај A не зависи од догађаја B ако је

$$P(A|B) = P(A). \tag{7}$$

Догађаји A и B су независни (статистички или стохастички независни) ако је испуњена једнакост:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{8}$$

Догађаји A, B и C су независни у потпуности ако су испуњене једнакости:

$$\left.\begin{array}{l} P(AB){=}P(A)P(B),\ P(AC){=}P(A)P(C),\ P(BC){=}P(B)P(C) \ \text{(независни у паровима)} \\ \text{и} \quad P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{array}\right\} \tag{9}$$

402. У кутији се налазе 4 беле и 6 црних куглица. Извлаче се две куглице једна за другом: *а)* без враћања, *б)* са враћањем. Наћи вероватноћу да и једна и друга куглица буду беле.

403. Нека је $P(A) > 0$. Доказати

а) $P(A|A) = 1$, $P(\Omega|A) = 1$, $P(\varnothing|A) = 0$;

б) Ако је $A \subset B$, онда је $P(B|A) = 1$;

в) Ако се B_1 и B_2 искључују ($B_1B_2 = \varnothing$, онда је $P(B_1 + B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$;

г) Ако су B_1 и B_2 произвољни догађаји, онда је $P(B_1 + B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$;

д) $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$;

ђ) Ако се догађаји A и B искључују и ако је $P(A+B) > 0$, онда је $P(A|A+B) = \dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)}$;

е) Ако је $P(A|B) > P(A)$, онда је и $P(B|A) > P(B)$.

404. Ако је $P(A) = 0,9$ и $P(B) = 0,8$ показати да је $P(A|B) \geqslant 0,875$.

$*$ **405.** Два генератора a и b радећи истовремено снабдевају струјом мали град. Потражња струје подлеже променама и познато је да сваки генератор има такав капацитет да може снабдевати максималну потражњу 75% времена када други генератор откаже. Вероватноћа отказа сваког генератора је 0,10, док је вероватноћа да откажу оба генератора истовремено једнака 0,02. Ако дође до отказа генератора, колика је вероватноћа да ће потражња струје у граду бити задовољена.

406. За возила која у једном смеру иду ка раскрсници уочено је дужим посматрањем да два пута више возила продужава право него што скрећу десно, као и да два пута мање возила скреће лево од возила која скрећу десно.

а) Колике су вероватноће догађаја да произвољно одабрано возило продужи право, скрене десно и скрене лево?

б) Колика је вероватноћа десног скретања ако возило не продужава право?

в) Колика је вероватноћа левог скретања ако се зна да ће возило скренути?

407. Доказати општу формулу вероватноће производа догађаја:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Ако су догађаји $A_1, A_2, \dots, A_n$ независни у потпуности, онда је

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

408. Неки човек има пет кључева од којих само један откључава браву. Он насумице проба један по један кључ, склањајући кључеве које је већ пробао, све док не откључа браву. Колика је вероватноћа да ће откључати браву у k-том покушају ($k = 1, 2, \dots, 5$).

409. Кутија садржи 10 завртња од којих су 3 дефектна.
а) Два завртња су изабрана на случајан начин. Наћи вероватноћу догађаја да ниједан од два извучена завртња није дефектан.
б) Ако су на случајан начин извучена три завртња без враћања, наћи вероватноћу догађаја A – да сва три завртња нису дефектна.
в) Ако су на случајан начин извучена четири завртња, наћи вероватноћу догађаја A – да најмање три завртња нису дефектни.

410. Ако су догађаји A и B независни доказати да су независни и догађаји: *а)* A и $\overline{B}$; *б)* $\overline{A}$ и B; *в)* $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

411. Доказати:
а) Произвољан догађај A и сигуран догађај Ω увек су независни;
б) Произвољан догађај A и немогући догађај $\varnothing$ увек су независни.

412. Ако су A и B независни догађаји, онда је $P(A+B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$. Доказати.

413. Доказати:
а) Ако је $P(A|B) = P(A)$, онда је и $P(B|A) = P(B)$;
б) Ако је $P(A|B) = P(A)$, онда је и $P(A|\overline{B}) = P(A)$;
в) Ако се догађаји A и B искључују, онда је $P(A|B) = 0$;
г) Ако је $A \subset B$, онда је $P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.
д) Ако је $P(B|\overline{A}) = P(B|A)$, онда су A и B независни догађаји.

414. Ако су $A, B, C \subset \Omega$ независни догађаји, онда су *а)* A и $B+C$, *б)* $A \setminus B$ и C, *в)* $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$, *г)* $\overline{A}$, B и C, *д)* $\overline{A}$, $\overline{B}$ и C независни догађаји. Доказати.

415. За догађаје A и B познато је $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(A+B) = \dfrac{1}{3}$ и $P(B) = p$. Наћи:
а) p, ако се догађаји A и B узајамно искључују;
б) p, ако је догађај A део догађаја B ($A \subset B$);
в) p, ако су догађаји A и B независни.

416. Бацамо три новчића. Нека је
A – догађај да смо добили или три грба или три писма,
B – догађај да смо добили бар два писма,
C – догађај да смо добили највише два грба.
а) Који су од догађаја A и B, A и C, B и C независни, а који зависни догађаји?

б) Дали су сви догађаји A, B, C независни?

417. Бацамо новчић два пута. Нека је A – догађај да се у првом бацању појавио грб, B – догађај да се у другом бацању појавио грб, C – догађај да се тачно једном појавио грб. Доказати да догађаји A, B, C нису независни иако су свака два од њих међусобно независни.

418. Апарат се састоји од три механичка блока a, b и c. Вероватноће да независно један од другог у току рада откажу редом блокови a, b, c једнаке су 0,05, 0,04 и 0,03. Отказ макар једног од ових блокова проузрокује отказ апарата. Наћи вероватноћу отказа апарата.

419. Бацамо одједном *а)* два, *б)* три, *в)* n новчића. Колика је вероватноћа да се бар на једном појави грб?

420. Шта је вероватније: да се у четири бацања једне коцке бар једном појави шестица или да се у 24 бацања две коцке бар једном појаве две шестице?

421. Два играча наизменично бацају коцку. Побеђује онај ко први добије шест тачака. Наћи вероватноћу да победи први играч.

422. На улици раде три семафора. Циклус рада сваког од њих траје један минут, то јест између два узастопна укључења зеленог светла прође један минут. У току једног циклуса први семафор показује зелено светло 20 секунди, други семафор 40 и трећи семафор 45 секунди. Циклус рада сваког семафора не зависи од рада других семафора. Колика је вероватноћа да ће случајно одабрани аутомобил
а) проћи без заустављања?
б) зауставити се испред једног семафора?
в) зауставити се испред два семафора?
г) зауставити се испред сва три семафора?

$*$ **423.** Колика је вероватноћа да је *а)* mn, *б)* $m+n$, *в)* $m-n$, *г)* m^2-n^2, *д)* m^n непаран број, ако су m и n два насумице изабрана броја из скупа $\{1, 2, \dots 100\}$?

424. Два стрелца гађају циљ независно један од другог. Први стрелац погађа циљ са вероватноћом $p_1 = 0,7$, а други са вероватноћом $p_2 = 0,4$. Израчунати вероватноћу догађаја:
а) сваки од стрелаца ће погодити циљ;
б) бар један од стрелаца ће погодити циљ;
в) да ће циљ бити погођен тачно једном.

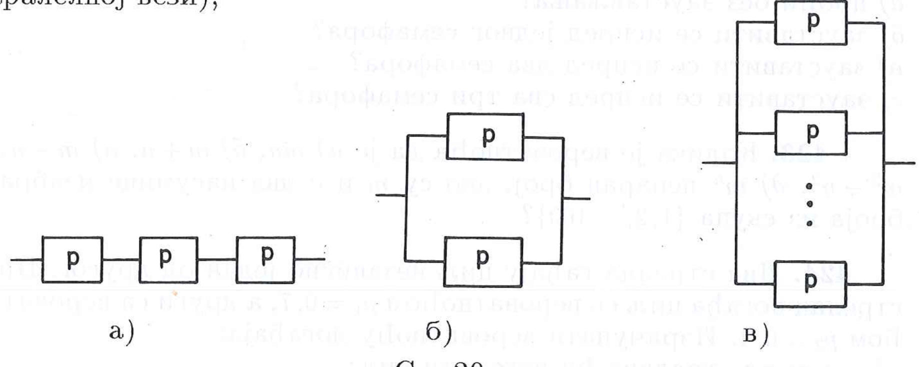
425. Два стрелца гађају циљ независно један од другог по два пута. Први стрелац погађа циљ са вероватноћом p_1, а други са вероватноћом p_2. Колика је вероватноћа да ће први стрелац погодити циљ већи број пута од другог?

426. Вероватноће да три стрелца S_1, S_2, S_3 погоде мету редом су $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. Сваки од њих гађа мету једанпут. Наћи вероватноћу p да тачно један од њих погоди мету.

427. Стрелац гађа циљ док га не погоди. Ако је вероватноћа погодка једнака p, наћи вероватноћу да ће стрелац утрошити n метака.

428. *а)* Колико пута треба поновити опит да би се са вероватноћом не мањом од α могло очекивати да ће се бар једном појавити догађај A, ако се зна да је у сваком понављању опита вероватноћа реализације догађаја A једнака p.
б) Познато је да је 2% производа дефектних у производњи једне фабрике. Колико производа треба проверити па да вероватноћа да се међу њима нађе бар један дефектан износи најмање $\alpha = 0,95$.

$*$ **429.** Механизам се састоји од 3 елемента. Застој у раду сваког елемента повлачи и застој у раду целог механизма. Елементи отказују независно један од другог. Вероватноћа рада без отказа сваког елемента једнака је p.
а) Наћи вероватноћу рада без отказа (поузданост) P_a механизма на слици 20 а);
б) Ако се елемент удвоји са још једним елементом чија је вероватноћа рада без отказа такође једнака p, одредити поузданост тако удвојеног елемента (шема је дата на слици 20 б), елементи су у паралелној вези);



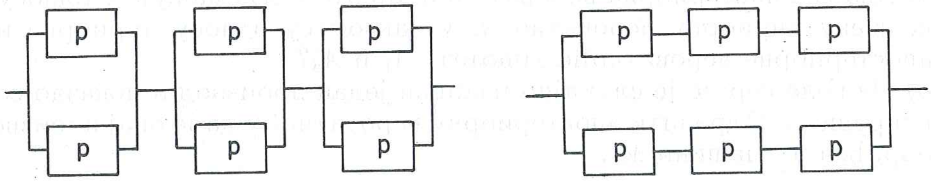
Сл. 20

в) Ако се елементу дода још $n-1$ истих таквих елемената у параленој вези (шема је дата на слици 20 в)), наћи поузданост P_c таквог техничког система. Колико елемента треба додати у паралелној вези једном елементу да му поузданост не би била мања од P_1?

г) Ради веће поузданости механизму од 3 елемента додата су још 3 елемента. Одредити који начин удвајања даје већу поузданост:

– када се удваја сваки део (као на слици 21), или

– када се удваја цео механизам (као на слици 22).



Сл. 21 Сл. 22

430. У првој кутији имамо m белих и n црних куглица, а у другој кутији r белих и s црних куглица. Бацамо новчић и ако се појави писмо извлачимо једну куглицу из прве кутије, а ако се појави грб извлачимо једну куглицу из друге кутије. Колика је вероватноћа да извучемо белу куглицу?

431. Дате су две кутије са куглицама. У првој кутији се налази a белих и b црних куглица, а у другој c белих и d црних куглица ($a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$). Из прве кутије пребачене су две куглице у другу кутију, па је затим из друге кутије извучена једна куглица. Колика је вероватноћа да је ова извучена куглица бела?

432. Дате су три кутије. У првој се налази 5 белих и 3 црне куглице, у другој: 4 беле и 4 црне и у трећој: 8 белих куглица. На случајан начин бира се једна кутија и из изабране кутије извлачи се једна куглица. Колика је вероватноћа да је извучена куглица црна?

433. У кутији се налазе три новчића D_1, D_2 D_3 код којих су редом вероватноће добијања грба једнаке: 0,4; 0,5 и 0,6.

а) Један новчић је извучен на случајан начин и бачен 20 пута. Грб се појавио 11 пута. Колика је вероватноћа да је извучен исправан новчић?

б) Наћи апостериорну вероватноћу када догађај B означава да је добијено 10 грбова у 20 бацања изабраног новчића.

434. Три различите машине M_1, M_2, M_3 користе се за производњу серије једног производа. Претпоставимо да се на машини M_1

производи 20 процената тог производа, на M_2 – 30 процената и на M_3 – 50 процената. Показало се да је 1 проценат производа обрађених на машини M_1 дефектан, да су 2 процента производа са машине M_2 дефектни и да су 3 процента дефектних производа са машине M_3.
а) Из целе серије је случајно изабран један производ и показало се да је дефектан. Колика је вероватноћа да је обрађен на машини M_2?
б) Ако се апостериорна вероватноћа хипотезе A_2 смањује у односу на њену априорну вероватноћу, у каквом су односу априорне и апостериорне вероватноће хипотеза A_1 и A_3?
в) Из целе серије је случајно изабран један производ и показао се исправним. Одредити апостериорну вероватноћу да је овај производ обрађен на машини M_2.

435. На бункер су испаљене три гранате. Вероватноћа поготка првом гранатом је 0,5, другом 0,6 и трећом 0,8. Од једног поготка бункер ће бити уништен са вероватноћом 0,3, од два поготка са вероватноћом 0,7 и од три поготка са вероватноћом 0,9.
а) Наћи вероватноћу да у резултату гађања трима гранатама бункер буде уништен.
б) Ако је бункер уништен одредити шта је вероватније да је бункер уништен са два поготка или са три поготка.

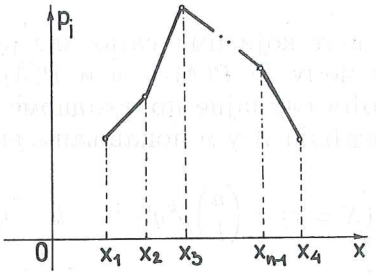
9.4 ДИСКРЕТНА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЉИВА

Нека простор исхода Ω неког случајног експеримента има коначно много или пребројиво много елемената. Функција $X : \Omega \to R$ назива се *дискретна случајна променљива.*

Нека случајна променљива X узима вредности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ са вероватноћама $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ при чему је $p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots = 1$. Скуп уређених парова (x_i, p_i), који се приказује и на следећи начин:

$$X : \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{Bmatrix}, \qquad \sum_i p_i = 1$$

назива се *расподела вероватноћа* случајне променљиве X. Графичка илустрација расподеле вероватноћа је полигон расподеле вероватноћа (слика 23).



Сл. 23

Математичко очекивање дискретне случајне променљиве X, у ознаци $M(X)$ (честа је и ознака $E(X)$ или EX) једнако је:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \tag{2}$$

Медијана M_e се одређује из једнакости:

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Мода M_o је највероватнија вредност случаје променљиве X

Математичко очекивање, медијана и мода су карактеристике центра растурања вредности случајне променљиве X.

Мера растурања вредности случајне променљиве X око центра растурања (око математичког очекивања) је *дисперзија* $D(X)$:

$$\begin{aligned}D(X) &= M\left[X - M(X)\right]^2 = \left[x_1 - M(X)\right]^2 p_1 + \left[x_2 - M(X)\right]^2 p_2 + \cdots + \left[x_n - M(X)\right]^2 p_n = \\ &= M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n - \left[M(X)\right]^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Позитиван квадратни корен из дисперзије:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} \tag{5}$$

назива се *стандардно одступање,* које се такође користи као мера растурања вредности случајне променљиве око центра растурања (то јест око $M(X)$). Стандардно одступање се изражава истим мерним јединицама као и вредности случајне променљиве X.

Моменти реда r су једнаки:

$$m_r = M(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \cdot p_i, \quad M(X) = m_1, \quad D(X) = m_2 - m_1^2. \tag{6}$$

Уочимо експеримент који има само две реализације: догађај A и догађај $\overline{A}$, при чему је $P(A) = p$ и $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Закон расподеле вероватноћа случајне претходноме X, која представља број реализација догађаја A у n понављања експеримента, гласи

$$P_{n,k,p} = P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Расподела вероватноћа дефинисана законом расподеле (7) назива се *биномна* или *Бернулијева* (J. Bernoulli, 1654 – 1705, швајцарски математичар) *расподела.* Математичко очекивање, дисперзија и мода случајне променљиве X са биномном расподелом вероватноћа (7) једнаки су:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad M_O = [np + p]. \tag{8}$$

Када $n \to \infty$ и $p \to 0$, при чему је $np = \lambda$ ($\lambda > 0$), онда се као гранични закон биномне расподеле добија Поасонова расподела (S. D. Poisson, 1781 – 1840, француски математичар):

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (p = \frac{\lambda}{n})}} P_{n,k,p} = P_{\lambda,k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Математичко очекивање и дисперзија случајне променљиве X која има Поасонову расподелу вероватноћа са параметром λ једнаки су:

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma_x = \sqrt{\lambda}. \tag{10}$$

Поасонова расподела је позната и под називом „расподела ретких догађаја". Практично, биномна расподела се апроксимира Поасоновом за $n \geqslant 50$ и $p < 0,1$.

436. Да ли функција $f(n) = \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ дефинише закон расподеле вероватноћа?

437. Аутомобил пролази улицом у којој, независно један од другог, раде четири семафора. Сваки од њих ради у истом режиму: 1,5 минута зелено светло, 0,3 минута жуто светло и 1,2 минута црвено светло.

а) Наћи расподелу вероватноћа броја X – заустављања аутомобила испред семафора у тој улици.
б) Наћи вероватноћу да број заустављања аутомобила буде мањи од 2.
в) Наћи вероватноћу да број заустављања аутомобила буде највише 3.

438. Ако случајна променљива X задовољава неједнакост $X < a$, доказати да је $M(X) < a$.

439. Доказати $x_{\min} \leqslant M(X) \leqslant x_{\max}$.

440. Доказати $M[X - M(X)] = 0$.

441. Доказати формулу $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

442. Ако случајна променљива X узима само две вредности x_1 и x_2 сваку са вероватноћом 0,5, онда је дисперзија $D(X)$ једнака квадрату полуразлике ових вредности. Доказати.

443. Расподеле вероватноћа случајних променљивих X и Y су једнаке:

$$X : \begin{Bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{Bmatrix}, \qquad Y : \begin{Bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}.$$

Наћи $D(X)$ и $D(Y)$.

444. Дискретна случајна променљива X узима три вредности $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Наћи вероватноће p_1, p_2, p_3 са којима X узима ове вредности ако је познато $M(X) = 1{,}1$ и $M(X^2) = 2{,}5$.

445. *а)* Ако са m означимо највероватнију вредност биномне случајне променљиве ($m = M_O$), онда је испуњено $P_{n,m-1,p} \leqslant P_{n,m,p}$ и $P_{n,m,p} \geqslant P_{n,m+1,p}$. Показати да се из ових неједнакости добијају неједнакости $np+p-1 \leqslant m \leqslant np+p$, односно формула $m = M_o = [np+p]$, где је $[x]$ цели део броја x.
б) Ако се у 10 понављања експеримента догађај A појављује увек са вероватноћом $\frac{2}{3}$, који исход експеримента има највећу вероватноћу? Колико износи највећа вероватноћа $P_{10,k,\frac{2}{3}}$ за $k = 0, 1, \ldots, 10$?
в) Ако се у 15 понављања експеримента догађај A појављује увек са вероватноћом $\frac{1}{2}$, наћи моду M_o и одговарајућу максималну вероватноћу.

446. Коцка се баца два пута. Ако са X означимо збир тачака на обема коцкама, наћи расподелу вероватноћа случајне променљиве X, математичко очекивање $M(X)$, медијану M_e, моду M_o и вероватноћу $P(6 < X < 10)$.

447. У кутији се налази пет белих и четири црне куглице. Из кутије се на случајан начин бирају три куглице (без враћања). Нека је X број изабраних белих куглица.
а) Одредити расподелу вероватноћа случајне променљиве X;
б) Наћи $P(X \geqslant 2)$;
в) Наћи $M(X)$, M_o и $D(X)$.

448. У кутији се налази пет белих и четири црне куглице. Из кутије се на случајан начин бирају три куглице једна за другом са враћањем. Нека је X број извучених белих куглица.
а) Одредити расподелу вероватноћа случајне променљиве X;
б) Наћи математичко очекивање, дисперзију и моду случајне променљиве X.

449. Циљ се гађа са 5 метака, при чему је вероватноћа поготка у сваком гађању једнака 0,8. Колика је вероватноћа да ће циљ бити погођен три пута?

450. У апарату се налазе четири лампе. Вероватноћа прегоревања у току године за сваку лампу је $\frac{1}{6}$. Колика је вероватноћа да у току године треба заменити најмање од половине свих лампи?

451. Бацамо новчић шест пута. Наћи вероватноћу да се
а) грб појавио тачно два пута;
б) грб појавио бар три пута;
а) бар једном појавио грб.

452. Вероватноћа појаве догађаја A је у сваком понављању експеримента једнака 0,01. Колико мора бити n да вероватноћа појаве догађаја A најмање једном у тих n понављања буде већа од $\frac{1}{2}$?

453. Вероватноћа бар једне реализације догађаја A у четири понављања експеримента једнака је $0,8704$. Наћи вероватноћу појаве догађаја A у једном извођењу експеримента.

454. Динар се баца 100 пута. Оценити вероватноћу да се грб добије 50 пута.

455. Нека X означава број мушке деце у породицама са четворо

деце.
а) Вероватноће рођења мушког детета (A) и женског детета ($\overline{A}$) једнаке су међу собом: $p = q = \frac{1}{2}$. Наћи расподелу вероватноћа случајне променљиве X, $M(X)$, $D(X)$ и M_o.
б) Ако је вероватноћа рођења мушког детета $0,515$, наћи расподелу вероватноћа случајне променљиве X.

456. Нека породица има седморо деце. Уз претпоставку да је вероватноћа рођења дечака једнака $\frac{1}{2}$, наћи вероватноћу да та породица има
а) 4 дечака и 3 девојчице;
б) више дечака него девојчица.

457. Новчић се баца n пута. Одредити вероватноћу да се писмо појави *а)* непаран број пута; *б)* не мање од k и не више од r пута.

458. *А)* Велика серија производа лименки даје 10% шкарта. Одредити вероватноћу да међу 5 случајно изабраних лименки буде
а) ни једна дефектна;
б) тачно једна дефектна;
в) бар две дефектне.
Б) Ако се 1000 пута изабере узорак од по 5 лименки у задатку *А)*, у колико много узорака можемо очекивати да
а) неће бити ни једне дефектне лименке;
б) буде тачно једна лименка дефектна;
в) буду бар две дефектне лименке?

459. Вероватноћа да је производ неке фабрике дефектан је $0,2$. Колико производа треба испитати да би са вероватноћом бар $0,9$ добили бар 3 дефектна производа.

460. Доказати тачност формуле $P_{n,k,p} = P_{n,n-k,1-p}$ а затим, знајући да је $P_{10;4;0,3} = 0,2001$, израчунати $P_{10;6;0,7}$.

461. Показати да је код биномне расподеле $M(X) = np$.

462. Никола и Михаило бацају новчић сваки по n пута. Колика је вероватноћа да се и код Николе и код Михајла појави исти број грбова?

463. Стрелац који има четири метка гађа у циљ док га не погоди или не утроши све метке. Број утрошених метака је случајна променљива X која може да узме вредности 1, 2, 3, 4. Наћи расподелу вероватноћа под условом да је вероватноћа поготка циља при сваком гађању једнака 0,8. Колико ће метака стрелац у просеку потрошити ако понавља овакво гађање?

464. Стрелац, који може да погоди циљ са вероватноћом $\frac{1}{4}$, гађа циљ док га не погоди. Наћи расподелу вероватноћа случајне променљиве X која означава број утрошених метака. Колико просечно стрелац троши метака до поготка циља?

465. Производи једне велике серије, која садржи $0,7\%$ дефектних производа, пакују се у картонске кутије по 100 производа. Колики ће проценат кутија бити без иједног дефектног производа а колики са 2 или више дефектних производа?

466. У производњи неких артикала уочава се 5 дефектних артикала на 1000 произведених. Из једне партије на случајан начин је одабрано 800 артикала.
а) Одредити вероватноћу да ће се између ових 800 артикала наћи 4 дефектна.
б) Одредити вероватноћу да највише два артикла буду дефектна.
в) Наћи $M(X)$, M_o, $D(X)$ и оценити медијану M_e.

467. У току 200 дана у једном граду посматран је дневни број саобраћајних незгода. Добијени резултати дати су у табели:

Број саобраћајних незгода дневно: k	0	1	2	3	4	5
Број дана са k саобраћајних незгода: f_k	130	51	12	4	2	1

Случајна променљива X је број саобраћајних незгода дневно. Ако претпоставимо да ова случајна променљива има Поасонову расподелу (ретки догађаји!) са параметром λ, онда захваљујући формули $\lambda = M(X)$ приближну вредност за λ добијамо из оцене математичког очекивања $M(X) \approx \overline{X}$, где је $\overline{X}$ аритметичка средина, која се израчунава према обрасцу:

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{5} f_k \cdot k}{\sum\limits_{k=0}^{5} f_k}$$

где су f_k фреквенције вредности случајне променљиве X добијене експериментом (или посматрањем).

Упоредити емпиријске фреквенције (добијене експериментом) са теоријским фреквенцијама f_{tk} које се добијају множењем Поасонових вероватноћа са укупним бројем података: ($f_{tk} = NP_{\lambda,k}$; овде је $N = 200 = \sum_{k=0}^{5} f_k$).

468. Прегледано је 600 редова штампаног текста и избројано колико се пута појавило слово „ж“ у тим редовима:

Број слова „ж“ у реду: k	0	1	2	3
Број редова у којима се нашло k пута слово „ж“: f_k	360	190	40	10

Ако прихватимо да је ово узорак из популације са Поасоновом расподелом, одредити теоријске фреквенције.

469. У телефонској централи у току једног сата било је 240 позива. Израчунати, користећи Поасонов закон расподеле вероватноћа, да у току једног минута

а) није било ниједног позива;
б) да је био један позив;
в) да су била два позива;
г) да су била три и даље све до осам позива.

Оценити колико је минута у току тог сата било без позива, са једним, са два, три, четири и више позива.

470. Познато је да међу људима има 1% левака. Оценити вероватноћу догађаја да међу 200 случајно изабраних људи има бар четири левака.

9.5 НЕПРЕКИДНА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЉИВА. НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА

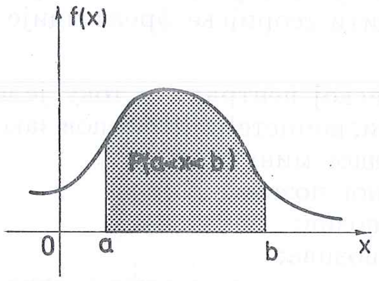
Вредности непрекидне случајне променљиве X могу да буду произвољни реални бројеви са неког интервала. Потпуна карактеристика је густина расподеле вероватноћа $f(x)$, која се у координатном систему Oxy графички приказује кривом густине расподеле (слика 24).

Површина испод криве густине представља укупну вероватноћу и зато је једнака јединици. Густина $f(x)$ поседује особине:

$$f(x) \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{2}$$

Вероватноћа да случајна променљива X узме вредности на интервалу (a, b) једнака је $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ (на слици 24 то је шрафирани део испод криве густине а изнад интервала (a, b)).



Сл. 24

Математичко очекивање и дисперзија су једнаки:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \tag{3}$$

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx = \\ &= M(X^2) - M^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) - M^2(X) \end{aligned} \tag{4}$$

Медијана M_e се добија из једначине:

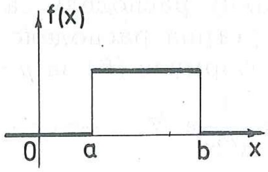
$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = \frac{1}{2} \tag{5}$$

Мода M_o је једнака апсциси тачке у којој густина достигне максимум.

Равномерна расподела се дефинише густином

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x < a \text{ и } x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{за } a < x < b \end{cases}$$

График криве густине равномерне расподеле дат је на слици 25.

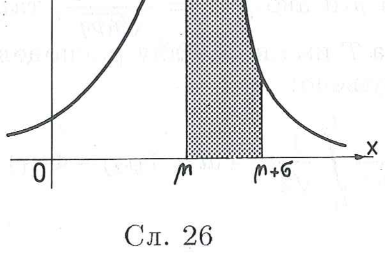


Сл. 25

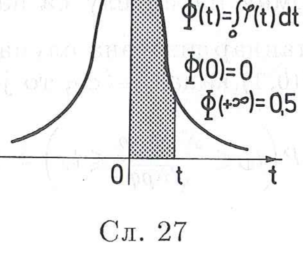
Мода M_o не постоји. Математичко очекивање, медијана и дисперзија су једнаки:

$$M(X) = M_e = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Најпознатија непрекидна расподела вероватноћа је *нормална* или *Гаусова расподела* (K. F. Gauss, 1777 – 1855, немачки математичар) чија крива густине има облик осног пресека звона (слика 26).



Сл. 26



Сл. 27

Када X има нормалну расподелу са параметрима μ и σ краће пишемо: $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Густина расподеле вероватноћа случајне променљиве X са нормалном расподелом $N(\mu, \sigma)$, њено математичко очекивање и дисперзија једнаки су:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad M(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2. \tag{6}$$

Случајна променљива $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ назива се стандардизована случајна променљива. Ако X има нормалну расподелу са параметрима μ и σ онда T има нормалну расподелу са параметрима 0 и 1, то јест $T \sim N(0,1)$. Њена густина расподеле се обележава са $\varphi(t)$ и једнака је (добија се из формуле (6) за $\mu = 0$ и $\sigma = 1$):

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad -\infty < t < +\infty \tag{7}$$

График криве гистине $\varphi(t)$ дат је на слици 27. Функција

$\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(t)dt$ назива се Лапласова функција. Основне особине ове функције су:

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(+\infty) = 0,5, \quad \text{и} \quad \Phi(-t) = -\Phi(t) \quad \text{(непарна је)}.$$

У приложеној табели дајемо вредности Лапласове функције за различите вредности T. Помоћу ње се израчунавају вероватноће код нормалне расподеле, наиме, ако је $X \sim N(\mu, \sigma)$, онда

$$P(a < X < b) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) \tag{8}$$

где је $t_1 = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$ и $t_2 = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$.

Француски математичари А. де Моавр и Пјер С. Лаплас доказали су да је нормална расподела гранична расподела биномне расподеле када је n велико а вероватноћа појаве догађаја А („успеха") $p = P(A)$ није мала да би се као гранична расподела користила Поасонова расподела.

Теорема Моавр – Лапласа. Ако случајна променљива X има биномну расподелу са параметрима n и p и ако је $T = \dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$, тада стандардизована случајна променљива T има нормалну расподелу $N(0,1)$ када $n \to \infty$, то јест тада је испуњено:

$$P\left(t_1 \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leqslant t_2\right) = P(t_1 \leqslant T < t_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t_2) - \Phi(t_1). \tag{9}$$

Вредности Лапласове функције $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$

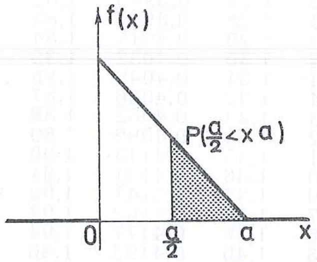
t	$\phi(t)$	t	$\phi(t)$	t	$\phi(t)$	t	$\phi(t)$	t	$\phi(t)$
0,00	0,0000	0,55	0,2088	1,10	0,3643	1,65	0,4505	2,42	0,4922
0,01	0,0040	0,56	0,2123	1,11	0,3663	1,66	0,4515	2,44	0,4927
0,02	0,0080	0,57	0,2157	1,12	0,3686	1,67	0,4525	2,46	0,4931
0,03	0,0120	0,58	0,2190	1,13	0,3708	1,68	0,4535	2,48	0,4934
0,04	0,0160	0,59	0,2224	1,14	0,3729	1,69	0,4545	2,50	0,4938
0,05	0,0199	0,60	0,2257	1,15	0,3749	1,70	0,4554	2,52	0,4941
0,06	0,0239	0,61	0,2291	1,16	0,3770	1,71	0,4564	2,54	0,4945
0,07	0,0279	0,62	0,2324	1,17	0,3790	1,72	0,4573	2,56	0,4948
0,08	0,0319	0,63	0,2357	1,18	0,3810	1,73	0,4582	2,58	0,4951
0,09	0,0359	0,64	0,2389	1,19	0,3830	1,74	0,4591	2,60	0,4953
0,10	0,0398	0,65	0,2422	1,20	0,3849	1,75	0,4599	2,62	0,4956
0,11	0,0438	0,66	0,2454	1,21	0,3869	1,76	0,4608	2,64	0,4959
0,12	0,0478	0,67	0,2484	1,22	0,3883	1,77	0,4616	2,66	0,4961
0,13	0,0517	0,68	0,2517	1,23	0,3907	1,78	0,4625	2,68	0,4963
0,14	0,0557	0,69	0,2549	1,24	0,3925	1,79	0,4633	2,70	0,4965
0,15	0,0596	0,70	0,2580	1,25	0,3946	1,80	0,4641	2,72	0,4967
0,16	0,0636	0,71	0,2611	1,26	0,3962	1,81	0,4649	2,74	0,4969
0,17	0,0675	0,72	0,2642	1,27	0,3980	1,82	0,4656	2,76	0,4971
0,18	0,0714	0,73	0,2673	1,28	0,3997	1,83	0,4664	2,78	0,4973
0,19	0,0753	0,74	0,2703	1,29	0,4015	1,84	0,4671	2,80	0,4974
0,20	0,0793	0,75	0,2734	1,30	0,4032	1,85	0,4678	2,82	0,4976
0,21	0,0832	0,76	0,2764	1,31	0,4049	1,86	0,4686	2,84	0,4977
0,22	0,0871	0,77	0,2794	1,32	0,4066	1,87	0,4693	2,86	0,4979
0,23	0,0910	0,78	0,2823	1,33	0,4082	1,88	0,4699	2,88	0,4980
0,24	0,0948	0,79	0,2852	1,34	0,4099	1,89	0,4706	2,90	0,4981
0,25	0,0987	0,80	0,2881	1,35	0,4115	1,90	0,4713	2,92	0,4982
0,26	0,1026	0,81	0,2910	1,36	0,4131	1,91	0,4719	2,94	0,4984
0,27	0,1064	0,82	0,2939	1,37	0,4147	1,92	0,4726	2,96	0,4985
0,28	0,1103	0,83	0,2967	1,38	0,4162	1,93	0,4732	2,98	0,4986
0,29	0,1141	0,84	0,2995	1,39	0,4177	1,94	0,4738	3,00	0,49865
0,30	0,1179	0,85	0,3023	1,40	0,4192	1,96	0,4750	3,20	0,49931
0,31	0,1217	0,86	0,3051	1,41	0,4207	1,97	0,4756	3,40	0,49966
0,32	0,1255	0,87	0,3078	1,42	0,4222	1,98	0,4761	3,60	0,4998
0,33	0,1293	0,88	0,3106	1,43	0,4236	1,99	0,4767	3,80	0,49992
0,34	0,1331	0,89	0,3133	1,44	0,4251	2,00	0,4773	4,00	0,49996
0,35	0,1368	0,90	0,3159	1,45	0,4265	2,02	0,4783	4,50	0,499997
0,36	0,1406	0,91	0,3186	1,46	0,4275	2,04	0,4793	5,00	0,499997
0,37	0,1443	0,92	0,3212	1,47	0,4292	2,06	0,4803		
0,38	0,1480	0,93	0,3238	1,48	0,4306	2,08	0,4812		
0,39	0,1517	0,94	0,3264	1,49	0,4319	2,10	0,4821		
0,40	0,1554	0,95	0,3289	1,50	0,4332	2,12	0,4830		
0,41	0,1591	0,96	0,3315	1,51	0,4345	2,14	0,4838		
0,42	0,1628	0,97	0,3340	1,52	0,4357	2,16	0,4846		
0,43	0,1664	0,98	0,3365	1,53	0,4370	2,18	0,4854		
0,44	0,1700	0,99	0,3389	1,54	0,4382	2,20	0,4861		
0,45	0,1736	1,00	0,3413	1,55	0,4394	2,22	0,4868		
0,46	0,1772	1,01	0,3428	1,56	0,4406	2,24	0,4875		
0,47	0,1808	1,02	0,3461	1,57	0,4418	2,26	0,4881		
0,48	0,1844	1,03	0,3485	1,58	0,4429	2,28	0,4887		
0,49	0,1879	1,04	0,3508	1,59	0,4441	2,30	0,4893		
0,50	0,1915	1,05	0,3531	1,60	0,4452	2,32	0,4898		
0,51	0,1950	1,06	0,3554	1,61	0,4463	2,34	0,4904		
0,52	0,1985	1,07	0,3577	1,62	0,4474	2,36	0,4909		
0,53	0,2019	1,08	0,3599	1,63	0,4484	2,38	0,4913		
0,54	0,2054	1,09	0,3621	1,64	0,4495	2,40	0,4918		

471. Дата је функција $f(x)=\begin{cases}0, & \text{за } x<0,\ x>2\\ Ax^2, & \text{за } 0<x<2\end{cases}$

а) Одредити A тако да функција $f(x)$ буде густина расподеле вероватноћа неке случајне променљиве X.
б) Наћи $M(X)$, M_e, M_o, $D(X)$.

472. Одредити A тако да функција $f(x)=A\sin x$ за $0<x<\pi$ и $f(x)=0$ за $x<0$ и $x>\pi$ буде густина расподеле вероватноћа неке случајне променљиве X. Затим наћи $M(X)$, M_e, M_o.

473. Случајна променљива X има густину расподеле вероватноћа облика правоуглог троугла на интервалу $(0,a)$ (слика 28).



Сл. 28

а) Написати израз за густину расподеле $f(x)$;
б) Наћи вероватноћу $P\left(\dfrac{a}{2}<X<a\right)$ (шрафирана површина на слици 28).
в) Наћи $M(X)$, $D(X)$, σ_x, M_e,. Мода M_o као оцена средње вредности овде нема смисла ($M_o=0$).

474. Случајна променљива X је задана на интервалу $(3,5)$ густином расподеле вероватноћа $f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+6x-\dfrac{45}{4}$ и $f(x)=0$ за остале вредности x. Проверити услов (2) и наћи $M(X)$, M_e, M_o.

475. Ако се све вредности случајне променљиве X налазе у границама од a до b $(a<b)$, показати да је и вредност математичког очекивања $M(X)$ унутар тих граница.

476. Вредностима случајне променљиве X додата је константа k. Како се због тога мењају математичко очекивање и дисперзија?

477. Све вредности случајне променљиве X помножене су константом k. Како се мењају $M(X)$ и $D(X)$?

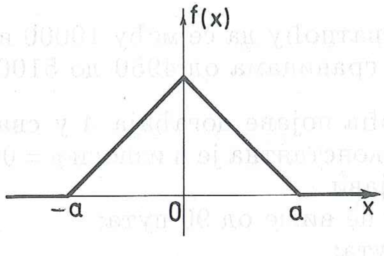
478. Решење једначине $\int_{-\infty}^{Q_1} f(x)dx = \frac{1}{4}$ даје први квартил Q_1 (25% вредности случајне променљиве је лево од те тачке), а решење једначине $\int_{-\infty}^{Q_3} f(x)dx = \frac{3}{4}$ даје трећи квартил Q_3 (75% вредности случајне променљиве је лево од те тачке). Медијана M_e се зове и други квартил и често обележава са Q_2.
а) Колико процената вредности случаје променљиве X се налази између Q_1 и Q_3?
б) За равномерну расподелу наћи Q_1 и Q_3 и показати да је медијана M_e једнака аритметичкој средини квартила Q_1 и Q_3.

479. Случајна променљива X има експоненцијалну расподелу са параметром λ ($\lambda > 0$) ако је густина расподеле вероватноћа једнака:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{за } x \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Конструисати криву густине и проверити услов (2).
б) Наћи M_e, $M(X)$, $D(X)$. (Мода не постоји).
в) Наћи вероватноћу да случајна променљива X узме вредност мању од њеног математичког очекивања.

480. График густине расподеле је облика једнакокраког троугла на интервалу $(-a, a)$ (слика 29). Наћи густину расподеле, M_e, M_o, $M(X)$ и $D(X)$.



Сл. 29

481. Ако $X \sim N(\mu, \sigma)$, онда $T = \frac{X-\mu}{6}$ има нормалну расподелу

$N(0,1)$. Доказати.

482. Случајна променљива X има нормалну расподелу $X \sim N(10,2)$. Наћи вероватноћу $P(8 < X < 14)$.

483. Ако $X \sim N(\mu,\sigma)$ наћи вероватноћу да случајна променљива X узме вредност на интервалу $(\mu - k\sigma,\ \mu + k\sigma)$ за $k = 1,2,3$.

484. Дата је случајна променљива X која има нормалну расподелу $N(16,4)$. Наћи симетричан интервал око тачке $\mu = 16$ у коме случајна променљива X узима вредности са вероватноћом *a)* 0,95, *б)* 0,99.

485. Случајна променљива X има нормалну расподелу одређену густином $f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{50}}$. Наћи $M(X)$ и $D(X)$.

486. Случајна променљива X има нормалну расподелу $N(0,1)$. Наћи

а) $P(0 < X < 1,65)$; *б)* $P(-0,73 < X < 0)$;
в) $P(-1,73 < X < 2,01)$; *г)* $P(-1,79 < X < -0,54)$;
д) $P(X > 1,13$; *ђ)* $P(|X| < 0,5)$;
е) t, ако је $P(X < t) = 0,7967$;
ж) t, ако је $P(t < X < 2) = 0,3772$.

487. Случајна променљива X има нормалну расподелу са математичким очекивањем $\mu = 10$. Вероватноћа да X припадне интервалу $(10,20)$ једнака је 0,4. Колика је вероватноћа да X узме своју вредност са интервала $(0,10)$?

488. Тежине 800 ученика расподелиле су се по нормалној расподели са средњом тежином $\mu = 66\ kg$ и стандардним одступањем $\sigma = 5\ kg$. Наћи број ученика чија је тежина:
а) између 65 и 75 kg;
б) већа од 72 kg.

489. Наћи вероватноћу да се међу 10000 новорођене деце број мушке деце нађе у границама од 4950 до 5100.

490. Вероватноћа појаве догађаја A у сваком од 100 независних експеримената константна је и износи $p = 0,8$. Наћи вероватноћу да се догађај A појави
а) не мање од 75 и не више од 90 пута;
б) не мање од 75 пута;
в) не више од 74 пута.

ДЕСЕТА ГЛАВА

10 СТАТИСТИКА

10.1 ПОПУЛАЦИЈА И УЗОРАК

У статисцици се проучавају популације различитих елемената. Сваки елемент популације одликује се обележјима. Када се обележја елемената изражавају бројевима, називају се *нумеричким обележјима.* Када се жели да проучи нека појава у датој популацији уочавају се *битна обележја* елемената популације за ту појаву (при анализи успеха ученика уочавају се њихове оцене, а при анализи њиховог здравља уочавају се њихове висине и тежине а не оцене из појединих предмета).

Како су вредности нумеричких обележја случајног карактера, то се могу сматрати случајним променљивим, па их обележавамо са X, Y,... Када обележје у популацији узима коначан или пребројив скуп вредности назива се *дискретно обележје*, а када може да узме ма коју реалну вредност из неког интервала (непребројив скуп вредности), онда је *непрекидно обележје* (висине људи, век трајања апарата...)

Популација се испитује *потпуно* или *делимично.* У потпуности се испитује популација становништва једне земље једном у 10 година, јер је такво испитивање дуготрајно и скупо. Приликом делимичног испитивања на случајан начин се издваја део популације, који се назива *узорак* и помоћу кога се оцењују најзначајније карактеристике популације.

Најједноставнија статистичка анализа односи се на проучавање вредности једног обележја X.

Претпоставимо да n елемената узорка имају нумеричке вредности обележја X: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тада се средња вредност $\mu = M(X)$ обележја у популацији оцењује аритметичком средином узорачких података:

$$\mu \approx \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

а дисперзија $\sigma^2 = D(X)$ популације оцењује се узорачком дисперзијом s^2:

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (x_n - \overline{X})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2. \tag{2}$$

Ако је узорак бројнији и ако се свака од вредности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ појављује више пута:

Вредности обележја X: x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	укупно
Фреквенције: f_i	f_1	f_2	$\cdots$	f_n	$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

онда су обрасци за $\overline{X}$ и s^2 облика:

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \tag{3}$$

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \overline{X})^2 + f_2(x_2 - \overline{X})^2 + \cdots + f_n(x_n - \overline{X})^2}{N} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \overline{X}^2 \tag{4}$$

Релативне фреквенције се обележавају са f_{ri} и једнаке су

$$f_{ri} = \frac{f_i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} f_{ri} = 1. \tag{5}$$

Релативне фреквенције f_{ri} израчунате из узорка су оцене вероватноћа догађаја $P(X = x_i)$, то јест

$$f_{ri} \approx p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Када се вредности обележја X из узорка расподељују по класама, онда се за број класа k бира погодан број од 5 до 20 (или по формули $k \approx \sqrt{N}$). Ако су ширине класа једнаке d онда се уводи тзв. *радна нула* x_o (то је најчешће средина класе која се налази у средини расподеле фреквенција). До погоднијег обрасца за аритметичку средину $\overline{X}$ долази се на следећи начин ($x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k$ су средине класа и $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$):

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - x_0 + x_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - x_0) + x_0 =$$
$$= \frac{d}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i \frac{x_i - x_0}{d} + x_0 = \frac{d}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i t_i + x_0, \quad t_i = \frac{x_i - x_0}{d}. \tag{7}$$

Медијана и мода се за класиране податке израчунавају према обрасцима:

$$\overline{M}_e = L + d\cdot \frac{\dfrac{N}{2} - (f_1 + f_2 + \cdots + f_r)}{f_{r+1}} \tag{8}$$

где је L доња граница класе у којој се налази медијана, $f_1{+}f_2{+}\cdots{+}f_r$ – (кумулативан) збир фреквенција по класама које претходе класи са медијаном $\left(f_1 + f_2 + \cdots + f_r < \dfrac{N}{2}\right)$.

$$\overline{M}_o = L + d\cdot \frac{D_1}{D_1 + D_2} \tag{9}$$

где је L доња граница модалне класе (мода се налази у класи где је фреквенција највећа), D_1 је разлика између фреквенције модалне класе и фреквенције класе која претходи модалној, а D_2 је разлика између фреквенције модалне класе и фреквенције класе која следи иза модалне.

Као веза између медијане, моде и аритметичке средине често се користи емпиријска релација $\overline{X} - \overline{M}_o \approx 3(\overline{X} - \overline{M}_e)$, која показује да је обично медијана три пута ближа аритметичкој средини од моде.

Узорачка дисперзија s^2 за податке, који су расподељени по класама, израчунава се помоћу обрасца:

$$s^2 = \frac{d^2}{N}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i t_i\right)^2\right]. \tag{10}$$

При упоређењу растурања различитих узорака користи се као мера растурања (релативна, без димензија) *коефицијент варијације:*

$$K_v = \frac{s}{\overline{X}}. \tag{11}$$

Истакнимо још једном: интервал $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma)$ у популацији обично садржи скоро све податке популације, тачније 99,73% података. Ово правило је познато под називом „правило три сигме“ (видети задатак 483). Када у узорку израчунамо $\overline{X}$ и s, добијамо оцене средње вредности популације μ и стандардног одступања популације σ ($\mu \approx \overline{X}$, $\sigma \approx s$), па онда очекујемо да и интервал $(\overline{X} - 3s,\ \overline{X} + 3s)$ садржи скоро све податке узорка, или приближно 99,73% података.

491. Узорачки параметри $\overline{X}$, s^2 и f_r утолико боље оцењују одговарајуће параметре популације μ, σ^2 и p уколико је узорак извучен из популације – репрезентативнији. То се постиже случајним избором елемената за узорак из популације. Како замишљате случајан избор?

492. Пребројати по колико пута се појављује свака цифра у приложеној табели случајних бројева (из задатка 491) и утврдити да ли се свака цифра појављује приближно једнак број пута.

493. Из „дневника“ једног одељења четвртог разреда гимназије од 30 ученика могу се редом прочитати оцене из математике:

$$4, 3, 5, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 2, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 5$$

Саставити расподелу фреквенција ученика по оценама из математике и нацртати полигон расподеле фреквенција. Ако претпоставимо да ових 30 ученика чине случајан узорак ученика четвртих разреда гимназија, оценити средњу оцену из математике те популације ученика, дисперзију као и вероватноћу да ће случајно изабрани ученик имати оцену бар 4 из математике.

494. Наћи медијану, моду и аритметичку средину узорака:
а) 7, 7, 8, 10, 11, 12, 12, 12, 14.
б) 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 14.

495. Показати да је збир одступања свих вредности обележја од њихове аритметичке средине једнак нули.

496. Показати да се вредност аритметичке средине налази између најмање и највеће вредности обележја.

497. Тежине 50 случајно изабраних ученика једне школе (у кг) су следеће:

47,3	39,5	44,5	47,5	48,3	50	50,6	51,5	41,7	58,6
49,9	51,8	56	47,4	44,8	42,2	50,4	46	44,9	52,5
53,3	45,6	55,6	43,8	50,2	50,9	52,8	43,2	51,3	45,7
51,6	57,3	52,3	52,2	53,9	48	50,3	53,7	47,8	50,6
48,1	50,7	54,2	48,7	50,7	48,8	54,1	47,2	48,5	47

Извршити статистичку анализу.

498. За расподелу фреквенција дату у следећој табели наћи аритметичку средину користећи обрасце (1) и (7). Којим обрасцем се брже добије $\overline{X}$? Наћи $\overline{M}_e$ и $\overline{M}_o$.

Класе	Средине класа x_i	Фреквенције: f_i
0,055 – 0,065	0,06	5
0,065 – 0,075	0,07	4
0,075 – 0,085	0,08	14
0,085 – 0,095	0,09	23
0,095 – 0,105	0,10	9
0,105 – 0,115	0,11	5
Укупно	–	$\sum_{i=1}^{6} f_i = 60$

$x_0 = 0,09$
$d = 0,01$

$t_i = \dfrac{x_i - 0,09}{0,01}$

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

499. Дата је непотпуна расподела фреквенција у следећој табели. Позната је медијана $\overline{M}_e = 46$. Користећи познату медијану попунити расподелу фреквенција а затим наћи и $\overline{X}$.

Класе	Фреквенције: f_i
10 – 20	12
20 – 30	30
30 – 40	
40 – 50	65
50 – 60	—
60 – 70	25
70 – 80	18
Укупно	$N = 230$

500. Медијана и мода у узорку су познате: $\overline{M}_e = 33,5$ и $\overline{M}_o = 34$. Непознате су три фреквенције у расподели фреквенција:

Класе	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	Укупно
Фреквенције	4	16	?	?	?	6	4	$N = 230$

Наћи $\overline{X}$.

501. Из узорка од 18 података израчунати су аритметичка средина и стандардно одступање: $\overline{X} = 7$ и $s = 4$. При контроли резултата установљено је да је уместо податка 12 узета вредност 21 и тако са погрешно узетом вредношћу тог податка израчунати су $\overline{X}$ и s. Наћи коректне вредности $\overline{X}_k$ и s_k.

502. У узорку од 5 елемената познате су вредности три елемента: 1, 2 и 6, аритметичка средина свих пет елемената $\overline{X} = 4,4$ и њихова дисперзија $s^2 = 8,24$. Наћи вредности остала два елемента узорка.

503. Нека узорак чине првих n природних бројева.
а) Одредити аритметичку средину.
б) Знајући да је збир квадрата првих n природних бројева $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, показати да је дисперзија једнака $\dfrac{n^2-1}{12}$.

504. Извести образац (10) по коме се израчунава узорачка дисперзија s^2 када су подаци расподељени по класама.

505. Израчунати стандардно одступање за следећу расподелу:

Трајање тел. разговора (у сек.)	0–30	30–60	60–90	90–120	120–150	150–180	180–210	Укупно
Број разговора f_i	9	17	43	82	81	44	24	$N = 300$

506. Количник интелигенције 480 ученика једне школе има расподелу:

Средине класа x_i	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Број ученика f_i	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

а) Наћи аритметичку средину и стандардно одступање.
б) Наћи проценте броја ученика који по количнику интелигенције припадају интервалима $(\overline{X}-s,\ \overline{X}+s)$, $(\overline{X}-2s,\ \overline{X}+2s)$, $(\overline{X}-3s,\ \overline{X}+3s)$

507. Популација се састоји од 5 вредности случајне промењиве X: 2, 3, 6, 8, 11. Посматрајмо све могуће узорке обима 2 елемента, који се могу извући из популације са враћањем, то јест тако што се једном извученом елементу може придружити произвољан од пет датих бројева.

а) Наћи средњу вредност популације μ_x и стандардно одступање популације σ_x.
б) Показати да је аритметичка средина аритметичких средина узорака једнака средњој вредности популације μ_x (то јест $M(\overline{X}) = \mu_x$).
в) Наћи стандардно одступање популације аритметичких средина и показати да је стандардно одступање аритметичких средина $\sigma_{\overline{X}}$ једнако $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, где је n обим узорака, из којих су рачунате аритметичке средине.

508. Машина је подешена да производи куглице са средњом вредношћу пречника 5,74 мм и стандардним одступањем 0,08 мм. Да би се проверила исправност машине, на свака два сата узима се 6 куглица (узорак), мере се њихови пречници и израчунава се аритметичка средина тих пречника.
а) Описати правило према коме се одлучује да машина исправно ради.
б) Показати како се графички може илустровати правило исказано под *а)*.

509. Дата су два узорка: (I) 2, 5, 8, 11, 14 и (II) 2, 8, 14. Наћи
а) аритметичке средине $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ оба узорка;
б) s_1^2 и s_2^2 – дисперзије оба узорка;
в) аритметичку средину $\overline{X}$ узорка добијеног комбиновањем дата два узорка и при том проверити формулу $\overline{X} = \dfrac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2}$;
г) дисперзију s^2 узорка добијеног комбиновањем дата два узорка и при том проверити формулу $s^2 = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_1(\overline{X}_1 - \overline{X}) + n_2(\overline{X}_2 - \overline{X})}{n_1 + n_2}$.

510. Авион превaљује удаљености $d_1 = 2500\ km$, $d_2 = 1200\ km$, $d_3 = 500\ km$, просечним брзинама $v_1 = 1200\ km/h$, $v_2 = 1000\ km/h$, $v_3 = 500\ km/h$. Одредити просечну брзину V авиона на читавом путу.

10.2 ИНТЕРВАЛНЕ ОЦЕНЕ ПАРАМЕТАРА ПОПУЛАЦИЈЕ

Задатак оцене једног параметра Q популације решава се на следећи начин: из популације се на случајан начин извлачи узорак од n елемената и помоћу њега израчунава оцена U параметра Q. Оцена из узорка U („статистика" или узорачки параметар) зависи од елемената узорка: $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Користећи различите узорке обима n добијају се различите вредности оцене U (видети задатак 507), то јест U је случајна променљива, за коју из узорака добијамо њену расподелу фреквенција. Ове расподеле фреквенција и указују на расподеле вероватноћа случајне променљиве U. Тако се уочило да аритметичке средине израчунате из узорака обима n поседују нормалну расподелу вероватноћа са параметрима μ и $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (задатак 507):

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Када се користи велики узорак ($n > 30$) стандардно одступање у популацији σ може да се замени својом оценом стандардним одступањем s из узорка. Тада стандардизована случајна променљива $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ (задатак 481) има нормалну расподелу са параметрима 0 и 1:

$$T \sim N(0, 1)$$

па можемо написати следећу једнакост (задатак 484):

$$P(-1,96 < T < 1,96) = 0,95$$

одакле следи $P\left(-1,96 < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < 1,96\right) = 0,95$ и

$$P\left(\overline{X} - 1,96\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$$

чиме смо добили тзв. *интервал поверења* $\left(\overline{X} - 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, $n > 30$ (енгл: Confidence interval) за средњу вредност μ популације са нивоом поверења 0,95 (зове се и деведесетпето процентни интервал поверења), то јест сматрамо да ће се средња вредност μ у 95% узорака обима n наћи у назначеном интервалу поверења. Често се интервал поверења обележава и на следећи начин:

$$\mu \in conf_{0,95}\left(\overline{X} - 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \tag{12}$$

За ниво поверења од 0,99 (или 99%) интервал поверења је једнак:

$$\mu \in conf_{0,99}\left(\overline{X} - 2,58\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 2,58\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \tag{13}$$

Ако је узорак мањег обима ($n < 30$), онда величина $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}$ (задатак 481) има тзв Студентову расподелу (Студент је псеудоним енглеског статистичара Gosset-а). Крива густине Студентове случајне променљиве слична је кривој густине стандардизоване случајне променљиве са нормалном расподелом $N(0,1)$ (тачка 9.5, слика 23). За различите вредности $k = n - 1$ („број степени слободе“) и ниво поверења $1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$ (или „ризик“ $\alpha = 0,05$) прилажемо таблицу вредности $t_\alpha^{(k)}$ за које је испуњено $P(|T| < t_\alpha^{(k)}) = 1 - \alpha$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t_{0,05}^{(k)}$	12,606	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,365	3,306	2,262	2,228	2,201

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2,179	2,160	2,145	2,131	2,120	2,110	2,101	2,093	2,086	2,080	2,074

23	24	26	27	28	29	30	$\cdots$	∞
2,069	2,064	2,060	2,052	2,048	2,045	2,042	$\cdots$	1,96

Следи,

$$P\left(-t_{0,05}^{(k)} < T < t_{0,05}^{(k)}\right) = 0,95$$

или

$$P\left(-t_{0,05}^{(k)} < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} < t_{0,05}^{(k)}\right) = 0,95$$

одакле је

$$P\left(\overline{X} - t_{0,05}^{(k)} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \overline{X} + t_{0,05}^{(k)} \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = 0,95$$

па је интервал поверења за μ једнак

$$\mu \in conf_{0,95}\left(\overline{X} - t_{0,05}^{(k)} \frac{s}{\sqrt{n-1}},\ \overline{X} + t_{0,05}^{(k)} \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right), \quad n < 30, \quad k = n - 1 \qquad (14)$$

Према теореми Моавр – Лапласа биномна расподела тежи нормалној расподели (тачка 9.5) када број понављања експеримента тежи бесконачности. Другим речима, за већи узорак ($n > 30$) прихватамо да релативна фреквенција $\overline{p} = f_r(A) = \dfrac{k}{n}$ (k је број елемената који поседују обележје A) има приближно нормалну расподелу.

$$\overline{p} \sim N(p, \sigma_{\overline{p}}), \quad \text{где је} \quad \sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}, \quad \overline{q} = 1 - \overline{p}.$$

Следи стандардизована случајна променљива $T = \dfrac{\overline{p} - p}{\sigma_{\overline{p}}}$ има такође нормалну расподелу са параметрима 0 и 1. Из једнакости

$$P(-1,96 < T < 1,96) = 2\Phi(1,96) = 0,95$$

добијамо

$$P\left(-1,96 < \frac{\overline{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}} < 1,96\right) = 0,95$$

или

$$P\left(\overline{p} - 1,96\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}} < p < \overline{p} + 1,96\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}\right) = 0,95$$

па је

$$p \in conf_{0,95}\left(\overline{p} - 1,96\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}},\ \overline{p} + 1,96\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}\right) \tag{15}$$

$$p \in conf_{0,99}\left(\overline{p} - 2,58\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}},\ \overline{p} + 2,58\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}\right) \tag{16}$$

511. Да би се оценила месечна потрошња зејтина на случајан начин одабрано је $N = 100$ домаћинстава у једном граду и уочена њихова месечна потрошња зејтина:

Месечна потрошња зејтина (у литрима)	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	Укупно
Фреквенције домаћинстава	4	10	55	25	6	$N = 100$

Наћи интервалну оцену средње потрошње зејтина (μ) у домаћинствима посматраног града.

512. Мерећи време реаговања пацијената психолог је проценио да је стандардно одступање 0,05 секунди. Колико велики узорак треба узети да бисмо били сигурни да у 95% случајева грешка оцене средње вредности неће премашити 0,01.

513. Колико велики узорак треба узети ако желимо да добијемо 95% интервал поверења дужине 0,4 ако је $\sigma = 0,8$.

514. *а)* Мерене су брзине кретања аутомобила на аутопуту. У претходним мерењима оцењено је да је стандардно одступање $3,58\ km/h$. Одредити колики број мерења брзина аутомобила треба извести да би се средња брзина аутомобила нашла на интервалу $\pm 1\ km/h$ око аритметичке средине са нивоом поверења од 0,99.

б) Ако је на случајан начин одабрано 150 аутомобила чије су брзине измерене, колики ће бити ниво поверења за интервал поверења $\pm 1\ km/h$ око аритметичке средине. Стандардно одступање опет прихватити $3,58\ km/h$.

515. На случајан начин одабрано је $n = 5$ ученика нижих разреда основне школе и измерене су њихове тежине у килограмима: 20,4; 19,6; 22,1; 20,8; 21,1. Наћи интервал поверења средње тежине ученика нижих разреда посматране основне школе са нивоом поверења 0,95.

516. Са вероватноћом 0,95 интервално оценити средњу вредност популације помоћу узорка од $n = 22$ елемента чија је расподела фреквенција дата у табели:

Класе	0,2–0,4	0,4–0,6	0,6–0,8	0,8–1,0	1,0–1,2	1,2–1,4	Укупно
Фреквенције f_i	2	10	6	2	1	1	22

517. У једном граду анкетирано је $n = 900$ становника и $k = 300$ од њих је изјавило да је задовољно услугама у продавницама једног трговинског предузећа. Са нивоом поверења од 0,95 наћи интервал поверења процента становништва тог града који су задовољни услугама у продавницама назначеног трговинског предузећа.

518. Ако се међу 1000 новорођене деце добило 525 дечака одредити 99% интервал поверења за непознату вероватноћу рођења дечака.

519. Ако желимо да оценимо проценат p лица која ће гласати за извесног кандидата, колико лица треба анкетирати да би се добио 95% интервал поверења дужине 0,04 за p?

10.3 ТЕСТИРАЊЕ СТАТИСТИЧКИХ ХИПОТЕЗА

Када испитујемо статистичку популацију у односу на одређено обележје или у односу на случајну променљиву X, логично је проверити претпоставку да се вредности вероватноћа $P(X = x_i) = p_i$ распоређују по извесном закону расподеле вероватноћа. Постављену претпоставку зовемо *хипотезом,* а расподелу вероватноћа на коју се хипотеза односи зовемо *теоријском расподелом.*

Статистичка хипотеза може да буде тачна или погрешна. У случајевима када не можемо да испитамо потпуно статистичку популацију, онда из ње извлачимо узорак и помоћу њега формирамо емпиријску расподелу фреквенција а затим проверавамо сагласност те емпиријске расподеле са претпостављеном теоријском расподелом. Како је узорак део статистичке популације, то закључак да ли је постављена хипотеза тачна или нетачна, не може бити апсолутно сигуран. Увек ће постојати ризик да је наш закључак погрешан. Статистичке методе провере (верификације) хипотезе не дају апсолутну сигурност да је хипотеза тачна или погрешна, али омогућавају да се донесе суд о тачности хипотезе са вероватноћом довољно блиском јединици. Методе за проверу или, како се другачије често каже, за верификацију статистичких хипотеза зову се *тестови за верификацију статистичких хипотеза.*

За меру одступања између емпиријских фреквенција (из узорка) и теоријских фреквенција (претпостављене теоријске расподеле), К. Пирсон, енглески статистичар, увео је 1900. године величину хи – квадрат:

$$\chi^2 = \frac{(f_1 - f_{t1})^2}{f_{t1}} + \frac{(f_2 - f_{t2})^2}{f_{t2}} + \cdots + \frac{(f_r - f_{tr})^2}{f_{tr}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}} \qquad (17)$$

или у облику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2 - 2f_i f_{ti} + f_{ti}^2}{f_{ti}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i^2}{f_{ti}} - N \qquad (18)$$

где је f_i фреквенција i-те вредности случајне променљиве X у узорку (или фреквенција i-те класе), f_{ti} је одговарајућа теоријска фреквенција (видети задатак 467), r је број сабирака за хи – квадрат и $N = \sum_{i=1}^{r} f_i = \sum_{i=1}^{r} f_{ti}$.

Тест хи – квадрат (χ^2) примењиваћемо за верификацију хипотезе о слагању емпиријских са претпостављеним теоријским расподелама формирајући величину хи - квадрат (χ^2) према обрасцу (17) или (18). Овај тест се примењује само ако су теоријске фреквенције f_{ti} веће од 5. Ако је$f_{ti} < 5$, што се често дешава код почетних и крајњих вредности (класа) случајне променљиве X, онда се те фреквенције прикључују суседним.

У приложеној табели за разне вредности k (степен слободе) дате су вредности $\chi_\alpha^{2(k)}$ које одговарају вероватноћама α према релацији $P(\chi^2 > \chi_\alpha^{2(k)}) = \alpha$ за $\alpha = 0,05$.

Табела вредности $\chi^{2(k)}_{0,05}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\chi^{2(k)}_{0,05}$	3,84	5,99	7,81	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31	19,67

12	13	14	15	20	25	...
21,03	22,36	23,68	24,99	31,41	37,65	...

Вероватноћа α се зове *праг значајности* хипотезе и представља ризик да се не учини грешка при прихватању хипотезе. Практично, ако је $\alpha = 0,05$ значи да ће у 5% случајева наш закључак бити погрешан. Величина $\chi^{2(k)}_{0,05}$ зове се критична вредност теста хи - квадрат са прагом значајности $\alpha = 0,05$. Број степени слободе који смо означили са k, једнак је

$$k = r - l - 1 \tag{19}$$

где је r број сабирака у збиру χ^2 (редукован тако да теоријске фреквенције не буду мање од 5), а l – број непознатих параметара претпостављене расподеле који се израчунавају из узорка. Када се за теоријску расподелу претпоставља Поасонова расподела оцењује се параметар λ помоћу узорка ($\lambda \approx \overline{X}$), па је $l = 1$ и $k = r - 1 - 1 = r - 2$. Када се за теоријску расподелу претпоставља биномна расподела онда се такође оцењује један параметар p из узорка $\left(np = M(X) \approx \overline{X} \Rightarrow p \approx \dfrac{\overline{X}}{n}\right)$, па је $l = 1$ и $k = r - 1 - 1 = r - 2$.

Код нормалне расподеле оцењујемо два параметра ($\mu \approx \overline{X}$ и $\sigma \approx s$), па је $l = 2$ и $k = r - 2 - 1 = r - 3$.

Имајући изабрану вредност за α и број степени слободе k, из приложене табеле читамо критичну вредност за $\chi^{2(k)}_{0,05}$. Тест хи – квадрат верификације хипотезе о сагласности емпиријске и претпостављене теоријске расподеле гласи: Ако је израчуната вредност χ^2 према формули (17) или (18)

1) већа од $\chi^{2(k)}_{0,05}$ онда хипотезу одбацујемо сматрајући да су одступања фреквенција емпиријске расподеле од фреквенција теоријске расподеле битна или значајна (сигнификантна). [Како је у том случају $P(\chi^2 > \chi^{2(k)}_{0,05}) = 0,05$, можемо бити сигурни са високом вероватноћом $1 - 0,05 = 0,95$ да су одступања значајна, јер ће наш закључак бити исправан у око $0,95 \cdot 100 = 95$ одсто случајева.]
2) мања од $\chi^{2(k)}_{0,05}$ онда немамо основа да одбацимо хипотезу о сагласности између емпиријске расподеле фреквенција и расподеле теоријских фреквенција. Наравно, и овде постоји ризик да ћемо погрешити прихватањем хипотезе: у 5%

случајева можемо погрешити, то јест прихватити хипотезу о погрешној теоријској расподели.

У вези са величином χ^2 (хи – квадрат), поменимо и један врло једноставан *тест Романовског,* руског математичара, који не захтева коришћење табеле вредности $\chi^{2(k)}_{0,05}$:

Одступање емпиријских фреквенција од претпостављених теоријских има случајан карактер (може се сматрати небитним), то јест хипотеза о сагласности емпиријске и претпостављене теоријске расподеле се прихвата ако је

$$\frac{|\chi^2 - k|}{\sqrt{2k}} < 3 \tag{20}$$

а одбацује се ако је

$$\frac{|\chi^2 - k|}{\sqrt{2k}} > 3 \tag{21}$$

где је k – број степени слободе одређен формулом (19).

520. У 100 дана у једном граду регистрован је дневни број саобраћајних незгода и добијена је следећа расподела фреквенција дана по броју незгода (емпиријска расподела):

Број саобраћајних незгода x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Број дана f_i са x_i саобраћајних незгода	6	12	20	25	18	10	6	3

Применом теста хи – квадрат проверити хипотезу о сагласности добијене емпиријске расподеле са теоријском Поасоновом расподелом.

521. Записиван је број купаца који су на сваких 10 секунди односно на сваких 30 секунди у току једног сата ушли у робну кућу и добијене су следеће расподеле:

Број купаца који су ушли у робну кућу у 10-тосекундним интервалима времена x_i	0	1	2	3	4	5	6	Укупно
Број 10-тосекундних интервала времена f_i када је у робну кућу ушло x_i купаца	139	128	55	25	10	3	0	$N = 360$

Број купаца који су ушли у робну кућу у 30-тосекундним интервалима времена x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Укупно
Број 30-тосекундних интервала времена f_i када је у робну кућу ушло x_i купаца	9	16	30	22	19	10	3	7	3	1	$N = 120$

Тестирати хипотезу о слагању добијених емпиријских расподела са одговарајућим Поасоновим расподелама.

522. На линији ЈАТ-а од Сиднеја до Београда у авиону је било 163 путника. Бележен је број позива стјуардесама од стране путника на сваких 5 минута у току 10 сати лета и добијена је следећа табела:

Број позива x_i	0	1	2	3	4	Укупно
Број петоминутних интервала f_i са x_i позива	40	53	22	5	0	120

Тестирати хипотезу о слагању емпиријске расподеле са Поасоновом расподелом.

523. Међу 250 цифара у табели случајних бројева нашле су се све цифре: 0, 1, 2,..., 9. Њихове фреквенције дате су у следећој табели:

Цифре	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Добијене фреквенције	17	31	29	18	14	20	30	20	35	36
Очекиване фреквенције	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25

Да ли се уочене фреквенције цифара битно или случајно разликују од очекиваних вредности?

524. У градовима A, B, C догодило се редом 13, 23 и 18 саобраћајних незгода у току једног месеца. Може ли се на основу ових података тврдити да је у граду B више саобраћајних незгода него у градовима A и C?

525. Аутомат израђује извесне производе. Контролор квалитета производа у случајним тренуцима времена одвоји и прегледа увек узорак од 20 производа. Том приликом уочава број x_i неисправних производа у узорцима. После прегледа 100 оваквих узорака контролор је добио следеће податке:

Број дефектних производа у узорку x_i	0	1	2	3	4	5	6	Укупно
Број узорака f_i са x_i дефектних производа	14	25	27	23	7	3	1	$N = 100$

Под претпоставком да аутомат ради уједначено, то јест да даје увек исти проценат неисправних производа, испитати која би теоријска расподела одговарала емпиријској. Хипотезу тестирати тестом хи – квадрат.

526. Динар је бацан 60 пута и добијено је 37 „грбова" и 23 „писама". Тестирати хипотезу да је динар хомоген (исправан) са прагом значајности 0,05.

527. Три динара су укупно бачена 240 пута и сваки пут је уочен број добијених „грбова". Резултат бацања је дат у табели:

Број „грбова" x_i	0	1	2	3	Укупно
Број бацања три динара f_i када је добијено x_i „грбова"	24	98	95	23	$N = 240$

Тестирати хипотезу да су сва три динара исправна (хомогена), то јест да при бацању свака страна динара има једнаку вероватноћу да се појави.

528. Седам динара је бачено 1536 пута и увек је уочаван број „грбова":

Број „грбова" x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	Укупно
Број бацања седам динара f_i када се појавило x_i „грбова"	12	78	270	456	386	252	69	13	$N = 1536$

Користећи тест хи – квадрат, са прагом значајности $\alpha = 0,05$, испитати сагласност добијене расподеле фреквенција са биномном расподелом вероватноћа ($n = 7$ и $p = 0,5$ за појаву „грба" на сваком динару).

529. Сваког минута у току једног сата у телефонској централи уочаване су вредности величине X броја погрешних прикључака корисника телефона у минуту. Посматрања у току тог сата дала су следећи низ бројева:

3 2 2 3 1 1 0 4 2 1 1 4 0 1 2 3 2 5 2 1
3 0 2 4 1 2 3 0 1 2 1 3 1 2 0 7 3 2 1 1
4 0 4 2 3 2 1 3 0 1 2 2 3 1 4 0 2 1 1 5

Према расподели броја минута по броју погрешних прикључака (0, 1, 2,...) увести претпоставку о теоријској расподели и верификовати хипотезу тестом хи – квадрат са прагом значајности $\alpha = 0,05$.

530. У следећој табели дате су тежине у килограмима 750 ученика случајно изабраних из четвртих разреда средњих школа:

Тежина ученика x_i	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	Укупно
Фреквенције f_i ученика тежине x_i	2	10	11	38	57	93	106	126	109	87	75	23	9	4	$N=750$

(61 је средина класе $[60,5,\ 61,5)$, 62 је средина класе $[61,5,\ 62,5)$, ...)
а) Проверити хипотезу да се тежине ученика распоређују по нормалној расподели користећи „правило три сигме“ (видети задатак 483).
б) Проверити хипотезу да се тежине ученика распоређују по нормалној расподели користећи тест хи – квадрат.

531. Измерене су брзине кретања 700 возила која су се кретала једном деоницом аутопута и добијени су следећи подаци:

Брзине кретања возила	Фреквенције возила f_i
30 – 50	6
40 – 50	9
50 – 60	25
60 – 70	46
70 – 80	78
80 – 90	108
90 – 100	141
100 – 110	125
110 – 120	85
120 – 130	48
130 – 140	21
140 – 150	8
Укупно	$N = 700$

Наћи аритметичку средину $\overline{X}$ и стандардно одступање s, а затим тестирати хипотезу да брзине кретања возила на посматраној деоници аутопута имају нормалну расподелу.

ЈЕДАНАЕСТА ГЛАВА

11 РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. *а)* $(-\infty, +\infty)$; *б)* $(-\infty, +\infty)$; *в)* $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3 +\infty)$;
г) $x^2 - x - 6 \neq 0$, итд. $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$;
д) $x^2 + 5x + 4 \geqslant 0$, тј. $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$;
ђ) $4x - x^2 > 0$, тј. $x \in (0, 4)$;
е) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$; *ж)* $(-\infty, 2]$; *з)* и *и)* $[-1, 1]$;
ј) Функција није дефинисана: $D = \varnothing$;
к) $\sin x > 0$, па је област дефинисаности $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$, $k \in Z$;
л) $(-\infty, +\infty)$, јер је $-1 \leqslant \dfrac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$ за $\forall x \in R$;
љ) $(-\infty, -2] \cup [1 + \infty)$;
м) $-x \geqslant 0$ и $2 + x > 0$, па је домен $(-\infty, -2) \cup (2\,0]$;
н) $\left[k\pi, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$, $k \in Z$; *њ)* $[1, 4]$; *о)* $\big[2k\pi, (2k+1)\pi\big]$, $k \in Z$; *п)* $[-1, 3]$;
р) $-1 \leqslant \dfrac{x-3}{2} \leqslant 1$ и $2 - x > 0$, итд. Домен је $[1, 2)$;
с) $x \geqslant 0$; *т)* $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in Z$; *ћ)* $(3 - 2\pi, 3 - \pi)$;
у) $x^2 - 4 > 0$, па је $x < -2$ или $x > 2$;
ф) Није дефинисана, тј. домен је $\varnothing$.
х) Мора бити $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} > 2(x-1)$, итд. Решење је $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right] \cup [1, 5]$;
ц) $x^2 + 9 > 0$, $x^2 + 1 > 0$ и $x^2 + 4 > 0$. Домен је скуп R.
ч) $x^2 - x - 2 > 0 \wedge x^2 - x - 2 \neq 1 \wedge x^2 - 4 > 0$, итд. Домен је $(-\infty, -2) \cup \left(2, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} + \infty\right)$;
џ) $x^2 \neq 0 \wedge x^2 \neq 1 \wedge 12 - x - x^2 > 0$. Домен је $(-4, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 4)$;
ш) $x^2 + 1 > 0 \wedge x^2 + 1 \neq 1 \wedge 4 - x^2 > 0$. Домен је $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

2. *а)* $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$ и сл.

б) $f(1)=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, $f(10)=0$, $f(0,1)=\pi$. *в)* $\varphi(x)=8$, $\psi(x)=2x^3-4x$.
г) 0, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$. *д)* -5, 0, 3, 5.
ђ) $-\frac{3}{8}$, 0, 0, $x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$, $\sin(2\sin 2x)$. *е)* 100.
ж) x^4+1, x^4+2x^2+1.

4. $\frac{x-1}{x}$ и x.

5. Из $x-2=1$ следи $x=3$, па је $f(1)=3^2-2\cdot 3-1=20$.

6. $f(x-1)=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)-4=x^3-5$. За $x=1000$ добијамо: $f(999)=1000^3-5=999\,999\,995$.

7. Из $f(3)-2f\left(\frac{1}{3}\right)=9$ и $f\left(\frac{1}{3}\right)-2f(3)=\frac{1}{9}$, добијамо $f(3)=-\frac{83}{27}$.

8. Непосредним израчунавањем налазимо да је $f(1)=1$. Слично решењу претходног задатка налазимо $f(2)=-1$. Користећи се другом задатом једнакошћу, за $x=1$ добијамо: $f(3)=3f(1)+2f(2)=3-2=1$. Затим, за $x=2$ добијамо $f(4)=-1$, итд. Видимо да је $f(2k-1)=1$ и $f(2k)=-1$, за $k\in N$. Према томе $f(1111)=1$ и $f(2222)=-1$.

9. Заменимо у датој једнакости x са $-x$ и добијемо: $f(-x)+5f(x)=12-6$, па даље као у задатку 7. Решење: $f(x)=-\frac{3}{2}x+2$.

10. $a=4$, $b=-1$.

11. *а)* x. *б)* $\frac{x}{\sqrt{1+5x^2}}$.

12. *а)* Ставимо $\frac{x+2}{2x+1}=t$, $x\neq-\frac{1}{2}$, одакле је $x=\frac{t-2}{1-2t}$. Сада је $f(t)=\frac{t+7}{2t-1}$, па је отуда $f(x)=\frac{x+7}{2x-1}$.
б) $\frac{x+1}{x}=t\Rightarrow x=\frac{1}{t-1}$: Решење: $f(x)=(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}$.
в) $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}$.

13. Слично претходном задатку. $f(3)=6,25$.

14. Слично задатку 12, налазимо $f(x)=(x+1)^2$. Сада је $f(x+1)=(x+2)^2$. За одређивање инверзне функције можемо поступити такође слично решењу задатка 12. Најпре, уочимо да се тражи $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$, што даје $f^{-1}\big((x+1)^2\big)=x$. Ставимо $t=(x+1)^2$, итд. Решење је $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$.

15. *а)* $f(t)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{xy}{x+y}$.

б) $\log\dfrac{1+x}{1-x}+\log\dfrac{1+y}{1-y}=\log\dfrac{1+t}{1-t}$, одакле је $\dfrac{1+t}{1-t}=\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{1+y}{1-y}$. Коначно је $t=\log\dfrac{x+y}{1+xy}$.

16. Дате услове схватамо као систем једначина, из којег налазимо $f(x)=2x$ и $g(x)=x+1$. Даље је $f(2)+g(3)=8$, $(f+g)(-1)=-2$ и $fg(-2)=4$.

17. *а)* $y=\dfrac{1}{x}+4$; *б)* $y=-\dfrac{8}{x}$;
в) $y=\sqrt{1-x^2}$ или $y=-\sqrt{1-x^2}$ (две функције);
г) $y=\sqrt[3]{8-x^3}$; *д)* $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ или $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$.
ђ) Из $\sin y=\dfrac{x^2}{1+x}$, добијамо: $y=\arcsin\dfrac{x^2}{1+x}$;
е) $y=-\dfrac{2}{x}$;
ж) Из $\log x(y+1)=\log 100$, добијамо: $y=\dfrac{100-x}{x}$.
з) Логаритмујемо леву и десну страну дате једнакости и добијемо: $y=\log(x^3+2)-\log(x^2-2)-x$.
и) $y=-\cos x^2$, $\sqrt{\pi}\leqslant x\leqslant\sqrt{2\pi}$. *ј)* $y=1+\log(1-10^{x-1})$, $x<1$.
к) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & \text{за } x\leqslant 0\\ x, & \text{за } x\geqslant 0\end{cases}$

18. Заменимо места (улоге) словима x и y и решимо по y.
а) $x=2y+2\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x-1$.
б) $y=\log_2 x$. *в)* $y=2e^x$.
г) Инверзна функција постоји само за $x\geqslant 0$ или само за $x\leqslant o$ и то је $y=\sqrt{x-2}$ у првом, односно $y=-\sqrt{x-2}$ у другом случају.
д) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x$. *ђ)* $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. *е)* $y=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$
ж) $y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x}{2-x}$. *з)* $y=\dfrac{1+\arcsin\frac{x-1}{2}}{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}$.

19. *а)* $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$; *б)* $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x\neq 0$.

20. *а)* $f(x)=\dfrac{x}{2}(1+\operatorname{sgn}x)$; *б)* $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, $x\neq 0$.

21. *а)* $y=\begin{cases}x^2+5, & \text{за } x\leqslant -3\\ -x^2-6x+5, & \text{за } x\geqslant -3.\end{cases}$ *б)* $y=\begin{cases}1-x, & \text{за } x\leqslant -1\\ x-1, & \text{за } x\geqslant -1.\end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -3x, & \text{за } x < -3 \\ 6, & \text{за } x = -3 \\ -x, & \text{за } x > -3 \end{cases}$. *г)* $y = \begin{cases} x+5, & \text{за } x \leqslant -2 \\ 3x+1, & \text{за } -2 \leqslant x < -1 \\ 5, & \text{за } x = -1 \\ 3x-5, & \text{за } x > -1 \end{cases}$

22. *а)* $t = x+1 \Rightarrow y = (x+1)^2$; *б)* $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}$;
в) $x^2 = r^2 \cos^2 t$ и $y^2 = r^2 \sin^2 t$, па је $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$. Решење $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ или $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (две функције).
г) Слично претходном задатку: $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ или $y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.
д) $y = \sin^2 x$; *ђ)* $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\ln x}$; *е)* $y = \begin{cases} 2(x^2-1), & \text{за } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{за } |x| > 1 \end{cases}$
ж) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

23. Уверимо се да је $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$. Слично важи и за другу функцију ако су испуњени услови: $x \neq \dfrac{a}{c}$ и $a^2 \neq bc$.

24. *а)* Идентичне су на сваком интервалу који не садржи тачку $x = 0$.

б) Да.
в) Идентичне су само на интервалу $[0, +\infty)$.
г) Идентичне су на интервалу $(0, +\infty)$.

25. *а)* и *б)* Нема идентичних функција.
в) $f_2(x) \equiv f_3(x)$. *г)* $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_4(x)$. *д)* $f_2(x) \equiv f_3(x)$.

26. Видети задатак 15. *б)*.

28. Ако је $\dfrac{x-1}{x-2} = t$, тада дати услов прелази у: $f(t) - 3f\left(\dfrac{1}{t}\right) = 0$, а ако је $\dfrac{x-2}{x-1} = t$, онда је $f\left(\dfrac{1}{t}\right) - 3f(t) = 0$. Из ове две једнакости добијамо $f(t) = o$, па је $f(x) \equiv 0$.

29. Слично претходном задатку. Видети задатак 13. Из $t = \dfrac{x-2}{x}$ је $x = \dfrac{2}{1-t}$ и $f(t) + 3f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{2}{1-t}$, а из $t = \dfrac{x}{x-2}$ је $x = \dfrac{2t}{t-1}$ и $f\left(\dfrac{1}{t}\right) + 3f(t) = \dfrac{2t}{t-1}$, итд. Добијамо $f(t) = \dfrac{3t+1}{4(t-1)}$, па је $f(x) = \dfrac{3x+1}{4(x-1)}$. Даље је $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+1}{4x-3}$.

30. Дате услове сматрамо системом једначина по непознатим $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ и $g(2x+1)$, итд. Решење: $f(x) = \dfrac{3x}{2(x-1)}$, за $x \neq 1$ и $g(x) = \dfrac{x-1}{4}$, за $x \neq 3$.

31. $f(f(x)) = 0$ прелази у: $f(2x+1) = 0$, тј. $2(2x-1)-1 = 0$. Одавде је $x = \dfrac{3}{4}$. Слично, други услов даје $y = 1$.

32. *а)* $f(g(x)) = g(x) + 2 = 3x$. Одавде је $g(x) = 3x - 2$.
б) $g(x) = 3x - 3$.

33. $g(x^2 + xf(x)) = 3(x^2 + xf(x)) + 2 = 3x^2 + 6x + 5$. Одавде добијамо: $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$.

34. Ако једнакост $f(x_1) = 0$ помножимо са $\sin x_2$, а једнакост $f(x_2) = 0$ са $\sin x_1$ и добијене једнакости саберемо, добићемо: $A\sin(x_2 - x_1) = 0$. Због услова $x_1 - x_2 \neq k\pi$, $k \in Z$, следи да је $A = 0$. Поступајући на сличан начин добијамо да је и $B = 0$, па је $f(x) = 0$ за свски $x \in R$.

35. *а)* Мора бити $f(y) \neq 0$ за свако $y \in R$, јер ако би постојало y такво да је $f(y) = 0$, тада би за свако $x \in R$ важило: $f(x) \cdot f(y) = 0 = f(x-y)$, тј. било би $f(x) \equiv 0$. Ово није могуће, јер је по услову $f(1996) = 1$. Нека је $x = 2y$. Тада је: $f(y) \cdot f(2y) = f(y)$, па је $f(2y) = 1$ за свако $y \in R$. Према томе $f(x) = 1$.
б) Из дате једнакости, за $x = 0$ добијамо: $f(f(y)) = f(0) + y$. Ако x и y замене места, имамо $f(y + f(x)) = f(y) + x$, одакле за $x = 0$ добијамо $f(y + f(0)) = f(y)$. Одавде је $y + f(0) = y$, тј. $f(0) = 0$. Даље, из $f(y + f(x)) = f(y) + x$, за $y = 0$ добијамо $f(f(x)) = f(0) + x = x$. Стављајући $y = f(f(y))$ добијамо: $f(x+y) = f\Big(x + f(f(y))\Big) = f(x) + f(y)$ (по првобитној формули). Закључујемо да за $\forall n \in N$ важи: $f(nx) = nf(x)$. Затим из $f(0) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx) = 0$, следи $f(-nx) = -nf(x)$. Дакле, за сваки цео број k важи: $f(kx) = kf(x)$. Даље, из $f(1) = f\left(p \cdot \dfrac{1}{p}\right) = p \cdot f\left(\dfrac{1}{p}\right)$, добијамо $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{1}{p} f(1)$. Слично за рационалне бројеве $\dfrac{m}{n}$ добијамо $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{m}{n} \cdot f(1)$. Из $f(x \cdot 1) = x \cdot f(1)$, добијамо: $f(x) = C \cdot x$, где C треба одредити. Из $C(x + Cy) = f(x + Cy) = f(x + f(y)) = f(x) + y = Cx + y$, добијамо: $Cx + C^2 y = Cx + y$. Закључујемо да је $C^2 = 1$, тј. $C = 1$ или $C = -1$.

Тражене функције могу бити само $f(x) = x$ и $f(x) = -x$.

36. Из $f(0+0) \leqslant f(0) + f(0)$, добијамо $f(0) \leqslant 2f(0)$, па је $f(0) \geqslant 0$. Међутим, по датом услову *а)* је $f(0) \leqslant 0$, па је $f(0) = 0$. Даље, из $f(x + (-x)) \leqslant f(x) + f(-x)$, следи: $f(x) \geqslant f(x + (-x)) - f(-x) = 0 - f(-x)$. Како је (према услову *а)*) $f(-x) \leqslant -x$, то је $-f(-x) \geqslant x$, па добијамо: $f(x) \geqslant x$. Узимајући у обзир и $f(x) \leqslant x$, закључујемо да је $f(x) = x$.

37. Уверимо се да из $x_1 + x_3 = 2x_2$ следи $f(x_1) + f(x_3) = 2f(x_2)$.

38. $x_1 + x_3 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_3) = \big(f(x_2)\big)^2$

39. Постоји више примера. Нпр: *а)* $y = \sqrt{1-x^2}$; *б)* $y = \log(4-x^2)$; *в)* $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$.

40. Примењујући формулу за f_{n+2}, добијамо редом: $f_3(x) = 1-x$, $f_4(x) = \dfrac{x}{x-1} = f_1(x)$, $f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_6(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_7(x) = \dfrac{x}{x-1} = f_1(x)$, $f_8(x) = \dfrac{1}{1-x} = f_2(x)$, $f_9(x) = f_3(x)$, итд. Даље се периодично понавља низ функција f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6. Сем тога, примећујемо да је $f_1(x) = f_4(x) = f_7(x) = \cdots = f_{3k+1}(x)$, $k \in N$. Како је $1995 = 6\cdot 332 + 3$, то је $f_{1995}(x) = f_3(x) = 1-x$. Дакле $f_{1995}(1995) = -1994$. Број 1998 је дељив са 6, па је $f_{1998}(1998) = f_6(1998) = \dfrac{1}{1998}$.

41. За $y=0$, из друге једнакости добијамо $f(x+0) = f(x) + f(0) + 0$, одакле је $f(0) = 0$. Применивши исту једнакост на случај $y = -x$, добијамо: $0 = f\big(x+(-x)\big) = f(x) + f(-x) - 2x^2 = f(x\cdot 1) + f\big(x\cdot(-1)\big) - 2x^2$. Сада применимо и прву формулу: $0 = f(x)\cdot f(1) + f(x)\cdot f(-1) - 2x^2 = f(x)\big(f(1)+f(-1)\big) - 2x^2$. Како је $0 = f\big(1+(-1)\big) = f(1) + f(-1) - 2$, то је $f(1) + f(-1) = 2$. Коначно је: $0 = f(x)\cdot 2 - 2x^2$, па је $f(x) = x^2$.

42. За $y = 1$ добијамо: $f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1$. Одавде следи да $f(x+1) = f(x) + 1$ за све $x \in Q$. Сада лако налазимо да за цео број n важи: $f(x+n) = f(x) + n$. Због услова $f(1) = 2$, специјално је $f(n) = n+1$. Нека је $x = \dfrac{m}{n}$, $n \in N$, m је цео број. Према датом услову је $f(nx) = f(x)\cdot f(n) - f(x+n) + 1$. Како је $nx = m$ и $f(m) = m+1$, то добијамо: $m+1 = f(m) = f(x)\cdot(n+1) - f(x) - n + 1$, односно: $m = nf(x) - n$. Одавде је коначно: $f(x) = \dfrac{m}{n} + 1 = x+1$, за сваки $x \in Q$.

43. *а)* За $x = 0$ добијамо: $f(0) - \big(f(0)\big)^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$, односно $\big(f(0)\big)^2 - f(0) + \dfrac{1}{4} \leqslant 0$, па је $\left(f(0) - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$. Одавде следи да је $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Слично, за $x = 1$ добијемо да је и $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Чињеница да је $f(0) = f(1)$ довољна је да се уверимо у исправност тврђења задатка.
б) За $x = x_0$ и $y = 0$ добијамо: $f(x_0) = f(x_0)\cdot f(0)$, па је $f(0) = 1$. Затим: $1 = f\big(x+(-x)\big) = f(x)\cdot f(-x)$ за $\forall x \in R$. Нека је $f(y) = f(x)$. Сада имамо: $f(x)\cdot f(-x) = 1 \Rightarrow f(x)\cdot f(-y) = 1$ и $f(x-y) = 1$. Помножимо последњу једнакост за $f(x_0) = 1996$ и добијемо: $f(x_0)\cdot f(x-y) = 1996$. На леву страну једнакости применимо услов (1) и добијемо: $f(x_0 + x - y) = 1996$. Одавде, према услову (2), следи: $x_0 + x - y = x_0$, па је $y = x$. Дакле

услов $f(y) = f(x)$ повлачи једнакост $y = x$, што значи да је f инјективна функција.

44. Имамо најпре: $f(100) = f\big(f(100+11)\big) = f\big(f(111)\big) = f(111-10) = f(101) = 101-10 = 91$. За било који $x \in [90, 99]$ важи: $f(x) = f\big(f(x+11)\big) = f(x+11-10) = f(x+1)$, па је $f(x) = f(100) = 91$. Сада за $x < 90$, индукцијом доказујемо да је $f(x) = f\big(f(x+1)\big) = \cdots f(91) = 91$.

45. Парне су функције: *а), в), д), ж), и)*. Непарне су: *ђ), е), з), ј), к), л), љ), м)*. На пример:

ј) $f(-x) = \log \dfrac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)} = \log \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = \log \left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{-1} = -\log \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} = -f(x)$. Слично је и са функцијом *к)*.

љ) $f(-x) = \dfrac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}\cdot\dfrac{a^x}{a^x} = \dfrac{1+a^x}{1-a^x} = -\dfrac{a^x+1}{a^x-1} = -f(x)$.

46. *а)* $y = (x^2-6) + (-x)$; *б)* $y = \left(\operatorname{tg} 2x - \sin\dfrac{x}{2}\right) + \cos 3x$.

в) $y = (-x)^2 + \big(x|x| - \sin 2x + 2x\big)$.

г) $y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. (Видети следећи задатак.)

48. Нека је $f(x)$ непарна, а $\varphi(x)$ парна функција. Тада је $f(-x)\cdot\varphi(-x) = -f(x)\cdot\varphi(x) = -y$, па је y непарна функција. Обрнуто, ако је $f(-x)\cdot\varphi(-x) = -f(x)\varphi(x) = -y$, тада је могуће само: $f(-x) = f(x)$ и $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ или $f(-x) = -f(x)$ и $\varphi(-x) = \varphi(x)$, што се и тврдило.

49. *а)* $\sin 3(x+p) = \sin 3x$. За $x = 0$ добијамо: $\sin 3p = 0$, одакле је $p = \dfrac{\pi}{3}$.

Периодичне су функције: *а), б), д), ђ), з), ј)* и *к)*. Њихове периоде су: *а)* $\dfrac{\pi}{3}$; *б)* $\dfrac{\pi}{2}$; *д)* π; *ђ)* π; *з)* не постоји; *ј)* 1; *к)* $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Наводимо решења неких случајева.

б) $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$, па је $p = \dfrac{\pi}{2}$.

з) $f(x+p) = -3$ за $p > 0$. Најмањи број $p > 0$ не постоји.

к) $a\sin\lambda(x+p) + b\cos\lambda(x+p) = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x$. За $x = 0$, добијамо $a\sin\lambda p + b\cos\lambda p = b$. Одавде је $\sin\lambda p = 0$ и $\cos\lambda p = 1$, па је $\lambda p = 2\pi$, односно $p = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

50. *а)* $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, па је $p = 2\pi$.

б) $f(x) = -\cos 2x$ и $p = \pi$. *в)* Не постоји периода.

г) $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$, па је $p = \frac{\pi}{2}$.

д) $p = \pi$. *ђ)* $p = \frac{8\pi}{3}$. *е)* $p = 2$. *ж)* $p = 4\pi$. *з)* $p = 6\pi^2$. *и)* $p = 2\pi$.
ј) $p = 2\pi$.

к) $p = 2$. (За сваки сабирак посебно имамо: $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{2}{3}$, $p_3 = \frac{2}{5}$, а 2 је најмањи број који се без остатка дели са 1 и $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$.)

л) $p = 24$. *љ)* $p = \pi$.

м) $f(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\pi$, па је $p = \frac{\pi}{2}$.

н) Како је $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ и $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, то је: $f(x) = \dfrac{x\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{-x\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}}$.

Лако се проверава, ако је $f(x) = \dfrac{x\cos\alpha + \sin\alpha}{-x\sin\alpha + \cos\alpha}$, да је $f_n(x) = \dfrac{x\cos n\alpha + \sin n\alpha}{-x\sin n\alpha + \cos n\alpha}$ (математичком индукцијом). Према томе, у нашем случају је $f_{17}(x) = f_1(x)$. Низ функција је периодичан, са периодом 16, па је

$$f_{996}(x) = f_4(x) = \frac{x\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}}{-x\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{x}.$$

51. Ако је $f(x)$ периодична функција, тада постоји позитивно p, тако да за свако $x \in R$, важи: $\cos(x+p) + \cos(ax+ap) = \cos x + \cos ax$. Тада за $x = 0$ имамо $\cos p + \cos ap = 2$. Значи, постоје цели бројеви m и n, такви да је $p = 2m\pi$ и $ap = 2n\pi$. Ако је $m = 0$, тада је $a = 2n$, а ако је $m \neq 0$, поделимо другу једнакост првом и добијемо $a = \frac{n}{m}$. Дакле, a је рационалан број.

52. Ако у датој формули увећамо аргумент за a, добићемо $f(x+2a) = \dfrac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}$. Заменимо $f(x+a) = \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$, па добијемо: $f(x+2a) = -\dfrac{1}{f(x)}$. Сличним израчунавањем добијамо да је $f(x+3a) = \dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$ и коначно: $f(x+4a) = f(x)$. Дакле, функција је периодична, са периодом $4a$. Интересантно је да се на овакав начин од сваке функције може конструисати периодична функција.

53. Нека је f периодична функција са периодом p. Тада $f(x+y+p) = f(x+y)$, па је, према датом услову: $f(x)f(y+p) - g(x)g(y+p) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$, тј. $f(x)f(y) - g(x)g(y+p) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$. Дакле, мора бити $g(y+p) = g(y)$ или је $g(x) = 0$, за свако $x \in R$. Дакле, g је у сваком случају периодична.

Ако је g периодична функција, тада f не мора бити периодична. На пример: $f(x) = 2^x$, а $g(x) \equiv 0$.

54. Видимо да је $f(x+2a) = f((x+a)+a) = \dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-(f(x+a))^2} = \dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-\left(\dfrac{1}{4}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}+f(x)-(f(x))^2\right)} = \dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}-f(x)+(f(x))^2} = \dfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}+f(x)\right)^2} = \dfrac{1}{2}+\left|\dfrac{1}{2}-f(x)\right| = f(x)$, јер је $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Пример овакве функције је: $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(1+\left|\cos\dfrac{\pi x}{2}\right|\right)$.

55. *а)* $y = (x+1)^2 - 9 \geqslant -9$, јер је $(x+1)^2 \geqslant 0$.
б) $y \geqslant 1$. *в)* $y = 2x^2 + \dfrac{1}{2x^2} \geqslant 2$. *) *г)* $y > 0$.

56. *а)* $y = 1-(1-x)^2 \leqslant 1$, јер је $(1-x)^2 \geqslant 0$.
б) $y < 1$, јер је $3^{-x} > 0$.
в) $y = \dfrac{1}{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{2}{a^2}} \geqslant \dfrac{1}{2}$. (Видети задатак 55. *в)*.)
г) $y = \dfrac{1}{\log_2(x^2+2)} \leqslant 1$, јер је $\log_2(x^2+2) \geqslant 1$.

57. *а)* $-1 \leqslant y \leqslant 3$.
б) $y = \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$, па је $0 \leqslant y < 1$.
в) $0 \leqslant y \leqslant 3$.
г) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, што значи да је $-\dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2}$.

58. Лако је проверити чињеницу да је: $f(x)+f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3$. Како су сва три сабирка позитивна, закључујемо да је $f(x) < 3$, тј. $0 < f(x) < 3$.

59. *а)* Нека је $x_2 > x_1$. Тада је $3^{x_2} > 3^{x_1}$, за свако $x_1, x_2 \in R$, а $y_2 - y_1 = 3^{-x_2} - 3^{-x_1} = \dfrac{1}{3^{x_2}} - \dfrac{1}{3^{x_1}} = \dfrac{3^{x_1}-3^{x_2}}{3^{x_1+x_2}} < 0$ (јер је бројилац негативан, а именилац позитиван). Дакле: $y_2 - y_1 < 0$, па је $y_2 < y_1$. Функција је монотоно опадајућа. Слично утврдимо да су функције *б)*, *ђ)* и *е)* монотоно растуће, а *в)*, *г)*, *д)* и *ж)* монотоно опадајуће.
з) $y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2$. За $x < 1$, из $x_2 > x_1$, тј. из $x_2 - x_1 > 0$ имамо: $y_2 - y_1 = (x_2-1)^2 - (x_1-1)^2 = (x_2 - 1 - x_1 + 1)(x_2 - 1 + x_1 - 1) =$

*) Познато је: $a+\frac{1}{a} \geqslant 2,\ a>0 \iff \frac{(a-1)^2}{a} \geqslant 0$.

$(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 2)$. Из $x_1 < 1$ и $x_2 < 1$ следи: $x_1 + x_2 - 2 < 0$, па због $x_2 - x_1 > 0$ следи $y_2 - y_1 < 0$, тј. $y_2 < y_1$. Сличнс утврдимо: ако је $x > 1$, тада из $x_2 > x_1$ следи $y_2 > y_1$. Дакле, за $x < 1$ функција је монотоно опадајућа, а за $x > 1$, је монотоно растућа. ($f(1) = 2$ је минимална вредност.)

и) За $x < 0$ функција је монотоно опадајућа, а за $x > 0$ монотоно растућа.

ј) $y = -2x$ за $x \leqslant 0$ и $y = 0$ за $x \geqslant 0$, па је за $x < 0$ функција монотоно опадајућа, а за $x \geqslant 0$ функција стагнира. Можемо рећи да је дата функција монотоно нерастућа, за $\forall x \in R$.

к) $y = -1$ за $x < 0$, $y = 0$, за $x = 0$ и $y = 1$ за $x > 0$. Дакле, функција је монотоно неопадајућа.

60. Према датом услову (1) је $f\left(x + f(y)\right) = f(x+y) + 1 = f(y+x) + 1 = f\left(y + f(x)\right)$. Услов (2) показује да је f инјективна функција, па из $f\left(x + f(y)\right) = f\left(y + f(x)\right)$ следи: $x + f(y) = y + f(x)$. Специјално, за $x = 0$ имамо: $f(y) = y + f(0)$. Узимајући овде за аргумент $y + f(x)$ па $y + x$, добијамо да је: $f\left(y + f(x)\right) = y + f(x) + f(0)$ и $f(y+x) = y + x + f(0)$. Сада из услова: $f\left(y + f(x)\right) = f(y+x) + 1$, добијамо: $y + f(x) + f(0) = y + x + f(0) + 1$, односно: $f(x) = x + 1$.

61. *а)* $f(x) > 0$ за свако $x \in R$.

б) $f(x) = 0$ за $x = -1$. $f(x) > 0$ за $x > -1$ и $f(x) < 0$ за $-2 < x < -1$.

в) $f(x) > 0$, за $\forall x \in R$.

г) $f(x) = 0$ за $x = 0$. $f(x) > 0$ за $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, а $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

д) Нуле функције су $x = 0$ и $x = 1$. $f(x) > 0$ за $x \in (-2, -1) \cup (0, +\infty)$ и $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$.

ђ) $f(x) = 0$ за $x = 0$, $f(x) < 0$ за $x < 0$ и $f(x) > 0$ за $x > 0$.

е) $f(x)$ је дефинисана и позитивна за свако $x > \dfrac{5}{3}$.

ж) Нула функције је $x = 1$. Домен је $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. $f(x) < 0$ за $x \in (0, 1)$, а $f(x) > 0$ за $x < -1$. или $x > 1$.

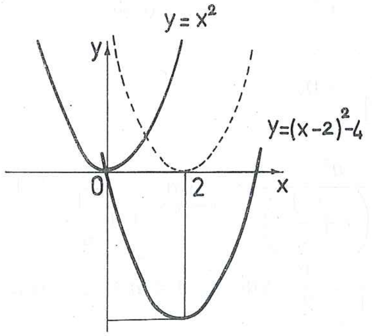
з) $f(x) = 0$ за $x = 1$. $f(x) > 0$ за $x \in (1, 1000)$, а $f(x) < 0$ за $x \in (0, 1) \cup (1000, +\infty)$.

и) $f(x) = -2\sin^2 x - \sin x + 1$ па је $f(x) = 0$ за $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2m\pi$ и $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, k, m, n цели бројеви. Затим $f(x) < 0$ за $\dfrac{\pi}{6} + 2p\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2p\pi$ и $f(x) > 0$ за $\dfrac{5\pi}{6} + 2q\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2q\pi$ и $\dfrac{3\pi}{2} + 2q\pi < x < \dfrac{13\pi}{6} + 2q\pi$, где су p и q цели бројеви.

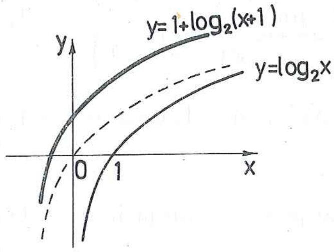
62. Апсцисе заједничких тачака графика представљају решења једначине $F(x) = f(x)$, тј. $x^2 + 6 = 5|x|$. Решења су: (2, 10), (3, 15), (−2, 10), (−3, 15).

63. За $x \neq 1$, $f(x) - f\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right) = 0$, ако је $x = \dfrac{x+8}{x-1}$, итд. Нуле су $x = -2$ и $x = 4$. У случају кад је $f(x) = x^2 - 12x + 3$, нуле су -2, 2, 4 и 10.

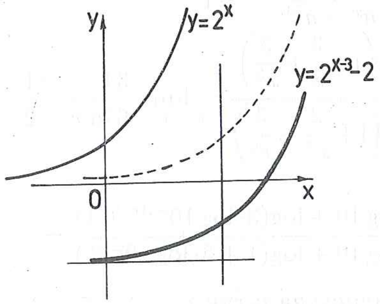
64. Решења су на сликама 1, 2, 3 и 4.



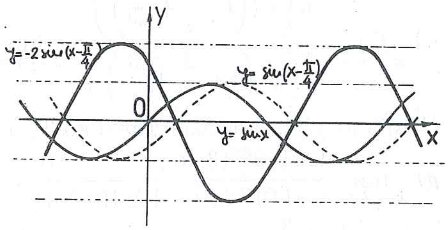
Сл. 1



Сл. 2



Сл. 3



Сл. 4

65. *а)* $\dfrac{1}{2}$. *б)* $\dfrac{3}{4}$. *в)* 0. *г)* ∞. *д)* 0. *ђ)* 0.

66. *а)* $\dfrac{1}{2}$. *б)* $-\dfrac{3}{2}$. *в)* 1.

г) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3000x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1500} = +\infty.$

д) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0.$

ђ) $+\infty$. *е)* $\dfrac{4x^4}{x^5} \to 0$. *ж)* 2.

з) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{\sqrt{x^4-3x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}=2.$

и) $\dfrac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}\to+\infty.$ *ј)* $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\to+\infty.$ *к)* 1. *л)* $\dfrac{x^{\frac{1}{8}}}{x^{\frac{1}{2}}}\to 0.$ *љ)* $\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\to+\infty.$

м) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)}{x\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)}=-1$, јер $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}\to 0.$

н) Ако је $a>1$, онда $a^x\to+\infty$, па је $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{a^x\left(1+\dfrac{1}{a^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a^x}}=1.$

Ако је $a=1$, онда је $a^x=1$, па је $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{a^x+1}=\dfrac{1}{2}$. Ако је $0<a<1$, онда $a^x\to 0$, па је $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{a^x+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

њ) $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}\to 0$, па је $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{a^x}=1.$

о) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^{-x}=+\infty$, па је $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=-1.$

п) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)\right)}{\ln\left(x^6\left(1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^5}\right)\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x+\ln\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{6\ln x+\ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^5}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x}{6\ln x}=\dfrac{1}{2}.$

(Изрази у заградама теже ка 1, а $\ln 1=0$.)

р) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log\left(10^{3x}(3\cdot\log 10^{-3x}+1)\right)}{\log\left(10^{5x}(1+5\cdot\log 10^{-3x})\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\log 10+\log(3\cdot\log 10^{-3x}+1)}{5x\log 10+\log(1+5\cdot\log 10^{-3x})}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$. ($\log 10=1$ итд., слично претходном задатку.)

67. *а)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=0.$ *б)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{4x^2-1}=\dfrac{1}{4}.$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

г) Слично претходном задатку, добијемо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+x}=-\frac{1}{2}.$$

д) Поступамо као у два претходна задатка. Добићемо:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}.$$

(Како је $x<0$, то је $|x|=-x$.)

ђ) $\dfrac{5}{2}$.

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sin\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}=$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\cdot\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}=2\sin 0\cdot\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}=0.$$

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+(1-x^3)}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=0.$

з) Слично задатку *д)*. Резултат је: $\dfrac{5}{2}$.

и) Рационалишемо два пута. Добијамо: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}+x\sqrt{2}}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}+x\sqrt{2}})(\sqrt{x^4+1}+x^2)}=0.$$

ј) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{2x(\sqrt{x^2-2x}-x-1)}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+2x}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-2x}+x+1)}=-\frac{1}{4}.$$

к) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x+x-\sqrt{x^2-2x})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)+$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-2x})$. Даље слично претходним задацима. Резултат је 2.

л) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+a_1x+b_1}-x)+\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+a_2x+b_2}-x)+\cdots+$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+a_nx+b_n}-x)$, итд. Резултат је $\dfrac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

љ) Два пута рационалишемо, као разлике квадрата. Резултат је $-\dfrac{1}{2}$.

68. *а)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=\dfrac{0}{2}=0.$

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x-1}=4.$

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x}{x+3}=-\dfrac{-3}{0}=\infty.$ *)

г) $\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{4x^2+2x+1}{3x-1}=6.$

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{4}{0}=\infty.$

ђ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+x+1)}=\dfrac{p}{q}.$

---

*) Није одређено да ли је $+\infty$ или $-\infty$.

е) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\dfrac{1}{56}$. *ж)* $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{3(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{x+8}=36$.

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\dfrac{0}{2}=0$. *и)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

ј) $\dfrac{1}{2}$. *к)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{(2\sin x-1)(\sin x+1)}{(2\sin x-1)(\sin x-1)}=-3$.

л) Слично претходном задатку:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos 2x(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos 2x}{\cos 2x(\sin x+\cos x)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

љ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{x-1}$, итд. Резултат је $-\dfrac{1}{4}$.

м) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x(x-2)}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=+\infty$. *н)* -1. *њ)* 0. *о)* ∞.

п) Поред уобичајеног „рационалисања“ разлике корена, задатак можемо решити увођењем смене: $x=y^2$, $x\to 1\Rightarrow y\to 1$. Добијамо: $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^4-1}{y^3-1}=\dfrac{4}{3}$.

р) Слично претходном задатку: $x+1=y^6$, итд. Резултат је: $\dfrac{3}{2}$.

с) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}$, итд. Решење: $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

т) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3+3-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}-\dfrac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}}{\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}$, итд. Резултат:

$\dfrac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{32}}=\dfrac{112}{27}$.

ћ) Смена: $1+x=y^n$, $x\to 0\Rightarrow y\to 1$, итд. Решење је: $\dfrac{1}{n}$.

у) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{p(x)+1}-1}{p(x)}\cdot\dfrac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{p(x)+1}-1}{p(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1})$. Други лимес је a_1, а први се сменом $p(x)+1=y^n$, $y\to 1$, своди на претходни задатак. Резултат је: $\dfrac{a_1}{n}$.

69. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}$, јер је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$. Даље, слично претходном задатку. Резултат: -1.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sin 2x}$, итд. Резултат је: $\dfrac{3}{4}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+(1-\cos x)}{-\sin x+(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}{-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}=1.$

ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{4}.$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot x=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0.$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\dfrac{1+\sin x-(1-\sin x)}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=1.$

и) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\cos a.$

ј) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{ax-bx}{2}\cdot\sin\frac{ax+bx}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}x}{x}\cdot\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}x}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\dfrac{a-b}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}x}{\frac{a-b}{2}x}\cdot\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}x}{\frac{a+b}{2}x}=\dfrac{b^2-a^2}{2}.$

к) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

л) Сменом $\dfrac{1}{x}=y$, $y\to 0$, добијамо: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y^2}=\dfrac{1}{2}$.

љ) Слично задатку 67. *е)*. Резултат је 0.

м) $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, па имамо:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{4\sin^4\frac{x}{2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{4\sin^4\frac{x}{2}}{16\left(\frac{x}{2}\right)^4}=\dfrac{1}{8}.$

н) Прво рационалишемо именилац, итд. Резултат је: $\dfrac{4}{3}$.

њ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$, итд.
Решење $-\dfrac{1}{12}$.

о) 6.

п) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x\cos 3x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 3x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x\cos 3x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 3x}}=$
$\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x(1-\cos 3x)}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\cdot 2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\right)=\dfrac{11}{4}$.

р) Слично претходном или директним свођењем на $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x+\cos x\cos 2x-\cos x\cos 2x\cos 4x}{x^2}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cos 2x\cdot\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}=\dfrac{21}{2}$.

70. *а)* Сменом $\dfrac{\pi}{2}-x=y$, $y\to 0$, добијамо: $\lim\limits_{y\to 0}y\cdot\operatorname{ctg}y=$
$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}\cdot\cos y=1$.

б) Слично претходном, добијамо: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y^2}=\dfrac{1}{2}$.

в) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)$, а $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x=\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos x=$
$2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$, па је резултат 2.

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi^2\sin x}{(\pi-x)(\pi+x)}$. Уведимо смену $\pi-x=y$, итд. Резултат је: $\dfrac{\pi}{2}$.

д) Смена је $\dfrac{\pi}{2}-x=y$. Резултат: -2.

ђ) Сменом $\dfrac{\pi}{3}-x=y$, $y\to 0$, добијамо:
$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-2\cos(\frac{\pi}{3}-y)}{3y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y-\sqrt{3}\sin y}{3y}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y^2}\cdot y-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

е) Смена: $\pi-x=y$, $y\to 0$, итд. Резултат: $-\dfrac{3}{2}$.

ж) Слично претходном, смена је $1-x=y$. Резултат је: $\dfrac{1}{3}$.

з) $\dfrac{2}{\pi}$.

и) Најпре рационалишемо именилац, па уведемо смену: $1-x=y$. Резултат је π.

ј) Смена је: $y=\arcsin x$. Решење: $\dfrac{2}{3}$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}$, па као у претходном задатку. Резултат: $\dfrac{2}{3}$.

л) Смена је $y=\pi-\operatorname{arcctg}x$, а резултат је 1.

љ) Сменом $y = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, добијамо решење 1.

м) Прво рационалишемо бројилац, па уведемо смену: $y = \pi - \arccos x$. Резултат је $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

н) Уводимо смену: $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{\pi}{4}$, $y \to 0$. Решење: $-\dfrac{1}{2}$.

71. *а)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1-2}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}\cdot\frac{-2}{x+1}\cdot x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}$, јер је $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x+1} = -2$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{x^2+1}{x^2}} = e$. *в)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^x = e^{+\infty} = +\infty$. *д)* e^{mn}. *ђ)* e.

е) $\lim\limits_{x\to0}\left((1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. *ж)* $e^0 = 1$.

з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left((1+\operatorname{tg}x-1)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}}\right)^{(\operatorname{tg}x-1)\cdot\operatorname{tg}x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{-(1-\operatorname{tg}x)\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

и) e. *ј)* e. *к)* $\dfrac{1}{e}$.

л) $\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x} = 1 + \dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x} - 1 = 1 + \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}$, итд. Резултат: 1.

љ) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+2e^{\frac{x}{x+1}}-2\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left(\left(1+2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)\right)^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}\cdot2(e^{\frac{x}{x+1}}-1)} =$

$\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{2(x^2+1)}{x+1}\frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}} = e^2$.

м) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$.

н) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x}\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{\dfrac{2x}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{1-x} = 1$.

њ) $\dfrac{1}{a}$.

о) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\log x-\log10}{x-10} = \lim\limits_{x\to10}\dfrac{\log\dfrac{x}{10}}{x-10} = \lim\limits_{x\to10}\dfrac{\log\left(1+\dfrac{x}{10}-1\right)}{10\left(\dfrac{x}{10}-1\right)} =$

$\dfrac{1}{10}\log\left(1+\dfrac{x}{10}-1\right)^{\frac{1}{\frac{x}{10}-1}} = \dfrac{1}{10}\log e = \dfrac{1}{10\ln10}$.

п) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos2x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos2x-1)}{\cos2x-1}\cdot\dfrac{-(1-\cos2x)}{4x^2}\cdot4=-2.$

р) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos3x-1)}{(1+\cos4x-1)}$, итд, слично претходном задатку. Резултат је: $\dfrac{9}{16}$.

с) 1. *т)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{e^x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{e^x}=1.$

ћ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{bx}-1}{bx}\cdot b=a-b.$

у) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{3}{2}.$

ф) Слично претходном задатку. Резултат је 1.

х) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\big(\cos(e^{2x}-1)\big)}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\big(1+\cos(e^{2x}-1)-1\big)}{x^2}$, итд. Резултат је: -2.

ц) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\big(1+(-\sin x)\big)^{\frac12}-1}{-\sin x}\cdot\dfrac{-\sin x}{x}-$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\sin x)^{\frac13}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=-\dfrac12-\dfrac13=-\dfrac56.$

ч) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a+a^a-a^x}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}=$

$$\lim_{x\to a}\frac{(a+x-a)^a-a^a}{x-a}-a^a\ln a=\lim_{x\to a}\frac{a^a\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a-a^a}{x-a}-a^a\ln a=$$

$$\lim_{x\to a}a^{a-1}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a-1}{\dfrac{x-a}{a}}-a^a\ln a=a^{a-1}\cdot a-a^a\ln a=a^a(1-\ln a).$$

72. *а)* $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{2-0-2}=\dfrac{2}{-0}=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{2+0-2}=\dfrac{2}{+0}=+\infty.$

б) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac1x}}=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{-0}}}=\dfrac{1}{1+e^{-\infty}}=\dfrac{1}{1+0}=1.$

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac1x}}=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{+0}}}=\dfrac{1}{1+e^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0.$

в) $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-2}{(-1-0+1)^2}=\dfrac{-2}{+0}=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-2}{(-1+0+1)^2}=\dfrac{-2}{+0}=-\infty.$

г) $\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{-1}{-4(-2-0+2)}=\dfrac{-1}{-4(-0)}=\dfrac{-1}{+0}=-\infty$ *)

$\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{-1}{-4(-2+0+2)}=\dfrac{-1}{-4(+0)}=\dfrac{-1}{-0}=+\infty.$

д) Водити рачуна да је $|x|=x$, за $x>0$ и $|x|=-x$, за $x<0$. Леви лимес

*) Ако именилац има више нула, треба их обавезно раздвојити, тј. треба именилац раставити на просте чиниоце.

је -1, а десни 1.
ђ) Слично претходном задатку: $f(x) \to -1$, кад $x \to -0$ и $f(x) \to 1$, кад $x \to +0$.
е) Видети задатак *д)*, јер је $\sqrt{x^2} = |x|$.
ж) Леви лимес је 2, а десни 0.
з) Кад $x \to -0$, користимо горњу формулу и $f(x) \to 1$, а кад $x \to +0$, користимо доњу формулу и $f(x) \to -1$.
и) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1$.

73. *а)* Треба да буде испуњен услов: $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = f(3)$. Како је $\lim\limits_{x\to 3-0}(x^2-5) = 4 = \lim\limits_{x\to 3+0}(x+1) = 4$, закључујемо да морамо узети: $f(3) = 4$.
б) $f(0) = \dfrac{1}{2}$. *в)* $f(0) = 0$. *г)* $f(0) = 1$.
д) $f(0) = 2$, јер је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{-x} = 2$.
ђ) $f(0) = 1$.
е) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{-0} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$. Дакле, не постоји гранична вредност у тачки $x = 2$ и $f(x)$ се не може допунити тачком $f(2)$, тако да буде непрекидна.
ж) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+(-x))}{-x} = 2$, па је $f(0) = 2$.

74. *а)* $a = 4$. *б)* $a = 1$ *в)* $a = 0$. *г)* $a = 1$.
д) Не може, јер су леви и десни лимес различити.
ђ) $a = 1, b = 1$.

75. *а)* $\Delta y = 2(x+\Delta x) - 3 - (2x-3) = 2\Delta x$. *б)* $\Delta y = \Delta x(2x-1)$.
в) $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$. *г)* $\Delta y = -\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.
д) $\Delta y = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$. *ђ)* $\Delta y = e^x(e^{\Delta x} - 1)$.

76. *а)* Леви и десни лимес у тачки $x = 1$ су једнаки и износе $2 = f(2)$, па је функција непрекидна у тој тачки. Лево и десно од ове тачке имамо квадратне функције, за које знамо са су непрекидне за свако $x \in R$.
б) Непрекидност линеарне функције, за $|x| > 1$, је евидентна. Функција $y = \cos x$ је такође непрекидна ($\Delta y = -2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left((x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to 0$, кад $\Delta x \to 0$, за свако $x \in R$), па је неопходно испитати само тачке $x = 1$ и $x = -1$. Функција је непрекидна за $x = 1$, јер је $f(1-0) = 0 = f(1+0) = f(1)$. Међутим, $x = -1$ је тачка прекида, јер је $f(-1-0) = 2$ а $f(-1+0) = 0 = f(-1)$.
в) За $x \neq 2$ је $f(x) = x^2$ и непрекидна је. Међутим, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2)$,

па је $x=2$ тачка прекида.

г) Функција је непрекидна за $x \neq 0$, а $x=0$ је тачка прекида, јер је $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(0)$.

д) Функција је непрекидна. *ђ)* Непрекидна је.

е) $\Delta y = 2x\Delta x \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, за сваки $x \in R$. Функција је непрекидна.

ж) $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \to 0$, кад $\Delta x \to 0$, за $x>0$. За $x=0$ функција је непрекидна здесна.

з) $\Delta y \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, за свако $x \in R$. (Видети задатак 75. *д)*). Функција је непрекидна.

и) $\Delta y = 2^x(2^{\Delta x}-1) \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, за свако $x \in R$. Функција је непрекидна.

77. *а)* Тачка прекида је $x=0$. $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} = -\infty$, па је $x=0$ вертикална асимптота. Хоризонталних асимптота нема. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} \big(f(x)-x\big) = 0 = \lim\limits_{x\to +\infty} \big(f(x)-x\big)$, па је права $y=x$ коса асимптота с обе стране.

б) $x=-2$ је вертикална асимптота, а $y=1$ хоризонтална с обе стране.

в) $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$. Дакле, асимптоте су $x=-1$ и $y=0$.

г) Нема вертикалних асимптота, јер нема тачака прекида. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, а $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$, па је $y=-\frac{1}{2}$ хоризонтална асимптота с десне стране. Даље је $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2 = k$, а $\lim\limits_{x\to -\infty} \big(f(x)-kx\big) = \lim\limits_{x\to -\infty} \big(-\sqrt{x^2+x-2}-x\big) = -\frac{1}{2} = n$. Права $y = 2x - \frac{1}{2}$ је коса асимптота, али само слева.

д) Тачка прекида је $x=0$, али нема вертикалних асимптота, јер је $\lim\limits_{x\to \pm 0} f(x) = 0$. Хоризонтална асимптота је $y=1$, јер је $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 1$.

ђ) Асимптоте су $x=2$, $x=-2$ и $y=1$.

е) Слично задатку *г)*. Здесна, имамо асимптоту $y=2x+1$, а слева $y=3$.

ж) Тачка прекида је $x=-2$, али нема вертикалних асимптота, јер је $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = \frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Хоризонтална асимптота је $y=\frac{\pi}{4}$, с обе стране.

з) Функција је дефинисана за $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$. Тачке прекида су $x=0$ и $x=1$, али је само $x=1$ вертикална асимптота ($\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$). Хоризонтална асимптота, кад $x\to+\infty$ је права $y=1$.

и) Слично задатку *г)*. Асимптоте су $y=-2x-2$ слева и $y=2$ здесна.

ј) $y=0$. *к)* Нема асимптота.

78. *а)* $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 7 - (x^2+x-7)}{\Delta x} =$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(2x+\Delta x+1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x+1) = 2x+1$. Слично поступамо у осталим случајевима.

б) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{1}{x+\Delta x+3} - \dfrac{1}{x+3}\right)$, итд. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$.

в) Видети задатак 75. *в)*: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

г) Слично претходном задатку: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

д) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{2\cdot\dfrac{\Delta x}{2}} = -\sin x$.

ђ) Видети задатак 75. *ђ)*.

е) Слично претходном задатку: $f'(x) = 2^x \ln 2$.

ж) $f(x) = \ln(-x)$, за $x < 0$ и $f(x) = \ln x$, за $x > 0$, итд. У оба случаја је $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

з) Слично задатку *г)*: $f'(x) = 2\cos 2x$.

79. *а)* $f'_-(1) = -1$, $f'_+(1) = 1$. *б)* $f'_-(0) = -\infty = f'_+(0)$.

в) $f'_-(1) = \dfrac{1}{3} = f'_+(1)$. *г)* $f'_-(\pi) = -1 = f'_+(\pi)$.

80. *а)* $3x^2 - x$. *б)* $y = x^4 - 2x - x^{-2} \Rightarrow y' = 4x^3 - 2 + \dfrac{2}{x^3}$.

в) $y = x^3 - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = 3x^2 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. *г)* $3x^2 - 3^x \ln 3$. *д)* $\cos x - \sin x$.

ђ) $2\pi a + a$. *е)* $y = ax^{-\frac{2}{3}} - \pi x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = -\dfrac{2a}{\sqrt[3]{x^5}} + \dfrac{3\pi}{\sqrt{x^5}}$.

ж) $y = x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow y' = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$. *з)* $-\dfrac{\pi}{x^2}$. *и)* $\dfrac{4}{\sin^2 2x}$. *ј)* $y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y' = 0$.

к) 0 јер је $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

л) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$. *љ)* $(x+1)e^x$. *м)* $\arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

н) $e^x(\cos x - \sin x)$. *њ)* $3x^2 \ln x$. *о)* $(x^2 - x - 3)e^x$.

81. У свим задацима, између осталог, користићемо и правило за извод количника: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$. Дајемо резултате.

а) $\dfrac{1-x}{e^x}$. *б)* $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. *в)* $-\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^2}$. *г)* $\dfrac{2x}{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}$.

д) $\dfrac{4x^3(2b^2 - x^2)}{(b^2+x^2)^2}$. *ђ)* $\dfrac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$. *е)* $\dfrac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$.

ж) $\dfrac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$. *з)* $\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$. *и)* $-\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

ј) $\dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2}$. *к)* $\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$. *л)* $\dfrac{-2\cdot 10x\cdot\ln 10}{(1+10^x)^2}$. *љ)* $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

м) $y=\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos x+\cos x}=\dfrac{1+2\sin x\cos x-1}{\sin x+\cos x}=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x-$ $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}\Rightarrow y'=\cos x-\sin x+\dfrac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$.

82. *а)* $\dfrac{5}{2}$. *б)* $\dfrac{19}{16}$. *в)* 1. *г)* $\dfrac{17}{15}$. *д)* $\dfrac{a+1}{4}$. *ђ)* 1.

83. *а)* $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. *б)* $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\operatorname{ctg} x$.

в) $\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{1}{x\ln x}$. *г)* $-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$. *д)* $-\dfrac{2}{x\ln^3 x}$. *ђ)* $\dfrac{-1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}$. *е)* $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

ж) $\dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. *з)* $\dfrac{3}{x}\ln^2 x$. *и)* $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$. *ј)* $\dfrac{(3-x)x^2}{(1-x)^3}$. *к)* $-\sin 2x$.

л) $3x^2\cos x^3$. *љ)* $-12\sin 4x\cos^2 4x$. *м)* $-\dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$. *н)* $-\sin x\cdot\cos x(\cos x)$.

њ) $6\sin 2x-6x^2\cos x^3$. *о)* $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}}$. *п)* $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. *р)* $\dfrac{-2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.

с) $\dfrac{-2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}{1+x^2}$. *т)* $-\dfrac{1}{1+x^2}$. *ћ)* $\sin 2x\cdot\sin x^2+2x\sin^2 x\cdot\cos x^2$. *у)* $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

84. *а)* $y=(x+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)'=$ $-\dfrac{1}{3}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\dfrac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$.

б) $y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

в) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\left((\arcsin x)^2-1\right)}$. *г)* $y'=2^{3^x}\ln 2\cdot(3^x)'=2^{3^x}\cdot 3^x\cdot\ln 2\cdot\ln 3$.

д) $e^{\arcsin 2x}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. *ђ)* $\dfrac{-1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}$. *е)* $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

ж) $-\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. *з)* $\dfrac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$. *и)* $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. *ј)* $\arcsin x$.

к) $\dfrac{x^2}{1-x^4}$. *л)* $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$. *љ)* $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

м) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}}}\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{2(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)\cdot|x^2-1|}$.

Дакле: $y' = \dfrac{2}{x^2+1}$, за $|x|<1$ и $y' = \dfrac{-2}{x^2+1}$, за $|x|>1$. За $x=1$ и $x=-1$, y' не постоји.

н) $\dfrac{2}{\cos x}$. *њ)* $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

85. *а)* $y' = (1-x)e^{-x}$. Заменом, једнакост на десној страни прелази у: $x(1-x)e^{-x} = (1-x)xe^{-x}$.

б) $y' = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$, итд. *в)* $y' = -\dfrac{1}{x+1}$.

г) Видети задатак 84. *е)*.

д) $y' = -y^2(x+1)$, итд. *ђ)* $y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, итд.

86. *а)* $\dfrac{y}{y-x}$. *б)* $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$. *в)* $\dfrac{-y^2}{xy-1}$. *г)* $1+y^{-2}$. *д)* $\dfrac{1}{x+y-1}$.

ђ) $\dfrac{y}{x-y}$. *е)* $\dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. *ж)* $\dfrac{y(1-x^2-y^2)}{x(1+x^2+y^2)}$. *з)* $\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

87. *а)* $2(x-1)dx$. *б)* $e^x dx$. *в)* $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *г)* $\dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$. *д)* $\dfrac{-4x\,dx}{(x^2-1)^2}$.

ђ) $-2\sin 2x\,dx$. *е)* $\dfrac{2x}{x(2-\ln x)^2}$. *ж)* $(1+2x\operatorname{arctg} x)dx$.

88. *а)* $0,1$. *б)* $0,1025$. *в)* $1,6\ln 2$. *г)* $\Delta x = \dfrac{3}{180} = \dfrac{1}{60}$ rad. $\Delta f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \approx \dfrac{1}{30}$.

89. *а)* За функцију $y=\sqrt{x}$, важи: $\sqrt{x-\Delta x}-\sqrt{x} \approx \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x$. Узмимо да је уместо x број a^2, а уместо Δx нека буде x и добићемо: $\sqrt{a^2+x} \approx a+\dfrac{x}{2a}$.

б) $\sqrt[n]{a^n+x} = \sqrt[n]{a^n\left(1+\dfrac{x}{a^n}\right)} = a\sqrt[n]{1+\dfrac{x}{a^n}}$. За функцију $y=\sqrt[n]{x+\Delta x}$ и $x=1$, према формули за приближну вредност прираштаја функције, добијамо: $\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1+\dfrac{\Delta x}{n}$. У нашем случају је $\Delta x = \dfrac{x}{a^n}$, па је $\sqrt[n]{1+\dfrac{x}{a^n}} \approx 1+\dfrac{x}{na^n}$. Помножимо ову приближну једнакост са a и добићемо тражену релацију.

90. *а)* Према претходном задатку имамо: $\sqrt[3]{1+0,02} \approx 1+\dfrac{0,02}{3} = 1,0066\ldots$.

б) $\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{1024-24} = \sqrt[10]{2^{10}-24} \approx 2-\dfrac{24}{10\cdot 2^9} = 1,9955\ldots$.

в) $\sqrt[4]{2^4+1} \approx 2 + \dfrac{1}{4\cdot 2^3} = 2,03125.$

г) $\cos 61^\circ = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{\pi}{180} = 0,4849\ldots.$

д) $\sin 31^\circ = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{\pi}{180} = 0,515\ldots.$

ђ) $\operatorname{tg} 44^\circ = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{180}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}} = 0,965.$

е) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2} + 0,04\right) \approx 0,57\,\mathrm{rad}.$ *ж)* $0,81\,\mathrm{rad}.$ *з)* $-0,045.$

91. *а)* $30x^4 - 24.$ *б)* $6(x^2+1)(5x^2+1).$ *в)* $4e^{2x-1}.$
г) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}.$ *д)* $\dfrac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$ *ђ)* $2\operatorname{arctg} x + \dfrac{2x}{1+x^2}.$
е) $\dfrac{1}{4}e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\right).$ *ж)* $\dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$ *з)* $\dfrac{6x^2-2}{(1-x^2)^3}.$
и) $y' = \dfrac{2}{\sin x}$, па је $y'' = \dfrac{-2\cos x}{\sin^2 x}.$
ј) Видети први извод у задатку 84. *м)*: $y'' = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$, за $|x|<1$ и $y'' = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, за $|x|>1$. За $x=1$ и $x=-1$ не постоји y''.
к) $\dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{2x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

92. *а)* $(3-x)e^{-x}.$ *б)* $4\sin 2x.$ *в)* $6(1-x)^{-4}.$ *г)* $\dfrac{2}{(1+x)^3}.$
д) $\dfrac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}.$ *ђ)* $(12x+8x^3)e^{x^2}.$ *е)* $\dfrac{-2x^2-1}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$ *ж)* $\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$ *з)* $\dfrac{1}{(x+1)^3}.$

93. *а)* 7680. *б)* 0. *в)* 4. *г)* 6.

94. На пример *в)*: за $n=1$ је $y' = \dfrac{1}{1+x}$. Претпоставимо да је $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ и докажимо да таква формула важи за $n+1$. Диференцирањем ове претпоставке добијамо: $y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = \big((-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}\big)' = (-1)^{n-1}(n-1)!\cdot(-n)\cdot(1+x)^{-n-1} = (-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. Дакле, формула је тачна.

95. *а)* $y^{(n)} = (1-)^n e^{-x}.$ *б)* $y^{(n)} = 2^n\cos\left(n\dfrac{\pi}{2} + 2x\right).$
в) $y^{(n)} = (n-1)!(1-x)^{-n}.$

г) $y = \dfrac{2-(1-x)}{1-x} = \dfrac{2}{1-x} - 1$. Према претходном задатку $y^{(n)} = 2(n-1)!(1-x)^{-n}$.
д) 0. *ђ)* $n!$.
е) $y = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}$.
ж) За $n > 1$ је $y^{(n)} = -\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n}(2-x)^{-\frac{3n-1}{3}}$.
з) $y = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} = (1-x)^{-1} + (x+1)^{-1}$, итд. Даље слично задатку *в)*.
Решење: $y^{(n)} = (n-1)!(1-x)^{-n} + (-1)^n(n-1)!(1+x)^{-n}$.

96. Пресек са осом Ox добијамо за $y = 0$, тј. за $x - \dfrac{1}{x} = 0 \iff \dfrac{x^2-1}{x} = 0 \iff x = 1$ или $x = -1$. Даље је $y' = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, па је $y'(1) = y'(-1) = 2 = k$. Тангенте су: $y = 2(x-1)$ и $y = 2(x+1)$.

97. *а)* $y'(3) = -\dfrac{1}{9}$, $y(3) = \dfrac{2}{3}$, па је нормала: $27x - 3y - 79 = 0$.
б) Симетрала првог квадранта је права $y = x$. Пресечна тачка је решење система једначина $y = x \wedge y = -\sqrt{x} + 2$, итд. Решење је: $2x - y - 1 = 0$.
в) $2x + y - 4 = 0$ и $4x - y - 11 = 0$.

98. *а)* $4x+y+4 = 0$ и $2x-8y-15 = 0$. *б)* $x-4y+4 = 0$ и $4x+y-18 = 0$.
в) $y'(-2) = 0$, па је тангента $y = 5$, а нормала $x = -2$.
г) $y'(1) = \infty$, па је тангента нормална на осу Ox. Тангента је $x = 1$, а нормала је оса Ox: $y = 0$.
д) $y = 2x$, $2y = -x$.
ђ) У тачки $(1, 1)$ имамо: $2x + y - 3 = 0$ и $x - 2y + 1 = 0$, а у тачки $(-1, 1)$ биће: $2x - y + 3 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$.
е) $x - 2y - 1 = 0$ и $2x + y - 2 = 0$. *ж)* $6x + 2y - \pi = 0$ и $2x - 6y + 3\pi = 0$.

99. *а)* Коефицијент правца тангенте је $k = 0$, па из услова $y' = 0$, тј. $12x^3 + 12x^2 - 24x = 0$, налазимо апсцисе тачака у којима постављамо тангенте: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. Тангенте су: $y = 20$, $y = 15$ и $y = -12$.
б) $y = 0$, $y = 1$.
в) $k = 4$, тј. $y' = 4$, итд. Тангенте су: $4x - y - 4 = 0$ и $4x - y = 0$.
г) $5x + y - 2 = 0$.
д) Коефицијент правца дате праве је $k = \dfrac{1}{3}$, па мора бити $y' = -3$, итд. Тангента је $3x + y + 6 = 0$.

100. *а)* $x - y - 3e^{-2} = 0$. *б)* $y = 0$.

101. Коефицијент правца тетиве је $k = 2$, итд. Тангента је: $2x-y+1 = 0$, а додорна тачка је $T(2, 5)$.

102. Теме параболе је тачка $(3, -3)$. Једначина праве p је $y = -x$, итд. Једначина нормале је $4x - 4y - 21 = 0$.

103. Тангенте су $x + y = 0$ и $x - y = 0$.

104. Нормале: $x - 3y + 10 = 0$, $x - y + 1 = 0$ и $2x + 8y - 43 = 0$ пролазе кроз тачку $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

105. $y = 2\sqrt{x}$, па је $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$. и $y'(1) = 1$. Одсечак тангенте је $DT = \frac{2}{1}\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2} = DN$, једнак дужини нормале. Слично, добијамо субтангенту и субнормалу: $DP = DN = 2$.

106. $SN = |y \cdot y'|$, а $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ и $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

107. $y' = 1 - 2x$, па је $\operatorname{tg}\alpha = y'(0) = 1$, затим $\operatorname{tg}\beta = y'(1) = -1$ и $\operatorname{tg}\gamma = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Према томе, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$ и $\gamma = 0$ (тангента је паралелна оси Ox).

108. $\operatorname{tg}\varphi = y'(0)$. Решења су: *а)* и *б)* 45°; *в)* $\operatorname{arctg} 2$.

109. $y' = 5x^4 + 5 > 0$ за свако x, па је $\operatorname{tg}\varphi > 0$, тј. $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

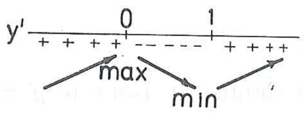
110. *а)* Једначине кривих одређују систем једначина који има решења: $x = \pm 3$, $y = \pm 2$. Из прве криве налазимо $y = \sqrt{x^2 - 5}$, па је $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$. Коефицијент правца тангенте у тачки са апсцисом $x = 2$ је $k_1 = \frac{3}{2}$. Друга има коефицијент $k_2 = -\frac{2}{3}$. Како је $k_1 \cdot k_2 = -1$, то је угао под којим се криве секу: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
б) Криве се додирују у тачки $(0, 0)$, а у тачки $(1, 1)$ секу под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.
в) $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. *г)* $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{6}{7}$. *д)* 45° и 90°. *ђ)* 45°.
е) $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. *ж)* 0 и $\operatorname{arctg} \frac{18}{31}$.

112. Функција је дефинисана за $x \in [0, 2]$. За $x \in (0, 1)$ је $y' > 0$, итд.

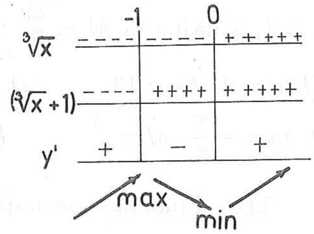
113. Одредимо знак y', итд.
а) $y' = 3(x^2 - 2x - 3)$, па је $y' > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ – ту функција

расте и $y' < 0$ за $x \in (-1,\, 3)$, па у том интервалу функција опада.
б) Расте за $x \in (-1,\, 0) \cup (1,\, +\infty)$, а опада за $x \in (-\infty,\, -1) \cup (0,\, 1)$.
в) Расте од $-\infty$ до 0, а опада од 0 до $+\infty$.
г) Опада за $0 < x < \dfrac{1}{2}$, а расте за $x > \dfrac{1}{2}$.
д) Функција је монотоно неопадајућа, јер је $y' = 1 - \sin x \geqslant 0$.
ђ) Расте за $x < -\dfrac{1}{2}$ и $x > \dfrac{11}{18}$, а опада за $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{11}{18}$.
е) За $x < 1$ расте, за $x > 1$ опада. *ж)* Опада за $x \neq 2$.
з) За $x < 0$ и $x > 2$ расте, а за $0 < x < 2$ опада.
и) Опада за $0 < x < 1$, расте за $x > 1$.

114. *а)* $y' = 6x^2 - 6x$. Знак првог извода и монотоност су приказани на сл. 5. Дакле $y_{\max} = 0$ за $x = 0$ и $y_{\min} = -1$ за $x = 1$.
б) $y_{\max} = 25$ за $x = -2$ и $y_{\min} = -2$ за $x = 1$.
в) $y_{\min} = 0$ за $x = 0$, затим $y_{\max} = 1296$ за $x = 6$ и $y_{\min} = 0$ за $x = 12$.



Сл. 5



Сл. 6

г) Први извод је $y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)$. Знак првог извода и монотоност приказани су на сл. 6. У тачки $x = 0$ први извод не постоји а y'_- и y'_+ теже ка $+\infty$. Локални екстремуми су $y_{\max} = 1$ за $x = -1$ и $y_{\min} = 0$ за $x = 0$.
д) $y_{\max} = -2$ за $x = 0$ и $y_{\min} = 2$ за $x = 2$. *ђ)* $y_{\max} = 0$ за $x = 0$.
е) $y' = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. За $x = 0$, y' не постоји (тежи ка $+\infty$). Међутим, $y' > 0$ за $x \in (-1,\, 0)$ и $x \in (0,\, 1)$, па $x = 0$ није тачка екстремума. За $x = -1$ је $y_{\min} = -\dfrac{4}{3}$ и $y_{\max} = \dfrac{2}{3}$ за $x = 1$.
ж) $y_{\max} = \sqrt{2}$ за $x = 0$.

115. *а)* Функција је дефинисана за $x + 1 > 0$, тј. за $x > -1$. Први извод је $y' = \dfrac{x}{x+1}$, па је $y' < 0$ за $x \in (-1,\, 0)$ и $y' > 0$ за $x > 0$. Дакле, $y_{\min} = 0$ за $x = 0$.

б) $y' > 0$, па је функција монотоно растућа и нема локалних екстремума.

в) $y_{\min} = -e^{-1}$ за $x = e^{-1}$. *г)* $y_{\max} = 4e^{-2}$ за $x = e^{-2}$ и $y_{\min} = 0$ за $x = 1$.

д) $y_{\min} = e$ за $x = 1$. *ђ)* $y_{\min} = 0$ за $x = 0$ и $y_{\max} = 4e^{-2}$ за $x = 2$.

116. *а)* Функција опада од 0 до $-\dfrac{1}{2}$ за $x < -1$, затим расте ид $-\dfrac{1}{2}$ до $\dfrac{1}{2}$ за $-1 < x < 1$ и опада од $\dfrac{1}{2}$ до 0 за $x > 1$. Дакле, најмања вредност функције је $m = -\dfrac{1}{2}$ за $x = -1$, а највећа $M = \dfrac{1}{2}$, за $x = 1$.

б) $y = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$, па је $m = \dfrac{1}{2}$ за $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, а $M = 1$ за $x = \dfrac{m\pi}{2}$, $k, m \in Z$.

117. *а)* $y' = 3x^2 - 3$, па је $y' > 0$ за $x \in \left[-\dfrac{3}{2},\, -1\right)$ и $x \in \left(1,\, \dfrac{5}{2}\right]$, а $y' < 0$ за $x \in (-1,\, 1)$. Довољно је, дакле, одредити вредност функције за $x = -\dfrac{3}{2}$, $x = -1$, $x = 1$ и $x = \dfrac{5}{2}$. Тако утврдимо да је најмања вредност $m = 1$ за $x = 1$, а највећа $M = \dfrac{89}{8}$ за $x = \dfrac{5}{2}$.

б) $m = 4$, $M = 13$. *в)* $m = 6$, $M = 10$. *г)* $m = -1$, $M = \dfrac{3}{5}$.

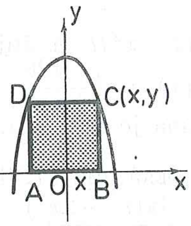
д) $m = -\dfrac{\pi}{2}$, $M = \dfrac{\pi}{2}$. *ђ)* $m = 0$, $M = \dfrac{\pi}{4}$.

118. Тражимо за које x функција $x^3 + x^4$ има минимум. Како је $y' = 3x^2 + 4x^3$ то је $y' < 0$ за $x > -\dfrac{3}{4}$, а $y' \geqslant 0$ за $x < -\dfrac{3}{4}$. Функција има минимум за $x = -\dfrac{3}{4}$ – то је тражени број.

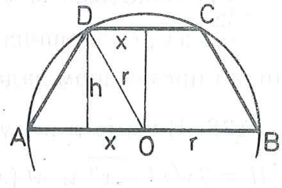
119. Нека је x cm дужина једне странице. Тада је друга $(15 - x)$ cm и површина је $P = x(15 - x) = 15x - x^2$. Ова функција има максимум за $x = \dfrac{15}{2}$, а то је страница квадрата обима 30 cm.

120. Према сл. 7 површина правоугаоника $ABCD$ је $P = AB \cdot BC = 2x \cdot y = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$. Површина је највећа за $x = 2$, па је тражени правоугаоник одређен тачком $C\,(2,\, 8)$.

121. Нека је r полупречник круга и $2x$ мања основица трапеза. Тада је $h = \sqrt{r^2 - x^2}$, па је $P = (r + x) \cdot h = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$, сл. 8. Одавде је $P' = \dfrac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $0 < x < r$. Површина је максимална за $x = \dfrac{r}{2}$, па је троугао OAD једнакостраничан. Углови трапеза су $60°$ и $120°$.

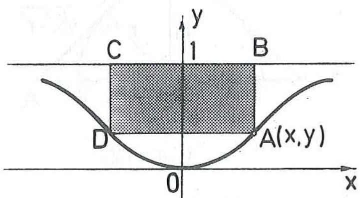


Сл. 7

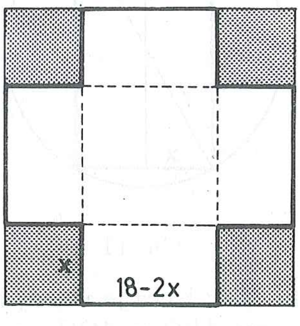


Сл 8

122. Одредимо координате тачке A, сл. 9, тако да површина правоугаоника $ABCD$ буде највећа. Према слици је $P = 2x(1-y) = 2x\left(1 - \dfrac{x^2}{x^2+1}\right) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, па је $P' = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, итд. Површина је максимална за $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$.



Сл. 9



Сл 10

123. Нека је страница изрезаног квадрата x cm. Савијањем по испрекиданим линијама, сл. 10, добићемо кутију дубине x cm и квадратне базе ивице $(18-2x)$ cm. Тада је $V = x\cdot(18-2x)^2$, итд. Решење је $x = 3$ cm.

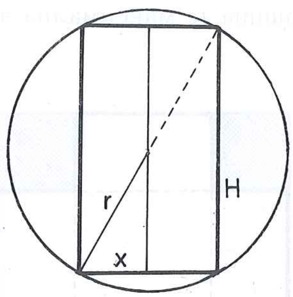
124. Тражена права је $y - 4 = k(x-1)$. Да би она секла позитивне делове оса Ox и Oy, мора бити $k < 0$. Одсечци су $4 - k$ и $\dfrac{k-4}{k}$, итд. Решење је $k = -2$.

125. Постоје две такве тачке: $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ и $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

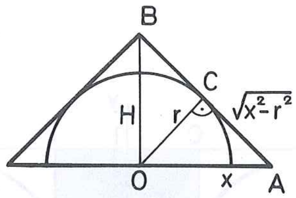
126. Нека је x основна ивица. Тада је $V = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$, па је висина призме $H = \dfrac{4V\sqrt{3}}{3x^2}$. Површина призме је $P(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{4V\sqrt{3}}{x}$, па је $P'(x) = x\sqrt{3} - \dfrac{4V\sqrt{3}}{x^2} = \dfrac{\sqrt{3}(x^3-4V)}{x^2}$, итд. Минимална површина је за $x = \sqrt[3]{4V}$.

127. Означимо са x основну ивицу. Тада из $V = 32 = x^2 H$, добијамо $H = \dfrac{32}{x^2}$, па је површина која се покрива плочицама: $P(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$, итд, слично претходном задатку. Решење је $x = 4\,\mathrm{m}$, а дубина је $H = 2\,\mathrm{m}$.

128. Нека је x полупречник, H висина уписаног ваљка, сл. 11. Тада је $H = 2\sqrt{r^2-x^2}$ и $M(x) = 4\pi x\sqrt{r^2-x^2}$, па је $M'(x) = \dfrac{4\pi(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$, итд. $M_{\max} = 2r^2\pi$ за $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ и $H = r\sqrt{2}$.



Сл. 11

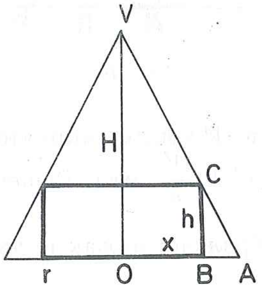


Сл. 12

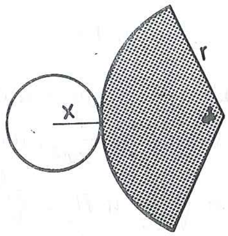
129. Нека је x полупречник купе и H висина, сл. 12. Правоугли троуглови ABO и AOC су слични, па важи: $OA:OB = AC:OC$, тј. $x:H = \sqrt{x^2-r^2}:r$, одакле је $H = \dfrac{xr}{\sqrt{x^2-r^2}}$. Запремина купе је $V(x) = \dfrac{x^3\pi r}{3\sqrt{x^2-r^2}}$, итд. слично претходним задацима. Решење: $x = r\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ и $H = r\sqrt{3}$.

130. Слично задатку 128. Полупречник ваљка је $r\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, а висина $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$, где је r полупречник лопте. Запремина ваљка је $\dfrac{4}{3}r^3\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = V\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, јер је дата запремина лопте $V = \dfrac{4}{3}r^3\pi$.

131. Правоугли троуглови AOV и ABC на сл. 13 су слични, па је $OA\colon OB = BA\colon BC$, односно $r\colon H = (r-x)\colon h$, где су x и h редом полупречник и висина уписаног ваљка. Одавде добијамо $h = \dfrac{H(r-x)}{r}$, па је запремина ваљка $V(x) = x^2\pi h = \dfrac{x^2\pi H(r-x)}{r}$, итд, слично претходним задацима. Полупречник ваљка је $x = \dfrac{2}{3}r$ и висина $h = \dfrac{1}{3}H$. Дакле $V_{\max} = \dfrac{4}{27}r^2\pi H$, што износи $\dfrac{4}{9}$ запремине дате купе.



Сл. 13



Сл. 14

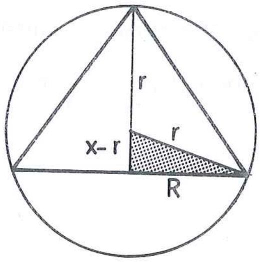
132. На сл. 14 је „развијена купа“, чији је омотач дати исечак. Нека је α централни угао исечка. Одговарајући лук, $\dfrac{r\pi\alpha}{180}$, једнак је обиму базе купе. Тако из $2x\pi = \dfrac{r\pi\alpha}{180}$, добијамо: $\alpha = \dfrac{360x}{r}$. Изводница купе је $s = r$, па је висина $H = \sqrt{s^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$. Према томе, запремина купе је $V(x) = \dfrac{1}{3}x^2\pi\sqrt{r^2 - x^2}$, итд. Добијамо $V_{\max}$ за $x = r\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, па је $\alpha = 360^\circ\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

133. Видети претходни задатак: $V_{\max} = \dfrac{2\pi s^3\sqrt{3}}{27}$.

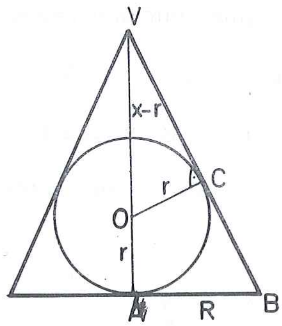
134. Нека је висина купе x, а полупречник базе R. Из осенченог троугла на сл. 15 налазимо: $R^2 = r^2 - (x-r)^2 = 2rx - x^2$, па је $V(x) = \dfrac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$, итд. Решење је $x = \dfrac{4}{3}r$.

135. Према сл. 16, ако је висина купе x, имамо: $OV = x - r$ и $CV = \sqrt{(x-r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2rx}$. Из сличности троуглова VAB и VCO добијамо $AB\colon AV = OC\colon CV$, односно $R\colon x = r\colon\sqrt{x^2 - 2rx}$, па је $R = \dfrac{xr}{\sqrt{x^2 - 2rx}}$.

Дакле, запремина купе је $V = \dfrac{R^2\pi x}{3} = \dfrac{\pi r^2 x^2}{3(x-2r)}$, итд. Решење је: $x = 4r$.



Сл. 15



Сл. 16

136. Нека је x полупречник и H висина ваљка. Из дате запремине налазимо $H = \dfrac{V}{\pi x^2}$, па је $P(x) = 2x^2\pi + 2x\pi H = 2\pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$, итд. Решење је $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ и $H = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{8V}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = 2x$. Тражени ваљак је тзв. једнакостранични ваљак.

137. Слично задатку 131. Полупречник купе је $x = \dfrac{3r}{2}$, а висина $h = 3H$.

138. *а)* $y' = 3x^2+p$, па ако је $p < 0$ први извод има две нуле: $x_1 = \sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$. На основу знака y' закључујемо да је $M = f(x_2) = x_2^3 + px_2 + q = q - \dfrac{2}{3}p\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ и $m = f(x_1) = q + \dfrac{2}{3}p\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$. Непосредним множењем уверавамо се да је $Mm = q^2 + \dfrac{4}{27}p^3$.

б) Из $f(-2) = 0$, добијамо услов $q - 2p - 8 = 0$, а из $M - m = 4$ добијамо: $-\dfrac{p}{3}\sqrt{\dfrac{-p}{3}} = 1$. Одавде је $p^3 = -27$, па је $p = -3$ и $q = 2$.

139. *а)* Полазимо од збира геометријске прогресије: $1 + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. Диференцирањем ове једнакости добијемо: $S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

б) Полазимо од $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1 - x^{2n+2}}{x^2 + 1}$. Решење је:

$S_2 = -\dfrac{2}{(x^2+1)^2}(nx^{2n+3} + (n+1)x^{2n+1} + x)$.

в) Формулу добијену у решењу задатка *а)* за збир S_1, помножимо са x. Добићемо: $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$. Диференцирањем последње једнакости добићемо: $S_3 = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = \dfrac{n(x+1)x^{n+2} - n(2n+3)x^{n+1} + (n+1)x^2 - 1}{(x-1)^3}$.

140. Ако је функција једнака константи њен извод је једнак нули, а важи и обрнуто. У нашем случају је $y' = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{2}{x^2+1}$, за $|x| > 1$, тј. $y' = 0$. (Видети решење задатка 84. м).

141. *а)* $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ за $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Како је $y'' = 6x - 12$ и $y''(1) = -6 < 0$, а $y''(3) = 6 > 0$, то је $y_{\max} = f(1) = 4$ и $y_{\min} = f(3) = 0$.
б) $y_{\min} = 0$ за $x = 0$, $y_{\max} = 1$ за $x = 1$ и $y_{\min} = 0$ за $x = 2$.
в) $y_{\min} = e$ за $x = e$. *г)* $y_{\min} = 0$ за $x = 0$ и $y_{\max} = 4e^{-2}$ за $x = 2$.
д) $y_{\max} = \dfrac{5}{4}$ за $x = \dfrac{3}{4}$. *ђ)* $y_{\min} = -1$ за $x = -1$ и $y_{\max} = 1$ за $x = 1$.

142. $y' = k\cos x + \cos 3x$. Треба да буде $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$, тј. $k\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos\pi = 0 \Rightarrow \dfrac{k}{2} - 1 = 0$. Одавде је $k = 2$. Како је $y'' = -2\sin 2x - 3\sin 3x$, то је $y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$, па је $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = y_{\max} = \sqrt{3}$.

143. $f'(x) = \dfrac{a}{x} + 2bx + 1$. Из $f(1) = 0$ и $f(2) = 0$ добијамо: $a + 2b + 1 = 0 \wedge \dfrac{a}{2} + 4b + 1 = 0$. Решење овог система једначина је $a = -\dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{1}{6}$, па је $f(x) = -\dfrac{2}{3}\ln x - \dfrac{1}{6}x^2 + x$ и $f'(x) = -\dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3}x + 1$. Према томе $f''(x) = \dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{3}$. Из услова $f''(1) = \dfrac{1}{3} > 0$ и $f''(2) = -\dfrac{1}{6} < 0$, закључујемо да је $f(1) = y_{\min}$, а $f(2) = y_{\max}$.

144. *а)* $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0$ за $x \neq 0$. *б)* $y'' = -\dfrac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} < 0$ за $x \neq \pm 1$.

145. *а)* $y'' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0$. *б)* $y'' = 12x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$, за $x \neq 0$.

146. $y'' = 20x^3 - 30x - 30$, па је $y''(1) < 0$ – функција је конвексна и $y''(3) > 0$ – функција је конкавна.

147. *а)* $P(2, 12)$ је превојна тачка.

б) Превојне тачке су нуле функције.

в) Други извод $y'' = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}$ нема нула, али мења знак у тачки чија је апсциса $x = -2$. Стога је $(-2,\, 0)$ превојна тачка.

г) Други извод не постоји у тачкама $\left(-1,\, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\left(1,\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, али у њима y'' мења знак. Поред ове две тачке, трећа превојна тачка је координатни почетак.

148. *а)* $y'' > 0$ за $\forall x$ – функција је конвексна и нема превојних тачака.
б) и *в)* Као претходни задатак.
г) Превојна тачка је $(1, -1)$. За $x < 1$ је конкавна, а за $x > 1$ конвексна.
д) Нема превојних тачака. Функција је конвексна за $x > -3$, а конкавна за $x < -3$.
ђ) Функција је конвексна за $x > e^{-\frac{3}{2}}$, а конкавна за $x \in (0,\, e^{-\frac{3}{2}}$. Превојна тачка је $\left(e^{-\frac{3}{2}},\, -\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)$.
е) Конкавна је за $x < -1$ и за $x > 1$, а конвексна за $-1 < x < 1$. Превојне тачке су $(-1, \ln 2)$ и $(1, \ln 2)$.
ж) Функција је конвексна за $x > 0$, а конкавна за $x < 0$. Превојна тачка је $(0, 0)$.

149. $a = -\dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$.

150. $a = -\dfrac{20}{3}$, $b = \dfrac{4}{3}$. Превојне тачке су још $(0, 0)$ и $\left(-2 - \dfrac{5}{2}\right)$.

151. *а)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}(-\sin x) = 1 \cdot 0 = 0.$

б) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$

в) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{5x^4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{20x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{60x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{120x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{120} = +\infty.$

г) 5.

д) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$

ђ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \cos x} =$
$\displaystyle 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{\sin x} = 3.$

е) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \cdot 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2\cos x}=1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}.$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{-\dfrac{1}{e^{-x}+1}}=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{e}}=\dfrac{2e}{e-1}.$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3(1+x^2)}=\dfrac{1}{3}.$

152. *а)* Не важе услови за примену правила, јер израз није облика $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sin x)$ не постоји!

в) Маколико пута диференцирали бројилац и именилац, израз задржава облик $\dfrac{\infty}{\infty}$. *)

153. *а)* $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=-0.$

в) Слично претходном задатку. Резултат је: -0.

г) $+\infty$.

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

ђ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{1-x}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1}\cdot 1=0.$

154. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\cdot 1,$

па даље, применом Лопиталовог правила добијамо резултат $\dfrac{1}{3}$.

б) $\dfrac{1}{2}$. *в)* $\dfrac{1}{5}$. *г)* 0.

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$, итд. Резултат: $\dfrac{1}{2}$.

ђ) $\dfrac{1}{2}$.

155. *а)* Нека је $m=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$. Тада је $\ln m=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2}\cdot\ln(\cos x)=$

*) Задаци б) и в) се једноставно решавају без примене Лопиталовог правила. Обе границе су 1.

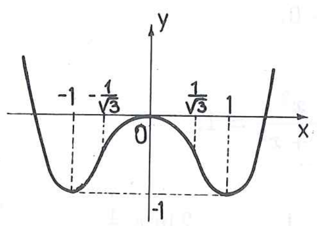
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\cos x} = -1$. Из $\ln m = -1$, добијамо: $m = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}} = e^{-1}$.

б) 1. *в)* e^{-2}. *г)* 1. *д)* e^{-1}.

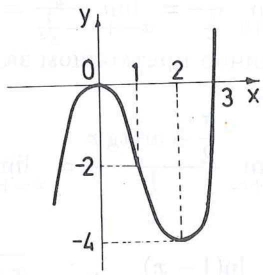
ђ) $\ln m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}\cdot\dfrac{-1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{1+x^2} = -1$. (Видети задатак 153. *д)*). Решење је e^{-1}.

156. *а)* $x \in (-\infty, +\infty)$; функција је парна; нуле су $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ $x = -\sqrt{2}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Нема асимптота. $y_{\min} = -1$ за $x = -1$, $y_{\max} = 0$ за $x = 0$ и $y_{\min} = -1$ за $x = 1$. Превојне тачке су $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{5}{9}\right)$ и $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{5}{9}\right)$. График је на сл. 17.



Сл. 17



Сл. 18

б) $x \in (-\infty, +\infty)$. Нуле су $x = 0$ и $x = 3$, $y > 0$ за $x > 3$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Нема асимптота. $y_{\max} = 0$ за $x = 0$ и $y_{\min} = -4$ за $x = 2$. Превојна тачка је $(1, -2)$. График је на сл. 18.

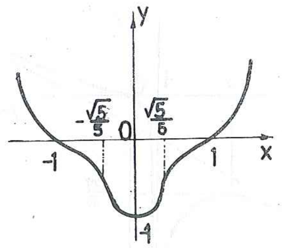
в) Слично претходном задатку.

г) $x \in (-\infty, +\infty)$; парна је. $y = 0$ $x = 1$ и за $x = -1$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Нема асимптота. $y_{\min} = -1$ за $x = 0$. Превојне тачке су $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{64}{125}\right)$ и $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{64}{125}\right)$. График је на сл. 19.

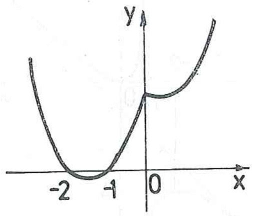
д) Слично задатку 156. *а)*.

ђ) Слично задатку 156. *б)*.

е) За $x \leqslant 0$ је $y = x^2 + 3x + 2$, а за $x =\geqslant 0$ $y = x^2 - x + 2$. График је приказан на сл. 20.



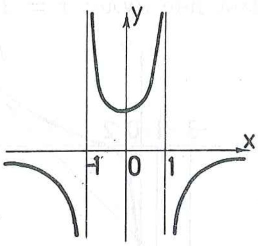
Сл. 19



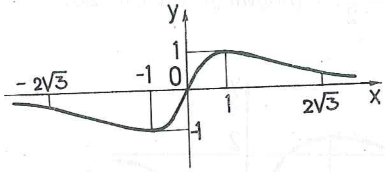
Сл. 20

ж) Слично претходном задатку.
з) $y=|x+1|+|x-2|+x$, итд.
и) $y=x+2$ за $x>1$ и $y=-x-2$ за $x<1$.

157. *а)* Дефинисана за $x \neq 1$ и $x \neq -1$. Парна је. $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$, па је права $y=0$ хоризонтална асимптота с обе стране. Косих асимптота нема. Вертикалне асимптоте су $x=1$ и $x=-1$. При том је
$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{(1-1+0)2}=\frac{1}{+0\cdot 2}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to1+0}\frac{1}{(1-x)(1+x)}=-\infty.$$
Слично $y\to-\infty$ кад $x\to-1-0$ и $y\to+\infty$ кад $x\to-1+0$. $y'=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$, $y''=\dfrac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^3}$. Нема максимума, ни превојних тачака и $y_{\min}=1$ за $x=0$. График је на сл. 21.



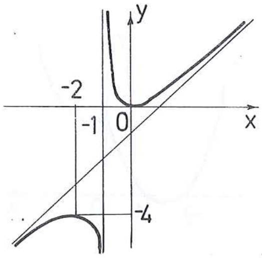
Сл. 21



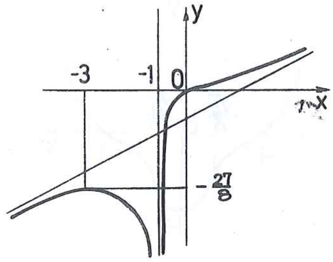
Сл. 22

б) Дефинисана за свако x, $y=0$ је хоризонтална асимптота с обе стране. Функција је непарна. $y_{\min}=-1$ за $x=-1$, и $y_{\max}=1$ за $x=1$. Превојне тачке се $(0,0)$, $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. График је на сл. 22.

в) Дефинисана за $x \neq -1$; $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$. Права $x = -1$ је вертикална асимптота, а права $y = x - 1$ је коса асимптота. $y_{\max} = 4$ за $x = -2$, а $y_{\min} = 0$ за $x = 0$, сл. 23.

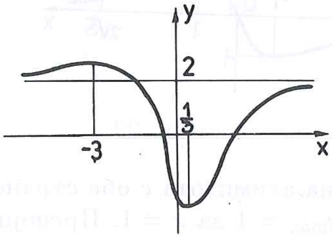


Сл. 23

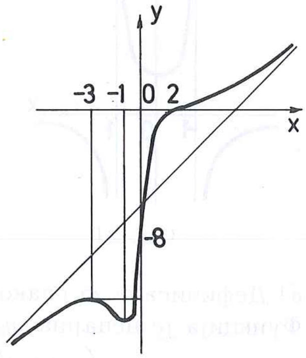


Сл. 24

г) и *д)* Слично примеру решеном пре задатка 156.
ђ) Није дефинисана за $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$ и ту има вертикалне асимптоте. Има косу асимптоту $y = -x$. $y_{\max} = -\dfrac{9}{2}$ за $x = 3$ и $y_{\min} = \dfrac{9}{2}$ за $x = -3$. Непарна је и има превојну тачку $(0, 0)$.
е) Слично задатку 157. *в)*. Дефинисана за $x \neq 1$, има вертикалну асимптоту $x = 1$ и косу $y = x - 1$. $y_{\max} = -2$ за $x = 0$ и $y_{\min} = 2$ за $x = 2$, итд.
ж) Дефинисана за $x \neq -1$. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3}{2(x+1)} = -\infty$; права $x = -1$ је вертикална асимптота. Коса асимптота је $y = \dfrac{1}{2}x - 1$. $y_{\max} = -\dfrac{27}{8}$ за $x = -3$. Минимума нема. Превојна тачка је $(0, 0)$. График је на сл. 24.
з) Дефинисана за свако $x \in R$. Има са,о хоризонталну асимптоту $y = 2$, јер је $\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} y = 2$. $y' = \dfrac{3x^2 + 8x - 3}{(x^2+1)^2}$, па је $y_{\max} = \dfrac{5}{2}$ за $x = -3$ и $y_{\min} = -\dfrac{5}{2}$ за $x = \dfrac{1}{3}$. Има три превојне тачке. Има две нуле: $x = 2$ и $x = -\dfrac{1}{2}$. График је на сл. 25.



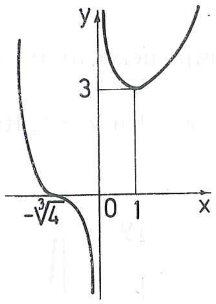
Сл. 25



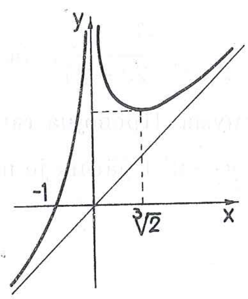
Сл. 26

и) Дефинисана за $\forall x \in R$. $y = 0$ за $x = 2$. Има само косу асимптоту $y = x - 6$. $y_{\max} = -\dfrac{25}{2}$ за $x = -3$ и $y_{\min} = -\dfrac{27}{2}$ за $x = -1$. Има три превојне тачке, међу њима $(2, 0)$ – видети сл. 26.

158. *а)* Дефинисана за $x \neq 0$. Кад $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, у оба случаја $y \to +\infty$. $y = 0$ за $x = -\sqrt[3]{4}$. $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = -\infty$, па је $x = 0$ вертикална асимптота. Нема косих ни хоризонталних асимптота. Расте за $x > \dfrac{1}{2}$, $y_{\min} = 3$ за $x = \dfrac{1}{2}$, максимума нема, а нула функције је и превојна тачка. График је на сл. 27.



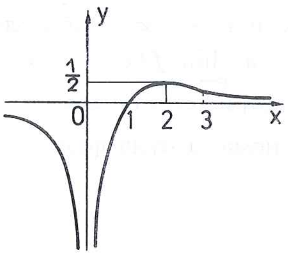
Сл. 27



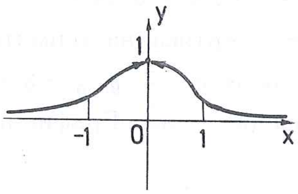
Сл. 28

б) Дефинисана за $x \neq 0$, непарна. Нема нула. $y \to +\infty$ $x \to +0$ и $y \to -\infty$ кад $x \to -0$. Вертикална асимптота је $x = 0$, а коса $y = 3x$. Нема превојних тачака, $y_{\max} = -4$ за $x = -1$ и $y_{\min} = 4$ за $x = 1$.
в) Дефинисана за $x \neq 0$. Нула функције $x = -1$. Кад $x \to 0$ тада $y \to +\infty$. Има вертикалну асимптоту $x = 0$ и косу $y = x$. $y_{\min} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ за $x = \sqrt[3]{2}$. Функција је конвексна. График је дат на сл. 28.
г) Дефинисана за $x \neq 0$. За $x = 1$ је $y = 0$. Кад $x \to 0$, $y \to -\infty$. Асимптоте су $x = 0$ и $y = 0$. Максимум је $y_{\max} = \dfrac{1}{2}$ за $x = 2$, а превојна тачка $\left(3, \dfrac{9}{4}\right)$. График је на сл. 29.

159. *а)* $y = \dfrac{x}{x(x^2+3)}$. За $x \neq 0$ је $y = \dfrac{1}{x^2+3}$. Нема других прекида, осим у тачки $x = 0$. Кад $x \to 0$, тада $y \to 1$. Нема нула ни екстремума. $y'' = \dfrac{6x^2-6}{(x^2+3)^2}$ и превојне тачке су $\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$ и $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$. Кад $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, тада $y \to 0$, па је оса Ox хоризонтална асимптота. На графику, сл. 30, прекид у тачки $x = 0$ означен је стрелицама.

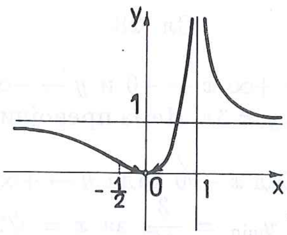


Сл. 29

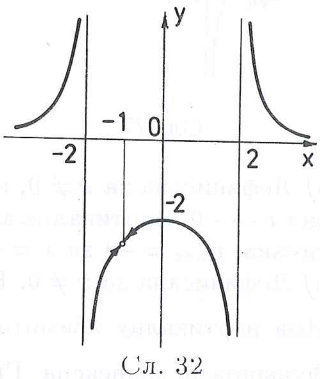


Сл. 30

б) $y = \dfrac{x^3}{x(x^2-2x+1)}$. За $x \neq 0$ је $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. Функција нема нула, ни екстремума. Превојна тачка је $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{9}\right)$. Асимптоте су $x = 1$ и $y = 1$. Кад $x \to 0$, $y \to 0$. График је на сл. 31.



Сл. 31

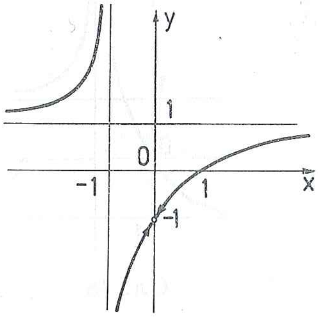


Сл. 32

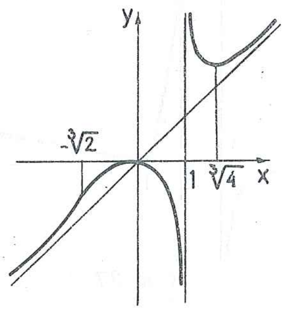
в) $y = \dfrac{8(x+1)}{(x+1)(x^2-4)} = \dfrac{8}{x^2-4}$, за $x \neq -1$. Није дефинисана још за $x = 2$ и $x = -2$. Кад $x \to 1$, $y \to -\dfrac{8}{3}$. Асимптоте су $x = -2$, $x = 2$ и $y = 0$. Превојних тачака нема, а $y_{\max} = -2$ за $x = 0$. График је на сл. 32.

г) $y = \dfrac{x(x^2-1)}{x(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{x+1}$, за $x \neq 0$ и $x \neq -1$. Нула функције је $x = 1$. Асимптоте су $x = -1$ и $y = 1$. Функција је растућа, нема локалних екстремума ни превојних тачака. Кад $x \to 0$, $y \to -1$. График је на сл. 33.

160. *а)* $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$, дефинисана је за $x \neq 1$. Има нулу $x = 0$. Кад $x \to 1-0$, $y \to -\infty$, а кад $x \to 1+0$, $y \to +\infty$. Асимптоте су $x = 1$ и $y = x$. Локални екстремуми су $y_{\max} = 0$ за $x = 0$ и $y_{\min} = \dfrac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ за $x = \sqrt[3]{4}$. Превојна тачка је $\left(-\sqrt[3]{2}, \dfrac{-2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$, видети сл. 34.



Сл. 33

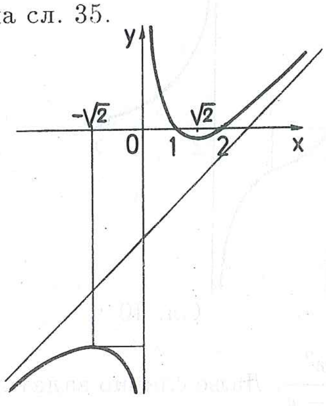


Сл. 34

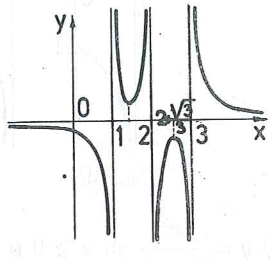
б) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$, итд. слично задатку 158. *а)*.

в) Слично примеру решеном на почетку ове главе.

г) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x} = x - 3 + \dfrac{2}{x}$, слично задатку 157. *в)*. Није дефинисана за $x = 0$. Нуле функције су $x = 1$ и $x = 2$. Асимптоте су $x = 0$ и $y = x - 3$. $y_{\max} = -2\sqrt{2}-3$ за $x = -\sqrt{2}$ и $y_{\min} = 2\sqrt{2}-3$ за $x = \sqrt{2}$. График је приказан на сл. 35.



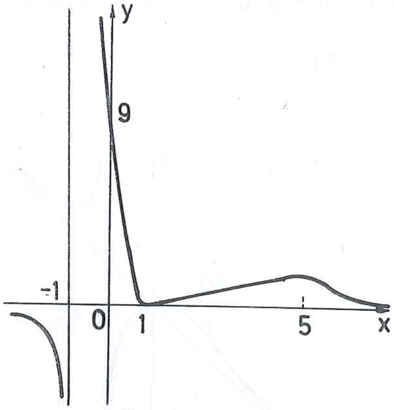
Сл. 35



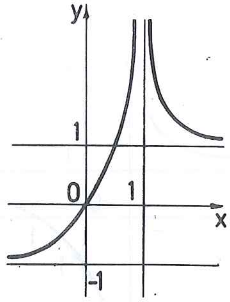
Сл. 36

д) Дефинисана за $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$. Асимптоте су $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и $y = 0$, итд. График видимо на сл. 36.

ђ) Дефинисана за $x \neq -1$; $y = 0$ за $x = 1$. Асимптоте су $x = -1$ и $y = 0$. Локални екстремуми су $y_{\min} = 0$ за $x = 1$ и $y_{\max} = \dfrac{2}{3}$ за $x = 5$. Превојне тачке су тачке са апсцисама $5 \pm 2\sqrt{3}$. График је на сл. 37.



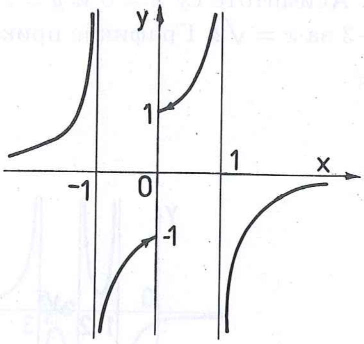
Сл. 37



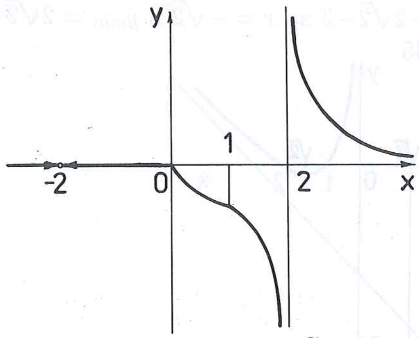
Сл. 38

161. *а)* $y = \dfrac{x}{x-1}$ за $x > 1$ и $y = \dfrac{x}{1-x}$ за $x < 1$. (Видети и задатак 159. *г)*. Крива има две хоризонталне асимптоте: десну $y = 1$, леву $y = -1$ и вертикалну $x = 1$. График је на сл. 38.

б) За $x > 0$ и $x \neq 1$ је $y = \dfrac{1}{1-x^2}$, а за $x < 0$ и $x \neq -1$ је $y = \dfrac{1}{x^2-1}$. (Видети и задатак 157. *а)*. График видимо на сл. 39.



Сл. 39



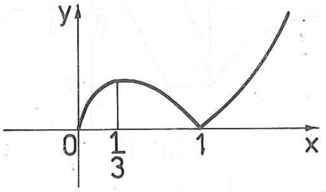
Сл. 40

в) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ за $x \geqslant 0$ и $x \neq 1$, а за $x < 0$ је $y = \dfrac{x^2}{1-x}$. Даље слично задатку 157. *б)*.

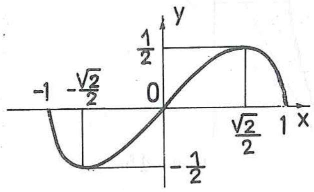
г) Функција није дефинисана за $|x^2-1|-3=0$, тј. за $x^2-1=3$ или $x^2-1=-3$, одакле је $x = 2$ или $x = -2$. То су тачке прекида. Према дефиницији апсолутне вредности је $y = 0$ за $x < -2$ и $-2 < x \leqslant 0$. За $0 < x \leqslant 1$ је

$y = \dfrac{2x}{-x^2-2}$, па је $f(1) = -\dfrac{2}{3}$. У овом интервалу је $y' = \dfrac{2x^2-4}{(x^2+2)^2} < 0$ и кад $x \to +0$ $y' \to -1$. Други извод је негативан за $0 < x \leqslant 1$, па је функција конвексна. (Видети сл. 40.) За $1 \leqslant x < 2$ и $x > 2$ је $y = \dfrac{2x}{x^2-4}$. Тада је $y' = \dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} < 0$, па је функција опадајућа, а $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2-4} = 0$. Права $x = 0$ је десна хоризонтална асимптота. Тачка $\left(1, -\dfrac{2}{3}\right)$ је превојна тачка. Локалних екстремума нема.

162. *а)* $y = (1-x)\sqrt{x}$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $y = (x-1)\sqrt{x}$ за $x \geqslant 1$. Нуле функције су $x = 0$ и $x = 1$. Конкавна је за $0 < x < 1$, а конвексна за $x > 1$. Екстремуми: $y_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ за $x = \dfrac{1}{3}$ и $y_{\min} = 0$ за $x = 1$. Превојна тачка је $(1, 0)$. График је на сл. 41.

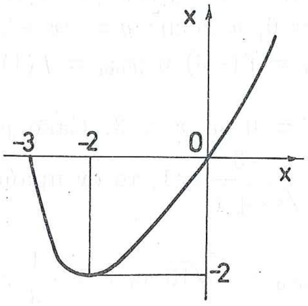


Сл. 41

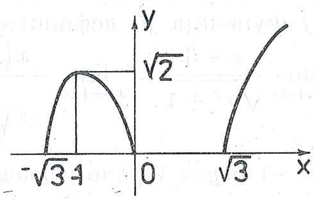


Сл. 42

б) Функција је дефинисана за $-1 \leqslant x \leqslant 1$. За $-1 \leqslant x \leqslant 0$ је $y = -x\sqrt{1-x^2}$, а за $0 \leqslant x \leqslant 1$ је $y = x\sqrt{1-x^2}$. График је на сл. 42.
в) Функција је дефинисана за $x \geqslant -3$. Има нуле $x = -3$ и $x = 0$; конвексна је. $y_{\min} = -2$ за $x = -2$. График је на сл. 43.



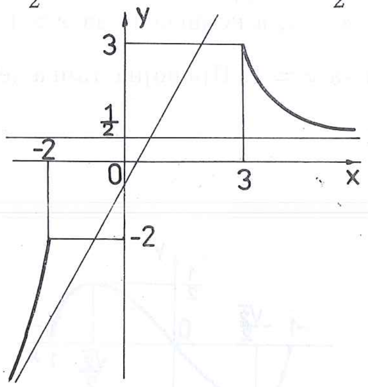
Сл. 43



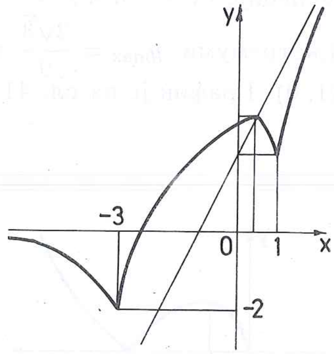
Сл. 44

г) Дефинисана је за $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 0$ и $x \geqslant \sqrt{3}$, ненегативна у целој области дефинисаности. Нуле функције су $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ и $x=\sqrt{3}$. Минимуми су нуле функције, а $y_{\max}=\sqrt{2}$ за $x=-1$. Тангенте у нулама су вертикалне $(y'\to\infty)$. Други извод је негативан, па је функција конкавна, сл. 44.

д) Област дефинисаности је $x\leqslant -2$ и $x\geqslant 3$ и $f(-2)=-2$, $f(3)=3$. Функција нема нула, јер једначина $x-\sqrt{x^2-x-6}$ нема решења. $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\frac{1}{2}$, па је $y=\frac{1}{2}$ десна хоризонтална асимптота. Кад $x\to-\infty$, тада $y\to-\infty$, али је $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2-x-6}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-|x|}{x}=2$. Сем тога $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-2x)=-\frac{1}{2}$, па је права $y=2x-\frac{1}{2}$ лева коса асимптота, итд, видети сл. 45.



Сл. 45



Сл. 46

ђ) Слично претходном задатку. Функција има нулу $x=\frac{1}{8}$. Лева асимптота је $y=-4$, а десна $y=2x$, итд.

е) Слично задацима *д)* и *ђ)*. Због $|x^2+2x-3|$, функција је дефинисана за свако $x\in R$, али је $y=x+1+\sqrt{-(x^2+2x-3)}$ за $-3\leqslant x\leqslant 1$ и $y=x+1+\sqrt{x^2+2x-3}$ за $x\notin(-3,1)$. О овоме морамо водити рачуна код израчунавања лимеса и извода. Даље је $f(-3)=-2$ и $f(1)=2$. Нула функције је $x=-1-\sqrt{2}$. Лева асимптота је $y=0$, а десна $y=2x+2$. Локални екстремуми су $y_{\max}=f(-1+\sqrt{2})$, $y_{\min}=f(-3)$ и $y_{\min}=f(1)$. Функција је конкавна, сл. 46.

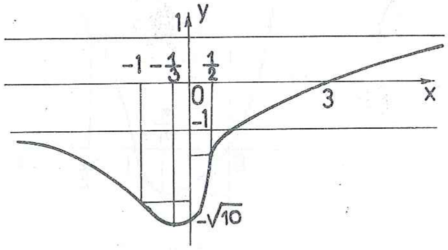
ж) Функција је дефинисана за свако $x\in R$. $y=0$ за $x=3$. Како је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}=1,$$

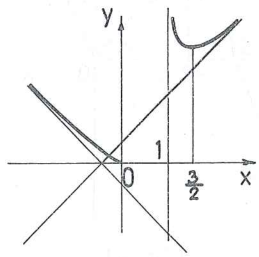
то су праве $y=-1$ и $y=1$ редом лева и десна асимптота. $y_{\min}=-\sqrt{10}$ за $x=-\frac{1}{3}$, а превојне тачке су $(-1,-2\sqrt{2})$ и $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$. Видети сл. 47.

з) Дефинисана за $x<-1$ и $x>1$. Нула функције је $x=2$. Праве $y=-1$ и

$y=1$ су лева и десна асимптота. Нема екстремума ни превојних тачака. Вертикалне асимптоте су $x=1$ и $x=-1$, итд.



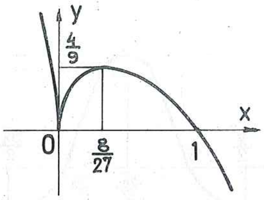
Сл. 47



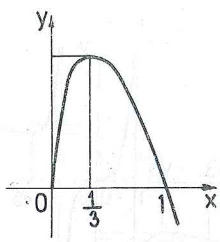
Сл. 48

и) $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ за $x>1$ и $y=-x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ за $x\leqslant 0$. Асимптоте су $x=1$, $u=x+\dfrac{1}{2}$ (десна) и $y=-x-\dfrac{1}{2}$ (лева). $y_{\min}=0$ за $x=0$ и $y_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ за $x=\dfrac{3}{2}$. Крива је конвексна, сл. 48.

163. *а)* Функција је дефинисана за свако $x\in R$. Нуле су $x=0$ и $x=1$. Кад $x\to+\infty$, тада $y\to-\infty$ и обрнуто. $y_{\min}=0$ за $x=0$ и $y_{\max}=\dfrac{4}{9}$ за $x=\dfrac{8}{27}$. Функција је конкавна, сл. 49.



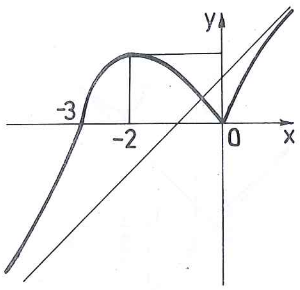
Сл. 49



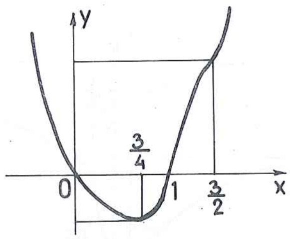
Сл. 50

б) Дефинисана за $x\geqslant 0$. Нуле су $x=0$ и $x=1$. $y_{\min}=0$ за $x=0$ и $y_{\max}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ за $x=\dfrac{1}{3}$. Функција је конкавна, сл. 50.

в) Дефинисана за $\forall x\in R$. Нуле су $x=0$ и $x=-3$. Има с обе стране асимптоту $y = x + 1$. Екстремуми су $y_{\max} = \sqrt[3]{4}$ за $x = -2$ и $y_{\min} = 0$ за $x = 0$. Превојна тачка је $(-3,\ 0)$. Функција је конвексна за $x < -3$, сл. 51.



Сл. 51

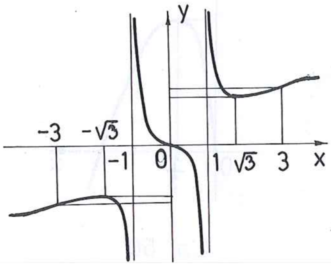


Сл. 52

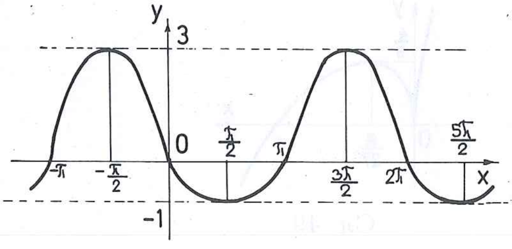
г) Дефинисана за $\forall x \in R$. Нема нула. Хоризонтална асимптота је оса Ox. Локални максимум је $y_{\max} = 2$ за $x = 0$. У превојним тачкама $\left(-1,\ \sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(1,\ \sqrt[3]{2}\right)$ крива има тангенте, нормалне на осу Ox. Конкавна је у интервалу $-1 < x < 1$.

д) Дефинисана за $\forall x \in R$. Нуле су $x = 0$ и $x = 1$. Има минимум $y_{\min} = -\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ за $x = \dfrac{3}{4}$. Превојне тачке су $(1,\ 0)$ и $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right)$, сл. 52.

ђ) Дефинисана за $x \neq 1$ и $x \neq -1$. Асимптоте су $x \neq 1$ и $x \neq -1$. Нула је $x = 0$. Има $y_{\max} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ за $x = -\sqrt{3}$ и $y_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ за $x = \sqrt{3}$. (Непарна је.) Превојне тачке су $\left(-3,\ -\dfrac{3}{2}\right)$, $(0,\ 0)$ и $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$, сл. 53.



Сл. 53

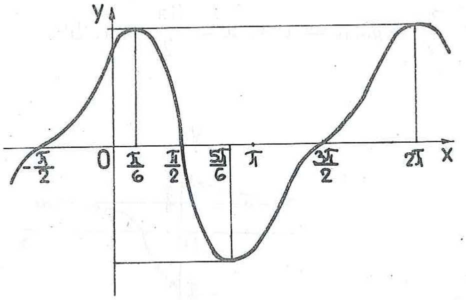


Сл. 54

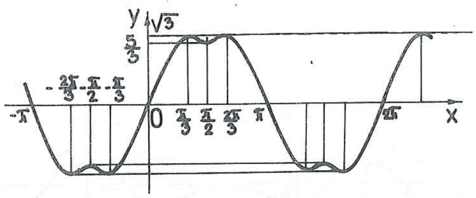
164. *а)* Дефинисана за свако $x \in R$. Периодична функција, $p = 2\pi$. Нуле су $x = k\pi$, $y_{\max} = 3$ за $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $y_{\min} = -1$ за $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Превојне тачке имају апсцису $-\frac{\pi}{6}$ или $\frac{7\pi}{6}$. График је на сл. 54. *)

б) Дефинисана за свако $x \in R$, периодична, $p = 2\pi$. Нуле су $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. За $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ имамо $y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а за $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ је $y_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Превојне тачке су $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. График је на сл. 55.



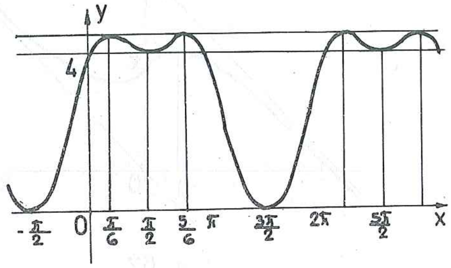
Сл. 55



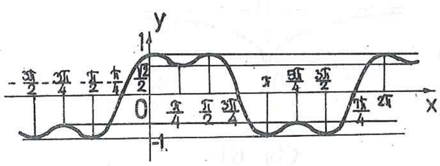
Сл. 56

в) $y = \dfrac{9\sin x - 4\sin^3 x}{6} = \dfrac{\sin x(9 - 4\sin^2 x)}{6} = 0$ за $x = k\pi$, $k \in Z$. Непарна функција, дефинисана за $\forall x \in R$, периодична са периодом $p = 2\pi$. Из $y' = 2\cos x + \cos 3x = 4\cos^3 x - \cos x = 0$ добијамо $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. У овим тачкама функција има екстремуме. Видети сл. 56.

г) Функција је дефинисана за свако $x \in R$, периодична, периоде 2π. Нуле су $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Локални екстремуми су $y_{\max} = \frac{9}{2}$ за $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ и $y_{\min} = 0$ за $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ и $y_{\min} = 4$ за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$, сл. 57.



Сл. 57



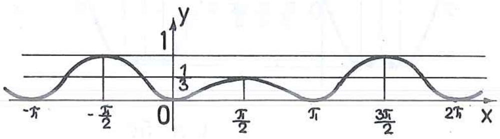
Сл. 58

д) Област дефинисаности је R. Функција је периодична, са периодом

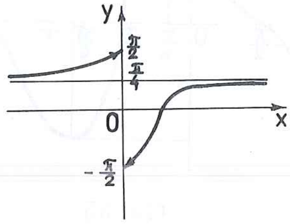
*) Периодичне функције немају хоризонталне ни косе асимптоте.

$p = 2\pi$. На интервалу $[0, 2\pi]$. има нуле $x = \dfrac{3\pi}{4}$ и $x = \dfrac{7\pi}{4}$. Локални екстремуми су: $y_{\max} = 1$ за $x = 0$, $y_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ за $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y_{\max} = 1$ за $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y_{\min} = -1$ за $x = \pi$, $y_{\max} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ за $x = \dfrac{5\pi}{4}$, $y_{\min} = -1$ за $x = \dfrac{3\pi}{2}$ и $y_{\max} = 1$ за $x = 2\pi$, сл. 58.

ђ) Функција је дефинисана за свако $x \in R$, периодична, са периодом 2π. На интервалу $[0, 2\pi]$. има нуле: $x = 0$, $x = \pi$ и $x = 2\pi$ и екстремуме $y_{\min} = 0$ (у нулама функције) и $y_{\max} = \dfrac{1}{3}$ за $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $y_{\max} = 1$ за $x = \dfrac{3\pi}{2}$, сл. 59.

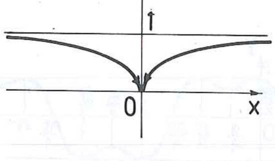


Сл. 59

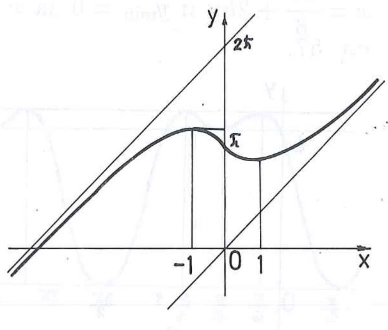


Сл. 60

165. *а)* Функција је дефинисана за $x \neq 0$ $y \to \dfrac{\pi}{2}$ кад $x \to +0$ и $y \to -\dfrac{\pi}{2}$ кад $x \to -0$. Нула функције је $x = 1$. Асимптоте су $x = 0$ и $y = \dfrac{\pi}{4}$ (с обе стране). Нема екстремума, растућа је. Превојна тачка је $(1, 0)$, сл. 60.
б) Функција је парна, дефинисана за $x \neq 0$. Асимптота је $y = 1$, лева и десна. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = 0$, Због $y'' = \dfrac{-2}{(1+x^2)^2} < 0$, функција је конкавна, сл. 61.



Сл. 61.

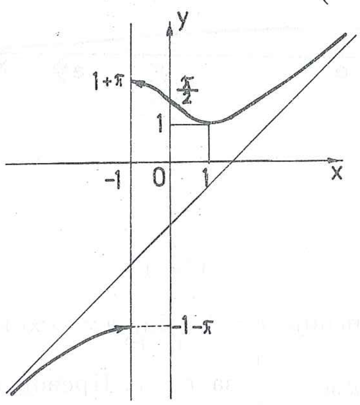


Сл. 62.

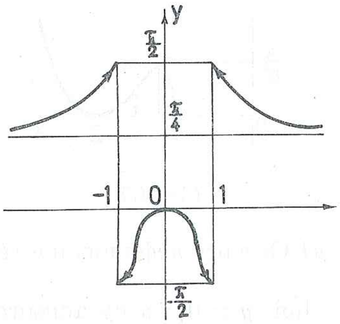
в) Функција је дефинисана за $\forall x \in R$. Има асимптоте: $y = x + 2\pi$ (лева) и $y = x$ (десна). Екстремуми су $y_{\max} = \dfrac{3\pi}{3} - 1$ за $x = -1$ и $y_{\min} = \dfrac{\pi}{2} + 1$ за

$x = 1$. Превојна тачка је $(0, \pi)$, сл. 62.

г) Дефинисана за $x \neq -1$. Кад $x \to -1-0$ тада $y \to -1-\pi$ и $y \to -1+\pi$ кад $x \to -1+0$. Права $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ је асимптота с обе стране. $y_{\min} = 1$ за $x = 1$, превојна тачка је $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, сл. 63.



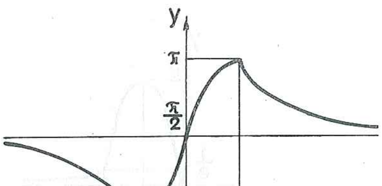
Сл. 63



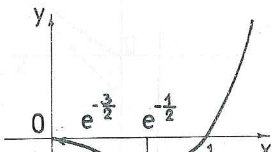
Сл. 64

д) Функција је парна, дефинисана за $x \neq \pm 1$. Има асимптоту $y = \dfrac{\pi}{4}$. За $x > 0$ је опадајућа. Има максимум $y = 0$ за $x = 0$. Кад $x \to 1-0$ тада $y \to -\dfrac{\pi}{2}$, а $y \to \dfrac{\pi}{2}$ кад $x \to 1+0$. Има две превојне тачке, сл. 64.

ђ) Функција је дефинисана за $\forall x \in R$. Нула је $x = -1$. Асимптота је $y = \dfrac{\pi}{2}$ (лева и десна). $y_{\max} = \pi$ за $x = 1$ и $y_{\min} = 0$ за $x = -1$. Превојне тачке су тачке екстремума и нула. График је на сл. 65.



Сл. 65

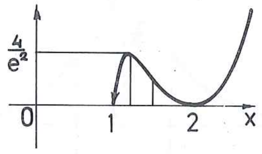


Сл. 66

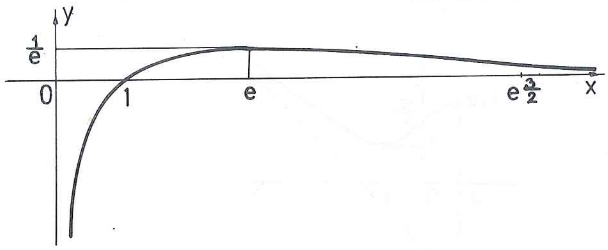
166. *а)* Дефинисана је за $x > 0$. Кад $x \to +0$, $y \to 0$ (Лопиталово правило). Нула је $x = 1$. Нема асимптота. $y_{\min} = -\dfrac{1}{2e}$, за $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Превојна тачка је са апсцисом $x = e^{-\frac{3}{2}}$, сл. 66.

б) Дефинисана за $x > 1$. Нула функције је $x = 2$. Кад $x \to 1+0$, $y \to 0$.

Нема асимптота. $y_{\max} = \dfrac{4}{e^2}$ за $x = 1 + e^{-2}$ и $y_{\min} = 0$ за $x = 2$. Превојна тачка је $(1 + e^{-1},\ e^{-1})$. График је на сл. 67.



Сл. 67

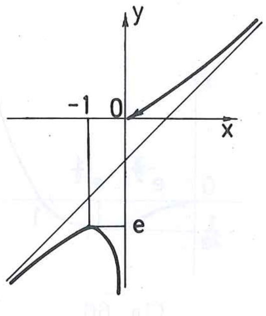


Сл. 68

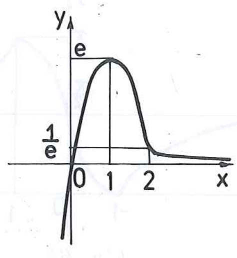
в) Област дефинисаности је $x > 0$. Нула функције $x = 1$. $\lim\limits_{x\to+0} y = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$, па су асимптоте $x = 0$ и $y = 0$. $y_{\max} = \dfrac{1}{e}$ за $x = e$. Превојна тачка је $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, сл. 68.

г) Функција је парна, дефинисана за свако $x \in R$. Има минимум $y = 0$ за $x = 0$ и превојне тачке $(1, \ln 2)$, $-1, \ln 2)$.

167. *а)* Дефинисана за $x \neq 0$. Ако $x \to -0$, $y \to -\infty$, а ако $x \to +0$, $y \to +0$. Асимптоте су $x = 0$ и $y = x - 1$. Функција има максимум $y = -e$ за $x = -1$, сл. 69.



Сл. 69

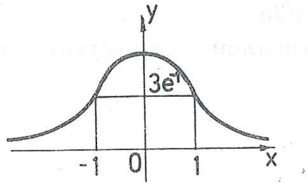


Сл. 70

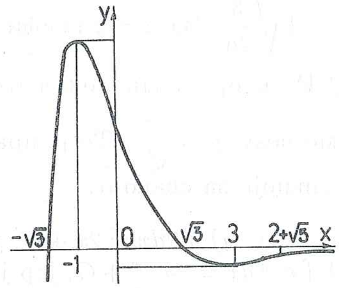
б) Дефинисана за $\forall x \in R$. Нула функције је $x = 0$. Кад $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$, а $y \to +0$ кад $x \to +\infty$. Асимптота (с десне стране) је оса Ox. $y_{\max} = e$ за $x = 1$, превојна тачка је $(2, e^{-1})$, сл. 70.

в) Парна функција, дефинисана и позитивна за $\forall x \in R$. Асимптота је оса

Ox; $y_{\max} = 2$ за $x = 0$. Превојне тачке су $(-1, 3e^{-1})$ и $(1, 3e^{-1})$, сл. 71.



Сл. 71

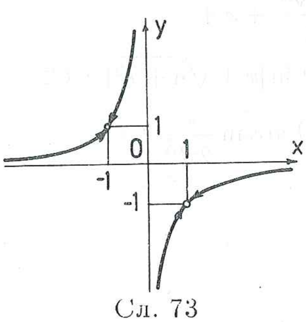


Сл. 72

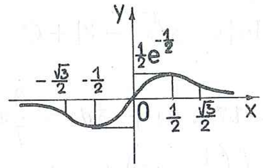
г) Дефинисана за $\forall x \in R$. Нуле су $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$. Има асимптоту $y = 0$. Екстремуми су: $y_{\max} = 2e$ за $x = -1$ и $y_{\min} = -\dfrac{6}{e^3}$ за $x = 3$. Превојне тачке имају апсцисе $x = 2 - \sqrt{5}$ и $x = 2 + \sqrt{5}$, сл. 72.

168. Из $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1 = 0$, за $x = -1$ добијамо $a = 2$, па треба испитати и нацртати график функције $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Даље, слично задатку 156. *б)*.

169. Решавајући слично задатку 17, најпре добијамо $f^2(x) = -\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ и $x \neq 1$, $f^3(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ за $x \neq -1$, $x \neq 0$ и $x \neq 1$ и $f^4(x) = x$, са истом облашћу дефинисаности као $f^3(x)$. Над истим доменом функције $f^{4n+1}(x)$, $f^{4n+2}(x)$, $f^{4n+3}(x)$ и $f^{4n}(x)$ добијају исти облик као $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$. Како је $1990 = 4 \cdot 497 + 2$, то је $f^{1990}(x) = f^2(x) = -\dfrac{1}{x}$, за $x \neq -1$, $x \neq 0$ и $x \neq 1$. График је дат на сл. 73.



Сл. 73



Сл. 74

170. *а)* Функција је дефинисана за $\forall x \in R$, непарна је. Има нулу $x = 0$ и хоризонталну асимптоту $x = 0$. Екстремне вредности су: $y_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha e}}$

за $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ и $y_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha e}}$ за $x = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$. Превојне тачке имају апсцисе: $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2\alpha}}$. За $\alpha = 2$ график је на сл. 74.

б) Из координата локалних екстремума: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha e}}$, налазимо везу: $y = \dfrac{x}{\sqrt{e}}$. То је права којој припадају локални екстремуми дате функције за свако α.

171. *а)* $\int 2dx = 2x + C$, јер је $(2x)' = 2$.
б) $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$, јер је $(-e^{-x})' = e^{-x}$.
в) $\int \sin 3x dx = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$, јер је $\left(-\dfrac{1}{3}\cos 3x\right)' = \sin 3x$.
г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, јер је $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
д) $\dfrac{x^2}{2} + C$; *ђ)* $2\sqrt{x} + C$; *е)* $\dfrac{1}{2\ln 10}\cdot 10^{2x} + C$.
ж) $x^2 - x + C$. *з)* $-2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + C$.
и) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + C$, јер је $\big(\ln|x+5|\big)' = \dfrac{1}{x+5}$.
ј) $\dfrac{1}{2}\ln|2x-7| + C$; *к)* $\ln(x^2+1) + C$.

172. *а)* $\int x^{-3}dx = -\dfrac{x^{-4}}{4} + C = -\dfrac{1}{4x^4} + C$;
б) $\displaystyle\int \frac{(x^4 - 6x^2 + 9)}{x^2}dx = \int\left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 6x - \frac{9}{x} + C.$
в) $\dfrac{3^x}{\ln 3} + C$; *г)* $\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + \dfrac{3}{2}x^2 + 2\sqrt{x^3} + x + C$; *д)* $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$.
ђ) Прво измножимо полиноме у заградама и добијамо:
$\displaystyle\int(x\sqrt{x}+1)dx = \int(x^{\frac{3}{2}}+1)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x + C.$
е) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} + C$; *ж)* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} + C$; *з)* $\ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$;
и) $\ln|x + \sqrt{x^2-3}| + C$; *ј)* $\arcsin\dfrac{x}{4} + C$; *к)* $\arcsin\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + C$.

173. *а)* $\int x^{\frac{4}{3}}dx = \dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C = \dfrac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C$.
б) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x} - e^x\right)dx = \ln x - e^x + C.$
в) $\displaystyle\int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}dx = \int\left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)dx = x - 4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = x - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$
г) $\displaystyle\int \frac{(a-x)-a}{a+x}dx = \int\left(1 - \frac{a}{a+x}\right)dx = x - a\int\frac{dx}{a+x} = x - a\ln|a+x| + C.$

д) $\int \frac{4-3-3x}{x+3}dx = 4\int \frac{dx}{x+3} - 3\int dx = 4\ln|x+3| - 3x + C.$

ђ) $\int \frac{x^2+3x+2x+6+1}{x+3}dx = \int\left(x+2+\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+3| + C.$

е) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + C;$ *ж)* $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$

з) $\int \frac{(x^2+1)+2x}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} = \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C.$

и) $\int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x - \operatorname{arctg} x + C.$

ј) $\frac{1}{9}\int \frac{9x^2+1-10}{9x^2+1}dx = \frac{1}{9}\int dx - \frac{10}{81}\int \frac{dx}{x^2+\frac{1}{9}} = \frac{x}{9} - \frac{10}{27}\operatorname{arctg} 3x + C.$

к) $\int \frac{x^2+(x^2+1)}{x^2(1+x^2)}dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$

л) $\int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} + C.$

љ) $\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C.$

м) За $a=0$ решење је: $-\frac{1}{b^2x} + C$, а за $a \neq 0$ је: $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a} + C.$

174. *а)* $2\ln|x| + 2\sqrt{x} + C;$ *б)* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C.$

в) $\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C.$

г) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C;$ *д)* $3\arcsin\frac{x}{2} - x^2 + C;$

ђ) $\int \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 2(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$
$\operatorname{arctg} x - 2\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C.$

175. *а)* $\int(3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + C = \frac{3^x e^x}{1+\ln 3} + C.$

б) $\int(4a)^x dx = \frac{2^{2x}a^x}{\ln a + 2\ln 2} + C;$ *в)* $3x - \frac{2\cdot 3^x}{2^x(\ln 3 - \ln 2)} + C;$

г) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + C;$ *д)* $e^x + e^{-x} + C;$ *ђ)* $e\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

е) $-\frac{8}{3\ln 2\cdot 4^{3x}} + C;$ *ж)* $-\frac{1}{12^x\ln 12} - \frac{1}{8^x\ln 8} + C.$

з) $\int \frac{4\cdot 2^{2x} + \frac{1}{9}\cdot 3^{2x} - \frac{4}{3}\cdot 6^x}{6^x}dx = 4\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \frac{1}{9}\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx - \frac{4}{3}\int dx =$

$\dfrac{4\cdot 2^x}{3^x(\ln 2-\ln 3)}+\dfrac{3^x}{9\cdot 2^x(\ln 3-\ln 2)}-\dfrac{4}{3}x+C.$

176. *а)* $-\dfrac{1}{2}\cos x+C$;

б) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$

в) $-\operatorname{ctg}x-x-C$; *г)* $\displaystyle\frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C.$

д) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$; *ђ)* $\operatorname{tg}x+C$; *е)* $-\cos x+C.$

ж) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^2 2x}=\frac{1}{4}\int\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$
$-\dfrac{1}{4}(\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x)+C=-\dfrac{1}{2\sin 2x}+C.$

з) $\operatorname{tg}x+C$; *и)* $-\operatorname{ctg}x-x+C.$ *ј)* $x+\dfrac{1}{6}\sin 6x+C.$

к) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$, или $\displaystyle\int\frac{4dx}{\sin^2 2x}=-2\operatorname{ctg}2x+C.$

л) $-4\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+C$; *љ)* $2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-x+C.$

м) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int(\sin x+\cos x)dx=\sin x-\cos x+C.$

н) $\dfrac{\pi x}{2}+C$, јер је $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

њ) $\displaystyle\frac{1}{2}\int(\sin 4x-\sin 2x)dx=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x+C.$

о) $\displaystyle\frac{1}{2}\int(\sin 4x-\sin 2x)\sin 5x dx=\frac{1}{2}\int\sin 4x\sin 5x dx-\frac{1}{2}\int\sin 2x\sin 5x dx=$
$\dfrac{1}{4}\sin x-\dfrac{1}{12}\sin 3x+\dfrac{1}{28}\sin 7x-\dfrac{1}{36}\sin 9x+C.$

177. *а)* $\displaystyle\int\frac{\sin x dx}{\cos x}=-\int\frac{(\cos x)' dx}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$; *б)* $\ln|\sin x|+C$;

в) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x dx}{\cos x}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos x dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\ln|\cos x|+$
$C=\ln\sqrt{\operatorname{tg}x}+C.$

г) $3\ln\left|\sin\dfrac{x}{3}\right|+C$;

д) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x-1)}dx=\int\frac{(1-x)+x}{x(x-1)}dx=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x}=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$

ђ) $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$; *е)* $\dfrac{1}{b}\ln|a+bx|+C.$

ж) $\displaystyle-\frac{1}{4}\int\frac{4dx}{(x-2)(x+2)}=-\frac{1}{4}\int\frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)(x-2)}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C.$

з) $\displaystyle\int\frac{x^2-1+2}{x^2-1}dx=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

и) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; *j)* $-\frac{1}{8}\ln|2\cos 2x+1|+C$.

к) $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}=\ln(e^x+1)+C$.

178. *а)* Из $\frac{2x}{3}-\frac{3\pi}{5}=t$, следи да је $dx=\frac{3}{2}dt$, па имамо:
$\int\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{3\pi}{5}\right)dx=\frac{3}{2}\int\cos t dt=\frac{3}{2}\sin t+C=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{3\pi}{5}\right)+C$.

б) Из $ax^3+b=t$ је $x^2dx=\frac{1}{3a}dt$, итд. Резултат: $\frac{1}{9a}(ax^3+b)^3+C$.

в) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$.

г) $\arcsin x=t\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt$, па је $\int\frac{\sqrt{\arcsin x}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int t^{\frac{1}{2}}dt=$
$\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$.

д) $(2x-2)dx=dt$, па је $\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+C$.

ђ) $-e^{-x}dx=dt$, па је: $\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+2}=-\int\frac{dt}{t}=x-\ln(1+e^{2x})+C$.

е) $\ln(1+\operatorname{tg}x)+C$. *ж)* $2e^{\sqrt{x}}+C$. *з)* $\ln(\ln x)+C$.

и) $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}dx}{1+\frac{x^2}{4}}=dt\Rightarrow\frac{2dx}{4+x^2}=dt$. Резултат: $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2+C$.

179. *а)* $\cos x=t\Rightarrow-\sin x dx=dt$, па имамо: $\int\sin^2 x\cdot\sin x dx=$
$\int(t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$.

б) $x=\operatorname{tg}t\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$. Сем тога је $\sqrt{(1+x^2)^3}=\sqrt{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}=$
$\sqrt{\frac{1}{\cos^6 x}}=\frac{1}{|\cos t|^3}=\frac{1}{\cos t}$, јер је $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos t>0$. Дакле:
$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int\cos t dt=\sin t+c=\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

в) $x=2\cos t\Rightarrow dx=-2\sin t dt$, па је $\int\sqrt{4-x^2}dx=-\int\sqrt{4(1-\cos^2 t)}\cdot 2\sin t dt=$
$-4\int\sin^2 t dt=-2\int(1-\cos 2t)dt=-2t+\sin 2t+C=-2\arccos\frac{x}{2}+2\sin t\cos t+C=$
$-2\arccos\frac{x}{2}+2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}+C=-2\arccos\frac{x}{2}+x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+C=-2\arccos\frac{x}{2}+$
$\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$.

г) $-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+12\sqrt[6]{x}+C$.

д) Датом сменом добијамо: $-\int\frac{tdt}{\sqrt{a^2t^2+1}}$, па уводимо нову смену: $a^2t^2+1=z^2\Rightarrow a^2tdt=zdz$, па је даље: $-\frac{1}{a^2}\int dz=-\frac{1}{a^2}z+C=$ $-\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2+1}+C=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C$.

ђ) Добијамо $\int\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

е) Под интегралом поделимо бројилац и именилац са $\cos^2 x$ и сменимо: $\frac{dx}{\cos^2 x}=dt$, $\frac{1}{\cos^2 x}=1+t^2$. Добићемо: $\int\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$ $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\right)+C$.

180. *а)* $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)+C$. (Смена: $2x^2+3=t$);

б) $\operatorname{arctg}e^x+C$. (Смена: $e^x=t$);

в) $\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5}-\frac{8}{5}\sqrt{(x+2)^3}+8\sqrt{x+2}+C$. (Смена $x+2=t^2$, $t>0$, даје: $dx=2tdt$, $x^2=(t^2-2)^2$.)

г) Слично задатку 179. *г)*: $x-2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$.

д) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6\ln(\sqrt[3]{x}+1)+C$;

ђ) Слично задатку *б)*: $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C$.

е) $\frac{2}{3}x+\frac{11}{9}\ln|3x-1|+C$. (Смена: $3x-1=t$.)

ж) $-2\ln(4-x^2)-\frac{x^2}{2}+C$. (Смена: $4-x^2=t$.)

з) $-e^{\frac{1}{x}}+C$. (Смена: $\frac{1}{x}=t$.)

и) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{2dt}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)+(1-t)}{(t-1)(t+1)}dt=$ $\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}+C=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. (Смена је: $\cos x=t$.) *Други начин:* сменом $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ добијамо $\int\frac{dx}{\sin x}=$

$$\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

ј) Слично претходном: $\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$, што се после сређивања своди на $\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$.

к) $2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - x + C$.

л) Сменом $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, своди се на $\displaystyle\int \frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$. (Последњи резултат добијамо трансформисањем тригонометријских функција.)

љ) $\sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$. *м)* $C - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$.

181. *а)* $C - \dfrac{1}{\sin^2 x}$. $(\sin x = t)$.

б) $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \dfrac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$ $(x+2 = t^2,\ t \geqslant 0)$.

в) $2\sqrt{x+2} + 2\ln|\sqrt{x+2} - 1| + C$. $(\sqrt{x+2} = t \neq 1)$.

г) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})dx}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} = \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C$.

д) $\dfrac{1}{5}\cos^5 x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x + C$. *ђ)* $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}} + C$. $(e^x = t)$.

е) Како је $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, а $4\sin^6 x + 4\cos^6 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x) = 4\left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x\right) = 4 - 3\sin^2 2x$, то дати интеграл постаје: $\displaystyle\frac{1}{6}\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{12\cos 2x} + C$.

ж) $\displaystyle\int \frac{(x^2+4) + 3x - 6}{x^2+4}dx = \int dx + \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+4} - 6\int \frac{dx}{x^2+4} = x + \frac{3}{2}\ln(x^2+4) - 3\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

з) Видети *напомену* уз задатак 179. *а)*. Резултат је: $\dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{32}\sin 4x + C$. (Видети и решење задатка 179. *в)*.

и) $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-7x+13} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-7)dx}{x^2-7x+13} = \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13) + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}} + C$. (Имали смо смене: $x^2 - 7x + 3 = t$ и $x - \dfrac{7}{2} = z$.)

ј) $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)-2}{\sqrt{6x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(6-2x)}{\sqrt{6x-x^2}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}}dx = C - \sqrt{6x-x^2} - \arcsin\frac{x-3}{3}$.

к) Слично претходном. Резултат је: $2\sqrt{x^2-x-1}-7\ln\left|x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-1}\right|+C$.

л) Смена је: $\ln x = t$. Даље је $\displaystyle\int\frac{dt}{t(1+t)}=\int\frac{(1+t)-t}{t(1+t)}dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{1+t}=$
$\ln\left|\dfrac{t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\dfrac{\ln x}{1+\ln x}\right|+C$.

љ) $\ln\left|\cos x-\sqrt{1+\cos^2 x}\right|+C$;

м) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{\sqrt{x}}{2}}dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}\int\frac{\cos\frac{\sqrt{x}}{2}dx}{\sqrt{x}}$. Уведемо смену: $x=4t^2\Rightarrow dx=8tdt$, па добијемо $\displaystyle 4\sqrt{2}\int\cos tdt=4\sqrt{2}\sin t+C=4\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$.

182. *а)* $\dfrac{1}{14}(2x-7)^7+C$; *б)* $-\dfrac{1}{8(2x-3)^4}+C$;

в) $\dfrac{1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}+C$; *г)* $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\dfrac{3}{5}}+C$. *д)* $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+C$;

ђ) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$; *е)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; *ж)* $\dfrac{1}{4}\ln(4x^2-4x+17)+C$;

з) Трансформишемо подинтегралну функцију:
$$\int\frac{2x-6-(x-4)}{(x-3)(x-4)}dx=2\int\frac{dx}{x-4}-\int\frac{dx}{x-3}=2\ln|x-4|-\ln|x-3|+C.$$

и) $C-\ln|2x^2-3x+1|$;

ј) Слично задатку 181. *и)*: $\dfrac{1}{8}\ln|4x^2+4x+5|+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{2}+C$.

к) Можемо написати: $x^2=(x-1)^2+2x-1=(x-1)^2+2(x-1)+1$, па је $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(x-1)^{15}}=\int\frac{dx}{(x-1)^{13}}-2\int\frac{dx}{(x-1)^{14}}-\int\frac{dx}{(x-1)^{15}}=-\frac{1}{12(x-1)^{12}}+$
$\dfrac{2}{13(x-1)^{13}}+\dfrac{1}{14(x-1)^{14}}+C$.

183. *а)* $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 3x}+\int\frac{\sin 3xdx}{\cos^2 3x}=\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x+\frac{1}{3\cos 3x}+C$.

б) $\dfrac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$. *в)* $C-\dfrac{1}{1-\cos x}$.

г) Смена: $\sin^2 x=t$ даје $2\sin x\cos xdx=dt$, па имамо:
$$\int\frac{dt}{\sqrt{2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

д) $-\dfrac{2}{5}\cos^5 x+C$.

ђ) Користећи смену $\operatorname{tg} x=t$, добијамо: $C-2\sqrt{1-\operatorname{tg} x}$.

е) $C-\ln(1+\cos^2 x)$.

ж) Сменом $1+3\cos^2 x=t^2$ долазимо до решења: $C-\dfrac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}$.

з) $\frac{1}{24}\sin^4 6x + C.$ *и)* $\ln\sqrt{\sin(x^2+1)} + C.$ *ј)* $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$

к) $\operatorname{tg} x + 2\ln|\cos x| + C.$

л) Смена је: $1+\cos^2 x = z^2$. Решење је: $\frac{4}{5}\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(3-2\cos^2 x) + C.$

љ) $\int \frac{dx}{\cos 3x} - \int \frac{\cos 3x dx}{\sin^2 3x} = \int \frac{\cos 3x dx}{\cos^2 3x} + \frac{1}{3\sin 3x} = \frac{1}{6}\int \frac{2dt}{1-t^2} + \frac{1}{3\sin 3x} = \frac{1}{6}\int \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt + \frac{1}{3\sin 3x} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{3\sin 3x} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{3\sin 3x} + C = \frac{1}{3}\ln\sqrt{\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}} + \frac{1}{3\sin 3x} + C = \frac{1}{3}\ln\sqrt{\frac{(1+\sin 3x)^3}{1-\sin^2 3x}} + \frac{1}{3\sin 3x} + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\sin 3x}{\cos 3x}\right| + \frac{1}{3\sin 3x} + C.$

м) Сменом $\sin 2x = t$, долазимо до решења: $\ln(2+\sin 2x) + C.$

н) Како је: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{2-\sin^2 2x}{2}$, уводећи смену: $\sin 2x = t$, добијамо:
$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

њ) $\ln|x+\cos x| + C$ (смена: $x+\cos x = t$).

о) $C - \ln|\sin x + \cos x|$; *п)* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C.$

р) $\sin^5 3x = \sin^4 3x \sin 3x = (1-\cos^2 3x)^2\sin 3x$, итд. Резултат је:
$-\frac{1}{9}(3\cos 3x - 3\cos^2 3x + \cos^3 3x) + C.$

с) Смена је: $\operatorname{tg} x = t$. Како је $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, добијамо резултат:
$\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$

т) $2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$ *ћ)* $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$ *у)* $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

ф) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$ *х)* $\ln\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + C.$ *ц)* $\frac{1}{8}\ln\left|4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 1\right| + C.$

184. *а)* $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$ *б)* $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6} + C.$ *в)* $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} + C.$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$

д) $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ *ђ)* $\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt[3]{x+1} + 2\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C.$

е) $C - \frac{x+1}{10}(12\sqrt[3]{(x+1)^2} + 15\sqrt[3]{x+1} + 20).$ *ж)* $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + C.$

з) $\frac{1}{2}\arcsin x^2 + C.$

и) Најпре је: $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)^2}} \cdot \dfrac{dx}{1+x} = \int \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. Уведемо смену $1+x = \dfrac{1}{t} \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, па добијемо: $-\sqrt{2t-1} + C = -\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + C$.

ј) Сменом $x+1 = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$, добијамо: $6\int\left(t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}\right)dt =$ $2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1} + 1\right| + C$.

к) Раздвојимо интеграл:
$\int \dfrac{3x\,dx}{\sqrt{5x^2+1}} + \int \dfrac{dx}{\sqrt{5x^2+1}} = \dfrac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1}\right| + C$.

л) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} \arcsin \dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4-3x^2} + C$.

љ) $3\int \dfrac{x+1-1-\frac{1}{3}}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = 3\int \dfrac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 4\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$
$3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C$.

м) Сменом $x = \dfrac{1}{t}$, добијамо: $\ln|x| - \ln\left|1 + \sqrt{x^2+1}\right| + C$.

н) Уводимо смену $x = \sin t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Резултат је:
$\dfrac{1}{2}\arcsin x - \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$.

њ) Сменом $\sqrt{x^2+1} = t$, добијамо: $\sqrt{x^2+1} - \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C$.

о) $C - \arcsin x - \dfrac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$.

п) Смена је: $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Решење: $C - \dfrac{1}{3x^3}\sqrt{(1+x^2)^3}$.

р) $\int \dfrac{2dx}{\sqrt{4x-4x^2}} = \int \dfrac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$. Сменом $2x-1 = t \Rightarrow 2dx = dt$, добијамо $\int \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(2x-1) + C$.

с) Уводимо смену: $x = 2\sin^2 t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, одакле је $dx = 4\sin t\cos t\,dt$. Даље је $\int \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}dx = 4\int \sin^2 t = 2\int(1-\cos 2t)dt = 2t - \sin 2t + C =$ $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}} - 2\sin t\cos t + C = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}} - 2\sqrt{\dfrac{x}{2}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}} = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}} -$ $\dfrac{1}{2}\sqrt{2x(4-x^2)} + C$.

т) Сменом: $x+1 = \dfrac{1}{t}$, $t > 0$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, добијамо $\int \dfrac{-t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = C - \sqrt{1+t^2} =$

$C - \dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}$.

ћ) $C - \arcsin\dfrac{1}{x}$.

у) Сменом: $x = \dfrac{1}{t}$, $t > 0$, добијамо: $\arccos\dfrac{1}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$.

185. *а)* $\displaystyle\int \frac{\ln 2 + \ln x}{2\ln 2 + \ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{(2\ln 2 + \ln x) - \ln 2}{2\ln 2 + \ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{dx}{x} - \ln 2 \int \frac{1}{2\ln 2 + \ln x}\frac{dx}{x}$. У други интеграл уведемо смену: $\ln x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt$, па добијемо резултат: $\ln x - \ln 2 \cdot \ln(4x) + C$.

б) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ln x}{2}\right) + C$. *в)* $C - \cos(\ln x)$. *г)* $\arcsin\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{3}}\right) + C$.

д) Смена је: $1 + \ln x = t^2$, $t > 0$, $\dfrac{dx}{x} = 2tdt$. Даље је: $\displaystyle\int \frac{2t^2dt}{t^2-1} = \int\left(2 + \frac{2}{t^2-1}\right)dt = 2t + \int \frac{(1+t)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt = 2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right| + C = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\left(\sqrt{1+\ln x}-1\right)^2}{\ln x}\right| + C = \sqrt{1+\ln x} + 2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}+1\right| - \ln|\ln x| + C$.

ђ) Смена $\ln(\operatorname{tg} x) = t$, резултат: $\dfrac{1}{4}\ln^2(\operatorname{tg} x)$.

е) $e^{-\cos x}$ (смена: $-\cos x = t$).

ж) Смена: $e^x + 1 = t^2 \Rightarrow e^x dx = 2tdt$, итд. Резултат: $\dfrac{2}{3}(e^x - 2)\sqrt{e^x+1} + C$.

з) $\operatorname{arctg}(a^x) + C$. *и)* $\arcsin(2^x) + C$.

ј) $\displaystyle\frac{1}{3}\int \frac{3 + 2^x - 2^x}{2^x + 3}dx = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3\ln 2}\ln(2^x + 3) + C$. *к)* $\dfrac{4}{21}(3e^x - 4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$.

л) $C - \arcsin e^{-x}$. *љ)* $\dfrac{1}{3}(\operatorname{arctg} x)^3 + C$. *м)* $C - \dfrac{1}{2(\arcsin x)^2}$.

н) Смена: $\arccos\dfrac{x}{2} = t$ даје $-\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = dt$. Резултат: $C - \dfrac{1}{2}\left(\arccos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

њ) $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+4x^2} - \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) - \frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} 2x)^3} + C$.

о) $\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C$. *п)* $\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2 + C$.

р) $C - \dfrac{1}{9}(\arcsin 3x)^3 - \dfrac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}$.

с) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}}{\sqrt{x^2+1}}dx$, сменом $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| = t$, $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = dt$, своди се на $\int\sqrt{t}dt = \dfrac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)^3} + C$.

т) $\int e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \dfrac{dx}{1+x^2} + \int \dfrac{x \ln(x^2+1)dx}{x^2+1} + \int \dfrac{dx}{x^2+1} = e^{\operatorname{arctg} x} + \dfrac{1}{4}\ln^2(x^2+1) +$ $\operatorname{arctg} x + C$.

ћ) $C - \dfrac{1}{2}\ln^2\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$. (Смена $\ln\dfrac{x+1}{x} = t$.)

у) $\int \dfrac{(x+1)e^x dx}{xe^x(1+xe^x)} = \ln\dfrac{xe^x}{1+xe^x} + C$. (Смена: $xe^x = t$.)

186. *а)* $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$ и $dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$, па је: $\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \dfrac{dx}{x} = x\ln x - x + C$.

б) $u = \ln x$, $dv = 3x^2dx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \int 3x^2dx = x^3$. Решење је $\int 3x^2\ln x dx =$ $x^3\ln x - \int x^3\dfrac{dx}{x} = x^3\ln x - \dfrac{x^3}{3} + C$.

в) $u = \ln^2 x$, $dv = dx \Rightarrow du = \dfrac{2\ln x dx}{x}$, $v = x$, па је $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x -$ $\int 2\ln x dx$. Сада на $\int 2\ln x dx$ поново применимо парцијалну интеграцију, као у задатку *а)* и добијемо: $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x + 2x\ln x - 2x + C$.

г) $u = \ln^2 x$. Решење је: $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln^2 x - \dfrac{2}{n+1}\ln x + \dfrac{2}{(n+1)^2}\right) + C$.

д) $x\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| - \ln|x+1| + C$. $(u = \ln\dfrac{x}{x+1})$. *ђ)* $C - e^{-x}(x+1)$. $(u = x)$.

е) Потребне су две парцијалне интеграције. Први пут је $u = x^2+5x$. Решење: $\dfrac{1}{2}e^{2x}(x^2+4x-2)e^{2x} + C$.

ж) $u = \operatorname{arctg} x$. Решење је: $x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

з) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. *и)* $\dfrac{1}{9}\sin 3x - \dfrac{x}{3}\cos 3x + C$.

ј) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$. (Две парцијалне интеграције, $u = x^2$, итд.)

к) $x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.

л) Слично задатку ђ): $u = x$. Решење је: $C - \dfrac{x\ln 2 + 1}{2^x\ln^2 2}$.

љ) $\dfrac{1}{2}\int x\sin 2x dx$, па је $u = \dfrac{1}{2}x$, итд. Решење је $\dfrac{1}{8}\sin 2x - \dfrac{x}{4}\cos 2x + C$.

м) $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$, $(u = x)$.

н) $x\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| - \sqrt{x^2+1} + C$; *њ)* $2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$.

о) Две парцијалне интеграције, а у првој је $u = \ln^2 x$. Резултат: $C - \dfrac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2)$.

187. *а)* $x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C$.

б) $x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2x + C$. *в)* $\ln x \cdot (\ln(\ln x) - 1) + C$.

г) Две парцијалне интеграције. Решење је: $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$. ($\int x^2\cos^2 x dx=\int\frac{x^2(1+\cos 2x)dx}{2}=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\int x^2\cos 2x dx$, итд. Почињемо следећу интеграцију са $u=x^2$.)

д) $2x^2\arcsin x-\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+C$.

ђ) Нека је $u=x$ и $dv=\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$. Тада је $du=dx$ и $v=-\frac{1}{2(1+x^2)}$, па је: $\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

е) $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^1)^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$. (Користили смо и резултат претходног задатка.)

ж) $\frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-2\ln|x-2|-x+C$.

з) $x\operatorname{tg}x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$. ($u=x$.)

и) $(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$, (две парцијалне интеграције).

ј) Слично задатку *е)*. Резултат: $\frac{x}{16(4+x^2)^2}+\frac{3x}{128(4+x^2)}+\frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

к) $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

л) $u=x^2e^x$, итд. Резултат је: $\frac{x-2}{x+2}e^x+C$.

љ) $\sin x\ln(\sin x)-\sin x+C$. ($u=\ln(\sin x)$.)

м) $\int e^{-x}\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=\int e^{-x}\cdot 4\sqrt{x}dx+\int e^{-x}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$. Сада на први интеграл с десне стране два пута применимо парцијалну интеграцију. Први пут је $u=4\sqrt{x}$, а други пут $u=\frac{2}{\sqrt{x}}$. При томе други интеграл не дирамо. Добићемо: $\int e^{-x}\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=\int e^{-x}\cdot 4\sqrt{x}dx+\int e^{-x}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=-2e^{-x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx-\int e^{-x}\frac{dx}{x\sqrt{x}}+\int e^{-x}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=-2e^{-x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+C$.

н) Слично претходном задатку: $\int\frac{(\ln x-1)dx}{\ln^2 x}=\int\frac{dx}{\ln x}-\int\frac{dx}{\ln^2 x}$. На први интеграл применимо парцијалну интеграцију: $u=\frac{1}{\ln x}$. Резултат: $\frac{x}{\ln x}+C$.

188. *а)* $\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{x}{2}+C$;

б) $u=x$, $dv=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, одакле је $du=dx$ и $v=\sqrt{1+x^2}$. Сада је

$P = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \dfrac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} -$
$\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - P$. Коначно:
$P = \int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$.

в) $C - \dfrac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{x}{3}$. *г)* $\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x + C$.

д) $u = e^{\arcsin x}$, $v = x$, $du = e^{\arcsin x}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, па је $P = xe^{\arcsin x} -$
$\int e^{\arcsin x}\cdot\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. Поново узмемо $u = e^{\arcsin x}$ и $dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, одакле је $v = -\sqrt{1-x^2}$, па је $P = xe^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x}dx$, тј.
$P = e^{\arcsin x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right) - P$. Коначно је $P = \dfrac{1}{2}e^{\arcsin x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right) + C$.

ђ) Имамо две парцијалне интеграције, оба пута је $u = e^{2x}$. Решење је: $\dfrac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$.

е) Потребне су две парцијалне интеграције. Први пут је $u = \sin(\ln x)$, а други пут $u = \cos(\ln x)$. Резултат: $\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

ж) Слично задатку *ђ)*. Решење је: $C - \dfrac{3^{-x}}{4+\ln^2 3}(2\cos 2x + \ln 3\sin 2x)$.

з) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$, па је $P = \int e^{-x}(1-\sin 2x)dx = -\dfrac{1}{5}e^{-x}(5 + \sin 2x + 2\cos 2x) + C$.

и) Ако је $u = x$; $dv = e^{2x}\cos 3x dx$, тада је $V = \int e^{2x}\cos 3x dx = \dfrac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x)$. Даље, радимо слично задатку *ђ)*. Резултат: $\dfrac{xe^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) - \dfrac{e^{2x}}{169}(12\sin 3x - 5\cos 3x) + C$.

ј) $P = \int 2xe^{-2x}\sin^2 x dx = \int xe^{-2x}(1-\cos 2x)dx = \int xe^{-2x}dx - \int xe^{-2x}\cos 2x dx$, итд. Резултат је $-\dfrac{1}{8}e^{-2x}(4x + 2 + 2x(\sin 2x - \cos 2x) + \sin 2x) + C$.

к) $\int \cos^2(\ln\sqrt{x})dx = \int \cos^2\left(\dfrac{1}{2}\ln x\right)dx = \dfrac{1}{2}\int (1+\cos(\ln x))dx = \dfrac{x}{2}(1+\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$.

189. *а)* Сменом $x = t^2$, $t \geqslant 0$, $dx = 2tdt$, добијамо: $2\int e^{-t}tdt = -2e^{-t}(t+1) + C = -2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + C$.

б) Смена је: $x^2 = t$. Решење: $e^{x^2}\left(\dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + 1\right) + C$.

в) $(6x-12)\sin\sqrt{x}-\left(2\sqrt{x^3}-12\sqrt{x}\right)\cos\sqrt{x}+C$. (Смена је $x=t^2$, $t\geqslant 0$.)

г) Сменом $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow dx=-\dfrac{dt}{t^2}$, добијамо $-\displaystyle\int\frac{\arcsin t\,dt}{t^3}$. Даље је $u=\arcsin t\Rightarrow du=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ и $dv=-\dfrac{dt}{t^3}\Rightarrow V=-\displaystyle\int\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{2t^2}$, па је:
$-\displaystyle\int\frac{\arcsin t\,dt}{t^3}=\frac{1}{2t^2}\arcsin t-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$. Враћајући се на променљиву x, добићемо: $\displaystyle\int x\arcsin\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$.

д) Сменом $1+\sqrt{x}=t\Rightarrow x=(t-1)^2\Rightarrow dx=2(t-1)dt$, наш интеграл се своди на $\int(2t-2)\operatorname{arctg}t\,dt=\int 2t\operatorname{arctg}t-2\int\operatorname{arctg}t\,dt$. Према решењима задатака 187. *а)* и 186. *ж)*, добијамо: $t^2\operatorname{arctg}t-t+\operatorname{arctg}t-2t\operatorname{arctg}t+\ln(t^2+1)+C'=(t^2-2t+1)\operatorname{arctg}t-t+\ln(t^2+1)+C'=x\operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}+\ln(x+2\sqrt{x}+2)+C$, где је $C=C'-1$.

ђ) Уводимо смену: $\arcsin\sqrt{x}=t\Rightarrow x=\sin^2 t\Rightarrow dx=2\sin t\cos t$ и $\sqrt{1-x}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$. Дати интеграл се своди на $2\int\sin t\,dt=-2t\cos t+2\sin t+C=-2t\sqrt{1-\sin^2 t}+2\sin t+C=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

е) Уводимо смену: $\operatorname{arctg}(e^x)=t\Rightarrow e^x=\operatorname{tg}t\Rightarrow e^x dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$. Рачунамо: $\displaystyle\int e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)dx=\int\frac{e^x\operatorname{arctg}(e^x)dx}{e^{2x}}=\int\frac{t\,dt}{\sin^2 t}$. Према резултату задатка 186. *м)*, добијамо: $-t\operatorname{ctg}t+\ln|\sin t|+C=-e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)+\ln\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}+C$.

ж) Смена је: $\operatorname{arctg}x=t\Rightarrow x=\operatorname{tg}t$, итд. Решење је: $x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

з) Слично претходном задатку: $\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

и) Уведемо смену: $\operatorname{arctg}x=t\Rightarrow\dfrac{dx}{1+x^2}=dt$ и $x=\operatorname{tg}t$, па добијемо (према решењу задатка 186. *љ)*: $\int t\sin t\cos t\,dt=\dfrac{1}{8}\sin 2t-\dfrac{t}{4}\cos 2t=\dfrac{\operatorname{tg}t}{4(1+\operatorname{tg}^2 t)}-\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}+C=\dfrac{x}{4(1+x^2)}-\dfrac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arctg}x+C$.

ј) Сменом: $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}=t\Rightarrow\dfrac{2dx}{4+x^2}=dt$ и $x=2\operatorname{tg}t$, добијамо $\int\sin t e^t dt=\dfrac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)+C=\dfrac{e^t}{2}\left(\dfrac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\right)+C=\dfrac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}\dfrac{x-2}{\sqrt{4+x^2}}+C$.

к) Сменом $\arcsin x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$ и $x = \sin t$, добијамо интеграл $\displaystyle\int \frac{tdt}{\cos^2 t}$, који даље решавамо слично задатку 186. *м)*. Резултат је: $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln|1-t^2| + C$.

190. *а)* $P_n = -x^n e^{-x} + nP_{n-1}$.
б) Нека је $u = \sin^{n-1} x$ и $dv = \sin x dx$. Одавде је $v = -\cos x$ и $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$. Тада је $P_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)dx = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$, односно имамо везу: $P_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)P_{n-2} - (n-1)P_n$. Ово је једначина по P_n, чије решење је: $P_n = -\dfrac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \dfrac{n-1}{n}P_{n-2}$, а то је тражена формула.
в) $P_n = \dfrac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \dfrac{n-1}{n}P_{n-2}$. *г)* $P_n = x\ln^n x - nP_{n-1}$.
д) После две парцијалне интеграције (прва: $u = x^{2n}$), добијамо: $P_n = x^{2n}e^x - 2nx^{2n-1}e^x + 2n(2n-1)\int x^{2(n-1)}e^x dx$, тј. $P_n = x^{2n}e^x - 2nx^{2n-1}e^x + 2n(2n-1)P_{n-1}$.
ђ) $P_n = \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int \frac{a^2 dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}$. Дакле: $P_n = \dfrac{1}{a^2}P_{n-1} - \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}$. Сада применимо парцијалну интеграцију, слично задатку 187. *е)*. Резултат:
$P_n = \dfrac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)}P_{n-1}$.
е) Сменом $x = \sin t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = -\cos t dt$, дати интеграл се своди на случај *в)*. Решење: $P_n = -\dfrac{1}{n+1}\sin x \cos^n x = \dfrac{n}{n+1}P_{n-2}$.
ж) $P_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x \cdot \cos^2 x}$. Нека је $u = \dfrac{1}{\cos^{n-2} x}$ и $dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Тада је $du = \dfrac{(n-2)\sin x dx}{\cos^{n-1} x}$ и $v = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, итд. Решење: $P_n = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1}P_{n-2}$.
з) $P_n = \displaystyle\int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \int t^{n-2}dt - P_{n-2}$, где је извршена смена променљиве у првом интегралу: $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Решење је $P_n = \dfrac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - P_{n-2}$.

191. *а)* За $n = 3$, из формуле: $P_n = -xe^{-x} + nP_{n-1}$, добијамо: $P_3 =$

$\int x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x} + 3P_2 = -x^3e^{-x} + 3(-x^2e^{-x} + 2P_1) = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} + 6(-xe^{-x} + P_0) = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$, где је $P_0 = \displaystyle\int e^{-x}dx = -e^{-x}$.

б) Користимо формулу $P_n = \int x^ne^xdx = x^ne^x - nP_{n-1}$. Резултат: $\int x^4e^xdx = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$.

в) Према претходном задатку под *г)*, имамо: $\int \ln^3 xdx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 xdx = x\ln^3 x - 3(x\ln^2 x - 2\int \ln xdx) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + C$.

г) $\int \sin^4 xdx = -\dfrac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \dfrac{3}{8}\sin x\cos x + \dfrac{3}{8}x + C$.

д) $\int \sin^3 xdx = -\dfrac{1}{3}\sin^2 x\cos x - \dfrac{2}{3}\cos x + C$

ђ) $\int \cos^5 xdx = \dfrac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \dfrac{4}{15}\sin x\cos^2 x + \dfrac{8}{15}\sin x + C$.

е) Рекурентна формула из задатка 190. *ђ)*, за $a = 1$ је $P_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot P_{n-1}$. Отуда налазимо: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C$.

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$.

з) $\displaystyle\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^3}dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{8(x^2+1)} - \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} x + C$.

и) Решење: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$. *ј)* $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$.

192. *а)* $\dfrac{x+3}{x(3-x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{3-x} = \dfrac{A(3-x) + Bx}{x(3-x)}$. Одредимо A и B из услова: $x + 3 \equiv A(3-x) + Bx$.

Први начин. За $x = 3$ добијамо: $6 \equiv 3B \Rightarrow B = 2$, а за $x = 0$ добијамо: $3 \equiv 3A \Rightarrow A = 1$. (Вредности које дајемо за x представљају нуле имениоца.)

Други начин. Средимо десну страну: $x + 3 \equiv (B - A)x + 3A$. Следи да је $B - A = 1$ и $3A = 3$ (изједначимо одговарајуће коефицијенте полинома на левој и десној страни једнакости). Решавањем добијеног система једначина по A и B, добићемо: $A = 1$ и $B = 2$.

Даље је: $\displaystyle\int \frac{(x+3)dx}{x(3-x)} = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{3-x} = \ln|x| - 2\ln|3-x| + C = \ln\frac{|x|}{(3-x)^2} + C$.

б) $\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. *в)* $\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$.
г) $\ln|x-1|+2\ln|x+2|-3\ln|x+3|+C$. *д)* $\ln|x|-3\ln|x+3|+2\ln|x+5|+C$.
ђ) $3\ln|x-2|-\ln|2x+1|+C$. *е)* $\ln|x|-3\ln|4-x|+C$.
ж) $\ln\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|}+C$. *з)* $2\ln|x|-\ln|x+2|+\ln|3-x|+C$.

193. *а)* Поред начина наведених у задатку 192. *а)*, $\frac{2x^2}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$. итд. можемо користити и идеју из решења задатка 182 *к)*: $\frac{2x^2}{(x-2)^3}=\frac{2(x^2-4x+4)+8x-16+8}{(x-2)^3}=\frac{2}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{8}{(x-2)^3}$. Према томе: $\int\frac{2x^2dx}{(x-2)^3}=\int\frac{2dx}{x-2}+\int\frac{8dx}{(x-2)^2}+\int\frac{8dx}{(x-2)^3}=2\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}-\frac{4}{(x-2)^2}+C$.

б) $\ln\frac{x^2}{|x+1|}+\frac{6}{x+1}+C$. *в)* $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$.
г) $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$. *д)* $C-\frac{x+9}{x^2-3x-10}$. *ђ)* $3\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C$.

194. *а)* $\frac{1}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$, итд. Добијамо: $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$, па је $\int\frac{dx}{x(x^2+4)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+4}=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$.
б) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.
в) $\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.
г) $\ln(x^2+3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{3}{x^2+3}+C$.
д) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.
ђ) $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

195. *а)* $(x^3-1):(4x^3-x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{x+4}{4x^3-x}$, па је $\int\frac{(x^3-1)dx}{4x^3-x}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\int\frac{(x+4)dx}{x(2x-1)(2x+1)}=\frac{x}{4}+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$.
б) $2x+\ln x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+C$.

в) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$.
г) $x+\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{x^2+1}+C$.
д) $\dfrac{x^3}{3}-3x+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C$.
ђ) $x^2+3\ln|x+2|-2\ln|x-1|-\dfrac{6}{x-1}+C$.

196. *а)* Из $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$, добијамо: $y'=x\sqrt{2}$. Заменимо y и y' у дату једначину: $2\left(\dfrac{1}{2}x^2-3\right)\cdot x=x$. Добијемо $x^2-7x=0$, а ово није идентичност. Дакле $y=\dfrac{1}{2}x^2-3$ није решење дате једначине.
б) Из датог услова $y=\dfrac{1}{x}$ је $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ и $y''=\dfrac{2}{x^3}$. Заменом у дату једначину добијамо: $\dfrac{2}{x^3}=x^2-\dfrac{1}{x^2}$. Дакле, није решење.
в) Није решење.
г) $y=2(x-C)^2\Rightarrow y'=4(x-C)$ и $y''=4$. Заменом у дату једначину добијамо: $4(x-C)^2\cdot 4-16(x-C)^2=0$, што је идентичност. Дакле $y=2(x-C)^2$ јесте решење дате једначине.
д) Јесте решење. *ђ)* Јесте решење. ($y'=1+Ce^yy'\Rightarrow y'=\dfrac{1}{1-Ce^y}$.)

197. *а)* $y=\dfrac{x^2}{2}+2x+C$. *б)* $x^2+y^2=C$. *в)* $y=\operatorname{tg}x+C$.
г) $e^{x^2+y^2}=e^{x^2}\cdot e^{y^2}$, итд. Решење: $e^{x^2}-e^{-y^2}=C$.
д) Раздвајањем променљивих добијемо: $\dfrac{dy}{y(1-y)}=\dfrac{dx}{x}$, а одавде интеграљењем: $\ln|y|-\ln|1-y|=\ln|x|+\ln C$, односно $\ln\left|\dfrac{y}{1-y}\right|=\ln C|x|$. Коначно: $y=\dfrac{Cx}{1+Cx}$.
ђ) $x^2+y^2=\ln Cx^2$. *е)* $y=C\sin x$. *ж)* $y=\dfrac{Cx-1}{1-x}$.
з) $10^x+10^{-y}=C$. *и)* $1+y^2=C(1-x^2)$. *ј)* $y^2=1-(\arcsin x+C)^2$.
к) $\operatorname{ctg}^2x-\operatorname{tg}^2x=C$. *л)* $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|=C-2\sin x$.

198. *а)* Смена: $x+y=z$, даје: $1+y'=z'$, тј. $y'=z'-1$, па имамо: $z'-1-\cos z=0$. Решење ове једначине је $z=2\operatorname{arctg}(x+C)$. Враћањем на првобитну променљиву, добијемо: $y=2\operatorname{arctg}(x+C)-x$.
б) $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$. (Смена: $z=2x+3y$.)
в) $\ln(y-x+2)^2-y=x+C$. (Смена: $y-x+2=z$.)

г) $e^y = Ce^x - e^{x^2}$. (Смена: $z = e^{x^2} + e^y \Rightarrow z' = 2xe^{x^2} + y'e^y$.)

199. *а)* Опште решење је $\ln y = C\cdot \operatorname{tg} x$. Заменимо $x = \frac{\pi}{4}$, $y = e$ и добијемо $\ln e = C\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow C = 1$. Тражено партикуларно решење је $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

б) $y = 2x^2 + 6$. *в)* $y^2 = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. *г)* $y = \dfrac{1+x}{1-x}$. *д)* $y = \dfrac{2+x}{1+2x}$.

200. *а)* $y = x^2 + C_1x + C_2$. *б)* $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1x + C_2$.

в) $y = \dfrac{x^3}{2} + x^2 + C_1x + C_2$. *г)* $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. *д)* $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

ђ) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$. *е)* $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.

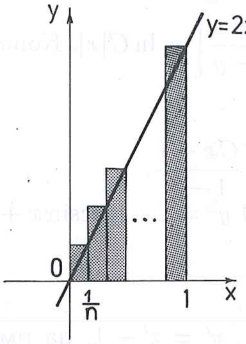
ж) $y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}}$. *з)* $y = C_1\cos x\sqrt{3} + C_2\sin x\sqrt{3}$.

и) Опште решење је $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Даље $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow 2 = C_2$. Из $y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x$ и $y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$, следи $C_1 = 1$. Тражено решење је $y = \cos 2x + 2\sin 2x$.

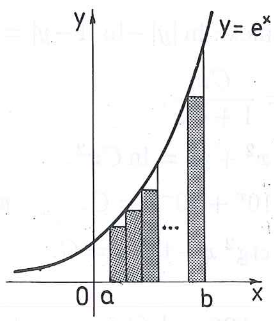
201. *а)* Према сл. 75, збир површина осенчених (описаних) правоугаоника даје. (Интервал $[0, 1]$, поделили смо на n једнаких делова ширине $\frac{1}{n}$).

$$\int_0^1 2x\,dx = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot 2\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot 2\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot 2\cdot\frac{3}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot 2\cdot\frac{n}{n}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{n^2}(1+2+3+\cdots+n) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = 1.$$



Сл. 75



Сл. 76

б) Интервал $[a, b]$ поделимо на n једнаких делова ширине $\dfrac{b-a}{n}$, сл. 76, и рачунамо као у описаном примеру на стр 56.

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot e^a + \frac{b-a}{n}\cdot e^{a+\frac{b-a}{n}} + \frac{b-a}{n}\cdot e^{a+2\cdot\frac{b-a}{n}} + \cdots + \frac{b-a}{n}\cdot e^{a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}}\right) =$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^a\cdot\dfrac{b-a}{n}(1+e^{\frac{b-a}{n}}+e^{2\cdot\frac{b-a}{n}}+\cdots+e^{(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}})$. Збир у загради представља збир геометријске прогресије чији је први члан $b_1 = 1$ и количник $q = e^{\frac{b-a}{n}}$. Према познатој формули $(S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1})$ добијамо $\displaystyle\int_a^b e^x dx =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^a\cdot\dfrac{b-a}{n}\cdot\dfrac{e^{b-a}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(e^b-e^a)\cdot\dfrac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = e^b - e^a$, јер $\dfrac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = \dfrac{t}{e^t-1}\to 1$. (Видети одељак 2.3, стр. 21: $t = \dfrac{b-a}{n}\to 0$, кад $n\to+\infty$.)

в) Видети под *а)* и пример решен на стр. 56. Решење је: $\displaystyle\int_1^3 (x^2-2x)dx = \frac{2}{3}$.

202. *а)* $\Delta x_i = \dfrac{a-a}{n} = 0$ и $\Delta x_i\cdot f(\xi_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.
б) $x_i - x_{i-1} = \dfrac{a-b}{n} = -\dfrac{b-a}{n}$, итд. *в)* $\sum c\cdot(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = c\cdot\sum(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$.
г) *Упутство:* нацртајте слику.
д) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -P + P = 0.$
ђ) Слично претходном задатку.
е) $\sum(x_i - x_{i-1})(f_1(\xi_i)\pm f_2(\xi_i)) = \sum(x_i - x_{i-1})\cdot f_1(\xi_i) \pm \sum(x_i - x_{i-1})\cdot f_2(\xi_i)$.
ж) *Упутство:* нацртајте слику. $m(b-a)$ је површина уписаног, а $M(b-a)$ површина правоугаоника описаног око фигуре коју ограничава лик криве $y = f(x)$ са одсечком $[a, b]$ на оси Ox.

203. *а)* $\displaystyle\int_1^2\left(x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{4}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 4\cdot 2 - \frac{4}{2}\right) -$
$\displaystyle\left(\frac{1^3}{3} - 4\cdot 1 - \frac{4}{1}\right) = \frac{1}{3}.$

б) $\displaystyle\left(\frac{2}{3}\sqrt{2x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right)\Bigg|_0^8 = \frac{100}{3}.$ *в)* $\displaystyle\operatorname{arctg}(x+2)\Bigg|_{-2}^{-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$

г) $\displaystyle\int_3^4 = \frac{1}{2-x}\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2}.$

д) Видети задатак 177. *ж)*. Резултат је: $\ln\dfrac{3}{2}$.

ђ) $\arcsin \dfrac{x-2}{2}\Big|_2^3 = \arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. *е)* $\dfrac{1}{2}$. *ж)* 2. *з)* $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$.

и) Видети задатак 177. *в)*. Резултат је: $\dfrac{1}{2}\ln \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\ln 3$.

ј) Видети задатак 176. *б)*. Резултат је: $1 - \dfrac{\pi}{4}$. *к)* $\ln(2+\sqrt{3}) - \ln 3$.

л) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(x+2)^2 - 4(x+2) + 4}{(x+2)^2}dx = \int_{-1}^{2}\left(1 - \frac{4}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^2}\right)dx = 4 - 8\ln 2.$

љ) $\dfrac{e^2-1}{e} + 2$. *м)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+1} = \ln(e^x+1)\Big|_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2.$

204. *а)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n}\right) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$ (Видети поступак решавања задатка 201. *а)*.

б) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n+n}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right) = \int_0^1 (1+x)^2 dx = \left(x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{3}.$

в) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n^2}{(n+n)^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

г) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$

д) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$; *ђ)* $\displaystyle\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}.$

205. *а)* Смена $x^2+1 = t$, даје $xdx = \dfrac{1}{2}dt$, за $x=0$ је $t=1$ и за $x=1$ је $t=2$, па имамо: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

б) $\dfrac{1}{2}(e - e^{-4})$; смена: $-x^2 = t$. *в)* $e - \sqrt{e}$ *г)* $x^3+1=t$, итд. Резултат је $\ln 2$.

д) Сменом $x-1=t$, добијамо $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}=\frac{\pi}{6}$.

ђ) Смена $x^2-3x+1=t$, итд. Резултат: $-2\ln 5$. *е)* $\dfrac{2}{7}$. *ж)* 1.

з) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\sin x dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cdot\sin x dx$, итд. Решење: $\dfrac{2}{3}$.

и) $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. Треба увести смену: $\cos x=t$, али $\cos x$ није монотона функција за $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. Међутим, према задатку 202. *д)*, дати интеграл је једнак 0.

ј) $e^x=t$, итд. Решење: $\operatorname{arctg} e-\dfrac{\pi}{4}$. *к)* $\ln x=t$, $t\in[0,3]$, итд. Решење: 2.

л) $\dfrac{\pi}{6}$. *љ)* $\displaystyle\int\limits_{1}^{2}\frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)}dx=\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x}-\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln 1,6$.

м) Сменом $1+x^5=t$, добијамо $\displaystyle\frac{1}{5}\int\limits_{1}^{3}\frac{t-1}{t^3}dt=\frac{2}{45}$.

206. *а)* $x=t^2$, итд. Решење: $6\ln\dfrac{4}{3}-1$.

б) Проширимо подинтегралну функцију са $(\sqrt{x+9}-\sqrt{x})$, итд. Решење: $\dfrac{122}{27}$.

в) $\dfrac{5}{3}-2\ln 2$. *г)* $\dfrac{32}{3}$. *д)* $3\ln 3$. *ђ)* $2-\dfrac{\pi}{2}$.

е) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\cdot x dx$, итд. Сменом $x^2-1=t^2$, добијамо резултат: $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

ж) $\dfrac{1}{5}\ln 112$. *з)* Смена: $e^x-1=t^2$. Решење: $4-\pi$.

и) Смена: $x=\sin t$, итд: $1-\dfrac{\pi}{4}$. *ј)* Смена $\operatorname{tg} x=t$, итд. Решење: $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

к) Смена је: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, итд. Решење је: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. *л)* $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

љ) $\dfrac{8}{9\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{6}$. *м)* Смена је $x=a\cos t$, итд. Резултат: $\dfrac{\pi a^4}{16}$ *н)* $\dfrac{\pi a^2}{8}$.

њ) Смена је $x=2\operatorname{tg} t$, а решење: $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

о) Проширимо са $\sqrt{e^x}$ и уведемо смену $e^x=t$. Решење је $\ln\left(e+\sqrt{e^2+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

207. *а)* $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}\frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$. Смена $x^2-1=t^2$, итд. $x=2$.

б) Слично претходном: смена је $e^x-1=t^2$. Решење је $x=\ln 4$.

208. *а)* $\left(u=\ln x,\ dv=dx\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x},\ v=x\right)$. Дакле: $\displaystyle\int\limits_1^e \ln x\,dx=$ $\displaystyle x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e x\cdot\frac{dx}{x}=e\cdot\ln e-1\cdot\ln 1-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1.$

б) $\left(u=\ln^3 x,\ dv=dx\Rightarrow du=3\ln^2 x\cdot\dfrac{dx}{x},\ v=x\right)$. Најпре добијамо: $\displaystyle\int\limits_1^e\ln^3 x\,dx=x\ln^3 x\Big|_1^e-3\int\limits_1^e\ln^2 x\,dx=e-3\int\limits_1^e\ln^2 x\,dx$. Сада је $\left(u=\ln^2 x,\ dv=dx\Rightarrow du=2\ln x\dfrac{dx}{x},\ v=x\right)$, итд. Решење је $\displaystyle\int\limits_1^e\ln^3 x\,dx=6-2e$.

в) $u=x$, итд. Решење: $1-2e^{-1}$.

г) $u=x^3$, итд. Решење: $\dfrac{1}{8}(e^2+3)$.

д) $u=x$, итд. Решење: $\dfrac{\pi}{2}-1$.

ђ) π^2-4.

е) $u=x$, итд. Решење: $\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

ж) $u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, итд. Решење: $2\ln\left(2+\sqrt{5}\right)+1-\sqrt{5}$.

з) Видети нпр. задатак 188. *ђ)*. Резултат: $\dfrac{1}{2}(e^\pi+1)$. *и)* $\dfrac{1}{5}(e^\pi-2)$.

ј) Видети нпр. задатак 187. *е)*. Резултат: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

к) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$, итд. Резултат: $\dfrac{\pi^2}{64}-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{1}{8}$.

209. Сваки од наведених задатака се упрошћава увођењем одговарајуће смене.

а) Сменом $x^2=t$, добијамо $\displaystyle\frac{1}{2}\int\limits_0^1 te^t\,dt=\frac{1}{2}$.

б) Смена је: $-\sqrt{x}=t$, итд. Резултат: $2-\dfrac{4}{e}$.

в) Смена: $x^2=t$, даје $\displaystyle\frac{1}{2}\int\limits_0^1\operatorname{arctg} t\,dt=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

г) Због услова монотоности, смена $x^2 = t$ захтева пресецање интервала интеграције: $\int\limits_{-1}^{1} x(\arcsin x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0}(\arcsin t)^2 dt + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0}(\arcsin t)^2 dt = 0.$ (Видети задатак 202. *б)* и *д)*)

д) Сменом $\sqrt{x} - 1 = t^2$, добијамо: $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} (4t^3 + 4t)\operatorname{arctg} t dt = \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$

ђ) $\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

210. *а)* $u = x^{2n} \Rightarrow du = 2nx^{2n-1}dx$, $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$, па је $P_n = \int\limits_0^1 x^{2n}e^{-x}dx = -x^{2n}e^{-x}\Big|_0^1 + 2n\int\limits_0^1 x^{2n-1}e^{-x}dx = -\frac{1}{e} - 2nx^{2n-1}e^{-x}\Big|_0^1 +$ $2n(2n-1)\int\limits_0^1 x^{2(n-1)}e^{-x}dx = -\frac{1}{e} - \frac{2n}{e} + 2n(2n-1)P_{n-1}$. Тражена формула је: $P_n = -\frac{2n+1}{e} + 2n(2n-1)P_{n-1}$.

б) Видети задатак 190. *б)* и *в)*: $P_n = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}P_{n-2} = \frac{n-1}{n}P_{n-2}$.

в) $P_n = e - nP_{n-1}$.

г) Видети задатак 190. *ж)*: $P_n = \frac{2^{n-2}\cdot\sqrt{3}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}P_{n-2}$.

д) $P = \frac{1}{n-1} - P_{n-2}$.

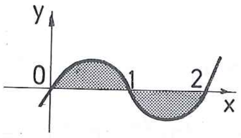
ђ) $P_n = \frac{1}{2^n(n-1)} + \frac{2n-3}{2n-2}P_{n-1}$. Сада имамо: $P_3 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2^3\cdot(3-1)} +$ $\frac{3}{4}P_2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}P_1\right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{8}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}.$

е) Видети задатак *б)*: $P_n = \frac{n-1}{n}P_{n-2}$. Тражимо још P_5 и P_4. Имамо: $P_5 = \frac{4}{5}P_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}P_1 = \frac{8}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = \frac{8}{15}$. Даље: $P_4 = \frac{3}{4}P_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}P_0 =$ $\frac{3}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{3\pi}{16}$. Коначно: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x(1-\sin^2 x)dx = P_6 - P_4 =$ $\frac{5}{6}P_4 - P_4 = -\frac{1}{6}P_4 = -\frac{\pi}{32}.$

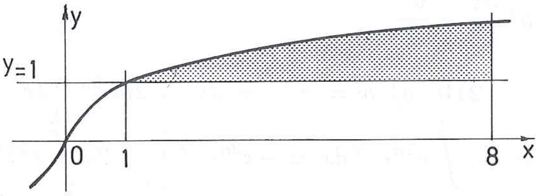
211. Пожељно је скицирати графике линија које ограничавају дату површ.

а) $P=\int_0^1 x(x-1)^2dx=\frac{1}{12}.$ *б)* $P=\int_0^4(4x-x^2)dx=\frac{32}{3}.$

в) $P=\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx-\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx=\frac{1}{2}.$ (Видети сл. 77.)



Сл. 77



Сл. 78

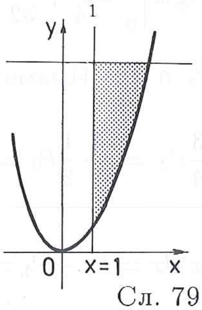
г) $P=\int_1^8(\sqrt[3]{x}-1)dx=\frac{17}{4}$, сл. 78. *д)* $P=\int_1^{2\sqrt{2}}(8-x^2)dx=\frac{32\sqrt{2}}{3}-\frac{23}{3}$, сл. 79.

ђ) $P=\int_0^2(8-x^3)dx=12$ *е)* $P=2.$

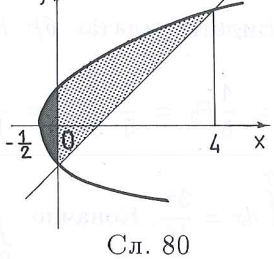
ж) $P=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x dx-\cdots-\int_{99}^{100\pi}\sin x dx=200.$

з) $P=\frac{3}{14}.$ *и)* $P=-\int_{-2}^{0}(x^2+2x)e^{-x}dx=4.$

ј) $P=\int_1^{e^2}\ln x dx=e^2+1.$ *к)* $P=\ln 2.$ *л)* $P=k^2\ln 3.$



Сл. 79

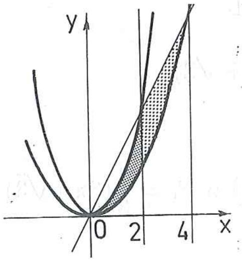


Сл. 80

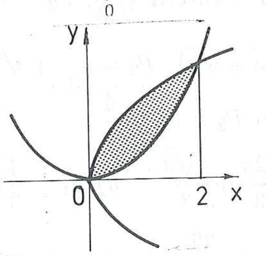
љ) Тачке пресека даје једначина: $(x-1)^2=2x+1\Rightarrow x_1=0,\ x_2=4.$ Према сл. 80. је $P = 2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}dx + \int\limits_{0}^{4}(\sqrt{2x+1}-(x-1))dx = \frac{16}{3}$.

м) Према сл. 81. је $P = \int\limits_{0}^{2}\left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx + \int\limits_{2}^{4}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)dx = 4$.

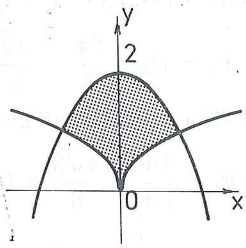
н) Дата је једначина круга: $P = 4\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2dx} = a^2\pi$.



Сл. 81



Сл. 82



Сл. 83

њ) $P = \int\limits_{0}^{1}(e^{-x}-e^{x})dx = e + e^{-1} - 2$.

о) $P = \int\limits_{0}^{2}\left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{4}{3}$. (Видети сл. 82.)

п) $P = 2\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{24x+48}dx + 2\int\limits_{-1}^{2}\sqrt{16-8x}dx = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

р) $P = 2\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. *с)* $P = \int\limits_{-2}^{0}(2x^2+x^3)e^x dx = 18e^{-2} - 2$.

т) $P = 3 - e$. *ћ)* $P = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x - \cos x)dx = 2\sqrt{2}$.

у) $P = \int\limits_{-1}^{1}(\arcsin x + \arccos x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}dx = \pi$.

ф) $P = \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arcsin x dx + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\arccos x dx = \sqrt{2} - 1$.

х) Пресек кривих $y^2 = 4x$ и $y = \sqrt{x^3}$ добијамо из једначине $x^3 = 4x$, чија су решења: $x = 0$, $x = 2$ и $x = -2$. Није могуће $x = -2$, због $y^2 = 4x \geqslant 0$.

Дакле: $P = \int\limits_0^2 (2\sqrt{x} - x\sqrt{x})dx = \dfrac{16\sqrt{2}}{15}$.

ц) $P = \dfrac{9}{2}$. *ч)* $P = 2\int\limits_0^2 (x^3 - 4x)dx = 8$.

212. *а)* Елипса и хипербола одређују три затворене површи. Резултати: $P_1 = P_3 = \pi - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 3 - 2\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $P_2 = 2(\pi - P_1)$.

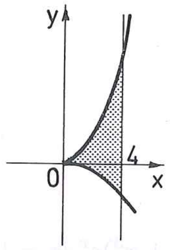
б) $P_1 = P_3 = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$, $P_2 = \dfrac{8\pi}{3} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

в) Два дела: $P_1 = 2\pi + \dfrac{4}{3}$ и $P_2 = 6\pi - \dfrac{4}{3}$.

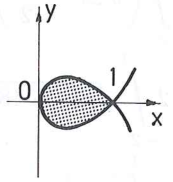
г) $P_1 = \dfrac{16\pi}{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ и $P_2 = \dfrac{32\pi}{3} + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. *д)* $P_1 = \dfrac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ и $P_1 = \dfrac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$.

ђ) $P = 2\int\limits_0^1 (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2})dx = \dfrac{32}{15}$, видети сл. 83.

е) $P = \int\limits_0^4 \left(x + \sqrt{x^5} - (x - \sqrt{x^5})\right)dx = \dfrac{512}{7}$, сл. 84.

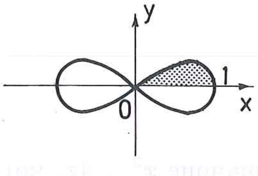


Сл. 84

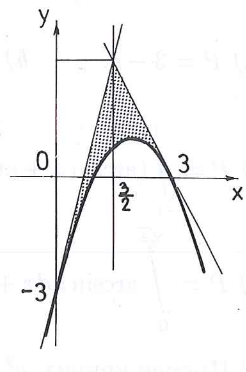


Сл. 85

ж) Према сл. 85. $P = 2\int\limits_0^1 (1 - x)\sqrt{x}dx = \dfrac{8}{15}$.



Сл. 86



Сл. 87

з) Слично претходном задатку: $P=\dfrac{\pi}{4}$.

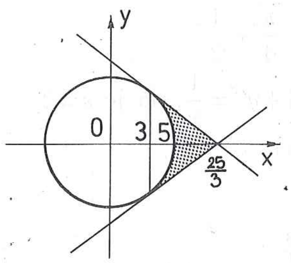
и) $P=4\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{4}{3}$, сл. 86.

213. Додирну тачку налазимо из услова $y'=-5$, тј. $2x-7=-5$. Додирна тачка је $T(1,-3)$. Једначина тангенте је $y=-5x+2$, па је

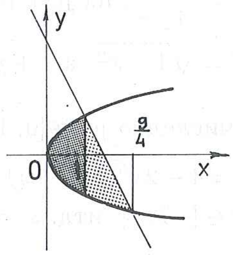
$$P=\int_0^1\big(x^2-7x+3-(-5x+2)\big)dx=\frac{1}{3}.$$

214. *а)* Према сл. 87 је $P=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\big(4x-3-(-x^2+4x-3)\big)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\big(-2x+6-(-x^2+4x-3)\big)dx=\frac{9}{4}$.

б) Једначине тангенти су $3x\pm 4y=25$, па је $P=4\cdot\dfrac{16}{3}-2\displaystyle\int_3^5\sqrt{25-x^2}dx=\frac{100}{3}-\frac{25\pi}{2}+25\arcsin\frac{3}{5}$. (Видети сл. 88.)



Сл. 88



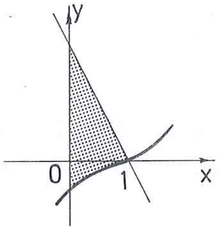
Сл. 89

215. *а)* Коефицијент правца нормале је $k=-2$, па је нормала права $y=-2x+3$. Апсцисе пресечних тачака нормале и параболе су $x_1=1$ и $x_2=\dfrac{9}{4}$, сл. 89. Површина је $P=2\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^{\frac{9}{4}}(-2x+3+\sqrt{x})dx=\frac{125}{48}$.

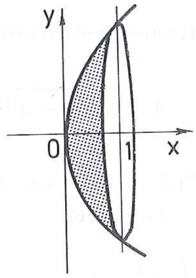
б) Нормала је $x+2y-9=0$, а додирна тачка $T\left(\dfrac{3}{2},3\right)$. Тражена површина је $P=48$.

в) Додирна тачка је $T(1,0)$, а нормала $y=-2x+2$, сл. 90.

$$P=\int_0^1\left(-2x+2-\arcsin\frac{x-1}{2}\right)dx=\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{6}.$$



Сл. 90



Сл. 91

216. *а)* Из $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, добијамо $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, па је $1 + y'^2 = \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}$. Дакле, $s = 4\displaystyle\int_0^a \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin \frac{x}{a}\Big|_0^a = 2a\pi$.

б) $s = 1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. *в)* $s = \sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$. *г)* $s = \ln 3 - \dfrac{1}{2}$.

д) $1 + y'^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{4x^2}$, итд. $s = \dfrac{1}{4}(e^2 + 1)$.

ђ) $s = 2$; *е)* $s = \dfrac{61}{54}$; *ж)* $s = \ln\left(e + \sqrt{e^2 - 1}\right)$.

з) $y' = \dfrac{x - 4}{4\sqrt{x}}$, па је $1 + y'^2 = \dfrac{(x+4)^2}{16x}$, итд. Резултат: $s = 8\sqrt{3}$.

и) $y' = \sqrt{1 - x^2}$, а $1 + y'^2 = 2 - x^2$. Резултат је: $s = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$.

ј) Очигледно је $x \in [0, 1]$. Како је $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$, то је $1 + y'^2 = \dfrac{1}{x}$, па је $s = 2$.

к) $s = 4 - 2\sqrt{2}$. *л)* Слично задатку *з)*. Резултат: $s = \sqrt{3}$.

љ) $x \in [-1, 1]$. итд. $s = \dfrac{\pi}{2} + 1$.

217. *а)* $V = \pi\displaystyle\int_0^1 4x\,dx = 2\pi$, сл. 91. *б)* $V = \pi\displaystyle\int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = 8{,}1\pi$.

в) $V = \pi\displaystyle\int_{-1}^1 4x^4 dx = \frac{8\pi}{5}$. *г)* $V = \dfrac{\pi}{4}(e^2 - 1)$. *д)* $V = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi}{4}$.

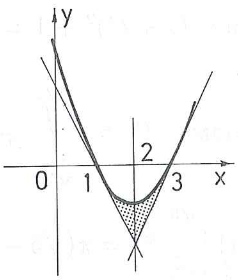
ђ) $V = \dfrac{\pi^2}{2}$. *е)* $V = \pi\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{\pi}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{3}{8}\pi^2$. *ж)* $V = \dfrac{3}{8}\pi^2$.

з) $V = \pi - \dfrac{\pi^2}{4}$. *и)* $V = \dfrac{\pi}{4}$. *ј)* $V = \dfrac{\pi^3}{4} - 2\pi$. *к)* $V = \dfrac{4\pi}{4}ab^2$.

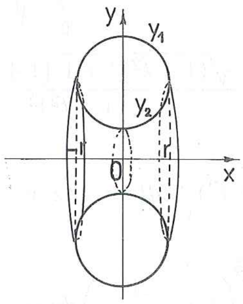
218. *а)* $V = \pi\displaystyle\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{3\pi}{10}$.

б) Видети задатак 214. *б)*, сл. 88. $V=\dfrac{256\pi}{9}-\pi\displaystyle\int_3^5(25-x^2)dx=\dfrac{100\pi}{9}$. ($\dfrac{256}{9}\pi$ је запремина купе одређене одсечком тангенте.)

в) Фигура која ротира је симетрична у односу на праву $x=2$, сл. 92, па је $V=2\pi\displaystyle\int_1^2\left((-2x+2)^2-(x^2-4x+3)^2\right)dx=\dfrac{8\pi}{5}$.



Сл. 92



Сл. 93

219. *а)* $1+y'^2=\dfrac{x+3}{x}$, па је $P=4\pi\sqrt{3}\displaystyle\int_0^9\sqrt{x+3}dx=168\pi$.

б) $P=\dfrac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$.

в) Видети задатак 216. *а)* $P=2\pi\displaystyle\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\dfrac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=4\pi r^2$.

г) $P=2\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx=-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt=2\pi\int_{-1}^{1}\dfrac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=$

$2\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}+2\pi\int_{-1}^{1}\dfrac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}=2\pi\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_{-1}^{1}+2\pi\int_{-1}^{1}\dfrac{t\cdot tdt}{\sqrt{1+t^2}}$. Сада уводимо парцијалну интеграцију: $u=t$, $dv=\dfrac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}\Rightarrow v=\sqrt{1+t^2}$, па

добијамо: $P=2\pi\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_{-1}^{1}+2\pi t\sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^{1}-2\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt$, тј.

$P=2\pi\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+4\pi\sqrt{2}-P$. Одавде је $2P=4\pi\ln(\sqrt{2}+1)+4\pi\sqrt{2}$, па је коначно: $P=2\pi\left(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right)$.

д) Видети претходни задатак: $P=\pi\left(\sqrt{2}+\ln\sqrt{2}+1\right)$.

ђ) Како је $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, то је $1+y'^2=1+\dfrac{1}{\cos^4 x}=\dfrac{1+\cos^4 x}{\cos^4 x}$ и $P=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\sqrt{1+\cos^4 x}\,dx$. Сменом: $\operatorname{tg} x=t\Rightarrow\dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt$ и $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, добијамо $P=2\pi\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+\frac{1}{(1+t^2)^2}}dt=2\pi\int_0^1\frac{t\sqrt{(1+t^2)^2+1}}{1+t^2}dt=$

$\pi\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{(1+t^2)^2+1}\cdot(1+t^2)2tdt}{(1+t^2)^2}$. Сад уводимо смену: $(1+t^2)^2+1=z^2\Rightarrow$

$(1+t^2)\cdot 2tdt=zdz$ и $(1+t^2)^2=z^2-1$, па добијамо: $P=\pi\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{z^2dz}{z^2-1}=$

$$\pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz=\pi\left(z+\frac{1}{2}\ln(z-1)-\frac{1}{2}\ln(z+1)\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\ {}^{*)}=\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+$$

$$\pi\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\ {}^{**)}=\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}-2}.$$

е) $1+y'^2=\dfrac{(x^2+1)^2}{4x^2}$, па је $P=2\pi\displaystyle\int_1^e\frac{1}{4}(x^2-2\ln x)\frac{x^2+1}{2x}dx=\frac{\pi}{4}\int_1^e(x^3+x)dx-$

$\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^e x\ln x dx=\frac{\pi}{16}(e^4-9)$.

ж) Како је $1+y'^2=\dfrac{(x+1)^2}{4x}$, то је $P=\dfrac{\pi}{3}\displaystyle\int_0^3(3-x)(x+1)dx=3\pi$.

з) Видети задатак 216. *ђ)*. Решење: $P=2\pi\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-2\pi$.

и) Овде је $y_1=q+\sqrt{r^2-x^2}$ и $y_2=q-\sqrt{r^2-x^2}$, сл. 93, па је $P=P_1+P_2=$

$$2\pi\int_{-r}^{r}y_1\sqrt{1+y'^2}dx+2\pi\int_{-r}^{r}|y_2|\sqrt{1+y'^2}dx=4\pi\int_{-r}^{r}\frac{qrdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=4\pi^2qr.$$

Запремину налазимо на следећи начин:

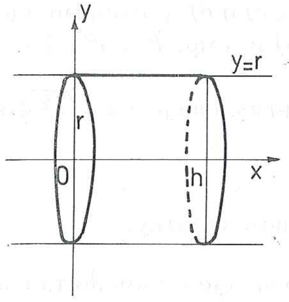
$$V=\pi\int_{-r}^{r}(y_1^2-y_2^2)dx=4\pi q\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=2\pi^2qr^2.$$

220. *а)* Ротирамо око осе Ox одсечак праве $y=r$, за $0\leqslant x\leqslant h$, сл.

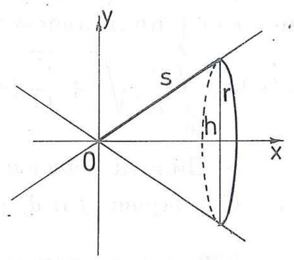
$*)$ Видети решење задатка 177 *ж)*.

$**)$ Рационалишемо имениоце у загради.

94. Добијамо: $V = \pi \int\limits_0^h y^2 dx = \pi \int\limits_0^h r^2 dx = \pi r^2 x \Big|_0^h = \pi r^2 h.$



Сл. 94

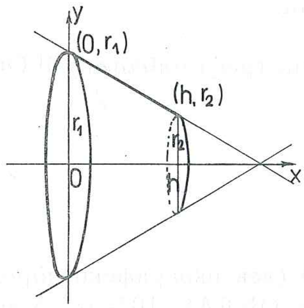


Сл. 95

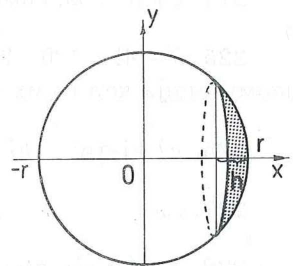
б) Ротирамо око осе Ox одсечак праве $y = \dfrac{r}{h}x$, за $0 \leqslant x \leqslant h$, сл. 95.

Добијамо: $V = \pi \int\limits_0^h \dfrac{r^2}{h^2} x^2 dx = \dfrac{\pi r^2}{h^2} \cdot \dfrac{x^3}{3} \Big|_0^h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h.$

в) Према сл. 96, ротираћемо око осе Ox одсечак праве $y = r_1 + \dfrac{r_2 - r_1}{h}x$, за $0 \leqslant x \leqslant h$, сл. 95. Слично претходном задатку добијамо:
$V = \pi\left(r_1^2 x + \dfrac{r_1 r_2 - r_1^2}{h}x^2 + \dfrac{(r_2 - r_1)^2}{h^2} \cdot \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h = \dfrac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$



Сл. 96



Сл. 97

г) Ротирамо око осе Ox горњу половину круга $x^2 + y^2 = r^2$, за $-r \leqslant x \leqslant r$, сл. 97. Добијамо $V = \pi \int\limits_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \dfrac{4}{3}\pi r^3.$

д) Према сл. 97, ротирамо око осе Ox осенчени одсечак круга. Имамо:
$$V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

221. За израчунавање омотача у случајевима *а)* и *б)*, ротирамо одсечке као у претходном задатку. Нпр, у случају *б)* имамо: $P = r^2\pi + M =$
$r^2\pi + 2\pi \int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}dx = r^2\pi + \frac{2\pi rs}{h^2}\int_0^h xdx = r^2\pi + r\pi s$, где је $s = \sqrt{h^2 + r^2}$.

в) Видети решење задатка 218 *б)*.

Случајеве *г)* и *д)* решавамо слично претходном задатку.

222. Ако поставимо координатни систем, као што је означено тачкастим линијама на сл. 11, стр. 66, тада је, према задатку 220 *а)* и *д)*:
$$V = 2\left(\frac{3\pi}{4}\int_{-r}^{\frac{r}{2}} r^2dx + \pi\int_{\frac{r}{2}}^{r}(r^2 - x^2)dx\right) = \frac{8\pi r^3}{3}.$$

223. *а)* 123, 132, 213, 231, 312, 321.

б)

1. *abcd*	7. *bacd*	13. *cabd*	19. *dabc*
2. *abdc*	8. *badc*	14. *cadb*	20. *dacb*
3. *acbd*	9. *bcad*	15. *cbad*	21. *dbac*
4. *acdb*	10. *bcda*	16. *cbda*	22. *dbca*
5. *adbc*	11. *bdac*	17. *cdab*	23. *dcab*
6. *adcb*	12. *bdca*	18. *cdba*	24. *dcba*

224. Скуп може имати највише 7 елемената.

225. $5! - 4! = 120 - 24 = 96$ (од 5! пермутација треба одбацити 4! оних пермутација код којих је 0 на првом месту).

226. *а)* 17-ти; *б)* 80-та.

227. *cbead*.

228. *а)* Ако је прва пермутација АБКЛО (лексикографски поредак слова), онда је БОКАЛ 45-та пермутација а ОБЛАК 107-ма. Ако се реч ОБЛАК прогласи првом пермутацијом, онда бисмо увели следеће обележавање: слово О бисмо обележили са 1, слово Б са 2, слово Л са 3, слово А са 4 и слово К са 5. Тада реч БОКАЛ одговара пермутацији 21543, а то је онда 30-та пермутација у лексикографском редоследу пермутација елемената 1, 2, 3, 4, 5.
б) 69-та пермутација је ДУВАН, а 71-ва је ДУНАВ.

229. *а)* $\dfrac{(n+2)!}{n!}=12\Rightarrow (n+1)(n+2)=12\Rightarrow n=2;$
б) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=20\Rightarrow n(2n+1)=10\Rightarrow n=2;$
в) $\dfrac{n!}{(n-1)!-(n-2)!}=3!\Rightarrow n(n-1)=6(n-2)\Rightarrow n\in\{3,4\};$
г) $n=10.$

230. *а)* $\dfrac{240}{120}+\dfrac{40\cdot 39}{24}+\dfrac{18}{6}=2+65+3=70.;$
б) $n!$ јер је $(2n)!=2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)=2^n\cdot n!;$
в) $\dfrac{6}{n(n-1)}\left[\dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3(n+2)(n-2)(n-3)!}+\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}\right]=$
$=2(n+1)+3=2n+5,\ n\geqslant 3.$

231. *а)* $n\in\{3,4,5,6,7,8,9\}$; *б)* $n\in\{1,2,3,4\}$.

232. Ако број $n!$ представимо у облику $n!=2^k5^mA$, при чему број A није дељив ни са два ни са пет, онда се број $n!$ завршава са m нула. Дати бројеви се завршавају са:
а) две нуле, јер $10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=2^8\cdot 5^2\cdot 3^4\cdot 7;$
б) четири нуле; *в)* 12 нула; *г)* 24 нуле.

233. Пар 12 можемо пермутовати са осталих $n-2$ бројева на $(n-1)!$ начина. Слично се и пар 21 пермутује са преосталим бројевима на $(n-1)!$ начина. Зато је тражени број пермутација једнак $2(n-1)!$.

234. Нека су столице око стола обележене бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Ако младићи седе на непарним местима, девојке седе на парним местима. Младићи се на непарним местима могу распоредити на $6!=720$ начина. Исто тако се и девојке на парним местима могу распоредити на $6!=720$ начина. Производ $720\cdot 720=518400$ треба помножити са 2, јер се исто толико размештаја младића и девојака добија када младићи заузму парна места а девојке непарна. Дакле, укупно има $2(6!)^2=1036800$ размештаја младића и девојака око стола.

235. *а)* $7!$; *б)* $10!-7!$

236. *а)* $6!$; *б)* $7!$; *в)* $\dfrac{11!}{2!2!}$; *г)* $\dfrac{11!}{4!2!}$; *д)* 1162.

237. Свако кретање од једне до суседне раскрснице када се крећемо од Истока ка Западу означимо са 1, а свако кретање од једне до суседне раскрснице када се крећемо од Севера ка Југу означимо са 0. Скицирана маршута на цртежу може онда да се опише као пермутација од 7 елемената у којој се налазе четири јединице и три нуле: 1011001. Укупан број маршута је једнак броју пермутација од 7 елемената међу којима су четири елемента једнака међу собом и преостала три елемента су једнака међу собом: $P_7(4,\ 3) = \dfrac{7!}{4!3!} = 35$.

238. $P_8(2,\ 2,\ 2) = \dfrac{8!}{2!2!2!} = 7! = 5040$.

239. *а)* $5! = 120$;
б) У половини случајева B је иза A, то јест таквих редоследа говорника је 60;
в) Пар AB можемо сматрати једним говорником па је тражени број различитих редоследа говорника $4! = 24$.

240. Четвороцифрени број може се састојати било од четири различите цифре $(2,\ 3,\ 4,\ 5)$, било од две једнаке и две различите цифре $[(2,2,3,4),\ (2,2,3,5),\ (2,2,4,5),\ (5,5,2,3),\ (5,5,2,4),\ (5,5,3,4)]$, било од два пара једнаких цифара $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$. Зато је тражени број могућих четвороцифрених бројева једнак:

$$4! + 6\cdot\frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!} = 102.$$

241. Број k не може бити квадрат природног броја за $n \geqslant 5$ јер је (види решење задатка 232):

$$k = 1! + 2! + 3! + 4! + (5! + \cdots + n!) = 33 + 10r = 3 + 10(r+3)$$

а квадрат природних бројева никада се не завршава цивром 3 (провери да се квадрати природних бројева завршавају једном од цифара 0, 1, 4, 5, 6, 9). Зато је $1 \leqslant n \leqslant 4$. Лако се уочава да је $n \in \{1,\ 3\}$.

242. Ако датом збиру додамо и одузмемо збир $1!+2!+\cdots+n!$ имамо $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n! + (1!+2!+3!+\cdots+n!) - (1!+2!+3!+\cdots+n!) =$ $= 2! + 3! + 4! + \cdots + (n+1)! - (1!+2!+3!+\cdots+n!) = (n+1) - 1.$
Напомена: Задатак се може једноставније решити и методом математичке индукције.

243. Дати збир можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)! &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+4k+4-4k-4)(k+1)! =\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+2)^2(k+1)! - 4\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)! =\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+2)! - 4\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)!.\end{aligned}$$

Како је $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! = (n+1)! - 1$, то је

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)! = (n+2)! - 2!, \quad \sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+2)! = (n+3)! - 3!$$

одакле следи

$$1^2\cdot 2! + 2^2\cdot 3! + \cdots + n^2(n+1)! = (n-1)(n+2)! + 2.$$

244. Број различитих распореда је $5! = 120$. Саветовање је завршено после четири месеца, и то 29. априла ако је била преступна година а 30. априла ако није преступна.

245. Прво распоредимо 5 дечака. Они се могу разместити на $4!$ начина. Затим на пет празних места између њих на $5!$ начина разместимо 5 девојчица. То је укупно $4!\cdot 5! = 2880$ начина.

246. Замислимо да су витезови темена конвексног дванаестоугла, уписаног у круг. Број делегација је једнак броју дијагонала овог дванаестоугла: $\dfrac{12(12-3)}{2} = 54$ делегације.

247. Распоредимо најпре 3 наставника на $2! = 2$ начина. Затим, 3 родитеља распоредимо тако да између свака два наставника буде један родитељ. То је могуће учинити на $3! = 6$ начина. Затим, између наставника и родитеља поставимо по једног ученика. Да би међу било које три узастопне особе били по један наставник, родитељ и ученик, морамо сваку тројку (укупно три тројке) распоредити истоветно: наставник, ученик, родитељ, или друга варијанта наставник, родитељ, ученик. У свакој од ове две варијанте ученике можемо распоредити на $3! = 6$ начина, односно укупно 12 начина. Укупан број свих могућности је $2\cdot 6\cdot 12 = 144$.

248. Слично претходном задатку, само што се овде не захтева да између сваке три узастопне особе имамо по једног наставника, дечака и девојчицу. Ако бисмо начинили све тројке различитих особа у редоследу: наставник, дечак, девојчица, имали бисмо 72 могућности $(2\cdot 6\cdot 6)$. Међутим, овде је у свакој тројци могућ и редослед: наставник, девојчица, дечак, тј. дуплира се број могућности. За три овакве тројке број могућности се увећава $2\cdot 2\cdot 2$, тј 8 пута. Решење задатка је $72\cdot 8 = 576$ могућности.

249. Огрлица се не мења при цикличном пермутовању, нити при преокретању огрлице, па има $\dfrac{1}{2}\cdot 7! = 2520$ различитих.

250. *а)* Узмемо најпре белу перлу. Сада, пре него што узмемо следећу белу, распоредимо по једну жуту, плаву и црвену, мењајући редослед боја на $3! = 6$ начина. Због услова да су сваке четири узастопне перле различито обојене, овај редослед је истоветан за сваку следећу четворку. Значи, нема нових могућности. Због обртања огрлице треба још преполовити број могућности. Дакле, имамо свега $\frac{1}{2}\cdot 3! = 3$ огрлице.
б) Исто као *а)*, тј. 3 огрлице, јер број четворки различито обојених перли не утиче на резултат.

251. Слично задатку 246. Резултат је $\frac{1}{2}\cdot(3!)^4 = 648$ огрлица

252. Наруквица се разликује од обичне огрлице због чињенице да су алке нумерисане, па алке од једног метала нису равноправне. Важан је редослед узимања нумерисаних наруквица.

Број различитих кружних повезивања 5 сребрних алки је $4!$, а повезивање са 5 платинских алки је могуће на $5!$ начина. Укупно можемо начинити $\frac{1}{2}\cdot 4!\cdot 5! = 1440$ наруквица.

253. $V_{10}^3 - V_9^2 = 10\cdot 9\cdot 8 - 9\cdot 8 = 72(10-1) = 648$ (одузели смо троцифрене бројеве код којих је нула на првом месту).

254. Како се могу формирати једноцифрени, двоцифрени, троцифрени, четвороцифрени и петоцифрени бројеви, то природних бројева има укупно:

$$V_5^1 + V_5^2 + V_5^3 + V_5^4 + P_5 = 5 + 5\cdot 4 + 5\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 + 5! = 325.$$

255. Прво слово а наћи ће се у три варијације (прва колона), а друго слово њему придружено биће једно од преостала три слова. Значи, варијација друге класе код којих је први елемент a има три. На исти начин добијају се по три варијације и када су b, c и d на првом месту:

$$\begin{matrix} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \end{matrix}$$

Према формули (5) је $V_4^2 = 4(4-1) = 4\cdot 3 = 12$.

Да бисмо формирали варијације треће класе без понављања од датих пет слова потребно је свакој варијацији друге класе (њих је V_4^2) додати по један од преостала два елемента. Према томе, њих ће бити $V_4^3 = V_4^3\cdot(4-2) = V_4^2\cdot 2 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$.

256. Према формули (5) имамо:

$$V_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-n+1)!} = \frac{n!}{1!} = n! \quad \text{и} \quad V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

257. $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 210 \Rightarrow n(n-1) = 210 \Rightarrow n = 15.$

258. *а)* $\dfrac{n!}{(n-5)!} = 18\dfrac{(n-2)!}{(n-6)!} \Rightarrow n^2 - 19n + 90 = 0 \Rightarrow n \in \{9, 10\}.$
б) $n = 7.$

259. $V_{n-1}^{k} = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\cdot\dfrac{n-k}{n-k} = \dfrac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!} = V_n^k - kV_{n-1}^{k-1}.$

260. Варијације друге класе са понављањем од елемената a и b су:

$aa,\ ab,\ ba,\ bb \qquad (\overline{V}_2^2 = 2^2 = 4).$

Варијације треће класе са понављањем од елемената a и b су:

$aaa,\ aab,\ aba,\ baa,\ abb,\ bab,\ bba,\ bbb \qquad (\overline{V}_2^3 = 2^3 = 8).$

Варијације четврте класе са понављањем од елемената a и b су:

$aaaa,\ aaab,\ aaba,\ abaa,\ baaa,$
$aabb,\ abab,\ abba,\ baba,\ baab,\ bbaa,$
$abbb,\ babb,\ bbab,\ bbba,\ bbbb \qquad (\overline{V}_2^4 = 2^4 = 16).$

261. За прву цифру имамо 9 могућности, а преостале цифре су варијације од 10 елемената пете класе са понављањем када се ради о бројевима телефона са 6 цифара, а у случају седмоцифрених телефонских бројева то су варијације од 10 елемената шесте класе са понављањем. Значи, укупно различитих телефонских бројева може бити: $9\overline{V}_{10}^5 + 9\overline{V}_{10}^6 = 9(10^5 + 10^6) = 9\,900\,000.$

262. Једноцифрених, двоцифрених, троцифрених и четвороцифрених бројева формираних од скупа цифара $\{1, 2, 3,\}$ има $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120.$

263. $30^2 \cdot 10^4 = 900 \cdot 10\,000 = 9\,000\,000 = 9 \cdot 10^6.$

264. $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62.$

265. Сваки могући исход бацања новчића пет пута је једна варијација пете класе са понављањем од два елемента, па различитих исхода пет бацања новчића има $\overline{V}_2^5 = 2^5 = 32.$

266. *а)* Свака куглица се може разместити на 4 начина. Зато је тражени број једнак $4^3 = 64;$
б) n^k

267. $V_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$

268. $V_8^3 == 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$

269. $\overline{V}_6^4 = 6^4 = 1296.$

270. *а)* $9(\overline{V}_{10}^3 + \overline{V}_{10}^4 + \overline{V}_{10}^5) = 999\,000;$
б) Не! (900 000).

271. Треба попунити $\overline{V}_3^{12} = 3^{12} = 531441$ „комбинација“ колона на тикетима.

272. Од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 може да се састави V_8^4 четвороцифрених бројева узимајући у обзир и те који почињу са нулом. Како су свих 8 цифара равноправне, то ће са нулом да почиње $\frac{1}{8}V_8^4$ бројева. Значи, укупно четвороцифрених бројева има $\frac{7}{8}V_8^4$. Број четвороцифрених бројева који не садрже цифру 1 и цифру 0 на почетку је $V_7^4 - \frac{1}{7}V_7^4 = \frac{6}{7}V_7^4$. На тај начин, укупно четвороцифрених бројева у сваком од којих се налази цифра 1 има $\frac{7}{8}V_8^4 - \frac{6}{7}V_7^4$.

273. *а)* $\binom{16}{4} = \dfrac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1820;$
б) Према особини (11) имамо
$$\binom{12}{9} = \binom{12}{12-9} = \binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220;$$
в) $\binom{100}{97} = \binom{100}{3} = \dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3} = 161700.$

274. *а)* $\binom{7}{6} = \binom{7}{7-6} = \binom{7}{1} = 7,\quad \frac{7}{6}\binom{6}{5} = \frac{7}{6}\binom{6}{1} = \frac{7}{6}\cdot 6 = 7.$
У општем случају покажимо да је десна страна једнака левој:
$$\frac{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \binom{n+1}{k+1};$$
б) Како је $\binom{10}{4} = 210$, $\binom{10}{5} = 252$ и $\binom{11}{5} = 462$, то је $210 + 252 = 462$. У општем случају покажимо да је лева страна једнака десној:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

275. *а)* 330; *б)* $2^4 = 16$; *в)* 74.

276. *а)* $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} = 1 + \frac{(n+1)!}{n!} = 1 + n + 1 = n + 2 =$
$= \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!(n+2-n-1)!} = \binom{n+2}{n+1}$;
б) Слично као *а)*;
в) Користити једнакост *а)*.

277. $\binom{n+k}{2} + \binom{n+k+1}{2} = \frac{(n+k)(n+k-1)}{2} + \frac{(n+k+1)(n+k)}{2} =$
$= \frac{n+k}{2}(n+k-1+n+k+1) = (n+k)^2$.

278. Означимо дати збир са S_n:

$$S_n = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}.$$

Користећи особине биномних коефицијената (11) и (13) имамо

$$S_n = n\binom{n}{0} + (n-1)\binom{n}{1} + (n-2)\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1}.$$

Сабирањем ових двеју једнакости добијамо:

$$2S_n = n\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] = n2^n \quad \text{и} \quad S_n = n2^{n-1}.$$

279. *а)* $n(n-1)(n-2) = 120 = 6\cdot 5\cdot 4 \Rightarrow n = 6$;
б) $n = 5$; *в)* $n = 7$; *г)* $n = 5$.

280. *а)* $n \in \{5, 6, 7\}$; *б)* $n \in N$, $n > 6$; *в)* $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$;
г) $n \in \{9, 10, \ldots, 15\}$.

281. Покажимо да је лева страна једнакости једнака десној:

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-m+k)}\cdot\frac{m!}{m!} =$$
$$= \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!} = C_m^k C_n^m.$$

282. Комбинације прве класе су a, b, c, d, e, f $\left(C_6^1 = \binom{6}{1} = 6\right)$.

Комбинације друге класе су:

ab, ac, ad, ae, ef, bc, bd, be, bf,
cd, ce, cf, de, df, ef $\left(C_6^2 = \binom{6}{2} = \dfrac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15\right)$.
Комбинације треће класе су
abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf,
ade, adf, aef, bcd, bce, bcf, bde,
bdf, bef, cde, cdf, cef, def $\left(C_6^3 = \binom{6}{3} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 20\right)$.

283. Свакој комбинацији од три беле куглице, а тих комбинација има $C_5^3 = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$, можемо да придружимо произвољну комбинацију од 4 црне куглице којих има $C_6^4 = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15$. Дакле, укупан број начина избора 7 куглица од којих су три беле и четири црне једнак је $C_5^3\cdot C_6^4 = 10\cdot 15 = 150$.

284. $\dbinom{10}{3} + \dbinom{10}{2}\dbinom{4}{1} + \dbinom{10}{1}\dbinom{4}{2} + \dbinom{4}{3} = 364.$

285. $5\cdot \dbinom{15}{5} = 15015.$

286. $\dbinom{5}{2}\dbinom{4}{2}\dbinom{3}{1} + \dbinom{5}{2}\dbinom{4}{1}\dbinom{3}{2} + \dbinom{5}{3}\dbinom{4}{1}\dbinom{3}{1} = 420.$

287. *Прво решење.* Како сваке две тачке одређују праву, при чему се праве AB и BA поклапају, то је број правих $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Друго решење. Како се из сваке тачке може повући $n-1$ правих, то укупно има $n(n-1)$ правих, ако сматрамо да су праве AB и BA различите, али како AB и BA означавају једну исту праву, то је број правих једнак $\dfrac{n(n-1)}{2} = C_n^2$.

288. $\dbinom{28}{25}\cdot 25! = \dbinom{28}{3}\cdot 25! = \dfrac{28!}{3!}.$

289. Нека се најпре за лице A изаберу 4 предмета, па се затим за лице B од преосталих 8 предмета изабере 4, а преостала 4 предмета добија лице C. За лице A може се изабрати 4 предмета од 12 на C_{12}^4 начина, затим се за лице B могу изабрати 4 предмета од 8 на C_8^4 начина, а лице C увек добија преостала 4 предмета. Како се на 3! начина може одредити које ће лице бити прво, које друго и које треће, то је укупан број начина расподеле предмета једнак $C_{12}^4\cdot C_8^4\cdot 3! = 207\,900$.

290. Како у шпилу од 36 карата има 4 кеца, то се свака подела шпила карата на два једнака дела може да изведе тако што ће се извући 16 карата из дела шпила од 32 карте где нема кечева, а из скупа од 4 кеца извући ће се још два кеца. Како се прво извлачење може извести на C_{32}^{16} начина, а друго на $\frac{1}{2}C_4^2 = \frac{4!}{(2!)^3}$ начина (само је три начина поделе 4 кеца на два једнака дела!) и како се сваком скупу од извучених 16 карата додају два кеца, то је укупан број подела шпила карата једнак $C_{32}^{16} \cdot \frac{1}{2}C_4^2 = \frac{3 \cdot 32!}{(16!)^2}$.

291. Како су два учесника одиграла по три партије и значи укупно 6, то су преосталих $n-2$ играча одиграли $84-6=78$ партија. Решење једначине $C_{n-2}^2 = 78$ даје решење $n = 15$.

292. Нека је на турниру било n играча, $n \in N$. Последњих 10 играча одиграли су између себе $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ партија и, дакле, у њима освојили 45 поена. Тих 10 играча су са осталих $n-10$ играча одиграли $10(n-10)$ партија и у њима освојили такође 45 поена. Шахисти који су заузели првих $n-10$ места одиграли су између себе $\frac{(n-10)(n-11)}{2}$ партија и у њима освојили управо $\frac{(n-10)(n-11)}{2}$ поена, што мора бити једнако броју поена који су они освојили у партијама са десет последњих играча.

Дакле, имамо

$$\frac{(n-10)(n-11)}{2} = 10(n-10) - 45$$

одакле је $n^2 - 41 + 400 = 0$ и $n = 16$, $n = 25$. Лако се може закључити да решење не може бити $n = 16$, јер би тада број поена које су првих 6 играча освојили у међусобним сусретима био $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ и исто толико са последњом десеторицом. На тај начин би последњи играчи освојили више поена у играма са првима него што би први играчи освојили у играма са последњим играчима. Значи, број учесника на турниру био је 25.

293. Први састав петорке може се изабрати на $C_{10}^5 = 252$ начина, други састав је један од $C_{10}^5 - 1 = 251$ могућих састава, и трећи састав се може изабрати на $C_{10}^5 - 2 = 250$ начина. Укупно, значи три сатава екипе од пет кошаркаша може се добити на $252 \cdot 251 \cdot 250 = 15\,813\,000$ начина.

294. Или су сва три изабрана броја парна, или је један од њих паран, а два непарна, па је укупан број начина на који се могу изабрати три броја једнак $C_{15}^3 + C_{15}^1 \cdot C_{15}^2 = 2030$.

295. Најједноставније је приказати број n у облику збира n јединица. Ако тих n јединица поставимо у низ, онда између њих има $n-1$ размака. Изаберимо $s-1$ од тих размака и тамо где смо их изабрали ставимо преграде. Ако саберемо јединице унутар тих преграда, број n смо приказали у облику збира од s сабирака. Како се између $n-1$ размака може изабрати $s-1$ преграда на C_{n-1}^{s-1} начина, то мењајући s од 1 до n добијамо укупан број начина на које се број n може да изрази у облику збира сабирака:

$$C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+C_{n-2}^{2}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}.$$

Тако се број 5 може приказати у облику збира природних бројева на $2^{5-1}=2^4=16$ начина:

$5=5$	$5=3+1+1$	$5=2+1+1+1$
$5=4+1$	$5=1+3+1$	$5=1+2+1+1$
$5=1+4$	$5=1+1+3$	$5=1+1+2+1$
$5=2+3$	$5=2+2+1$	$5=1+1+1+2$
$5=3+2$	$5=2+1+2$	$5=1+1+1+1+1.$
	$5=1+2+2$	

296. *а)* Могу се узети две тачке на једној правој а трећа на другој. Зато је укупан број могућих троуглова $C_n^2C_m^1+C_n^1C_m^2=\dfrac{nm}{2}(n+m-2)$.
б) Може се конструисати још троуглова:

$$C_r^2(C_n^1+C_m^1)+C_r^1(C_n^2+C_m^2)+C_r^1C_n^1C_m^1=\frac{r}{2}(n+m)(n+m+r-2).$$

297. Троуглова може бити двојаких: или сва три темена леже на разним странама квадрата или два темена леже на једној страни квадрата а треће теме на некој другој страни. У првом случају треба изабрати три стране квадрата од четири ($C_4^3=4$) а затим на свакој од трију страна по једну тачку од $n-1$. Укупно имамо $4(C_{n-1}^1)^3$ начина избора. У другом случају треба изабрати страну где леже два темена (4 начина избора) и две тачке од $n-1$ (C_{n-1}^2 начина избора), после чега се бира једна од преостале три стране (3 начина) и тачка на њој (C_{n-1}^1 начина избора). Укупно, у другом случају може се конструисати троуглова $12\cdot C_{n-1}^1\cdot C_{n-1}^2$. Значи, укупно се може конструисати троуглова:

$$4\cdot(C_{n-1}^1)^3+12\cdot C_{n-1}^1\cdot C_{n-1}^2=2(n-1)^2(5n-8).$$

298. Ако је изабрана Милица, онда је изабран и Мирко, па од преосталих 8 треба изабрати још 4, а то је могуће на $\binom{8}{4}$ начина. Ако није изабрана Милица, онда од преосталих 9 треба изабрати 6 ученика, а то се може учинити на $\binom{9}{6}=\binom{9}{3}$ начина. Решење даје збир: $\binom{8}{4}+\binom{9}{3}=$ 154 начина.

299. Ако прво распоредимо мушкарце (на 5! начина), тада 3 жене имају на избору 6 места, 4 између мушкараца и 2 места на почетку и крају колоне. Жене се могу распоредити на $6\cdot 5\cdot 4$ начина. Укупан број распореда је $5!\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 14400$.

300. Слично претходном задатку. Кад распоредимо 4 дечака (на 3! начина), за 2 девојчице преостају 4 места. Њих можемо распоредити на $4\cdot 3$ начина. То је укупно: $3!\cdot 4\cdot 3 = 72$ начина.

301. Кад скинемо 4 слике, на зиду остане 6. Четири изабране, ако нису суседне, могле су бити окачене на неком од 7 места (2 на крајевима и 5 између 6 преосталих). Дакле, могућих избора има $\binom{7}{4} = 35$.

302. „Расечемо" сто на месту где седи сер Ланселот, па решавамо слично претходном задатку. У једном случају налазимо решење без учешћа сер Ланселота. Тада долазе у обзир и његови суседи, тј. од 11 витезова бирамо 5, тако да међу изабранима нема суседа. То можемо учинити на $\binom{7}{5}$ начина. У другом случају, када сер Ланселот учествује у ослобађању принцезе, његови суседи не долазе у обзир, па од преосталих 9 бирамо 4 који нису суседи. То можемо учинити на $\binom{6}{4}$ начина. Дакле, ослободиоце можемо изабрати на $\binom{7}{5} + \binom{6}{4}$, тј. на 36 начина.

303. *Први начин.* Изабраћемо два човека на $\binom{10}{2}$ начина. Од претходних 8 бирамо троје на $\binom{8}{3}$ начина. Преосталих 5 људи чини трећу групу. Укупно има $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}$, тј. 2520 комбинација за избор ових група.

Други начин. Означимо са А, Б, В, припадност првој, другој, трећој групи. Један од могућих избора је: БВВАББВВА. Очигледно, сваки избор је једна од пермутација 10 слова са понављањем. Укупан број ових могућности је $\dfrac{10!}{2!3!5!} = 2520$.

304. Нека је једно позитивно решење $x_i = m$. Представимо то решење у облику: $\underbrace{1\,1\cdots 1}_{m}$. Поступајући слично и са осталим решењима, добићемо низ бројева облика 1, 11, 111, ..., за позитивна решења. (Могу се и понављати). Сад поступимо на следећи начин. Ако је $x_1 = 0$ не пишемо ништа, а ако је $x_1 = m_1$, пишемо једну до друге m_1 јединица. Сада напишемо цифру 0, којом одвајамо запис решења x_1 од записа x_2. Даље, ако је $x_2 = 0$ не пишемо ништа, а ако је $x_2 = m_2$, пишемо низ од m_2 јединица. Затим, запишемо 0 (без обзира да ли је x_2 имало јединице или је једнако нули). Ова цифра 0 одваја запис x_2 од записа x_3. Тако наставимо док не упишемо сва решења, одвајајући записе два узастопна решења нулама. Пошто има k иксева, то ће бити $(k-1)$-а нула. Добијени запис може нпр. имати облик:

$$00111010110\ldots01$$

(ово значи да је $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2, \ldots, x_k = 1$)

Ма како била распоређена решења, у овом низу ће бити n јединица (јер је $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$) и $(k-1)$-а нула, а то је пермутација са понављањем. Укупан број ових пермутација представља тражени број решења, а то је:

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

305. *Први начин.* Сводимо га на претходни случај. Уведимо смене: $y_i = x_i - 1 \geqslant 0$ јер је $x_i \geqslant 1$. Добијамо једначину:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - k.$$

Ова једначина има ненегативних решења исто толико колико и дата једначина у скупу природних бројева. На основу претходног задатка то износи: $\binom{n-1}{k-1}$. (уместо n, у претходном задатку ставити $n-k$, итд.)

Други начин. Нека је $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_{k-1}, x_k$ једно од решења. Како је $x_i \geqslant 1$, то су различити међу собом бројеви:

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3, \ldots,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}.$$

Има их $(k-1)$, па на тај начин, сваком решењу можемо придружити једну комбинацију $(k-1)$-ве класе од елемената $(1, 2, 3, \ldots, n-1)$. Ова кореспонденција је пресликавање $1-1$, па је број ових комбинација једнак броју решења дате једначине: $\binom{n-1}{k-1}$.

306. *а)* Слично задатку 304. Решење је: $\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3} = 455$ начина.

б) Слично задатку 305. Пошто је сваки риболовац уловио бар по једну рибу, остаје да се 8 риба распореди као у претходном случају: $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ начина.

307. Слично задатку 304 и задатку 305. У првом случају имамо $\binom{24}{4} = 10626$ могућности, а у другом случају имамо $\binom{19}{4} = 3876$ могућности.

308. Видети решења задатака 303, 304, 305 и 306.

а) Резултат је: $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4} = \dfrac{12!}{(4!)^3} = 34650$ начина.

б) Слично задатку 305. Укупан број могућности је: $\binom{11}{2} = 55$.

в) Слично задатку 304. Укупан број могућности је: $\binom{14}{2} = 91$.

309. $A_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (аритм. низ) и $B_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+q}{2}\right)^{n+1}-1}{\dfrac{1+q}{2}-1} = \dfrac{(1+q)^{n+1}-2^{n+1}}{2^n(q-1)}$ (геом. низ).

Даље је:

$$\begin{aligned}
&C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 A_1 + C_{n+1}^3 A_2 + \cdots + \\
&+ C_{n+1}^{n+1} A_n = \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2}(q+1) + \binom{n+1}{3}(q^2+q+1) + \cdots + \\
&+ \binom{n+1}{n+1}(q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1) = \frac{1}{q-1}\left(\binom{n+1}{1}(q-1) + \right.\\
&\left. + \binom{n+1}{2}(q^2-1) + \binom{n+1}{3}(q^3-1) + \cdots + \binom{n+1}{n+1}(q^{n+1}-1)\right) = \\
= &\frac{1}{q-1}\left[1 + \binom{n+1}{1}q + \binom{n+1}{2}q^2 + \binom{n+1}{3}q^3 + \cdots + \binom{n+1}{n+1}q^{n+1} - \right.\\
&\left. - \left(1 + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \cdots + \binom{n+1}{n+1}\right)\right] = \\
= &\frac{1}{q-1}\left[(1+q)^{n+1} - 2^{n+1}\right] = 2^n \cdot \frac{(1+q)^{n+1} - 2^{n+1}}{2^n(q-1)} = 2^n \cdot B_n
\end{aligned}$$

(користимо: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$).

310. Јединица може да стоји испред прве нуле, између прве и друге нуле, између друге и треће нуле, ..., после n-те нуле, то јест јединице могу да се разместе на $n+1$ места. Ако је $k \leqslant n+1$ тражени број распореда је $\binom{n+1}{k}$. Ако је $k > n+1$ онда се нуле и јединице не могу поређати у низ тако да никоје две јединице нису суседне.

311. *в)* Полазећи од заданих седам бројева, може се група од 7 кутија да подели на три подгрупе на следећи начин. Прва подгрупа садржи две кутије са по две куглице, друга група од три кутије садржи по једну куглицу и последњу групу чине две празне кутије. Такво раздвајање кутија у подгрупе може се реализовати на $\frac{7!}{2!3!2!}$ начина. Сваком таквом раздвајању кутија одговара $\frac{7!}{2!2!1!1!1!0!0!} = \frac{7!}{2!2!}$ различитих размештаја 7 куглица у 7 кутија, Укупан број размештаја (без узимања у обзир поретка бројева 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0) једнак је

$$\frac{7!}{2!3!2!} \cdot \frac{7!}{2!2!}.$$

За друга могућа груписања куглица по кутијама дајемо укупне бројеве размештаја 7 куглица у 7 кутија у следећој табели:

Број куглица по кутијама	Број размештаја када се не узима у обзир редослед бројева куглица једнак је производу $7! \cdot 7!$ подељеном са:
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	$7! \cdot 1!$
2, 1, 1, 1, 1, 1, 0	$5! \cdot 2!$
2, 2, 1, 1, 1, 0, 0	$2!3!2! \cdot 2!2!$
2, 2, 2, 1, 0, 0, 0	$3!3! \cdot 2!2!2!$
3, 1, 1, 1, 1, 0, 0	$4!2! \cdot 3!$
3, 2, 1, 1, 0, 0, 0	$2!3! \cdot 3!2!$
3, 2, 2, 0, 0, 0, 0	$2!4! \cdot 3!2!2!$
3, 3, 1, 0, 0, 0, 0	$2!4! \cdot 3!3!$
4, 1, 1, 1, 0, 0, 0	$3!3! \cdot 4!$
4, 2, 1, 0, 0, 0, 0	$4! \cdot 4!2!$
4, 3, 0, 0, 0, 0, 0	$5! \cdot 4!3!$
5, 1, 1, 0, 0, 0, 0	$2!4! \cdot 5!$
5, 2, 0, 0, 0, 0, 0	$5! \cdot 5!2!$
6, 1, 0, 0, 0, 0, 0	$5! \cdot 6!$
7, 0, 0, 0, 0, 0, 0	$6! \cdot 7!$

г) Ако треба да буде 10 празних кутија значи да ћемо све куглице ставити у две кутије, при чему ниједна од те две кутије није празна. Број начина за избор две кутије је $\binom{12}{2}$, а број начина да се 6 куглица распореди у две кутије је 2^6. Међу овим начинима постоје два начина у којима је једна од две изабране кутије празна, па је број начина за размештај 6 куглица у две кутије једнак $2^6 - 2$. Према томе, укупан број начина размештаја куглица у кутије једнак је $\binom{12}{2}(2^6 - 2)$.

312. *г)* $n(\overline{2}\cap\overline{5}\cap\overline{7}\cap\overline{11}) = 250 - \left[\frac{250}{2}\right] - \left[\frac{250}{5}\right] - \left[\frac{250}{7}\right] - \left[\frac{250}{11}\right] + \left[\frac{250}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{250}{2\cdot 7}\right] + \left[\frac{250}{2\cdot 11}\right] + \left[\frac{250}{5\cdot 7}\right] + \left[\frac{250}{5\cdot 11}\right] + \left[\frac{250}{7\cdot 11}\right] - \left[\frac{250}{2\cdot 5\cdot 7}\right] - \left[\frac{250}{2\cdot 5\cdot 11}\right] - \left[\frac{250}{2\cdot 7\cdot 11}\right] - \left[\frac{250}{5\cdot 7\cdot 11}\right] + \left[\frac{250}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\right] = 78$ ($[x]$ највећи цео број $\leqslant x$).
д) $0 = n - 18 - 15 - 9 + 10 + 7 + 6 - 5$; 1) $n = 24$, 2) 4, 3) 2.

313. *а)* $a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$;
б) $-177 + 44i$; *в)* $-177 - 44i$.

314. $1 - 6 + 20 - 15 + 6 = 6$;
б) Ако се у формули (15) стави $a = 1$ и $b = 1$, добија се
$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{0} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

315. Према претпоставци је $a^5 + b^5 = 5p$. Следи
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^4 = a^5 + b^5 + 5q = 5(p+q)$.

316. *а)* У формули $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ стави се $x = 1$ па $x = -1$, одакле се добијају једнакости:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

Сабирањем ових двеју једнакости добија се:

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \cdots + 2\binom{n}{2k} + \cdots = 2^n$$

одакле је $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = 2^{n-1}$.

Одузимањем горњих једнакости добија се:

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{5} + \cdots + 2\binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^n$$

одакле је $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^{n-1}$.
б) Лева страна последње једнакости представља број начина на колико се може од n предмета извући непаран број предмета (или 1, или 3, или 5,...).

317. *а)* Дати збир представља развој бинома $(1+2)^{10} = 3^{10} = 59049$.
б) Дати збир је развој бинома $(1-2)^{10} = 1$.

318. *а)* $0,95^5 = (1-0,05)^5 = 1 - 5\cdot 0,05 + 10\cdot 0,05^2 - 10\cdot 0,05^3 + 5\cdot 0,05^4 - 0,05^5$. Последњи сабирак не утиче на четврту децималу $(0,05^5 = 0,0000003125)$, па је $0,95^5 \approx 0,7738$.

б) $\left(1+\dfrac{1}{10}\right)^5 = 1 + \dfrac{5}{10} + \dfrac{10}{10^2} + \dfrac{10}{10^3} + \dfrac{5}{10^5} + \dfrac{1}{10^5} = 1,61051.$

в) Напишимо $\sqrt{10}$ у облику $\sqrt{9+1} = \sqrt{9\left(1+\dfrac{1}{9}\right)} = 3\left(1+\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$, па претпостављајући да биномна формула важи и за $n=\dfrac{1}{2}$ развијамо добијени бином на неколико почетних чланова:

$$\sqrt{10} \approx 3\left(1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{648} + \frac{1}{11664} - \frac{5}{839808} + \cdots\right) \approx 3\cdot 1,05409 = 3,16227$$

$$\left(\binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{5}{128}, \quad 128\cdot 9^4 = 839808\right).$$

319. $\binom{6}{2}\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^4\cdot\left(4^{1-\frac{1}{4-x}}\right)^2 = 240 \Rightarrow 2^{4-\frac{4}{x}+4+\frac{4}{x-4}} = 2^4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

320. *а)* Из услова $\binom{n}{4} = \binom{n}{9}$ добијамо једнакост: $(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ одакле је $n = 13$. Како је општи члан развоја бинома $\binom{13}{k}\left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{13-k}\cdot\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^k$, то ће члан развоја без x бити онај код кога је испуњено $\dfrac{7(13-k)}{4} - \dfrac{3k}{2} = 0$, одакле је $k = 7$. Тражени члан је $\binom{13}{7} = 1716$.

б) $2^{n-1} = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 10$;

$\binom{10}{k}a^{10-k}x^{10-k}x^{-\frac{k}{4}} \Rightarrow 10 - k - \dfrac{k}{4} = 0 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow \binom{10}{8}a^2 = \binom{10}{2}a^2 = 45a^2.$

321. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 79 \Rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Rightarrow n = 12.$

Општи члан развоја бинома је

$$\binom{12}{k}\left(a^{\frac{7}{6}}\cdot b^{-1}\right)^{12-k}\cdot\left(b^{\frac{1}{8}}\cdot a^{-\frac{7}{12}}\right)^k = \binom{12}{k}b^{k-12+\frac{k}{8}}\cdot a^{\frac{7(12-k)}{6}-\frac{7k}{12}}.$$

Према услову задатка је $\dfrac{7(12-k)}{6} - \dfrac{7k}{12} = 0 \Rightarrow k = 8$. Тражени члан је $\binom{12}{8}b^{-3} = \binom{12}{4}b^{-3} = \dfrac{495}{b^3}$.

322. $\binom{n}{5} = \binom{n}{9} \Rightarrow \binom{n}{5} = \binom{n}{n-9} \Rightarrow n - 9 = 5 \Rightarrow n = 14.$

323. $2\binom{n}{2} = 7\binom{n}{1} \Rightarrow n(n-8) = 0 \Rightarrow n = 8$. Пети члан развоја бинома једнак је $\binom{8}{4}(x^{\frac{1}{4}})^4(x^{-\frac{1}{2}})^4 = \binom{8}{4} = 70.$

324. $\binom{n}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{a^7}{b^3}\right)^{\frac{k}{10}} = \binom{n}{k}a^{\frac{12k-5n}{10}} \cdot b^{\frac{5n-8k}{10}}$. Према услову задатка је $\frac{12k-5n}{10} = 1$ и $\frac{5n-8k}{10} = 1 \Rightarrow n = 10,\ k = 5$. Тражени члан је $\binom{10}{5}ab = 252ab.$

325. $(1-4x)^6(1+3x)^8 = \left[1 - \binom{6}{1}4x + \binom{6}{2}16x^2 - \binom{6}{3}64x^3 + \binom{6}{4}256x^4 - \cdots\right] \cdot \left[1 + \binom{8}{1}3x + \binom{8}{2}9x^2 + \binom{8}{3}27x^3 + \cdots\right].$

а) $\binom{8}{1}\cdot 3 - \binom{6}{1}\cdot 4 = 0$; *б)* $-\binom{6}{1}\cdot 4 \cdot \binom{8}{1}\cdot 3 + \binom{8}{2}\cdot 9 + \binom{6}{2}\cdot 16 = -84$;

в) $\sum\limits_{\substack{0\le r\le 6\\ 0\le s\le 8\\ r+s=5}} (-1)^r\binom{6}{r}\binom{8}{s}4^r\cdot 3^s = 3864.$

326. Ако искористимо следеће биномне развоје:

$$(x+1)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}$$
$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

и помножимо ове две једнакости, онда на левој страни добијамо $(1+x)^{2n}$, па је коефицијент уз x^n у развоју овог бинома једнак $\binom{2n}{n}$. Када помножимо десне стране добијених полинома добија се полином $2n$-тог степена код кога је коефицијент уз x^n једнак: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$. Следи

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

327. *а)* $(1+x^2-x^3)^9 = 1+9(x^2-x^3)+\binom{9}{2}(x^2-x^3)^2+\binom{9}{3}(x^2-x^3)^3+\cdots$

Коефицијент уз x^8 је једнак $3\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=378$.

б) $(1+x-x^2)^9 = (1+x)^9 - 9(1+x)^8\cdot x^2 + 36(1+x)^7\cdot x^4 - \cdots$ (у развоју бинома нису уписани даљи чланови јер сваки следећи садржи x^k, $k>4$). У сваком од написаних чланова после развијања заграда наћи ће се само по један члан који садржи x^4: у првом сабирку то је $\binom{9}{4}x^4 = 126x^4$, у другом је $-9\binom{8}{2}x^2\cdot x^2 = -252x^4$ и у трећем је $36x^4$. Тако је коефицијент уз x^4 једнак $126-252+36=-90$.

328. $(1+x^6+x^8)^{20} = \left[1+x^6(1+x^2)\right]^{20} = 1+\binom{20}{1}x^6(1+x^2)+$
$+\binom{20}{2}x^{12}(1+x^2)^2+\binom{20}{3}x^{18}(1+x^2)^3+\binom{20}{4}x^{24}(1+x^2)^4+\cdots+x^{120}(1+x^2)^{20}$.

а) Члан са степеном x^{28} налази се само у сабирку $\binom{20}{4}x^{24}(1+x^2)^4$. Коефицијент уз x^{28} је једнак $\binom{20}{4}\cdot\binom{4}{2}=29070$;

б) Коефицијент уз x^{24} једнак је $\binom{20}{3}+\binom{20}{4}=5985$;

в) 0.

329.
$$\binom{n}{1}x^{n-1}y = 240 \qquad (1)$$
$$\binom{n}{2}x^{n-2}y^2 = 720 \qquad (2)$$
$$\binom{n}{3}x^{n-3}y^3 = 1080 \qquad (3)$$

Деобом једначина (2) и (1) добија се једначина
$$(n-1)y = 6x. \qquad (4)$$
Деобом једначина (3) и (2) добија се једначина
$$2(n-2)y = 9x. \qquad (5)$$

Деобом једначина (5) и (4) добија се једначина $4(n-2)=3(n-1)$ чије је решење $n=5$. Надаље се једноставно добија $x=2$ и $y=3$.

330. $729^n = 9^{3n} = (10-1)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n}(-1)^{3n-k}\binom{3n}{k}10^k$.

331. Обележимо општи члан развоја бинома са $T_{n+1}=\binom{20}{n}(\sqrt{2})^n$. Коефицијент $\binom{20}{n}$ је највећи за $n=10$, а $(\sqrt{2})^n$ је највећи за $n=20$, али како је:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{\binom{20}{n}(\sqrt{2})^n}{\binom{20}{n-1}(\sqrt{2})^{n-1}}=\frac{21-n}{n}\sqrt{2}$$

видимо да је $T_n>T_{n+1}$ за $n>(21-n)\sqrt{2}$ или за $n>21(2-\sqrt{2})$. Најмањи цео број n за који је овај услов испуњен је $n=13$. Значи највећи члан је $\binom{20}{12}(\sqrt{2})^{12}=\binom{20}{8}\cdot 2^6$.

332. Како је збир свих коефицијената развоја бинома $(a+b)^n$ једнак 2^n, то је $2^n=4096=2^{12}\Rightarrow n=12$. Следи

$$\max_{0\le k\le 12}\binom{12}{k}=\binom{12}{6}=924.$$

333. Претпоставимо супротно, то јест нека је испуњено:

$$\binom{n}{k-1}a^{k-1}=\binom{n}{k}a^k=\binom{n}{k+1}a^{k+1}.$$

Из ових двеју једнакости следило би

$$a=\frac{k}{n-k+1},\quad \text{и}\quad a=\frac{k+1}{n-k}$$

одакле је $\dfrac{k}{n-k+1}=\dfrac{k+1}{n-k}$ и $n+1=0$, што је немогуће за $n\in N$.

334. *а)* У формулу $(1+x)^{k+1}-x^{k+1}=\binom{k+1}{1}x^k+\binom{k+1}{2}x^{k-1}+\cdots+1$ ставимо редом $x=0,1,2,\ldots,n$ и добијене једнакости саберемо:

$$\begin{array}{ll}
x=0 & 1=1\\
x=1 & 2^{k+1}-1=\binom{k+1}{1}1^k+\binom{k+1}{2}1^{k-1}+\cdots+1\\
x=2 & 3^{k+1}-2^{k+1}=\binom{k+1}{1}2^k+\binom{k+1}{2}2^{k-1}+\cdots+1\\
x=3 & 4^{k+1}-3^{k+1}=\binom{k+1}{1}3^k+\binom{k+1}{2}3^{k-1}+\cdots+1\\
x=4 & 5^{k+1}-4^{k+1}=\binom{k+1}{1}4^k+\binom{k+1}{2}4^{k-1}+\cdots+1\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x=n & (1+n)^{k+1}-n^{k+1}=\binom{k+1}{1}n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}+\cdots+1
\end{array}$$

Следи

$$(1+n)^{k+1}=\binom{k+1}{1}(1^k+2^k+\cdots+n^k)+\binom{k+1}{2}(1^{k-1}+2^{k-1}+\cdots n^{k-1})+\cdots+n+1$$

или

$$(n+1)^{k+1}=\binom{k+1}{1}S_k+\binom{k+1}{2}S_{k-1}+\binom{k+1}{3}S_{k-2}\cdots+\binom{k+1}{k}S_1+n+1.$$

б) Стави у *а)* $k=1$:

$$(n+1)^2=2S_1+n+1\Rightarrow S_1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

в) Стави у *а)* $k=2$ и користити *б)*:

$$(n+1)^3=3S_2+3S_1+n+1\Rightarrow S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

г) Стави у *а)* $k=3$ и користити *б)* и *в)*:

$$(n+1)^4=4S_3+\binom{4}{2}S_2+\binom{4}{3}S_1+n+1\Rightarrow S_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

335. *а)* $T_{k+1}=\binom{12}{k}x^{\frac{5}{6}k-6}$, $0\leqslant k\leqslant 12\Rightarrow \frac{5}{6}k-6$ је цео број за $k\in\{0,6,12\}$. Рационални чланови развоја су x^6, $\binom{12}{6}x^{-1}$, x^4.

б) Општи члан биномног развоја је $\binom{124}{k}3^{\frac{124-k}{2}}\cdot 5^{\frac{k}{4}}$, $0\leqslant k\leqslant 124$. Сабирак биномног развоја је рационалан ако су експоненти степена цели бројеви. За $k=4m$ о $0\leqslant k\leqslant 124$ експоненти $\frac{124-k}{2}$ и $\frac{k}{4}$ су цели бројеви. Како је $0\leqslant m\leqslant 31$ значи да рационалних сабирака у биномном развоју има 32.

в) $\binom{n}{2}+\binom{n}{n-1}=9900\Rightarrow 2\binom{n}{2}=9900\Rightarrow n^2-n-9900=0\Rightarrow n=100.$

Општи члан развоја бинома је облика $\binom{100}{k}3^{\frac{100-k}{4}}\cdot 4^{\frac{k}{3}}$, $k=0,1,\ldots 100$. Рационални чланови су они код којих су експоненти степена цели бројеви. Значи, из услова да је $k=4p$, ($p=0,1,2,\ldots 24$ – код првог степена) и $k=3q$, ($q=0,1,2,\ldots 33$ – код другог степена) добијају се 9 случајева (толико има целих бројева између 0 и 100 који су дељиви и са 3 и са 4; то су 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96).

336. *а)* $4^n - 1 = (3+1)^n - 1 = 3^n + \binom{n}{1}3^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}3 + 1 - 1 = 3\cdot m$

б) $11^{20} - 1 = (10+1)^{20} - 1 = 10^{20} + \binom{20}{1}10^{19} + \cdots + \binom{20}{19}10 + 1 - 1.$

Како у сваком биномном коефицијенту $\binom{20}{k}$, $k = 1, 2, \ldots 19$ постоји бар још један чиниоц 10, то се добијени збир може написати у облику $100\cdot p$.

337. *а)* $\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}\cdot\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\dfrac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

б) Једнакост из *а)* напишемо за $k = 0, 1, 2, \ldots p$ и добијене једнакости саберемо:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{p} = \binom{p}{0}\binom{n}{p}$$
$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} = \binom{p}{1}\binom{n}{p}$$
$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{p-2} = \binom{p}{2}\binom{n}{p}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{p-p} = \binom{p}{p}\binom{n}{p}$$

Користећи особину биномних коефицијената $\binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \cdots + \binom{p}{p} = 2^p$,

сабирањем ових једнакости добијамо: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\cdot 2^p.$

в)
$$\binom{n}{0}\binom{n}{p} = \binom{p}{0}\binom{n}{p}$$
$$-\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} = -\binom{p}{1}\binom{n}{p}$$
$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{p-2} = \binom{p}{2}\binom{n}{p}$$
$$-\binom{n}{3}\binom{n-3}{p-3} = -\binom{p}{3}\binom{n}{p}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^p\binom{n}{p}\binom{n-p}{p-p} = (-1)^p\binom{p}{p}\binom{n}{p}$$

Следи

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=0, \text{ јер је } \binom{p}{0}-\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\cdots+(-1)^p\binom{p}{p}=0.$$

г) Прво решење: k предмета из скупа $m+n$ предмета можемо изабрати тако да прво изаберемо r предмета од m $(r=0,1,\ldots,m)$ и затим од преосталих n предмета изаберемо још s предмета $(s=0,1,\ldots,n)$ при чему је $r+s=k$. Следи

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{\substack{r+s=k\\(r,s\geq 0)}}\binom{m}{r}\binom{n}{s}.$$

Друго решење. Множењем левих и десних страна једнакости

$$(1+x)^m=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r \quad \text{и} \quad (1+x)^n=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s$$

добија се

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{r+s=k}\binom{m}{r}\binom{n}{s}x^k$$

одакле се изједначавањем коефицијената леве и десне стране уз x^k добија формула

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{\substack{r+s=k\\(r,s\geq 0)}}\binom{m}{r}\binom{n}{s}.$$

338. Знамо да је $(1+x)^p\cdot(1+x)^p=(1+x)^{2p}$. Користећи се биномним развојем, изједначимо коефицијенте уз x^p на левој и десној страни:

$$1+\binom{p}{1}\binom{p}{p-1}+\binom{p}{2}\binom{p}{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-1}\cdot\binom{p}{1}+1=\binom{2p}{p}.$$

Како је $\binom{p}{p-1}=\binom{p}{1}$, $\binom{p}{p-2}=\binom{p}{2}, \ldots \binom{p}{1}=\binom{p}{p-1}$ и $\binom{2p}{p}=\dfrac{(2p)!}{p!\cdot p!}$, добијамо: $\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}-2=\left(\binom{p}{1}\right)^2+\left(\binom{p}{2}\right)^2+\cdots+\left(\binom{p}{p-1}\right)^2$.

Сваки од сабирака на десној страни је дељив са p^2, јер је $\binom{p}{k}=\dfrac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$ дељиво са p. (Будући да је p прост број, он се не може скратити са неким од чинилаца броја $k!$.)

339. Према решењима у задацима 327 и 328 развити $(a+b+c)^{10}=\big[a+(b+c)\big]^{10}$ по биномној формули. Највећи коефицијент је једнак 4200 и налази се испред степена $a^3b^3c^4$, $a^3b^4c^3$ и $a^4b^3c^3$.

340. Лако је схватити да је збир свих коефицијената полинома једнак вредности полинома за $x=1$. У овом случају је $P(1)=(2-3)^{13}\cdot(1-2)^{17}=1$.

341. *a)* Општи члан разлагања је

$$T_{k+1} = \binom{7}{k} 3^{7-k}\cdot 2^k x^{7-k} = A_{k+1}\cdot x^{7-k}.$$

Потражимо за које вредности k је испуњено $\frac{A_{k+1}}{A_k} > 1$. Како је $A_{k+1} = \binom{7}{k} 3^{7-k} 2^k$, то ова неједначина постаје: $\dfrac{\binom{7}{k}\cdot 3^{7-k}\cdot 2^k}{\binom{7}{k-1}\cdot 3^{8-k}\cdot 2^{k-1}} > 1$. Њено решење је $k < \frac{16}{5}$ одакле следи да је $k \leqslant 3$. Ако је $k \geqslant 4$ тада су коефицијенти A_{k+1} мањи од претходних. Следи: $A_2 > A_1$, $A_3 > A_2$, $A_4 > A_3$, али је $A_5 < A_4$. Значи, највећи коефицијент је A_4, па је тражени члан развоја једнак $T_4 = \binom{7}{3} 3^4 2^3 x^4 = 22680x^4$.

б) Општи члан развоја је $T_{k+1} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-k}(3x)^k = \binom{n}{k}\cdot 3^k x^{2k-n}$. Коефицијент општег члана је $A_{k+1} = \binom{n}{k}\cdot 3^k$. Како је, према услову задатка, коефицијент A_{10} највећи, то је испуњено $A_{10} > A_9$ и $A_{10} > A_{11}$ или

$$\binom{n}{9}\cdot 3^9 > \binom{n}{8}\cdot 3^8 \quad \text{и} \quad \binom{n}{9}\cdot 3^9 > \binom{n}{10}\cdot 3^{10}.$$

Коришћењем једнакости $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}$ последње неједнакости постају

$$\binom{n}{8}\frac{n-9+1}{9}\cdot 3^9 > \binom{n}{8}\cdot 3^8 \quad \text{и} \quad \binom{n}{9}\cdot 3^9 > \binom{n}{9}\frac{n-10+1}{10}\cdot 3^{10}$$

одакле се добија $11 < n < 12\frac{1}{3}$. Како је n цео број, то је $n = 12$. Сада је општи члан развоја бинома $T_{k+1} = \binom{12}{k} 3^k x^{2k-12}$.

Да бисмо добили члан који не садржи x довољно је ставити $2k-12 = 0$, што даје $k = 6$. Према томе, тражени члан развоја датог бинома је $T_7 = \binom{12}{6}\cdot 3^6 = 673596$.

в) Из услова $T_{k+1} > T_k$ и $T_{k+1} > T_{k+2}$ добија се $\frac{100\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} < k < \frac{101\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$. Обзиром да је $1,72 < \sqrt{3} < 1,73$ добија се $63,135 < k < 64,64$ то јест $k = 64$. Значи, 65-ти члан у развоју датог бинома је највећи: $T_{65} = \binom{100}{64}\cdot 3^{32} = \binom{100}{36}\cdot 3^{32}$.

342. *а)* Из особине биномних коефицијената $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ (видети задатак 274) добија се $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$.

б) Збир бинома $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ је паран број: $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2\left[2^n + \binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}\cdot 3 + \binom{n}{4}2^{n-4}\cdot 3^2 + \cdots\right]$. Како је $0 < \left(2-\sqrt{3}\right)^n < 1$ за свако $n \in N$, значи да је $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ непаран број.

343. Дати израз је геометријска прогресија са првим чланом $(1+x)^4$ и количником $1+x$. Због тога је

$$(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{15} = (1+x)^4\frac{(1+x)^{12}-1}{1+x-1} = \frac{(1+x)^{16}-(1+x)^4}{x}.$$

Како је у имениоцу x, за добијање коефицијента уз x^4 треба у бројиоцу наћи коефицијент уз x^5:

$$C_{16}^5 = \binom{16}{5} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 4368.$$

344. *Први начин.* Датом полиному додамо $(1+x)^0 + (1+x)^1 + (1+x)^2$ (тиме се не мења тражени коефицијент). Добијамо:

$$(1+x)^0 + (1+x)^1 + (1+x)^2 + (1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^{100} =$$
$$= \frac{(1+x)^{101}-1}{1+x-1} = \frac{(1+x)^{101}-1}{x}.$$

Дакле, дати полином има исти коефицијент уз x^3 као и полином $(1+x)^{101}$ уз x^4, а то је

$$\binom{101}{4} = \frac{101\cdot 100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 4082925.$$

Други начин. Означимо са k тражени коефицијент. Тада је:

$$k = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{100}{3} = \left[\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\right] + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{100}{3} =$$
$$= \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{3}\right] + \binom{6}{3} + \cdots + \binom{100}{3} = \left[\binom{6}{4} + \binom{6}{3}\right] + \binom{7}{3} + \cdots + \binom{100}{3} =$$
$$= \cdots = \binom{101}{4} = 4082925.$$

$\left(\text{Користили смо особину } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}\right)$.

345. *а)* $\Omega = \{ГГ, ГП, ПГ, ПП\}$;
б) Ω је скуп варијација n-те класе са понављањем (има их 2^n).
в) $\Omega = \{Г, ПГ, ППГ, ПППГ, \ldots\}$. Ω садржи бесконачно али пребројиво много елементарних догађаја.
г) $\Omega = \{Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6, П1, П2, П3, П4, П5, П6\}$.

346. *а)* Простор Ω се састоји од следећих 36 исхода:

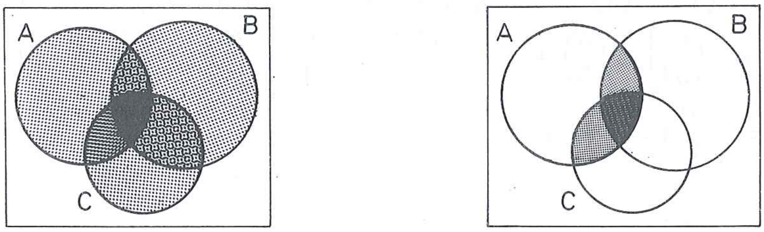
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

б) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;
в) $A = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$
$B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 31, 41, 51, 61\}$
$C = \{12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\}$
$D = \{36, 45, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66\}$;
г) Ω је скуп варијација елемената 1, 2, 3, 4, 5, 6 n-те класе са понављањем (има их 6^n).

347. Ако су редом 1, 0 и 2 ознаке за победу првог играча, реми и победу другог играча онда је $\Omega = \{11, 10, 12, 01, 00, 02, 21, 20, 22\}$.

348. $\Omega = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

349. *д)* Видети слику 98



$A(B+C)$ $\qquad\qquad$ $AB+AC$

Сл. 98

350.
$$\begin{aligned} A+B+C &= A+\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}C \\ &= B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}C \\ &= C+A\overline{C}+\overline{A}B\overline{C} \\ &= A\overline{B}\,\overline{C}+B\overline{A}\,\overline{C}+C\overline{A}\,\overline{B}+AB\overline{C}+AC\overline{B}+BC\overline{A}+ABC. \end{aligned}$$

351. *а)* Догађаји A, $\overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ се међусобно искључују ($\overline{A}B$ је део од B где нема A, па је $A+\overline{A}B=A+B$) и задовољавају услов:

$$A+\overline{A}B+\overline{A+B}=A+\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}=A+\overline{A}(B+\overline{B})=A+\overline{A}\Omega=A+\overline{A}=\Omega.$$

$$б) A+B+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=A+B+\overline{A}\,\overline{B}(C+\overline{C})=A+B+\overline{A}\,\overline{B}\Omega=$$
$$=A+B+\overline{A}\,\overline{B}=A+B+\overline{A+B}=\Omega.$$

352. *а)* $A\overline{B}\,\overline{C}$; *б)* ABC; *в)* $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; *г)* $A+B+C=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$; *д)* $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$; *ђ)* $\overline{ABC}$.

353. $\Omega=\{\omega_1=\text{ГГГ},\omega_2=\text{ПГГ},\omega_3=\text{ГПГ},\omega_4=\text{ГГП},\omega_5=\text{ГПП},\omega_6=\text{ПГП},$ $\omega_7=\text{ППГ},\ \omega_8=\text{ППП}\}$. $A=\Omega-\omega_8=\overline{\text{ППП}}$, $B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, $C=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_8\}$, $D=\text{ППП}=\omega_8$, $B\subset A$, $\overline{A}=D$, $BD=\varnothing$, $A+C=\Omega$, $BC=\{\omega_4,\omega_6\}$, $\overline{B+C}=\{\omega_3,\omega_7\}$, $A(B+C)=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

354. У првој кутији се после пребацивања једне куглице може наћи 1 бела и 5 црних куглица (састав S_{15}), затим 2 беле и 4 црне (састав S_{24}) или 3 беле и 3 црне куглице (састав S_{33}). Ако са B_i означимо да је из i-те кутије изабрана бела куглица ($i=1,2,3,4$), онда је

$$S_{15}=B_1B_2B_3\overline{B}_4+B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4+B_1\overline{B}_2B_3\overline{B}_4+B_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4.$$

355. Са A_i означимо догађај који се састоји у безотказном раду елемента i $(i = 1, 2, 3, 4)$, а са A безотказни рад система.
а) $A = (A_1 + A_2)(A_3 + A_4)$; *б)* $A = A_1A_2 + A_3A_4$.

356. $C = A + B_1B_2B_3$, $\overline{C} = \overline{A + B_1B_2B_3} = \overline{A}\,\overline{B_1B_2B_3} = \overline{A}(\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \overline{B}_3)$.

357. Ваше резултате добијене у 100 и још 100 бацања новчића упоредити са резултатима бацања новчића који су извели математичари Buffon и K. Pearson:

Извођач експеримента	Број бацања новчића	Број грбова	Релативне фреквенције грбова
Buffon	4040	2048	0,5069
K. Pearson	12000	6019	0,5016
K. Pearson	24000	12012	0,5005

Овакви експерименти су потврдили да у великом броју понављања експеримента релативне фреквенције теже вероватноћи посматраног догађаја (A – појава грба: $fr(A) \longrightarrow P(A) = 0,5$).

358. У резултату експеримента разликујемо четири могућности:

C_1 : Оба догађаја A и B су се појавила,
C_2 : Догађај A се појавио а догађај B не,
C_3 : Догађај B се појавио а догађај A не,
C_4 : Ниједан од догађаја A или B нису се појавили.

Ова четири догађаја се међусобом искључују. Нека су N_1, N_2, N_3, N_4 бројеви појављивања догађаја C_1, C_2, C_3, C_4. Укупни бројеви појављивања догађаја A, B, AB и $A+B$ су респективно једнаки $N_1 + N_2$, $N_1 + N_3$, N_1, $N_1 + N_2 + N_3$. Како смо извели експеримент N пута $(N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4)$, то добијамо

$$fr(A)=\frac{N_1+N_2}{N},\ fr(B)=\frac{N_1+N_3}{N},\ fr(AB)=\frac{N_1}{N},\ fr(A+B)=\frac{N_1+N_2+N_3}{N} \quad (14)$$

идентичност, чиме се потврђује тачност формуле (12).

359. *а)* Како су догађају A повољни $N_1 + N_2$ исхода, онда они сада значе простор свих исхода међу којима је само N_1 исхода повољних догађају B.
б) Деобом са N разломака у формулама (15) добијају се релативне фреквенције $fr(AB)$ и $fr(A)$ односно $fr(B)$, па једноставно следе формуле (16).

360. *а)* $fr(A) = \dfrac{3}{50}$, $fr(B) = \dfrac{4}{50}$, $fr(AB) = \dfrac{1}{50}$, $fr(A + B) = fr(A) +$

$fr(B) - fr(AB) = \frac{6}{50}$.

б) $fr(A|B) = \frac{fr(AB)}{fr(B)} = \frac{1}{4}$, $fr(B|A) = \frac{fr(AB)}{fr(A)} = \frac{1}{3}$.

361. Како је $471 + 148 + 151 + 230 = 1000$, то је

а) $fr(A) = \frac{471 + 151}{1000} = \frac{622}{1000} = 0,622$,

$fr(B) = \frac{471 + 148}{1000} = \frac{619}{1000} = 0,619$,

$fr(AB) = \frac{471}{1000} = 0,471$

$fr(A + B) = \frac{622 + 619 - 471}{1000} = 0,770$.

б) Како укупно има очева са светлим очима $471 + 151 = 622$, то је

$$fr(B|A) = \frac{471}{622} = 0,757.$$

362. *а)* $P(\omega_4) = \frac{1}{8}$; *б)* $P(\omega_3) = \frac{4}{21}$, $P(\omega_4) = \frac{2}{21}$, $P(\omega_5) = \frac{4}{63}$;

в) Како је $P(\omega_1) = \frac{1}{21}$, то из једнакости $P(\omega_1, \omega_2) = \frac{2}{9} \Rightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) = \frac{2}{9} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{11}{63}$. Слично се добијају и остале непознате вероватноће: $P(\omega_3) = \frac{4}{21}$, $P(\omega_4) = \frac{2}{21}$, $P(\omega_5) = \frac{3}{7}$.

363. *а)* P не дефинише простор вероватноћа на Ω, јер је збир вредности за P: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{4} > 1$;

б) P дефинише простор вероватноћа на Ω, јер је $P \geqslant 0$ (то јест $P(\omega_i) \geqslant 0$) и збир $\sum_{i=1}^{4} P(\omega_i) = 1$;

в) P не дефинише простор вероватноћа на Ω, јер је $P(\omega_3) = -\frac{1}{3} < 0$.

г) P дефинише простор вероватноћа на Ω, јер је $P \geqslant 0$ и збир $\sum_{i=1}^{4} P(\omega_i) = 1$;

д) P не дефинише простор вероватноћа на Ω, јер је збир вероватноћа $\sum_{i=1}^{4} P(\omega_i) = \frac{19}{20} < 1$.

364. *а)* $\frac{1}{25}$; *б)* 0 *в)* $\frac{3}{50}$.

365. *а)* $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ а припадне вероватноће су: $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

б) $\frac{1}{4}$; *в)* $\frac{1}{2}$; *г)* $\frac{1}{2}$; *д)* $\frac{3}{4}$.

366. $\frac{3}{7}$.

367. *а)* 0,94; *б)* 0,21; *в)* $P(\overline{A}+\overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0,86$; *г)* 0,59; *д)* $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - 0,94 = 0,06$.

368. Ако догађај A означава појаву парног броја тачака на коцки, онда су овом догађају повољни случајеви када се на горњој страни коцке појаве 2, 4 или 6 тачака. Како је, дакле, $n = 6$ и $m = 3$, то је према класичној дефиницији вероватноће (уз претпоставку да свака страна коцке има једнаку вероватноћу да се појави, то јест да је коцка хомогена) вероватноћа догађаја A је једнака $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

369. Пошто сваки новчић после бацања може да покаже грб или писмо, простор елементарних догађаја садржи $2^5 = 32$ елемента. Претпостављајући да су новчићи хомогени, можемо сваком исходу да придружимо исту вероватноћу $\frac{1}{32}$. Тада је догађају $\overline{A}$ (да се не појави ни један грб) повољан само један исход. Значи $P(\overline{A}) = \frac{1}{32}$, па је тражена вероватноћа једнака $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{31}{32}$.

370. Простор елементарних догађаја Ω је следећи скуп исхода:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

а) $\frac{11}{36}$;

б) Повољни случајеви су парови: (46), (55), (64), (56), (65) и (66). Следи $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;

в) $\frac{30}{36}$.

371. Простор елементарних догађаја Ω обухвата $6^3 = 216$ исхода: $\Omega = \{111, 112, \ldots, 666\}$.

Вероватноћа да збир добијених тачака износи 3 је $\frac{1}{216}$.

Вероватноћа да збир тачака износи 4 је $\frac{3}{216}$ (повољни случајеви су 211, 121, 112).

Вероватноћа да збир тачака износи 5 је $\frac{6}{216}$ (повољни случајеви су: 113, 131, 311, 221, 212, 122).

Вероватноћа да збир тачака износи 6 је $\frac{10}{216}$ (повољни случајеви су: 411, 141, 114, 321, 312, 231, 213, 123, 132 и 222). Према томе, тражена вероватноћа је једнака:

$P(\text{збир тачака мањи од } 7) = \frac{1}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{10}{216} = \frac{20}{216}$.

б) $\frac{4}{216} = \frac{1}{54}$;

в) Догађај $\overline{A}$ се састоји од 6 исхода (111), (222), (333), (444), (555) и (666). Следи $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{6}{216} = \frac{35}{36}$.

372. *а)* 1) $\left(1 - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{6}$, 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$, 3) $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.

б) Први начин. Према решењу задатка 370. *б)* повољни исходи су парови бројева: 63, 54, 45, 36, 64, 55, 46, 65, 56 и 66, па је тражена вероватноћа једнака $\frac{10}{36}$.

Други начин. Простор елементарних догађаја Ω (када се посматрају збирови тачака на коцкама) је:

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 11, 12\}$$

а за припадне вероватноће прихватамо редом: $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{1}{36}$.

$P(\text{збир тачака већи од осам}) = P(9, 10, 11, 12) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

373. *а)* $\frac{b}{b+c}$; *б)* $\frac{b-1}{b+c-1}$; *в)* $\frac{\binom{b}{2}}{\binom{b+c}{2}} = \frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)}$; *г)* $\frac{b}{b+c}$.

374. $1 - \frac{1}{125} = \frac{124}{125}$.

375. Можемо са једнаком вероватноћом извући 1 или 2 или 3 ... или n куглица. Број ових могућности је једнак $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$, а број повољних случајева догађају A је једнак $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$ Како су вредности ових збирова познати из комбинаторике, имамо

$$P(A)=\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}.$$

376. $\dfrac{16}{55}$.

377. $\dfrac{\binom{50}{25}^2}{\binom{100}{50}}$.

378. *а)* $\dfrac{mr+ns}{(m+n)(r+s)}$; *б)* $\dfrac{ms+nr}{(m+n)(r+s)}$.

379. Са три коцке може се добити збир тачака 14 на 15 начина, збир 15 на 10 начина, збир 16 на 6 начина, збир 17 на 3 начина и збир 18 на 1 начин. Збир бар 14 се, дакле, може постићи на 35 начина, па је вероватноћа да збир тачака буде не мањи од 14 једнака $\dfrac{35}{216}$. Означимо улог особе A са x, а улог особе B са y. Тада мора бити испуњено: $x\ :\ y=\dfrac{35}{216}\ :\ \dfrac{181}{216}$ и $x+y=648$. Следи $x=105$ и $y=543$.

380. Особе A и B могу да седну на два начина једна поред друге, док преостале $n-2$ особе могу да седну на $(n-2)!$ начина. Како се n особа могу распоредити око округлог стола на $(n-1)!$, тражена вероватноћа је једнака $\dfrac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\dfrac{2}{n-1}$.

381. *а)* Играчи B, C и D имају 39 карата (укључујући 4 кеца). B може добити 13 карата од 39 на $\binom{39}{13}$ начина. Два кеца (од укупно 4) може добити на $\binom{4}{2}$ начина, а од преосталих $39-4=35$ карата може добити 11 карата (које нису кечеви) на $\binom{35}{11}$ начина. Зато је

$$p=\frac{\binom{4}{2}\binom{35}{11}}{\binom{39}{13}}=0,3082;$$

б) $p = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{22}{11}}{\binom{26}{13}} = 0,407.$

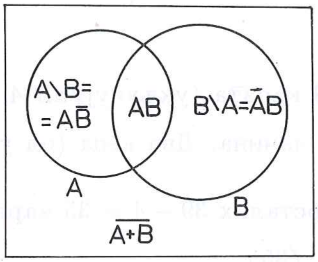
382. *а)* $\dfrac{\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = 1,84\cdot 10^{-5};$ *б)* $\dfrac{\binom{4}{4}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = 1,54\cdot 10^{-6};$

в) $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 9,23\cdot 10^{-6};$ *г)* $\dfrac{\binom{4}{1}^5}{\binom{52}{5}} = 3,94\cdot 10^{-4};$

д) Прва врста се од њих 4 може изабрати на 4 начина, а друга на 3 начина, па је тражена вероватноћа $\dfrac{4\binom{13}{3}\cdot 3\cdot\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,013;$

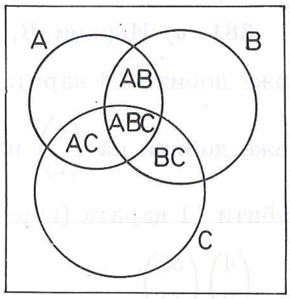
ђ) $P(\text{бар један кец}) = 1 - P(\text{ниједан кец}) = 1 - \dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,341.$

383. *а)* Из једнакости $A = (A\setminus B) + AB$ и $(A\setminus B)(AB) = \varnothing$ следи $P(A) = P(A\setminus B) + P(AB)$, а одатле и формула $P(A\setminus B) = P(A) - P(AB)$. (видети слику 99.)



$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B = (A\setminus B) + B = (B\setminus A) + A$$

Сл. 99



Сл. 100

б) Из једнакости $A + B = (A \setminus B) + B$ и $(A \setminus B)B = \varnothing$ следи према *а)*: $P(A + B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
в) Коришћењем формуле из *б)* и чињенице да је $(AC)(BC) = ABC$ (видети слику 100) имамо:

$$\begin{aligned}P(A+B+C) =&P[(A+B)+C] = P(A+B)+P(C)-P[(A+B)C] =\\ =&P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC) =\\ =&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned}$$

г) Доказ се може извести математичком индукцијом по n.
д) Доказ се изводи математичком индукцијом по n. За $n = 2$ неједнакост следи из *б)* и чињенице да је $P(AB) \geqslant 0$.
ђ) Следи непосредно из *б)* и чињенице да је $P(A+B) \leqslant 1$.

384. *а)* $P(A) = 1 - \dfrac{5}{18} = \dfrac{13}{18}$, $P(B) = P(A+B) - P(A) - P(AB) = \dfrac{1}{6}$, $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \dfrac{11}{18}$.
б) $P(B) = \dfrac{3}{8}$, $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = \dfrac{1}{8}$,
$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = \dfrac{1}{4}$,
$P(\overline{A}+\overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = \dfrac{7}{8}$,
$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \dfrac{1}{4}$,
$P(A \setminus B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \dfrac{3}{8}$,
$P(A \triangle B) = P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = \dfrac{5}{8}$.

385. Простор Ω садржи 36 елементарних догађаја (видети решење задатка 370). Догађају A су повољни случајеви:

$$\begin{matrix} 1+2, & 1+4, & 1+6, & 2+1, & 2+3, & 2+5, & 3+2, & 3+4, & 3+6,\\ 4+1, & 4+3, & 4+5, & 5+2, & 5+4, & 5+6, & 6+1, & 6+3, & 6+5. \end{matrix}$$

Како 18 парова бројева даје непарне збирове, то је $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

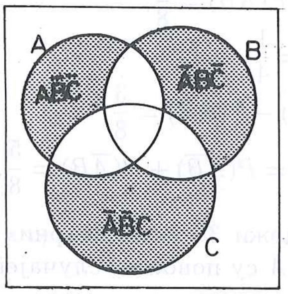
$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}, \quad P(AB) = \frac{1}{6}, \quad P(A+B) = \frac{23}{36},$$
$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{3}, \quad P(A+\overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\overline{B}) = \frac{31}{36},$$
$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{5}{36}.$$

386. Нека је A догађај да је изабран дечак и B – догађај да изабрани ученик похађа и музичку школу. Тада је $P(A)=\dfrac{12}{28}$, $P(B)=\dfrac{14}{28}$, $P(AB)=\dfrac{6}{28}=\dfrac{3}{14}$, па је $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,714$.

387. Нека је A – догађај да се ученик бави фудбалом, B – кошарком и C – рукометом. Имамо

$$P(A)=\frac{180}{400}=0,450,\qquad P(B)=\frac{130}{400}=0,325,\qquad P(C)=\frac{100}{400}=0,250,$$
$$P(AB)=\frac{40}{400}=0,100,\qquad P(AC)=\frac{30}{400}=0,075,\qquad P(BC)=\frac{20}{400}=0,050,$$
$$P(ABC)=\frac{10}{400}=0,025.$$

а) $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0,825$;
б) $P(A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A+B+C)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)-P(BC)+P(ABC)=0,650$ (видети слику 101);



Сл. 101

в) $P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)=0,175$;
г) 0,025.

388. Означимо са A_n догађај $A_n=\{\omega\in\Omega \mid \omega$ је дељив са $n\}$ са $\overline{A}_n=\Omega\setminus A_n$. Тада је *а)* $P(A_3)=\dfrac{1}{3}$; *б)* $P(A_4)=\dfrac{1}{4}$; *в)* $P(A_3A_4)=P(A_{12})=\dfrac{1}{12}$;
г) $P(A_3+A_4)=P(A_3)+P(A_4)-P(A_3A_4)=\dfrac{1}{2}$;
д) $P[(A_3\setminus A_4)+(A_4\setminus A_3)]=P(A_3\setminus A_4)+P(A_4\setminus A_3)=P(A_3)+P(A_4)-$

$2P(A_3A_4) = \frac{5}{12}$;

ђ) $p = P[A_3\overline{A}_5(A_4+A_6)] = P[A_3\overline{A}_5A_4 + A_3\overline{A}_5A_6] = P(A_3\overline{A}_5A_4) + P(A_3\overline{A}_5A_6) - P(A_3A_4A_6\overline{A}_5)$

Како је $P(A_3A_4A_6\overline{A}_5) = P(A_3A_4A_6 \setminus A_3A_4A_5A_6) = \frac{1}{12} - \frac{1}{60} = \frac{1}{15}$,

$$P(A_3A_4\overline{A}_5) = P(A_3A_4) - P(A_3A_4A_5) = \frac{1}{12} - \frac{1}{60} = \frac{1}{15},$$

$$P(A_3\overline{A}_5A_6) = P(A_3A_6) - P(A_3A_5A_5) = \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{2}{15},$$

то је тражена вероватноћа једнака $p = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$.

389. $\dfrac{\binom{n}{m} m!}{n^m}$.

390. Означимо са 1 случај када путник уђе у предња кола и са 2 када уђе у приколицу. Погледајмо шта се све може десити:

а) Сви путници могу ући у прва кола или сви у приколицу. Ова два догађаја можемо означити са 11111 или 22222.

б) Четири путника могу да уђу у прва кола, а један у приколицу и то на следеће начине: 11112, 11121, 11211, 12111, 21111. Дакле, имамо 5 могућности. Видимо да су ово пермутације од 5 елемената, од којих су 4 једнака међу собом $\left(\frac{5!}{4!1!} = 5\right)$. Сличан је и случај када један путник улази у предња кола, а четири у приколицу. И овде је број могућности једнак 5.

в) Три путника могу ући у прва кола, а два у приколицу. Овде имамо следеће могућности: 11122, 11221, 12211, 22111, 11212, 12112, 21112, 21121, 21211, 12121. Видимо да су ово такође пермутације од 5 елемената где су по три и два елемента једнака $\left(\frac{5!}{3!2!} = 10\right)$. Исто тако, на 10 начина могу два путника ући у предња кола а три у приколицу

Побројане могућности а), б) и в) износе укупно $n = 1+1+5+5+10+10 = 32$ различитих могућности. Повољних случајева догађају „три путника улазе у предња кола а два у приколицу" – има $m = 10$. На тај начин, тражена вероватноћа једнака је $p = \frac{m}{n} = \frac{10}{32} = 0,3125$. Колике вероватноће одговарају осталим случајевима?

391. $1 - \frac{2\cdot 9!}{10!} = \frac{4}{5}$.

392. $1-\dfrac{\binom{10}{4}\cdot 2^4}{\binom{20}{4}}=\dfrac{99}{323}$.

393. Нумеришимо беле куглице бројевима 1, 2,..., 10, а црне куглице бројевима 11, 12,..., 30. Претпоставимо да после извлачења 13 куглица наставимо извлачење куглица до последње. Сваком могућем исходу тог извлачења одговара једна пермутација бројева 1, 2, 3,..., 30, при чему претпостављамо да свакој од тих пермутација одговара иста вероватноћа једнака $\frac{1}{30!}$. Пермутација код којих на тринаестом месту стоји неки од бројева 1, 2,..., 10 има $10\cdot 29!$. Према томе, тражена вероватноћа је једнака $\frac{10\cdot 29!}{30!}=\frac{1}{3}$.

394. Простор исхода је $\Omega=\{23,26,43,46\}$. Исходи 23, 26, 43 и 46 могу се редом реализовати на 16, 8, 8, 4 начина, па је природно овим исходима придружити редом вероватноће $\frac{16}{36}$, $\frac{8}{36}$, $\frac{8}{36}$, $\frac{4}{36}$. Вероватноћа догађаја $A=\{23,26,46\}$ да на првој коцки падне мањи број него на другој, једнака је $P(A)=\frac{16}{36}+\frac{8}{36}+\frac{4}{36}=\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$.

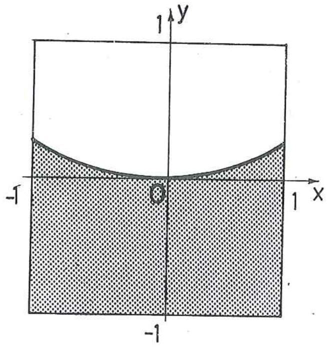
395. Нека је R полупречник круга. Површина круга је једнака $R^2\pi$ а површина уписаног квадрата је $2R^2$. Тражена вероватноћа (према геометријској дефиницији вероватноће (11)) једнака је $\frac{2R^2}{R^2\pi}=\frac{2}{\pi}$.

396. *а)* $\frac{1}{4}$;

б) Скуп Ω тачака (x,y) је квадрат чија су темена $(-1,-1,)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$. Једначина $u^2+xu+y=0$ има реална решења ако и само ако важи $x^2-4y\geqslant 0$, то јест тај догађај A је одређен скупом $A=\left\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant \frac{x^2}{4}\right\}$. Површина скупа A (видети слику 102) једнака је:

$$2+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{4}dx=2+\frac{x^3}{12}\Big|_{-1}^{1}=\frac{13}{6}$$

Како је површина квадрата (Ω) једнака 4, то је тражена вероватноћа једнака $\frac{13}{24}$.



Сл. 102

397. Прва цифра у децималном запису случајно изабраног броја из интервала $[0,1)$ једнака је нули (догађај A) ако и само ако тај број припада интервалу $\left[0, \frac{1}{10}\right)$, па је зато $P(A) = \frac{1}{10}$. Друга цифра случајно изабраног броја из јединичног интервала једнака је нули (догађај B) ако и само ако тај број припада неком од следећих 10 интервала $\left[0, \frac{1}{100}\right)$, $\left[\frac{1}{10}, \frac{11}{100}\right), \ldots, \left[\frac{9}{10}, \frac{91}{100}\right)$. Збир дужина свих тих интервала једнак је $\frac{1}{10}$, па је $P(B) = \frac{1}{10}$.

398. Нека је дата дуж дужине d. Поделом ове дужи на три дела добијамо делове дужина x, y и $d-x-y$ (видети слику 103), при чему је $0 \leqslant x+y \leqslant d$, $x, y \geqslant 0$. Сваки елементарни догађај може да се прикаже тачком (x, y) у равни. Простор елементарних догађаја $\Omega = \{(x,y) \mid x, y \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x+y \leqslant d\}$ приказан је на слици 104. Да би се од три дужи могао конструисати троугао (догађај A), потребно је и довољно да збир дужина сваке две дужи не буде мањи од треће дужи:

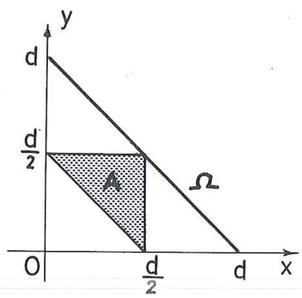
$$x+y \geqslant d-x-y, \quad x+(d-x-y) \geqslant y, \quad y+(d-x-y) \geqslant x$$

одакле се добијају неједнакости

$$x+y \geqslant \frac{d}{2}, \qquad y \leqslant \frac{d}{2}, \qquad x \leqslant \frac{d}{2}$$

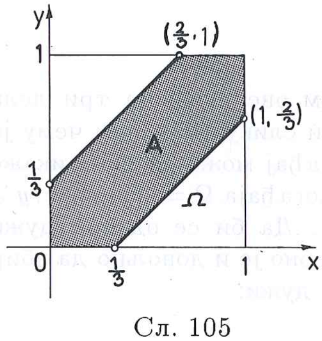
којима је дефинисана област повољна догађају A (слика 104). Како је површина области Ω једнака $\dfrac{d^2}{2}$ и површина области A једнака $\dfrac{d^2}{8}$, то је $P(A) = \dfrac{\text{површина } A}{\text{површина } \Omega} = \dfrac{1}{4}$.

Сл. 103



Сл. 104

399. Ако x означава тренутак доласка прве особе, а y тренутак доласка друге особе, онда ће се ове особе срести (догађај A) ако је испуњено $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{3}$.



Сл. 105

На слици 105 шрафирана је област догађаја A, то јест

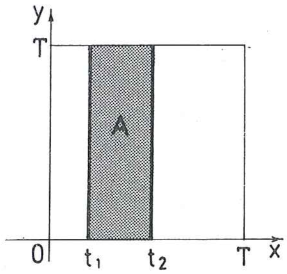
$$A=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{array}{l} 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{3},\ 0\leqslant y\leqslant x+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{2}{3},\ x-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant x+\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1,\ x-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1 \end{array}\right\}$$

Тражена вероватноћа је једнака

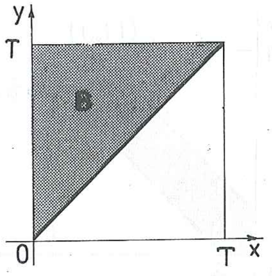
$$P(A) = \frac{\text{површина } A}{\text{површина } \Omega} = \frac{5}{9}.$$

400. *а)* Догађај A: „Воз X стиже на станицу у интервалу (t_1, t_2)" приказан је на слици 106. Вероватноћа догађаја A је једнака $P(A) = \dfrac{(t_2-t_1)T}{T^2} = \dfrac{t_2-t_1}{T}$.

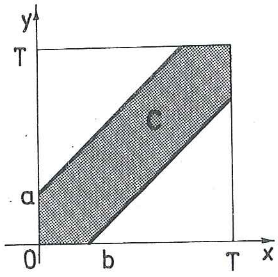
б) Догађај B: „Воз X стиже на станицу пре воза Y" приказан је на слици 107, то јест $B = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T,\ x < y\}$. Вероватноћа догађаја B је једнака $P(B) = \dfrac{\frac{T^2}{2}}{T^2} = \dfrac{1}{2}$.



Сл. 106



Сл. 107



Сл. 108

в) Догађај C: „Воз X се сусреће са возом Y“ приказан је на слици 108, то јест $C = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T,\ -a \leqslant x - y \leqslant b\}$. Вероватноћа догађаја C је једнака:

$$P(C) = \frac{T^2 - \dfrac{(T-b)^2}{2} - \dfrac{(T-a)^2}{2}}{T^2} = \frac{2(a+b)T - (a^2+b^2)}{2T^2}.$$

401. Нака је y тренутак доласка воза $(0 < y < 1)$ и x – тренутак доласка путника N $(0 < x < 1)$. Путник ће отпутовати возом ако су испуњене неједначине:

$$x - y \leqslant \frac{1}{6} \text{ (када прво стигне воз)}$$

$$y - x \leqslant t_0 \text{ (када прво стигне путник)}.$$

На слици 109 шрафирано поље показује тачке (x, y) које задовољавају ове неједначине, то јест догађај A да ће путник N отпутовати возом.

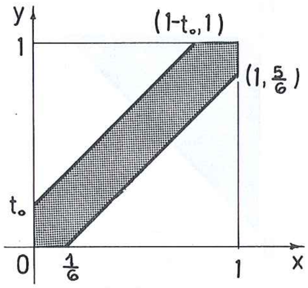
Вероватноћа да путник N отпутује возом једнака је:

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{(1-t_0)^2}{2}.$$

Према услову задатка (за одређивање t_0) имамо

$$1 - \frac{25}{72} - \frac{(1-t_0)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

одакле је $t_0 = 0,45$ сати или $t_0 = 27$ минута.



Сл. 109

402. Означимо са A појаву беле куглице у првом извлачењу и са B појаву беле куглице у другом извлачењу. Очигледно је $P(A) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$. Вероватноћа догађаја B зависи од тога да ли је прва извучена куглица задржана или је враћена у кутију.

а) Ако је прва извучена куглица задржана, тада имају смисла два условна догађаја: $B|A$ и $B|\overline{A}$ зависно од тога да ли је прва извучена куглица била бела или црна. Условне вероватноће догађаја B под условом да се десио догађај A односно $\overline{A}$ једнаке су:

$$P(B|A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(B|\overline{A}) = \frac{4}{9}.$$

б) Ако је прва извучена куглица враћена у кутију, онда је састав куглица непромењен, па реализација догађаја B не зависи од A, то јест, тада је

$$P(B|A) = P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Вероватноћа догађаја да и прва и друга куглица буду беле је, према томе,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}, \text{ када је извлачење без враћања,}$$

и $P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$, када је извлачење са враћањем.

403. *а)* Из дефиниције условне вероватноће (1) следи:

$$P(A|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1, \quad P(\Omega|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1, \quad P(\varnothing|A) = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = 0.$$

б) Ако је $A \subset B$, онда је $AB = A$, па следи

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

в) Ако се B_1 и B_2 искључују међусобом, онда се B_1A и B_2A такође искључују, па је

$$P(B_1 + B_2|A) = \frac{P[(B_1 + B_2)A]}{P(A)} = \frac{P(B_1A)}{P(A)} + \frac{P(B_2A)}{P(A)} = P(B_1|A) + P(B_2|A).$$

г) Како је у општем случају $(B_1A)(B_2A) = B_1B_2A$, то је

$$P(B_1{+}B_2|A) = \frac{P[(B_1{+}B_2)A]}{P(A)} = \frac{P(B_1A{+}B_2A)}{P(A)} = \frac{P(B_1A){+}P(B_2A){-}P(B_1B_2A)}{P(A)} =$$
$$= P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A).$$

д) $P(\Omega|A) = 1 \Rightarrow P(B + \overline{B}|A) = 1 \Rightarrow \dfrac{P[(B + \overline{B})A]}{P(A)} = 1 \Rightarrow \dfrac{P(BA) + P(\overline{B}A)}{P(A)} =$
$P(B|A) + P(\overline{B}|A) = 1 \Rightarrow P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A).$

ђ) $P(A|A{+}B) = \dfrac{P[A(A{+}B)]}{P(A{+}B)} = \dfrac{P(A{+}AB)}{P(A){+}P(B)} = \dfrac{P(A{+}\varnothing)}{P(A){+}P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(A){+}P(B)}.$

е) $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)} > \dfrac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$

404. $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A) + P(B) - P(A+B)}{P(B)} \geqslant \dfrac{0,9 + 0,8 - 1}{0,8} =$
$0,875.$ јер је $P(A+B) \leqslant 1$.

405. Нека је A – догађај да генератор a откаже и B – догађај да генератор b откаже. Тада је $P(A) = P(B) = 0,10$, $P(AB) = 0,02$, одакле је $P(A|B) = P(B|A) = \dfrac{0,02}{0,10} = 0,20$. Условна вероватноћа да ће само један генератор бити у отказу ако дође до отказа, једнака је

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B|A + B) = P(A\overline{B}|A + B) + P(\overline{A}B|A + B) =$$
$$= \frac{P[A\overline{B}(A + B)]}{P(A + B)} + \frac{P[\overline{A}B(A + B)]}{P(A + B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(A + B)} + \frac{P(\overline{A}B)}{P(A + B)} =$$
$$= \frac{P(A)P(\overline{B}|A) + P(B)P(\overline{A}|B)}{P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B|A)} = \frac{0,1\cdot 0,8 + 0,1\cdot 0,8}{0,1 + 0,1 - 0,1\cdot 0,2} = 2\cdot\frac{0,08}{0,18} = 0,89.$$

На тај начин, вероватноћа да ће град у потпуности бити снабдевен струјом када дође до отказа, једнака је $0,89\cdot 0,75 = 0,67$. Значи, да ће у назначеном случају град бити у потпуности снабдевен струјом 67% времена.

406. Означимо са A догађај да ће возило продужити право, са B да ће скренути десно и са C да ће скренути лево.
а) $p_1 = P(A)$, $p_2 = P(B)$, $p_3 = P(C) \Rightarrow p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_1 = 2p_2$, $p_2 = 2p_3 \Rightarrow 4p_3 + 2p_3 + p_3 = 1 \Rightarrow p_3 = \frac{1}{7}$, $p_2 = \frac{2}{7}$, $p_1 = \frac{4}{7}$.
б) $P(B|B+C) = \dfrac{P[B(B+C)]}{P(B+C)} = \dfrac{P(B+BC)}{P(B+C)} = \dfrac{P(B)}{P(B)+P(C)} = \dfrac{2}{3}$.
в) $P(\overline{B}|B+C) = 1 - P(B|B+C) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

407. $P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}) =$
$$= P(A_1)\cdot \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\cdot \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots \frac{P(A_1A_2\dots A_n)}{P(A_1A_2\dots A_{n-1})} = P(A_1A_2\dots A_n).$$

408. Нека A_k означава догађај да је брава отворена у k-том покушају и $\overline{A}_k$ – супротан догађај (да није отворена). Тако је, на пример, $A_4 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$, јер ако је брава отворена у четвртом покушају, значи да није отворена раније. Тражене вероватноће су једнаке:
$$P(A_1) = \frac{1}{5}, \quad P(A_2) = P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5},$$
$$P(A_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5},$$
$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) =$$
$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5} = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5).$$

409. *а)* Нека A означава догађај да први извучени завртањ није дефектан и B – догађај да други извучени завртањ није дефектан. Очигледно је $P(A) = \frac{7}{10}$. Ако се десио догађај A, тада је у кутији остало 9 завртња и 3 од њих су дефектни. Тако је $P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, па је $P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = 0,47$.
б) $P(A) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8} = 0,29$.
в) $P(A) = 0,62$.

410. *а)* Како се догађаји AB и $A\overline{B}$ међу собом искључују а у збиру дају догађај A, то је $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$, одакле је $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$. Користећи услов независности догађаја A и B добијамо $P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)\cdot P(\overline{B})$.
б) Слично као у *а)* показује се да је $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$.
в) Користећи де Моргановo правило имамо
$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - P(A) -$$
$$- P(B) + P(A)P(B) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

411. *а)* $P(A\Omega) = P(A) = P(A)\cdot 1 = P(A)P(\Omega)$;
б) $P(A\varnothing) = P(\varnothing) = 0 = P(A)\cdot 0 = P(A)\cdot P(\varnothing)$.

412. Користећи доказ из задатка 410 *в)* имамо

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A+B}) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

413. *а)* $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$.

Значи, из независности догађаја A од B следи независност догађаја B од A, то јест догађаји A и B су узајамно независни.

б) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})} \Rightarrow$ према 403 *д)* $\Rightarrow$

$$= \frac{P(A)[1-P(B|A)]}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)\left[1-\dfrac{P(AB)}{P(A)}\right]}{P(\overline{B})} =$$

$$= \frac{P(A)-P(B)P(A|B)}{P(\overline{B})} \Rightarrow \text{према услову задатка}$$

$$= \frac{P(A)-P(B)P(A)}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)[1-P(B)]}{1-P(B)} = P(A).$$

Значи, ако A не зависи од B, онда A не зависи ни од $\overline{B}$.

в) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0}{P(B)} = 0$.

г) Ако је $A \subset B$, онда је $AB = A$, па је $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

д) $P(B) = P[B(A+\overline{A})] = P(BA) + P(B\overline{A}) =$

$$= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) =$$

$$= P(B|A)[P(A)+P(\overline{A})] = P(B|A).$$

414. *а)* $P[A(B+C)] = P(AB+AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC) =$

$$= P(A)P(B) + P(A)\cdot P(C) - P(A)P(Б)P(C) =$$

$$= P(A)[P(B)+P(C)-P(BC)] = P(A)\cdot P(B+C).$$

б) Како је $AC = [(AC)B] + [(AC)\overline{B}]$ и како се догађаји у угластим заградама искључују, то је

$$P(A)P(C) = P(AC) = P(ACB) + P(AC\overline{B}) = P(A)\cdot P(C)P(B) + P[(A\setminus B)C] \Rightarrow$$

$$P[(A\setminus B)C] = P(A)P(C) - P(A)\cdot P(C)P(B) = [P(A) - P(A)P(B)]P(C) =$$

$$= P(A\setminus B)P(C).$$

в) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(A+B+C) =$

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC) =$$

$$= [1-P(A)] - P(B)[1-P(A)] - P(C)[1-P(A)] + P(BC)[1-P(A)] =$$

$$= [1-P(A)][1-P(B)-P(C)+P(B)P(C)] =$$

$= [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)] = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$.
Слично поступити у *г)* и *д)*.

415. *а)* Из формуле $P(A+B) = P(A) + P(B)$ добија се $p = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
б) Како је $AB = A$, из формуле $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ добија се $p = \frac{1}{3}$.
в) Због независности догађаја A и B формула вероватноће збира догађаја постаје $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ одакле је $p = \frac{1}{9}$.

416. *а)* Само су A и B независни $\left[P(A) = \frac{2}{8},\ P(B) = \frac{4}{8},\ P(AB) = \frac{1}{8}\right]$.
б) Нису независни.

417. Како су $\Omega = \{ГГ, ГП, ПГ, ПП\}$, $A = \{ГГ, ГП\}$, $B = \{ПГ, ГГ\}$, $C = \{ГП, ПГ\}$, то је $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$. Следи $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$, итд, па су догађаји A, B и C независни у паровима. Али је $ABC = \varnothing$ и $P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$, па значи да догађаји A, B и C нису независни.

418. Означимо са A, B и C догађаје отказа редом блокова a, b и c и са D – отказ апарата. Имамо $P(A) = 0,05$, $P(B) = 0,04$, $P(C) = 0,03$. Због независности рада блокова имамо:
$P(AB) = 0,05 \cdot 0,04 = 0,0020$, $P(AC) = 0,05 \cdot 0,03 = 0,0015$,
$P(BC) = 0,04 \cdot 0,03 = 0,0012$, $P(ABC) = 0,05 \cdot 0,04 \cdot 0,03 = 0,00006$.
Вероватноћа отказа апарата је једнака:

$$P(D) = P(A+B+C) = 0,05 + 0,04 + 0,03 - 0,0020 - 0,0015 - 0,0012 + 0,00006 = \\ = 0,11536.$$

Вероватноћа догађаја D може се добити и на једноставнији начин:

$$P(D) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - 0,88464 = 0,11536.$$

419. *а)* $P(\text{бар један грб}) = 1 - P(\text{ниједан грб}) = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,75$;
б) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,875$; *в)* $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

420. Нека је A – догађај да се у четири бацања једне коцке појави бар једна шестица и B – догађај да се у 24 бацања две коцке бар у једном бацању на обема коцкама појаве шестице. Тада је

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,51, \quad P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,49.$$

Догађај A је вероватнији од догађаја B.

421. Ако са A означимо појаву 6 тачака на коцки, онда први играч побеђује ако се реализује један од догађаја:

$$A,\ \overline{A}\,\overline{A}A,\ \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}A, \ldots$$

Вероватноћа да први играч победи једнака је

$$p_1 = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \cdots\right] = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11}.$$

Вероватноћа да победи други играч једнака је $p_2 = \dfrac{5}{11}$.

422. *а)* $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{6}$; *б)* $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{17}{36}$;
в) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{36}$; *г)* $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{18}$.

423. *а)* $P(mn =\text{непаран}) = P(m =\text{непаран и } n =\text{непаран}) =$
$= P(m =\text{непаран})\cdot P(n =\text{непаран}) = 0,25$;
б) $P(m+n =\text{непаран}) = P(m =\text{непаран и } n =\text{паран}) +$
$+ P(m =\text{паран и } n =\text{непаран}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
в) Слично *б)*;
г) Како су x и x^2 исте парности, резултат је исти као у *а)*;
д) 0,5.

424. *а)* $p_1p_2 = 0,28$; *б)* $1-(1-p_1)(1-p_2) = 0,82$; *в)* $p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2 = 0,54$.

425. $p_1^2(1-p_2)^2 + p_1^2(1-p_2)p_2 + p_1^2(1-p_2) + p_1(1-p_1)(1-p_2)^2 + (1-p_1)p_1(1-p_2)^2$.

426. Нека је A_i догађај да је стрелац S_i, $i = 1, 2, 3$, погодио мету. Тада је $P(A_1) = \dfrac{1}{6}$, $P(A_2) = \dfrac{1}{4}$, $P(A_3) = \dfrac{1}{3}$. Догађаји A_1, A_2 и A_3 су независни међусобно. Ако је A догађај да је тачно један стрелац погодио мету, онда је $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \Rightarrow P(A) = \dfrac{31}{72}$.

427. Ако са A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ означимо погодак циља у k-том гађању, онда је $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{n-1}A_n) = P(A_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_{n-1})\cdot P(A_n) = (1-p)^{n-1}\cdot p$.

428. *а)* Ако је n тражени број опита, онда је $1-(1-p)^n$ вероватноћа да у n опита догађај A наступи бар једном. Према услову задатка је $1-(1-p)^n \geqslant \alpha$ одакле је (због $1-p \leqslant 1$): $n \geqslant \dfrac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}$.
б) За $p = 0,02$ и $\alpha = 0,95$ из *а)* се добија $n \geqslant 148,28$, то јест треба проверити бар 149 производа.

429. *а)* $P_a = p^3$; *б)* $P_b = 1-(1-p)^2$;
в) $P_c = 1-(1-p)^n$. Из услова $P_c \geqslant P_1$ следи

$$1-(1-p)^n \geqslant P_1 \Rightarrow 1-P_1 \geqslant (1-p)^n \Rightarrow n \geqslant \frac{\log(1-P_1)}{\log(1-p)};$$

г) $P' = [1-(1-p)^2]^3$, $P'' = 1-(1-p^3)^2$.

Покажимо да је $P' > P''$ за $0 < p < 1$, то јест да механизам добија већу поузданост ако се удваја сваки елемент него ако се удваја цео механизам. Неједнакост $[1-(1-p)^2]^3 > 1-(1-p^3)^2$ своди се на облик $6p^2 - 12p + 6 > 0$ и $(p-1)^2 > 0$, чиме је неједнакост $P' > P''$ доказана.

430. Означимо са A_1 – догађај да се на новчићу појави писмо и са A_2 – догађај да се појави грб ($A_1 + A_2 = \Omega$). Ако са B означимо појаву беле куглице, онда је $B = A_1B + A_2B$, при чему се догађаји A_1B и A_2B искључују. Према формули потпуне вероватноће имамо

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2}\frac{m}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{r+s}.$$

431. Означимо са:

A_1 – догађај да су из прве у другу кутију пребачене две беле куглице,

A_2 – догађај да су из прве у другу кутију пребачене две црне куглице,

A_3 – догађај да је из прве у другу кутију пребачена једна бела и једна црна куглица.

Вероватноће ових догађаја (хипотеза) једнаке су:

$$P(A_1) = \frac{\binom{a}{2}}{\binom{a+b}{2}} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}, \quad P(A_2) = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}} = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)},$$

$$P(A_3) = \frac{\binom{a}{1}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{2}} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}, \quad \big(P(A_1 + A_2 + A_3) = P(\Omega) = 1\big).$$

Означимо са B појаву беле куглице из друге кутије. Догађај B се реализује са једним од догађаја A_1, A_2, A_3 па је зато $B = A_1B + A_2B + A_3B$, при чему се догађаји A_1B, A_2B и A_3B међусобно искључују. Следи

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3).$$

Како је $P(B|A_1) = \dfrac{c+2}{c+d+2}$, $P(B|A_2) = \dfrac{c}{c+d+2}$, $P(B|A_3) = \dfrac{c+1}{c+d+2}$ добијамо:

$$P(B) = \frac{a(a-1)(c+2) + b(b-1)c + 2ab(c+1)}{(a+b)(a+b-1)(c+d+2)}.$$

432. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3},\ P(B|A_1) = \dfrac{3}{8},\ P(B|A_2) = \dfrac{4}{8},$
$P(B|A_3) = 0,\ P(B) = \dfrac{7}{24}.$

433. *а)* Пре бацања новчића вероватноћа извлачења исправног новчића једнака је $\dfrac{1}{3}$ (априорна вероватноћа). Ако је познат резултат бацања новчића (у 20 бацања појавио се грб 11 пута) поступамо на следећи начин. Нека A_i, $i = 1, 2, 3$ означава догађај да је новчић D извучен, и нека је B догађај да се добије 11 грбова у 20 бацања новчића. Тада је у Бајесовој формули:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$P(B|A_2) = \binom{20}{11} 0,5^{11} 0,5^{9} = \binom{20}{11} 0,5^{20} = 0,160179$$
$$\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i) = \binom{20}{11}(0,4^{11}\cdot 0,6^{9} + 0,5^{20} + 0,6^{11}\cdot 0,4^{9})\cdot \frac{1}{3} = 0,390912\cdot \frac{1}{3},$$

па је тражена вероватноћа једнака

$$P(A_2|B) = \frac{0,160179\cdot \frac{1}{3}}{0,390912\cdot \frac{1}{3}} = 0,41.$$

б) 0,43.

434. *а)* A_i – догађај да је производ обрађен на машини M_i, $i = 1, 2, 3$, B – догађај да је производ дефектан.

$$P(A_2|B) = \frac{0,3\cdot 0,02}{0,2\cdot 0,01 + 0,3\cdot 0,02 + 0,5\cdot 0,03} = 0,26.$$

б) Како је $P(A_2|B) < P(A_2)$, мора да је или $P(A_1|B) > P(A_1)$ или $P(A_3|B) > P(A_3)$. Проверити.
в) 0,301.

435. Бункер може бити уништен (B) од једног погодка (A_1), од два погодка (A_2) и од три погодка (A_3). Како је

$$P(A_1) = 0,3\cdot 0,4\cdot 0,2 + 0,7\cdot 0,6\cdot 0,2 + 0,7\cdot 0,4\cdot 0,8 = 0,332$$
$$P(A_2) = 0,3\cdot 0,6\cdot 0,2 + 0,3\cdot 0,4\cdot 0,8 + 0,7\cdot 0,6\cdot 0,8 = 0,456$$
$$P(A_3) = 0,144$$
$$P(B|A_1) = 0,5, \quad P(B|A_2) = 0,7, \quad P(B|A_3) = 0,9$$

то је: $P(B) = 0,332\cdot 0,5 + 0,456\cdot 0,7 + 0,144\cdot 0,9 = 0,6148$.

б) $P(A_2|B) = \dfrac{0,3192}{0,6148} = 0,51 > P(A_3|B) = \dfrac{0,1296}{0,6148} = 0,21$.

436. Како је $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, значи да вероватноће које се добијају законом расподеле $f(n) = \dfrac{1}{2^n}$ задовољавају услов да је њихов збир једнак јединици и да су ненегативне. Показати да је $P(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{4}$.

437. *а)* Како је време за које семафор омогућава прелазак преко раскрснице (време трајања зеленог светла) једнако времену забране проласка (време трајања жутог и црвеног светла), то је вероватноћа да семафор заустави или допусти пролазак аутомобилу без заустављања иста и једнака 0,5. Случајна променљива X може да узме вредности $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Одговарајуће вероватноће су једнаке:

$$p_1 = P(X=0) = (1-0,5)^4 = \frac{1}{16},\quad p_2 = P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16},$$

$$p_3 = P(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16},\quad p_4 = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16},\quad p_5 = \frac{1}{16}.$$

б) $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{4}{16} = \dfrac{5}{16}$.

в) $P(X \leqslant 3) = 1 - P(X=4) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

438. Сабирајући неједнакости $x_ip_i < ap_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ добијамо $\sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i < a\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ или $M(X) < a$.

439. Претпоставимо да вредности случајне променљиве X задовољавају услов: $x_{\min} = x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n = x_{\max}$. Стављајући у формулу $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ уместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вредност x_1, добијамо:

$$M(X) \geqslant x_1p_1 + x_1p_2 + \cdots + x_1p_n = x_1(p_1+p_2+\cdots+p_n) = x_1 = x_{\min}.$$

Слично, замењујући $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са x_n добијамо

$$M(X) \geqslant x_np_1 + x_np_2 + \cdots + x_np_n = x_n(p_1+p_2+\cdots+p_n) = x_n = x_{\max}.$$

чиме је доказана неједнакост $x_{\min} \leqslant M(X) \leqslant x_{\max}$.

440. $$\begin{aligned}M[X-M(X)] &= [x_1-M(X)]p_1+[x_2-M(X)]p_2+\cdots+[x_n-M(X)]p_n=\\ &= x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n-M(X)(p_1+p_2+\cdots+p_n)=\\ &= M(X)-M(X)=0.\end{aligned}$$

441. $$\begin{aligned}D(X) &= [x_1-M(X)]^2p_1+[x_2-M(X)]^2p_2+\cdots+[x_n-M(X)]^2p_n=\\ &= [x_1-2x_1M(X)+M^2(X)]p_1+[x_2-2x_2M(X)+M^2(X)]p_2+\\ &+\cdots+[x_n-2x_nM(X)+M^2(X)]p_n=\\ &= (x_1^2p_1+x_2^2p_2+\cdots+x_n^2p_n)-2M(X)(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)+\\ &+M^2(X)(p_1+p_2+\cdots+p_n).\end{aligned}$$

Збир у првој загради је други моменат $M(X^2)=m_2$, збир у другој загради је $M(X)=m_1$ и збир у трећој загради је једнак 1, па је

$$D(X)=M(X^2)-2M(X)M(X)+M^2(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=m_2-m_1^2.$$

442. Како је $M(X)=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, то је

$$D(X)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2.$$

443. $M(X)=M(Y)=0.$

$$D(X)=M(X^2)=(-2)^2\frac{1}{6}+(-1)^2\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}=2$$

$$D(Y)=M(Y^2)=(-1)^2\frac{1}{4}+(-1)^2\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}=2,5.$$

Зашто је веће растурање код случајне промењиве Y?

444. Тражене вероватноће се добијају као решење система једначина: $p_1+p_2+p_3=1$, $-p_1+p_2+2p_3=1,1$; $p_1+p_2+4p_3=2,5$ и то: $p_1=0,2$. $p_2=0,3$ и $p_3=0,5$.

445. *а)* Скраћивањем се из неједначина

$$\binom{n}{m-1}p^{m-1}q^{n-m+1}\leqslant\binom{n}{m}p^mq^{n-m}\quad\text{и}\quad\binom{n}{m}p^mq^{n-m}\geqslant\binom{n}{m+1}p^{m+1}q^{n-m-1}$$

добија тврђење $np+p-1\leqslant m\leqslant np+p$.

б) $M_o=[np+p]=\left[10\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\right]=\left[\dfrac{22}{3}\right]=\left[7\dfrac{1}{3}\right]=7$

$$P_{10,7,\frac{2}{3}}=\binom{10}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\approx 0,26.$$

в) $M_o=[np+p]=\left[15\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right]=8$. Како је сада и $np+p-1$ цео број:

$15\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1=7$, то у оваквим случајевима имамо две моде: $M_o=8$ и $M_0'=7$. Тада је $\max\limits_{0\le k\le 15} P_{15,k,\frac{1}{2}}=P_{15,7,\frac{1}{2}}=P_{15,8,\frac{1}{2}}=0,1964$.

446. $X:\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array}\right\}$

Расподела вероватноћа је симетрична (нацртати полигон расподеле) па је $M(X)=M_e=M_o=7$.

$$P(6<X<10)=P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)=\frac{15}{36}.$$

447. *а)* Од укупно девет куглица три се могу изабрати на $\binom{9}{3}=84$ начина. Бројеви повољних исхода за догађаје $\{X=0\}$, $\{X=1\}$, $\{X=2\}$, $\{X=3\}$ једнаки су редом: $\binom{5}{0}\binom{4}{3}=4$, $\binom{5}{1}\binom{4}{2}=30$, $\binom{5}{2}\binom{4}{1}=40$, $\binom{5}{3}\binom{4}{0}=10$. Расподела вероватноћа случајне променљиве X је следећа:

$$X:\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{84} & \frac{30}{84} & \frac{40}{84} & \frac{10}{84} \end{array}\right\}$$

б) $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X+3)=\dfrac{50}{84}$.

в) $M(X)=0\cdot\dfrac{4}{84}+1\cdot\dfrac{30}{84}+2\cdot\dfrac{40}{84}+3\cdot\dfrac{10}{84}=1,67$.

$M_o=2$, $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\dfrac{280}{84}-\left(\dfrac{140}{84}\right)^2=0,54$.

448. *а)* Случајна променљива X има биномну расподелу вероватноћа са параметрима $n=3$ и $p=\dfrac{5}{9}$:

$$P_{3,0,\frac{5}{9}}=\left(\frac{4}{9}\right)^3=\frac{64}{729},\quad P_{3,1,\frac{5}{9}}=\binom{3}{1}\frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{240}{729},$$

$$P_{3,2,\frac{5}{9}}=\binom{3}{2}\left(\frac{5}{9}\right)^2\frac{4}{9}=\frac{300}{729},\quad P_{3,3,\frac{5}{9}}=\left(\frac{5}{9}\right)^3=\frac{125}{729}.$$

Следи

$$X:\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{64}{729} & \frac{240}{729} & \frac{300}{729} & \frac{125}{729} \end{array}\right\}$$

б) $M(X) = np = 3\cdot\dfrac{5}{9} = \dfrac{15}{9} = 1,67,\ M_o = 2,\ D(X) = npq = \dfrac{20}{27} = 0,74.$

449. $P_{5,3;0,8} = \dbinom{5}{3}(0,8)^3(0,2)^2 = 0,2048 \approx 0,2.$

450. $P_{4,k\geq 2,\frac{1}{6}} = P_{4,2,\frac{1}{6}} + P_{4,3,\frac{1}{6}} + P_{4,4,\frac{1}{6}} = \dfrac{150+20+1}{6} = \dfrac{19}{144} \approx 0,13.$

451. *а)* $P_{6,2,\frac{1}{2}} = \dbinom{6}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = 0,234;$

б) $P_{6,k\geq 3,\frac{1}{2}} = \dbinom{6}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \dbinom{6}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \dbinom{6}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = 0,656.$

в) $P_{6,k\geq 1,\frac{1}{2}} = 1 - P_{6,0,\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,984.$

452. $P_{n,k\geq 1;0,01} = 1 - P_{n,0;0,01} = 1 - (0,99)^n > \dfrac{1}{2} \Rightarrow n > \dfrac{\log 0,5}{\log 0,99} \approx 69.$

453. $1-(1-p)^4 = 0,8704 \Rightarrow 0,1296 = (1-p)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{0,1296} = 1-p \Rightarrow p = 1 - \sqrt[4]{\dfrac{1296}{10000}} = 1 - \dfrac{6}{10} = 0,4.$

454. Користећи Стирлингову формулу ($n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$) имамо:

$$P_{100;50;0,5} = \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{50} = \frac{100!}{50!50!}\cdot\frac{1}{2^{100}} \approx \frac{1}{5}\cdot 0,4 = 0,08.$$

455. *а)* Случајна променљива X може да узме вредности 0, 1, 2, 3, 4. Вероватноће ових реализација једнаке су:

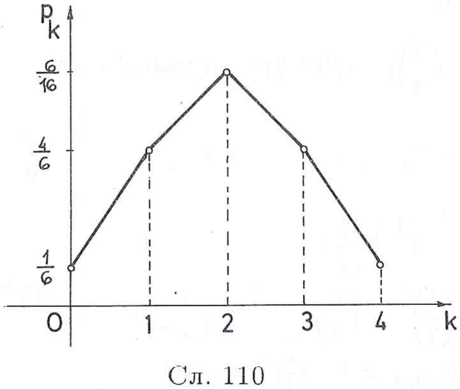
$$P(X=0) = P(\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}) = [P(\overline{A})]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

$$P(X=1) = P(A\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A} + \overline{A}A\overline{A}\,\overline{A} + \overline{A}\,\overline{A}A\overline{A} + \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}A) = \frac{4}{16}.$$

$$P(X=2) = \frac{6}{16},\ P(X=3) = \frac{4}{16},\ P(X=4) = \frac{1}{16}.$$

Према томе, расподела вероватноћа случајне променљиве X је једнака (полигон расподеле је на сл. 110)

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{1}{16} & \dfrac{4}{16} & \dfrac{6}{16} & \dfrac{4}{16} & \dfrac{1}{16} \end{Bmatrix}$$



Сл. 110

Закон расподеле вероватноћа добијамо ако уочимо да су бројеви 1, 4, 6, 4, 1 – биномни коефицијенти $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$. Тако, закон расподеле вероватноћа у овом примеру гласи:

$$P(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4!}{k!(4-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad k=0,1,2,3,4.$$

Добијена формула је специјалан случај биномног закона расподеле (7) са параметрима $n=4$ и $p=\frac{1}{2}$. Према формулама (8) имамо

$$M(X)=4\cdot\frac{1}{2}=2, \quad D(X)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1, \quad \sigma_x=1, \quad M_o=2.$$

Значи у породици са четворо деце треба очекивати у просеку два мушка детета.

б) Биномна расподела са параметрима $n=4$ и $p=0,515$.

456. *а)* $p=\binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=0,273;$

б) $p=\binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\binom{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{2}.$

457. *а)* $\frac{1}{2}$; *б)* $2^{-n}\sum_{i=k}^{r}\binom{n}{i}$.

458. А) Вероватноћа дефектности лименке је $p=\frac{10}{100}=0,1$, а супротна вероватноћа је $q=0,9$. Вероватноћа да је међу n лименки тачно k дефектних једнака је $\binom{n}{k}0,1^k 0,9^{n-k}$. Следи *а)* $0,9^5 = 0,590$;

б) $\binom{5}{1} 0,1 \cdot 0,9^4 = 0,328$;

в) $1 - \binom{5}{0} 0,9^5 - \binom{5}{1} 0,1 \cdot 0,9^4 = 0,0815$.

Б) Са резултатима из А) имамо:

а) очекивани број $= 1000 \cdot 0,590 = 590$;

б) очекивани број $= 1000 \cdot 0,328 = 328$;

в) очекивани број $= 1000 \cdot 0,081 = 81$.

459. Вероватноћа да је од n производа тачно k њих дефектно једнака је $\binom{n}{k} 0,2^k \cdot 0,8^{n-k}$. Према услову задатка је

$$1 - \left[\binom{n}{0} \cdot 0,8^n + \binom{n}{1} 0,2 \cdot 0,8^{n-1} + \binom{n}{2} 0,2^2 \cdot 0,8^{n-2}\right] \geqslant 0,9.$$

Следи $0,8^n \left[1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{32}\right] \leqslant 0,1$ одакле се (испробавањем) добија $n \geqslant 25$.

460. $$P_{n,n-k,1-p} = \binom{n}{n-k} (1-p)^{n-k} p^{n-n+k} = \frac{n! p^k q^{n-k}}{(n-k)!(n-n+k)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = P_{n,k,p}.$$

Табеле биномних вероватноћа обично се дају (у уџбеницима за вероватноћу) за различите вредности n и за вероватноће појављивања догађаја A у сваком понављању експеримента p: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Захваљујући доказаној формули биномне вероватноће код којих је $p > 0,5$ своде се на биномне вероватноће код којих је $p < 0,5$. Тако је

$$P_{10;6;0,7} = P_{10;10-6;1-0,7} = P_{10;4;0,3}$$

Примера ради наведимо табелу биномних вероватноћа за $n = 10$ и $p = 0,3$:

$P_{10;0;0,3} = 0,0282$	$P_{10;6;0,3} = 0,0368$
$P_{10;1;0,3} = 0,1211$	$P_{10;7;0,3} = 0,0090$
$P_{10;2;0,3} = 0,2335$	$P_{10;8;0,3} = 0,0014$
$P_{10;3;0,3} = 0,2668$	$P_{10;9;0,3} = 0,0001$
$P_{10;4;0,3} = 0,2001$	$P_{10;10;0,3} = 0,0000$
$P_{10;5;0,3} = 0,1029$	

Из табеле се види да је $M_o = 3$ јер је $P_{10;3;0,3} = \max P_{10;k;0,3}$. Нацртати полигон расподеле вероватноћа $P_{10;k;0,3}$ и $P_{10;k;0,7}$ за $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

461. $M(X)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}=$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n\cdot(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}p^k\cdot q^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}.$$

Како је према биномној формули

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}\cdot q^{n-k}=(p+q)^{n-1}=1 \quad \text{јер је} \quad p+q=1,$$

добија се $M(X)=np$.

462. Са E_k и E_k' означимо догађаје да се у n бацања код Николе и Михаила грб појавио k пута, а са A означимо догађај да се у n бацања грб појавио исти број пута и код Николе и код Михаила. Очигледно је

$$A=E_0E_0'+E_1E_1'+\cdots+E_nE_n', \quad \text{па је}$$

$$P(A)=P\Big(\sum_{i=0}^{n}E_iE_i'\Big)=\sum_{i=0}^{n}P(E_iE_i')=\sum_{i=0}^{n}P(E_i)P(E_i') \quad \text{(независност!).}$$

Како је $P(E_i)=P(E_i')=\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}=\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$ то је

$$P(A)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

Због једнакости $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$, имамо $P(A)=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

463. $P(X=1)=0,8$; $P(X=2)=0,2\cdot 0,8=0,16$; $P(X=3)=0,2^2\cdot 0,8=0,032$; $P(X=4)=0,2^4+0,2^3\cdot 0,8=0,008$. Следи

$$X:\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0,8 & 0,16 & 0,032 & 0,008\end{Bmatrix}$$

У просеку ће стрелац потрошити $M(X)=1,328$ метака.

464. Простор елементарних догађаја је бесконачан (пребројиво бесконачан), јер случајна променљива X може да узме за своју вредност један од природних бројева: 1, 2, 3,...

Како је $P(X=1)=\frac{1}{4}$, $P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$, $P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$,... видимо да закон расподеле вероватноћа гласи

$$P(X=k)=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4}, \quad k=1,2,3,\dots$$

Покажите да је $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$. Математичко очекивање је једнако:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+4\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}+\cdots$$
$$=\frac{1}{4}\left[1+2\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+4\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots\right].$$

Како се из једнакости $1+x+x^2+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$, $|x|<1$ добија (диференцирањем) једнакост $1+2x+3x^2+\cdots=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, следи

$$M(X)=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2}=4$$

то јест, стрелац ће у просеку да утроши 4 метка до поготка циља.

465. Како је реч о биномној расподели, где је вероватноћа $p=0,007$ мали број и број понављања експеримента $n=100$ велики број, биномну расподелу треба заменити Поасоновом расподелом са параметром $\lambda=np=100\cdot 0,007=0,7$. Вероватноћа да се нађе кутија без иједног дефекта једнака је $P_{0,7;0}=e^{-0,7}=0,49659$, што значи да ће приближно 50% кутија бити без дефектних производа. Вероватноћа да ћемо наћи кутију са два или више дефектних производа износи

$$P_{0,7;k\geq 2}=1-P_{0,7;0}-P_{0,7;1}=1-(0,49659+0,7\cdot 0,49659)=0,1558$$

што значи да ће приближно 16% кутија садржавати два или више дефектних производа.

466. Како је $n=800$ велики број и $p=\dfrac{5}{1000}=0,005$ много мање од 0,1, можемо прихватити да број дефектних производа има Поасонову расподелу са параметром $\lambda=np=800\cdot 0,005=4$.

Да би се лакше користиле вероватноће Поасонове расподеле припремљене су табеле Поасонових вероватноћа за различите вредности λ и налазе се у уџбеницима за вероватноћу. Из такве табеле наводимо само вредности Поасонових вероватноћа за $\lambda=4$ и $\lambda=0,7$ и $k=0,1,2,\ldots,9$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_{4,k}$	0,01832	0,07326	0,14653	0,19538	0,19537	0,15629	0,10420	0,05954	0,02977	0,01323
$P_{0,7;k}$	0,49659	0,34761	0,12166	0,02839	0,00497	0,00070	0,00008	0,00001	0,00000	–

а) Из табеле читамо $P_{4,4} = 0,19537$;
б) Из табеле читамо $P_{4,k\leq 2} = P_{4,0} + P_{4,1} + P_{4,2} = 0,23811$;
в) $M(X) = \lambda = 4$, $D(X) = \lambda = 4$, $M_o = 3$ јер је $P_{4,3} = \max P_{4,k}$

Како је $P_{4,k\leq 3} = P_{4,k\leq 2} + 0,19538 = 0,43349 < 0,5$ и $P_{4,k\leq 4} = P_{4,k\leq 3} + 0,19537 = 0,62886 > 0,5$ то је $M_e \approx 3$.

467. $\lambda \approx \overline{X} = \dfrac{1}{200}(0\cdot 130 + 1\cdot 51 + 2\cdot 12 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1) = \dfrac{100}{200} = 0,5.$

Како се у Поасоновим вероватноћама увек налази израз $e^{-\lambda}$, то се за израчунавање Поасонових вероватноћа може користити и табела вредности за $e^{-\lambda}$, коју наводимо за вредности λ које се најчешће срећу у пракси:

λ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$e^{-\lambda}$	1,000	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0,368	0,135	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,00012	0,00004

Значи, за $\lambda = 0,5$ имамо вероватноће Поасонове расподеле и теоријске фреквенције за различите вредности k:

$P_{0,5;0} = e^{-0,5} = 0,6065 \Rightarrow f_{t0} = 200\cdot 0,6065 = 121,3$

$P_{0,5;1} = 0,5\cdot e^{-0,5} = 0,303 \Rightarrow f_{t1} = 200\cdot 0,303 = 60,7$

$$P_{0,5;2} = \frac{0,5^2\cdot e^{-0,5}}{2!} = 0,076 \Rightarrow f_{t2} = 200\cdot 0,076 = 15,2$$

$$P_{0,5;3} = \frac{0,5^3\cdot e^{-0,5}}{3!} = 0,013 \Rightarrow f_{t3} = 200\cdot 0,013 = 2,5$$

$$P_{0,5;4} = \frac{0,5^4\cdot e^{-0,5}}{4!} = 0,0016 \Rightarrow f_{t4} = 200\cdot 0,0016 = 0,3$$

$$P_{0,5;5} = \frac{0,5^5\cdot e^{-0,5}}{5!} = 0,0001 \Rightarrow f_{t5} = 200\cdot 0,0001 = 0,0$$

$\left(\sum f_i = \sum f_{ti} = 200\right)$.

Упоређујући уочене емпиријске фреквенције дана када се десило k саобраћајних незгода са добијеним теоријским фреквенцијама, видимо да се незнатно разликују, па значи да можемо сматрати да се број саобраћајних незгода дешава у посматраном граду по Поасоновом закону са параметром $\lambda \approx 0,5$.

468. $\lambda \approx \overline{X} = \dfrac{1}{600}(0\cdot 360 + 1\cdot 190 + 2\cdot 40 + 3\cdot 10) = 0,5$

$$P_{0,5;\,0} = 0,6065 \Rightarrow f_{t0} = 600\cdot 0,6065 = 363,90$$
$$P_{0,5;\,1} = 0,3033 \Rightarrow f_{t1} = 600\cdot 0,3033 = 181,98$$
$$P_{0,5;\,2} = 0,0758 \Rightarrow f_{t2} = 600\cdot 0,0758 = 45,48$$
$$P_{0,5;\,3} = 0,0126 \Rightarrow f_{t3} = 600\cdot 0,0126 = 7,56$$

Теоријске фреквенције смо израчунали под претпоставком да случајна промењлива X (број слова ж у редовима штампаног текста) има Поасонову расподелу са параметром $\lambda \approx 0,5$ и видимо да се оне незнатно разликују од емпиријских фреквенција.

Слично, можете анализирати појаву слова ц, ч, ш.

469. $p_0 = 0,0183$, $p_1 = 0,0732$, $p_2 = 0,1465$, $p_3 = 0,1954$, $p_4 = 0,1954$, $p_5 = 0,1563$, $p_6 = 0,1042$, $p_7 = 0,0595$, $p_8 = 0,0298$. Следи

$f_{t0} = 60\cdot 0,0183 = 1,09 \approx 1$ (само у току једног минута није било телефонских позива),

$f_{t1} = 60\cdot 0,0732 = 4,392 \approx 4$ (у току 4 минута био је по један позив),

$f_{t2} = 60\cdot 0,1465 \approx 9$ (у току 9 минута била су по два позива),

$f_{t3} = 60\cdot 0,1954 \approx 12$ (у току 12 минута била су по три позива),

$f_{t4} \approx 12$, $f_{t5} \approx 9$, $f_{t6} \approx 6$, $f_{t7} \approx 3$, $f_{t8} \approx 2$.

470. Нека је X број левака међу 200 случајно изабраних људи. X има биномну расподелу са параметрима $n = 200$ и $p = \dfrac{1}{100}$. Како је n велико и p мало, прихватимо да X има Поасонову расподелу са параметром $\lambda = np = 2$. Тада је

$$P(X \geqslant 4) = P_{2,\,k\geq 4} = 1 - P_{2,\,k\leq 3} = 1 - e^{-2}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) = 1 - \frac{19e^{-2}}{3} \approx 0,143.$$

471. *а)* $A\displaystyle\int_0^2 x^2 dx = 1 \Rightarrow A\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{8}{3}A = 1 \Rightarrow A = \frac{3}{8}$;

б) $M(X) = \dfrac{3}{8}\displaystyle\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$

Мода не постоји (нацртати график густине!). Медијана M_e се одређује из једначине:

$$\frac{3}{8}\int_0^{M_e} x^2 dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{M_e} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{M_e^3}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_e = \sqrt[3]{4}$$

$$M(X^2) = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4 dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{12}{5}$$

$$D(X)=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}.$$

472. Да би функција $f(x)$ била ненегативна на интервалу $(0,\pi)$ коефицијент A мора бити позитиван. Вредност коефицијента A одређујемо из услова (2):

$$A\int_0^{\pi}\sin x dx=1\Rightarrow A[-\cos x]_0^{\pi}=1\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Значи, густина расподеле вероватноћа гласи:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{за } x<0,\ x>\pi\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{за } 0<x<\pi.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin x dx=\frac{\pi}{2} \text{ (парцијална интеграција!)}$$

Функција $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ достиже максималну вредност за $x=\frac{\pi}{2}$, па је $M_o=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{M_e}\frac{1}{2}\sin x dx=\frac{1}{2}\Rightarrow -\cos x\Big|_0^{M_e}=1\Rightarrow -\cos M_e+1=1\Rightarrow M_e=\frac{\pi}{2}.$$

473. *а)* $f(x)=\begin{cases}0, & \text{за } x<0,\ x>a\\ \dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), & \text{за } 0<x<a\end{cases}$

б) $P\left(\frac{a}{2}<X<a\right)=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\left[\frac{2}{a}x-\frac{2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}=\frac{1}{4}.$

в) $M(X)=\int_0^a x\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{a}{3},\quad M(X^2)=\int_0^a x^2\cdot\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{a^2}{6},$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{18},\quad \sigma_x=\frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

$$\int_0^{M_e}\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{1}{2}\Rightarrow M_e^2-2aM_e-\frac{a^2}{2}=0\Rightarrow M_e=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

474. $\int_3^5\left(-\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}\right)dx=1,\quad M(X)=M_e=M_o=4.$

475. $a < x < b,\ f(x) > 0 \Rightarrow af(x) < xf(x) < bf(x) \Rightarrow a\int\limits_a^b f(x)dx <$ $\int\limits_a^b xf(x)dx < b\int\limits_a^b f(x)dx$. Како је $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$, следи $a < M(X) < b$.

476. $Y = X + k \Rightarrow M(Y) = M(X+k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+k)f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx +$ $k\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = M(X) + k$

$$M(Y^2) = M(X+k)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+k)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x^2+2kx+k^2)f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx + 2k\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx + k^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = M(X^2)+2kM(X)+k^2$$

$$D(Y) = D(X+k) = M(X^2) + 2kM(X) + k^2 - [M(X)+k]^2 = D(X)$$

Значи, ако се вредностима случајне променљиве X дода иста константа k, онда се она додаје и математичком очекивању, а дисперзија се не мења.

477. $Y = kX \Rightarrow M(Y) = M(kX) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} kxf(x)dx = kM(X)$.

$$M(Y^2) = M(k^2X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k^2x^2f(x)dx = k^2M(X^2)$$

$$D(X) = M(Y^2) - M^2(Y) = k^2M(X^2) - k^2M^2(X) = k^2D(X)$$

Значи, ако се вредности случајне променљиве X помноже константом k, онда се математичко очекивање множи са k, а дисперзија са k^2.

478. *а)* 50%;
б) $Q_1 = \frac{b+3a}{4}$, $Q_3 = \frac{a+3b}{4}$, $\frac{Q_1+Q_3}{2} = \frac{b+3a+a+3b}{8} = \frac{a+b}{2} = M_e$.

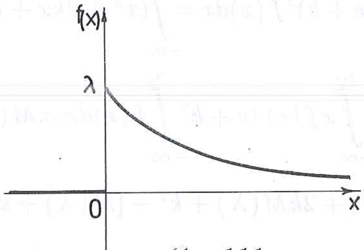
479. $\int\limits_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1$ (јер $e^{-\lambda x} = \frac{1}{e^{\lambda x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$). График криве густине експоненцијалне расподеле дат је на слици 111.

б) $\displaystyle\int_0^{M_e}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2}\Rightarrow e^{-\lambda\cdot M_e}=\frac{1}{2}\Rightarrow M_e=\frac{1}{\lambda}\ln 2\approx\frac{2,3\log 2}{\lambda}=\frac{2,3\cdot 0,3}{\lambda}=\frac{0,69}{\lambda}.$

$\displaystyle M(X)=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$ (парцијална интеграција!).

$$M(X^2)=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}\Rightarrow D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

в) $\displaystyle P\left(0<X<\frac{1}{\lambda}\right)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-1}\approx 1-0,368=0,632.$



Сл. 111

480. Ако са b обележимо висину троугла, онда је, према (2), испуњено $\dfrac{2a\cdot b}{2}=1\Rightarrow b=\dfrac{1}{a}$. Густина расподеле гласи:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{за } x\leqslant -a,\ x>a\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}x, & \text{за } -a<x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}x, & \text{за } 0<x\leqslant a\end{cases}$$

$$M(X)=M_e=M_o=0$$

$$D(X)=M(X^2)=\int_{-a}^{0}x^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}x\right)dx+\int_0^{a}x^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3a}+\frac{1}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{x^3}{3a}-\frac{1}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^{a}=\frac{a^2}{6}.$$

481. $\displaystyle M(T)=M\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\mu}{\sigma}f(x)dx=\frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx-\frac{\mu}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=$

$= \frac{1}{\sigma} M(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{M(X) - \mu}{\sigma} = 0$, јер је $M(X) = \mu$.

$$D(T) = M(T^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Добијени интеграл је, по дефиницији дисперзија случајне променљиве X, па је $D(T) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$ и $\sigma_T = 1$, па значи $T \sim N(0,1)$.

482. $P(8 < X < 14) = P\left(\frac{8-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{14-\mu}{\sigma} \right) = P\left(\frac{8-10}{2} < T < \frac{14-10}{2} \right) =$
$= P(-1 < T < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) =$
$= 0,4773 + 0,3413 = 0,8186.$

483. $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P\left(-k < \frac{X-\mu}{\sigma} < k \right) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k).$

За $k = 1$: $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$
За $k = 2$: $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4773 = 0,9546$
За $k = 3$: $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$
Иако је густина нормалне расподеле дефинисана на целој реалној оси, ипак се види да се скоро све вредности случајне променљиве налазе на интервалу који се простире 3σ лево и 3σ десно од центра растурања. Тачније 99,73% вредности нормалне случајне променљиве је унутар тог интервала а нешто мање од 0,3% ван тог интервала. Ова особина нормалне расподеле позната је под називом „правило три сигме“.

484. *а)* Из једнакости $P(\mu - a < X < \mu + a) = 0,95$ следи $P\left(-\frac{a}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a}{\sigma} \right) = 0,95$ и $2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,95$ или $\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,4750$. Из приложене табеле вредности Лапласове функције читамо да је $\frac{a}{\sigma} = 1,96$ и $a = 1,96\sigma$, односно за $\sigma = 4$ имамо $a = 1,96 \cdot 4 = 7,84$. Значи $P(16 - 7,84 < X < 16 + 7,84) = 0,95$ или $P(8,16 < X < 23,84) = 0,95$.
б) $2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,99$ или $\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,4950$, одакле је $\frac{a}{\sigma} = 2,58$ и $a = 2,58\sigma$. За $\sigma = 4$ имамо $P(5,68 < X < 26,32) = 0,99$.

485. $M(X) = \mu = 2$, $D(X) = \sigma^2 = 25$.

486. *а)* $\Phi(1,65) = 0,4505$ (прочитано из табеле за $\Phi(t)$).
б) Због парности криве густине имамо:
$P(-0,73 < X < 0) = P(0 < X < 0,73) = \Phi(0,73) = 0,2673.$
в) $\Phi(2,01) - \Phi(-1,37) = \Phi(2,01) + \Phi(1,37) = 0,4147 + 0,4778 = 0,8925.$
г) $\Phi(1,79) - \Phi(0,54) = 0,4633 - 0,2054 = 0,2579.$
д) $P(1,13 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi(1,13) = 0,5 - 0,3708 = 0,1292.$

ђ) $P(|X| < 0,5) = P(-0,5 < X < 0,5) = 2\Phi(0,5) = 0,3830.$
е) t мора бити позитивно, јер је вероватноћа $P(X < t)$ већа од 0,5. Како је $P(X < t) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < t) = 0,5 + \Phi(t)$, то је, према условy задатка, $0,5 + \Phi(t) = 0,7967$, одакле је $\Phi(t) = 0,2967$ и онда из табеле за $\Phi(t)$ читамо $t = 0,83$.
ж) Како је $P(t < X < 2) = P(0 < X < 2) - P(0 < X < t)$ и $P(0 < X < 2) = \Phi(2) = 0,4773$, то је $0,4773 - 0,3772 = \Phi(t)$ и $\Phi(t) = 0,1001$, па је $t = 0,25$.

487. Како је крива густине симетрична у односу на праву $x = \mu = 10$, то су површине испод криве густине на интервалима (0,10) и (10,20) једнаке међу собом. Следи $P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,4$.

488. *а)* $P(65 < X < 75) = P\left(\frac{65-66}{5} < \frac{X-66}{5} < \frac{75-66}{5}\right) = P(-0,2 < T < 1,80) = \Phi(1,80) - \Phi(-0,2) = \Phi(1,80) + \Phi(0,2) = 0,4641 + 0,0793 = 0,5434.$ Следи, број ученика тежине између 65 и 75 кг је једнак $800\cdot 0,5434 = 435$;
б) $P(X > 72) = P(72 < X < +\infty) = P\left(\frac{72-66}{5} < T < +\infty\right) = 0,1151$, па је број ученика чија је тежина већа од 72 кг једнак $800\cdot 0,1151 = 92$.

489. Случајна променљива X је број мушке деце која може да узме целе бројне вредности 0, 1, 2,..., 10000. Вероватноћа рођења мушког детета у сваком од ових порођаја је иста и износи 0,5. Према теореми Моавр – Лапласа случајна променљива X има приближно нормалну расподелу са параметрима $\mu = np = 10000\cdot\frac{1}{2} = 5000$ и $\sigma = \sqrt{10000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 50$. Према томе, тражена вероватноћа је једнака:

$$P(4950 \leqslant X \leqslant 5100) = P\left(\frac{4950-5000}{50} < \frac{X-5000}{50} < \frac{5100-5000}{50}\right) \approx$$
$$\approx P(-1 < T < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0,8186.$$

490. За примену теореме Моавр – Лапласа имамо:
а) $t_1 = \frac{75-80}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = -1,25$, $t_2 = \frac{90-80}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = 2,5$,
X је број појављивања A:

$$P(75 < X < 90) = P(t_1 < T < t_2) = P(-1,25 < T < 2,5) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) =$$
$$= 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

б)
$$P(75 < X < 100) = P\left(\frac{75-80}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} < \frac{X-80}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} < \frac{100-80}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) =$$
$$= P(-1,25 < T < 5) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

в) Како је догађај $X \leqslant 74$ супротан догађају $X \geqslant 75$, то им се вероватноће допуњују до 1. Следи, $P(X \leqslant 74) = 1 - 0,8944 = 0,1056$.

491. Случајан избор се изводи помоћу случајних бројева. Њих можемо и сами да формирамо тако што цифре 0, 1, 2,. . . , 9 исписујемо на 10 папирића и обезбеђујемо извлачење папирића из кутије са враћањем (пред свако извлачење све цифре имају једнаку шансу да буду изабране!) Са тако извучених папирића читају се цифре и помоћу њих записују двоцифрени, троцифрени, четвороцифрени или бројеви са више цифара. Нека смо на тај начин добили таблицу случајних четвороцифрених бројева:

4247	2149	0753	0965	0095	1826	6186	5217	1461	2130
2910	1727	8461	4465	7209	6594	0628	0293	2940	6923
4731	2591	7894	3148	7462	4435	8058	3586	4137	8371
6454	5232	0503	7255	4742	5819	1881	9760	9503	0635
5146	3267	9615	9488	6043	7436	8316	5494	3293	1327

Ако, на пример, од 100 ученика једне школе треба изабрати делегацију од 10 ученика на случајан начин, придружимо сваком ученику један број од 0 = 00 до 99. Сада од произвољног места таблице бирамо 10 двоцифрених бројева. Искористимо другу колону. Први четвороцифрени број 2149 даје два двоцифрена броја 21 и 49. У овој колони се двапут појављује број 32, па зато један одбацујемо и из следеће колоне узимамо први двоцифрен број. На тај начин случајно одабрана делегација састављена је од ученика чији су редни бројеви 21, 49, 17, 27, 25, 91, 52, 32, 67, 07 = 7.

492.

Цифре	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Фреквенције										
Укупно	17	22	21	21	26	21	21	17	16	18

Очекиване фреквенције појављивања сваке од цифара (20) не разликују се битно од добијених фреквенција.

Може се, на пример, и овако проверити „случајност“ приложене табеле случајних бројева. Нека се у једном разреду налази 20 девојчица и 60 дечака. Девојчице означимо бројевима 0, 1, 2,. . . , 19 а дечаке са 20, 21,. . . , 79. Помоћу табеле случајних бројева сачинимо узорак од 20 ученика (двоцифрене бројеве веће од 79 одбацујемо). Ако је проценат девојчица у узорку приближно 25%, онда можемо рећи да се помоћу табеле случајних бројева добијају репрезентативни узорци. Користећи последње три колоне табеле случајних бројева добијамо узорак ученика чији су бројеви:

21, 30, 69, 23, 71, $\underline{06 = 6}$, 35, $\underline{13}$, 27, $\underline{14}$, 61,
29, 40, 41, 37, $\underline{03 = 3}$, 32, 52, $\underline{17}$, $\underline{02 = 2}$.

Овај узорак оцењује да у популацији има 30% девојчица. Свакако ће се боља оцена добити помоћу већег узорка. Проверите!

493.

Оцене из математике x_i	Прикупљање података	Фреквенције f_i	Релативне фреквенције $f_{ri} = \frac{f_i}{30}$
$x_1 = 1$	$\vert\vert\vert$	$f_1 = 3$	$f_{r1} = 0,10$
$x_2 = 2$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	$f_2 = 6$	$f_{r2} = 0,20$
$x_3 = 3$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}$	$f_3 = 10$	$f_{r3} = 0,33$
$x_4 = 4$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert$	$f_4 = 7$	$f_{r4} = 0,23$
$x_5 = 5$	$\vert\vert\vert\vert$	$f_5 = 4$	$f_{r5} = 0,13$
Укупно	—	$N = 30$	$\sum_{i=1}^{5} f_{ri} \approx 1$

У првој колони табеле назначене су вредности које обележје X може да узме: $x_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. У другој колони цртицама су формиране фреквенције појављивања вредности x_i. У трећој колони су назначене фреквенције f_i. У четвртој колони су дате релативне фреквенције f_{ri}.

Оцену 3 има највећи број ученика: $f_3 = 10$ (око 33%). Узорачка мода је, значи, једнака $\overline{M}_o = 3$. Она је оцена средње вредности ($\overline{M}_o \approx \mu = M(X)$), али најпре модалне вредности популације: $\overline{M}_o \approx M_o$.

Медијану узорка једноставно добијамо ако све оцене поређамо по величини (111 222222 3333333...) и узмемо аритметичку средину 15-ог и 16-ог члана. Следи, $M_e = 3$.

Аритметичка средина и узорачка дисперзија једнаки су:

$$\overline{X} = \frac{1}{30}(3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5) = \frac{93}{30} = 3,1.$$

$$s^2 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{5} f_i x_i^2 - 3,1^2 = \frac{1}{30}(3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 7 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5^2) - 9,61 =$$
$$= 10,97 \quad \text{и} \quad s = \sqrt{10,97} \approx 3,31.$$

Како су оцене вероватноћа p_4 и p_5 једнаке:

$$p_4 = P(X = 4) \approx f_{r4} = 0,23 \quad \text{и} \quad p_5 = P(X = 5) \approx f_{r5} = 0,13$$

то је $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5) \approx 0,23 + 0,13 = 0,36$.

494. Код мањег броја података уређених по величини медијана је једнака средњем члану ако их је непаран број и аритметичкој средини средњих чланова ако их је паран број. Мода је најфреквентнији члан.
а) $\overline{M}_e = 11$, $\overline{M}_o = 12$, $\overline{X} = 10,33$.
б) $\overline{M}_e = \dfrac{8+10}{2} = 9$, $\overline{M}_o = 7$, $\overline{X} = 9,875$.

495. Ако су, на пример, дати бројеви 2, 3, 7, 8, 10 аритметичка средина $\overline{X}$ је једнака $\overline{X} = \dfrac{2+3+7+8+10}{5} = 6$. Сада је $(2-6)+(3-6)+(7-6)+(8-6)+(10-6)=0$. Покушајте да ову особину докажете уопште за узорак $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

496. Нека се узорак састоји од n вредности: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и нека је x_1 најмања вредност а x_n највећа. Следи

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) > \frac{1}{n}(x_1 + x_1 + \cdots + x_1) = \frac{nx_1}{n} = x_1$$

и

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) < \frac{1}{n}(x_n + x_n + \cdots + x_n) = \frac{nx_n}{n} = x_n.$$

чиме смо доказали да је $x_1 < \overline{X} < x_n$.

497. Варијациони размак $R = x_{\max} - x_{\min}$ је овде једнак $R = 58,6 - 39,5 = 1,91 \approx 20$. Како је број 20 дељив са 5, за број класа и бирамо $k = 5$ (статистичари из искуства препоручују да број класа k буде у границама $5 \leqslant k \leqslant 20$, а често се користи и формула $k = \sqrt{N}$: овде је $k = \sqrt{50} \approx 7$, али први најближи број њему са којим је дељив варијациони размак R је 5). Ако, дакле, изаберемо $k = 5$ класа, онда можемо да сачинимо следећу расподелу фреквенција по класама $[39-43)$, $[43-47), \ldots, [55-59)$ (другој класи припадају ученици чија је тежина већа или једнака 43 кг а мања од 47 кг):

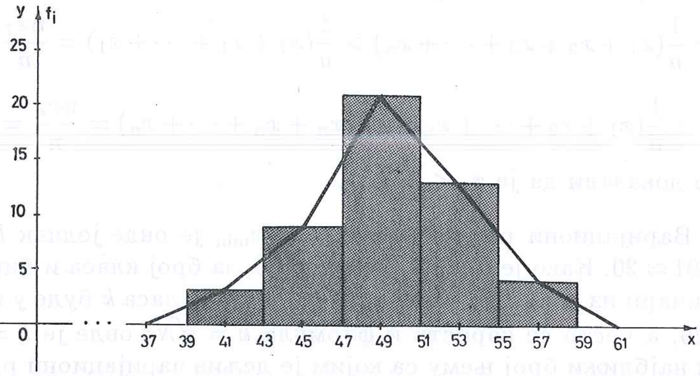
Класе	Средине класа x_i	Прикупљање података по класама	Фреквенције f_i	Релативне фреквенције f_{ri}	$t_i=\dfrac{x_i-x_0}{d}$, $d=4$, $x_0=49$	f_it_i	$f_it_i^2$
39–43	$x_1=41$	$\vert\vert\vert$	$f_1=3$	$f_{r1}=0,06$	$t_1=-2$	-6	12
43–47	$x_2=45$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert\vert$	$f_2=9$	$f_{r2}=0,18$	$t_2=-1$	-9	9
47–51	$x_3=49$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	$f_3=21$	$f_{r3}=0,42$	$t_3=0$	0	0
51–55	$x_4=53$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	$f_4=13$	$f_{r4}=0,26$	$t_4=1$	13	13
55–59	$x_5=57$	$\vert\vert\vert\vert$	$f_5=4$	$f_{r5}=0,08$	$t_5=2$	8	16
Укупно	—	—	$N=50$	$\sum\limits_{i=1}^{5} f_{ri} \approx 1$	—	$\sum\limits_{i=1}^{5} f_it_i=6$	$\sum\limits_{i=1}^{5} f_it_i^2=50$

Према обрасцима (7), (8), (9) и (10) добијамо узорачке параметре:

$$\overline{X} = \frac{4}{40}\cdot 6 + 49 = 49,48, \quad \overline{M}_e = 47 + 4\cdot\frac{25-(3+9)}{21} = 49,476$$

$$\overline{M}_o = 47 + 4\cdot\frac{21-9}{(21-9)+(21-13)} = 49,4.$$

$$s^2 = \frac{16}{50}\left(50 - \frac{1}{50}\cdot 36\right) = 15,75 \quad \text{и} \quad s = \sqrt{15,75} = 3,95.$$



Сл. 112

Ако сада уочимо интервал $(\overline{X}-s,\ \overline{X}+s) = (45,53,\ 53,43)$ онда можемо избројати да од 50 датих података њих 34 се налазе унутар овог интервала што чини 68% свих података. Како смо код нормалне расподеле (задатак 483) показали да је вероватноћа $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0,6826$ (68,26%), можемо закључити да узорак од уочених 50 ученика посматраних у погледу тежине (X) потиче из нормалне популације, то јест из популације у којој обележје X има нормалну расподелу $X \sim N(49,48,\ 3,95)$. И проценат података који се налази у интервалу $(\overline{X}-2s,\ \overline{X}+2s) = (41,58;\ 57,48)$ (има их 48 што износи 96%) изузетно добро се поклапа са вероватноћом код нормалне расподеле $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0,9546$, то јест са процентом података који се у интервалу од 4 стандардна одступања налазе симетрично лево и десно око центра растурања (95,46%).

На слици 112 дати су хистограм и полигон расподеле фреквенција, који својим обликом такође подсећају на нормалну расподелу.

498. $\overline{X} = 0,087$, $\overline{M}_e = 0,088$, $\overline{M}_o = 0,089$.

499. У датој расподели фреквенција недостају фреквенције у трећој и петој класи: f_3 и f_5

Како је збир датих фреквенција $12+30+65+25+18=150$, а укупан збир фреквенција 230, то је $f_3+f_5=230-150=80$. Према вредности медијане видимо да она припада класи $40-50$, па је $L=40$ и $d=10$. Следи

$$46=40+10\cdot\frac{115-(12+30+f_3)}{65}$$

одакле се добија $f_3=34$, па је $f_5=80-34=46$. Аритметичка средина је једнака $\overline{X}=45,87$.

500. Ако са x, y и $230-30-x-y$ означимо непознате фреквенције, онда можемо поставити следеће једначине:

$$33,5=30+10\cdot\frac{115-(20+x)}{y},\qquad 34=30+10\cdot\frac{y-x}{(y-x)+(x-200+2y)}$$

одакле се добија $x=60$ и $y=100$. Аритметичка средина је једнака $\overline{X}=33$.

501. Како је $\overline{X}=7$ и $n=18$, то је $\frac{1}{18}\sum x_i=7$ или $\sum x_i=7\cdot 18=126$. Међутим, овај збир је некоректан. Његова коректна вредност је $\sum x_i=126-21+12=117$, па је коректна вредност $\overline{X}$ једнака $\overline{X}_k=\frac{117}{18}=6,5$. Из формуле за стандардно одступање

$$s=\sqrt{\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}x_i^2-\overline{X}^2}\quad\text{добијамо}\quad 4=\sqrt{\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}x_i^2-49}$$

или, после квадрирања, $16=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}x_i^2-49$ имамо

$$\sum_{i=1}^{18}x_i^2=65\cdot 18=1170.$$

Ово је некоректна вредност збира квадрата података, а коректна вредност је једнака:

$$\sum_{i=1}^{18}x_i^2=1170-21^2+12^2=1170-441+144=873.$$

Коректна вредност стандардног одступања је једнака:

$$s_k=\sqrt{\frac{873}{18}-6,5^2}=\sqrt{6,25}=2,5.$$

502. Из услова $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 4,4$ и $8,4 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - (4,4)^2$ добија се $x_4 = 9$ и $x_5 = 4$.

503. *а)* $\overline{X} = \dfrac{n+1}{2}$.

504.
$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - x_0 + x_0 - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - x_0)^2 - (x_0 - \overline{X})^2 =$$
$$= \frac{d^2}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^2 - \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - x_0)\right]^2 = \frac{d^2}{N}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i t_i\right)^2\right].$$

505. Применити формулу (10), $x_0 = 105$, $\sum f_i t_i = 137$, $\sum f_i t_i^2 = 665$, $s = 42,51$.

506. *а)* $\overline{X} = 95,97$, $s = 10,47$;
б) Интервал $(\overline{X} - s,\ \overline{X} + s) = (85,5;\ 106,4)$ обухвата $\dfrac{88 - 85,5}{4}\cdot 45 + 66 + 85 + 72 + 54 + \dfrac{106,4 - 104}{4}\cdot 38 = 339$ или 70,6%.

Интервал $(\overline{X} - 2s,\ \overline{X} + 2s) = (75,0;\ 116,9)$ обухвата $\dfrac{76 - 75}{4}\cdot 9 + 16 + 28 + 45 + 66 + 85 + 72 + 54 + 38 + 27 + 18 + \dfrac{116,9 - 116}{4}\cdot 11 = 451$ или 94,0%.

Интервал $(\overline{X} - 3s,\ \overline{X} + 3s) = (64,6;\ 127,4)$ обухвата $480 - \dfrac{128 - 127,4}{4}\cdot 2 = 479,7$ што у процентима износи $\dfrac{479,7}{480}\cdot 100 = 99,5\%$ или скоро све ученике.

Упоредивши проценте 70,6%, 94% и 99,5% са процентима које смо добили у задатку 483 за нормалну расподелу, можемо закључити да обележје X, које означава количник интелигенције ученика посматране школе, има расподелу фреквенција која се по растурању података битно не разликује од нормалне расподеле вероватноћа.

507. *а)* $\mu = \dfrac{2 + 3 + 6 + 8 + 11}{5} = 6$,
$\sigma^2 = \dfrac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{5} = 10,8$, $\sigma = \sqrt{10,8} = 3,29$;
б) За сваки од $5^2 = 25$ узорака израчунајмо аритметичку средину:

Популација узорака					Популација аритметичких средина				
(2,2),	(2,3),	(2,6),	(2,8),	(2,11)	2;	2,5;	4;	5;	6,5
(3,2),	(3,3),	(3,6),	(3,8),	(3,11)	2,5;	3;	4,5;	5,5;	7
(6,2),	(6,3),	(6,6),	(6,8),	(6,11)	4;	4,5;	6;	7;	8,5
(8,2),	(8,3),	(8,6),	(8,8),	(8,11)	5;	5,5;	7;	8;	9,5
(11,2),	(11,3),	(11,6),	(11,8),	(11,11)	6,5;	7;	8,5;	9,5;	11

Средња вредност популације аритметичких средина $\mu_{\overline{X}}$ (аритметичка средина аритметичких средина) једнака је средњој вредности популације μ_X:

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{2+2,5+4+\cdots+9,5+11}{25} = \frac{150}{25} = 6 = \mu_X.$$

Стандардно одступање популације аритметичких средина $\sigma_{\overline{X}}$ једнако је $\dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$:

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{25}\left[(2-6)^2+(2,5-6)^2+(4-6)^2+\cdots+(9,5-6)^2+(11-6)^2\right] = \frac{135}{25} = 5,4$$

и

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{5,4} = \sqrt{\frac{10,8}{2}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} = \frac{3,29}{\sqrt{2}} = 2,32.$$

Правило „три сигме" (видети задатке 483 и 506) остаје у важности и у популацији аритметичких средина, то јест, аритметичке средине израчунате из узорака обима n налазе се скоро све, или тачније 99,73% у интервалу

$$(\mu - 3\sigma_{\overline{X}},\, \mu + 3\sigma_{\overline{X}}) = \left(\mu - 3\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}},\, \mu + 3\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right).$$

508. *а)* Можемо рећи да ће се у 99,73% случајева аритметичке средине $\overline{X}$ налазити у интервалу:

$$(\mu - 3\sigma_{\overline{X}},\, \mu + 3\sigma_{\overline{X}}) = \left(\mu - 3\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}},\, \mu + 3\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \left(5,74 - 3\cdot\frac{0,08}{\sqrt{6}};\; 5,74 + 3\cdot\frac{0,08}{\sqrt{6}}\right) = (5,64\,\text{мм};\; 5,84\,\text{мм}).$$

Одавде следи правило:

1. Ако се аритметичка средина пречника куглица из узорка обима 6 нађе у границама од 5,64 мм до 5,84 мм, сматрамо да је машина исправна.
2. Ако се аритметичка средина пречника куглица из узорка обима 6 нађе ван ових граница, онда закључујемо да машина не ради исправно, те је потребно наћи узроке одступања који нису више случајног карактера.

б) Ово правило може да се илуструје на тзв. *контролној карти.* Сваки пут када из узорка израчунамо аритметичку средину, представимо је тачком на контролној карти, како је то показано на слици 113.

Сл. 113

И дотле, док се тачке (аритметичке средине пречника куглица из узорака) налазе између *доње границе* 5,64 мм и *горње границе* 5,84 мм, процес производње је исправан. Када се оваква тачка нађе ван поменутих граница (као што је аритметичка средина трећег узорка узетог у четвртак), онда је реално претпоставити да су настали поремећаји у раду машине.

509. $\overline{X}_1 = 8,\ \overline{X}_2 = 8,\ s_1^2 = 18,\ s_2^2 = 24,\ \overline{X} = 8,\ s^2 = 20,25.$

510. $\dfrac{d_1+d_2+d_3}{V} = \dfrac{d_1}{V_1} + \dfrac{d_2}{V_2} + \dfrac{d_3}{V_3} \Rightarrow V = \dfrac{d_1+d_2+d_3}{\dfrac{d_1}{V_1}+\dfrac{d_2}{V_2}+\dfrac{d_3}{V_3}} \approx 1075\, km/h.$

511. Како је узорак велики то се може искористити интервал поверења (1). Потребна израчунавања дата су у табели:

Месечна потрошња зејтина	Средине класа x_i	Фреквенције f_i	$x_i f_i$	$f_i(x_i-\overline{X})^2$
0 – 2	1	4	4	77,44
2 – 4	3	10	30	57,60
4 – 6	5	55	275	8,80
6 – 8	7	25	175	64,0
8 – 10	9	6	54	77,76
Укупно	—	$N = 100$	538	285,60

$$\overline{X} = \frac{538}{100} = 5,38 \approx 5,4, \quad s^2 = \frac{285,60}{100} = 2,856, \quad s \approx 1,69$$

$$\mu \in conf_{0,95}\left(\overline{X} - 1,96\frac{s}{\sqrt{N}};\ \overline{X} + 1,96\frac{s}{\sqrt{N}}\right) = conf_{0,95}(5,05;\ 5,71).$$

512. Границе 95% интервала поверења су $\overline{X} \pm \dfrac{1,96\sigma}{\sqrt{n}}$, па је грешка оцене средње вредности једнака $\dfrac{1,96\sigma}{\sqrt{n}}$. Узимајући $\sigma \approx s = 0,05$ секунди одређујемо n из неједнакости $\dfrac{1,96 \cdot 0,05}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01$, одакле се добија $n \geqslant 96,04$ или $n \geqslant 97$.

За ниво поверења од 0,99 границе интервала поверења су $\overline{X} \pm 2,58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, па се из услова $\dfrac{2,58 \cdot 0,05}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01$ добија $n \geqslant 166,4$ или $n \geqslant 167$.

513. Како је дужина интервала поверења једнака $L = 2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, добијамо

$$n = \frac{4k_\alpha^2\sigma^2}{L^2}.$$

За ниво поверења $1 - \alpha = 0,95$, $k_\alpha = 1,96$ и

$$n = \frac{15,36 \cdot (0,8)^2}{(0,4)^2} = 61,44 \approx 61.$$

За ниво поверења $1 - \alpha = 0,99$, $k_\alpha = 2,58$ и

$$n = \frac{26,63 \cdot (0,8)^2}{(0,4)^2} = 106,52 \approx 107.$$

514. *а)* Нека је n тражени број аутомобила чије брзине треба мерити. За ниво поверења од 0,99 интервал поверења је између граница $\overline{X} \pm 2,58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{X} \pm 2,58\dfrac{3,58}{\sqrt{n}}$. Стављајући, према услову задатка, да је $2,58\dfrac{3,58}{\sqrt{n}} = 1$, добијамо $n = (2,58 \cdot 3,58)^2 = 85$.

б) Ако су измерене брзине кретања 150 аутомобила (случајно изабраних) и ако се жели интервал поверења исте дужине ($\pm 1\ km/h$ око аритметичке средине) очекујемо да се повећа ниво поверења. Другим речима, вредност α (ниво ризика) ће опасти. Ставимо, дакле:

$$k_\alpha \frac{3,58}{\sqrt{150}} = 1 \Rightarrow k_\alpha = \frac{\sqrt{150}}{3,58} = 3,43.$$

Како је $\Phi(3,43) = 0,49969$ и $1-\alpha = 2\Phi(3,43) = 0,99938$, то је $\alpha = 0,00062$.

515.

Тежине ученика x_i	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$
20,4	−0,4	0,16
19,6	−1,2	1,44
22,1	1,3	1,69
20,8	0,0	0,0
21,1	0,3	0,09
104,0	—	3,38

$$\overline{X} = \frac{104,0}{5} = 20,80, \quad s = \sqrt{\frac{3,38}{5}} = \sqrt{0,67} = 0,82.$$

Како је узорак мали и дисперзија популације непозната (када је позната може се користити интервал поверења (1)), онда се користи интервал поверења (3). Из табеле Студентове расподеле читамо $t_{0,05}^{(4)} = 2,776$ јер је $k = 5-1 = 4$ (број степени слободе), па је

$$\mu \in conf_{0,95}\left(20,8 - 2,776\frac{0,82}{\sqrt{4}};\ 20,8 + 2,776\frac{0,82}{\sqrt{4}}\right)$$

и

$$\mu \in conf_{0,95}(19,66;\ 21,94).$$

516.

Класе	Средине класа x_i	Фреквенције f_i	$t_i = \dfrac{x_i - 0,7}{0,2}$	$f_i t_i$	$f_i t_i^2$
0,2−0,4	0,3	2	−2	−4	8
0,4−0,6	0,5	10	−1	−10	10
0,6−0,8	0,7	6	0	0	0
0,8−1,0	0,9	2	1	2	2
1,0−1,2	1,1	1	2	2	4
1,2−1,4	1,3	1	3	3	9
Укупно	—	22	—	−7	33

Како је $\overline{X} = 0,63$, $s^2 = 0,0586$ и $s = 0,24$, $k = n-1 = 21$, $\alpha = 0,05$, $t_{0,05}^{(21)} = 2,08$, то је

$$t_{0,05}^{(21)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} = 2,08 \cdot \frac{0,24}{\sqrt{21}} = 0,11$$

па је

$$\mu \in conf_{0,95}(0,63 - 0,11;\ 0,63 + 0,11)$$

и

$$\mu \in conf_{0,95}(0,52;\ 0,74).$$

517. Узорак је велики, па интервал поверења одређујемо према формули (4). Како је $\overline{p} = \dfrac{k}{n} = \dfrac{300}{900} = \dfrac{1}{3}$, $\sqrt{\dfrac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{900}} = \dfrac{\sqrt{2}}{90} \approx 0,016$, добијамо

$$p \in conf_{0,95}(0,333 - 1,96\cdot 0,016;\ 0,333 + 1,96\cdot 0,016)$$

и

$$p \in conf_{0,95}(0,302;\ 0,364).$$

Значи, интервал чије су границе 30,2% и 36,4% са вероватноћом 0,95 обухвата непознати проценат становништва посматраног града који су задовољни услугом у продавницама назначеног трговинског предузећа.

518. $p \in conf_{0,99}\left(0,525 - 2,58\sqrt{\dfrac{0,525\cdot 0,475}{1000}};\ 0,525 + 2,58\sqrt{\dfrac{0,525\cdot 0,475}{1000}}\right)$ и $p \in conf_{0,99}(0,484;\ 0,566)$.

519. Из формуле (4) имамо

$$0,04 = 2\cdot 1,96\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}$$

или

$$\frac{0,02}{1,96} = \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^3}}$$

и

$$\left(\frac{0,02}{1,96}\right)^2 \cdot n^3 = k(n-k).$$

Број k лица која ће гласати за уоченог кандидата је непознат као и n, али видимо да је десна страна последње једнакости максимална за $k = \dfrac{n}{2}$. Следи

$$\left(\frac{0,02}{1,96}\right)^2 \cdot n = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad n = 2400.$$

Ради економичности k се може оценити помоћу малог узорка, па ће онда и n бити мање ако се k знатно разликује од $\dfrac{n}{2}$.

520. Како је закон Поасонове расподеле $P_{\lambda,x}$ одређен једним параметром λ, који је непознат, то ћемо га оценити помоћу добијеног узорка. Знајући да је $M(X) = \lambda$ и $M(X) \approx \overline{X}$, добијамо

$$\lambda \approx \overline{X} = \frac{1}{100}(0\cdot 6 + 1\cdot 12 + 2\cdot 20 + 3\cdot 25 + 4\cdot 18 + 5\cdot 10 + 6\cdot 6 + 7\cdot 3) \approx 3.$$

Теоријске фреквенције $f_{ti} = NP_{\lambda,x_i} = 100\cdot P_{3,x_i}$, $x_i = 0,1,2,\ldots,7$, где је $P_{3,x_i} = \dfrac{3^{x_i}e^{-3}}{x_i!}$, добијамо слично као у задацима 467 и 468 корушћењем вредности $e^{-3} = 0,0498$. У следећој табели приказане су емпиријске фреквенције (f_i) и теоријске фреквенције (f_{ti}) као и потребни прорачуни за израчунавање величине χ^2:

x_i	f_i	$f_{ti} = 100\cdot P_{3,x_i}$	$\dfrac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
0	6	$100\cdot 0,0498 = 4,98$	0,21
1	12	$3\cdot 4,98 = 14,94$	0,56
2	20	$\frac{9}{2}\cdot 4,98 = 22,41$	0,25
3	25	$\frac{9}{2}\cdot 4,98 = 22,41$	0,30
4	18	$\frac{27}{8}\cdot 4,98 = 17,03$	0,08
5	10	$\frac{81}{40}\cdot 4,98 = 10,06$	0,001
6 7	$\left.\begin{matrix}6\\3\end{matrix}\right\}9$	$\left.\begin{matrix}5,04\\2,16\end{matrix}\right\}7,20$	0,45
Укупно	$N = 100$		$\chi^2 = 1,85$

После сабирања последњих двеју фреквенција (јер је теоријска фреквенција последње вредности обележја X мања од 5) добијамо $r = 4$ сабирака за хи - квадрат. Како је за Поасонову расподелу оцењен само један параметар ($l = 1$), то је број степени слободе једнак $k = r - l - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$. Из приложене табеле критичних вредности хи - квадрата (тачка 10.3) читамо $\chi^{2(5)}_{0,05} = 11,07$. Како је израчунато $\chi^2 = 1,851$ мање од критичне вредности хи - квадрата за $k = 5$ степени слободе и са прагом значајности $\alpha = 0,05$, то јест $\chi^2 = 1,851 < \chi^{2(5)}_{0,05} = 11,07$, то прихватамо хипотезу да је број саобраћајних незгода по данима у посматраном граду случајна промењлива која има Поасонову расподелу са параметром $\lambda \approx 3$.

Могли смо да применимо и тест Романовског. Како је $\dfrac{|\chi^2 - k|}{\sqrt{2k}} =$

$\dfrac{|1,85-5|}{\sqrt{2\cdot 5}}=\dfrac{3,15}{3,16}=0,99<3$, то и према овом тесту прихватамо хипотезу да узорак потиче из популације у којој случајна променљива X (број саобраћајних незгода дневно) има Поасонову расподелу са параметром $\lambda\approx 3$.

521.

Број купаца у 10-тосекундним интервалима x_i	Фреквенције f_i 10-тосекундних интервала са x_i купаца	$f_{ti}=360P_{1,x_i}$	$\dfrac{f_i^2}{f_{ti}}$
0	139	129,6	149,1
1	128	132,4	123,7
2	55	67,7	44,7
3	25	23,1	27,1
4 5 6	$\left.\begin{matrix}10\\3\\0\end{matrix}\right\}13$	$\left.\begin{matrix}5,9\\1,2\\0,1\end{matrix}\right\}7,2$	23,5
Укупно	$N=360$	$\sum f_{ti}=360$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\frac{f_i^2}{f_{ti}}=368,1$

Како је

$$\lambda\approx\overline{X}=\frac{1}{360}(0\cdot 139+1\cdot 128+\cdots+5\cdot 3)=\frac{368}{360}=1,022\approx 1,$$

$$k=5-1-1=3 \text{ и } \chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{f_i^2}{f_{ti}}-N=368,1-360=8,1>\chi_{0,05}^{2(3)}=7,81,$$

то се са прагом значајности $\alpha=0,05$ не може прихватити хипотеза о сагласности емпиријске расподеле и Поасонове расподеле са параметром $\lambda\approx 1$.

Број купаца у 30-тосекундним интервалима x_i	Фреквенције f_i 30-тосекундних интервала са x_i купаца	$f_{ti}=120P_{3,x_i}$	$\dfrac{f_i^2}{f_{ti}}$
0	9	5,6	14,5
1	16	17,2	14,9
2	30	26,3	34,2
3	22	22,9	18,0

Број купаца у 30-тосекундним интервалима x_i	Фреквенције f_i 30-тосекундних интервала са x_i купаца	$f_{ti} = 120 P_{3,x_i}$	$\dfrac{f_i^2}{f_{ti}}$
4	19	20,6	17,5
5	10	12,6	7,9
6 7 8 9	$\left.\begin{matrix}3\\7\\3\\1\end{matrix}\right\}13$	$\left.\begin{matrix}6,5\\2,8\\1,1\\0,4\end{matrix}\right\}10,8$	18,1
Укупно	$N = 120$	$\sum f_{ti} = 120$	$\sum_{i=1}^{7} \dfrac{f_i^2}{f_{ti}} = 125,1$

Како је $\lambda \approx \overline{X} = \dfrac{360}{120} = 3,067 \approx 3$, $f_{t1} = 120 \cdot P_{3,0} = 5,6, \ldots$ $k = r - l - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$ и $\chi^2 = 125,1 - 120 = 5,1 < \chi_{0,05}^{2(5)} = 11,1$, прихвата се хипотеза о сагласности емпиријске расподеле фреквенција 30-тосекундних интервала са x_i купаца са претпостављеном теоријском расподелом вероватноћа Поасона са параметром $\lambda \approx 3$.

522. $\lambda \approx \overline{X} = \dfrac{1}{120}(0 \cdot 40 + 1 \cdot 53 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0) = 0,9$ позива/5 минута ($\lambda = 0,18$ позива/минут), $k = r - 2 = 5 - 2 = 3$, $\chi^2 = 4,45 > \chi_{0,05}^{2(3)} = 7,815 \Rightarrow$ хипотеза се прихвата.

523. $\chi^2 = \dfrac{(17-25)^2}{25} + \dfrac{(31-25)^2}{25} + \dfrac{(29-25)^2}{25} + \cdots + \dfrac{(36-25)^2}{25} = 23,3$. За $k = r - 1 = 9$ ($l = 0$, јер ниједан параметар очекиване расподеле није оцењен) критична вредност хи - квадрата је једнака $\chi_{0,05}^{2(9)} = 16,92$ и како је $\chi^2 = 23,3 > \chi_{0,05}^{2(9)} = 16,92$, закључујемо да је битна (значајна) разлика између уочене расподеле фреквенција и очекиване (равномерне) расподеле фреквенција цифара у табели случајних бројева. Због тога морамо изразити сумњу у коректност испитиване табеле случајних бројева.

524. Поставимо хипотезу да се у градовима A, B и C број саобраћајних незгода не разликује битно. Ако је ова хипотеза тачна, онда су теоријске фреквенције једнаке: $f_{ti} = 54 : 3 = 18$ ($i = 1, 2, 3$). Следи $\chi^2 = \dfrac{(13-18)^2}{18} + \dfrac{(23-18)^2}{18} + \dfrac{(18-18)^2}{18} = 2,778 < \chi_{0,05}^{2(2)} = 5,991$, па значи да можемо прихватити хипотезу да се бројеви саобраћајних незгода у градовима A, B и C случајно а не битно разликују.

525. Емпиријској расподели свакако одговара биномна расподела код које је $n = 20$ (јер контролор увек узима по 20 производа, тако да се међу њима може наћи $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 20$ неисправних производа). Како је даље $M(X) = np$ и $M(X) \approx \overline{X}$, то се p оцењује из релације $p \approx \dfrac{\overline{X}}{n}$. У овом примеру је $\overline{X} = \dfrac{1}{100}(0\cdot 14 + 1\cdot 25 + 2\cdot 27 + \cdots + 6\cdot 1) = \dfrac{197}{100} = 1,97$, па је $p = \dfrac{1,97}{20} = 0,098 \approx 0,1$, одакле је $q = 1 - p \approx 0,9$. Теоријске вероватноће $P_{20;x_i;0,1}$ за x_i =0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 наводимо у табели:

Табела 1.

$P_{20;0;0,1} = 0,1216$	$P_{20;5;0,1} = 0,0319$
$P_{20;1;0,1} = 0,2701$	$P_{20;6;0,1} = 0,0089$
$P_{20;2;0,1} = 0,2852$	$P_{20;7;0,1} = 0,0020$
$P_{20;3;0,1} = 0,1901$	$P_{20;8;0,1} = 0,0003$
$P_{20;4;0,1} = 0,0898$	$P_{20;9;0,1} = 0,0001$

Теоријске фреквенције f_{ti} добијамо помоћу $f_{ti} = 100\cdot P_{20;x_i;0,1}$. Како смо n одредили расуђивањем, а p оценили помоћу елемената из узорка, то је број степени слободе једнак $k = r - l - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$. У табели 2. дајемо потребне прорачуне за добијање хи - квадрата:

Табела 2.

Број дефектних производа у узорку x_i	Број узорака f_i са x_i дефектних производа	$P_{20;x_i;0,1}$	$f_{ti} = 1000P_{20;x_i;0,1}$	$\dfrac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
0	14	0,1216	12,16	0,27
1	25	0,2701	27,01	0,15
2	27	0,2852	28,52	0,07
3	23	0,1901	19,01	0,84
4 5 6	$\left.\begin{matrix}7\\3\\1\end{matrix}\right\}11$	0,0898 0,0319 0,0089	$\left.\begin{matrix}8,98\\3,19\\0,89\end{matrix}\right\}13,06$	0,32
Укупно	$N = 100$	—	$\sum_{i=1}^{7} f_{ti} = 99,76$	$\chi^2 = 1,65$

Критична вредност хи - квадрата за $k = 3$ је $\chi^{2(3)}_{0,05} = 7,81$ (видети табелу у тачки 10.3), па како је $\chi^2 = 1,65 < \chi^{2(3)}_{0,05} = 7,81$ прихватамо хипотезу да је уочена расподела узорака према броју дефектних производа сагласна биномној расподели са параметрима $n = 20$ и $p = 0,1$.

526. Хипотеза се не може одбацити.

527. Прихватајући да је вероватноћа појаве „грба“ на сваком динару једнака $\frac{1}{2}$, вероватноће $P_{3;0;\frac{1}{2}}$, $P_{3;1;\frac{1}{2}}$, $P_{3;2;\frac{1}{2}}$ и $P_{3;3;\frac{1}{2}}$ множимо са 240 и добијамо теоријске фреквенције $f_{t1} = 30$, $f_{t2} = 90$, $f_{t3} = 90$ и $f_{t4} = 30$. Како је

$$\chi^2 = \frac{(24-30)^2}{30} + \frac{(98-90)^2}{90} + \frac{(95-90)^2}{90} + \frac{(23-30)^2}{30} = \frac{344}{90} = 3,82$$

и $\chi^2 = 3,82 < \chi^{2(3)}_{0,05} = 7,81$, немамо основа да одбацимо хипотезу да су сва три динара исправна.

528. Како је $\chi^2 = 10,32 < \chi^{2(7)}_{0,05} = 14,07$, то се хипотеза прихвата.

529. Хипотеза: теоријска расподела је Поасонова. $\lambda \approx \overline{X} = 2$, $f_{ti} = 60 \cdot P_{2,x_i}$, $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 7$, $k = 3$, $\chi^2 = 0,133 < \chi^{2(3)}_{0,05} = 7,81 \Rightarrow$ хипотезу прихватамо.

530. Аритметичку средону $\overline{X}$ и стандардно одступање s једноставније добијамо помоћу радне нуле ($x_0 = 67$):

x_i	f_i	$t_i = \frac{x_i - 67}{1}$	$f_i t_i$	$f_i t_i^2$
61	2	−6	−12	72
62	10	−5	−50	250
63	11	−4	−44	176
64	38	−3	−114	342
65	57	−2	−114	228
66	93	−1	−93	93
67	106	0	0	0
68	126	1	126	126
69	109	2	218	436
70	87	3	261	783
71	75	4	300	1200
72	23	5	115	575
73	9	6	54	324
74	4	7	28	196
Укупно	$N = 750$	—	$\sum f_i t_i = 675$	$\sum f_i t_i^2 = 4801$

Следи: $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum f_i t_i + x_0 = \frac{675}{750} + 67 = 67,9$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i t_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i t_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{4801}{750} - \left(\frac{675}{750}\right)^2} = \sqrt{6,4 - 0,81} = \sqrt{5,59} = 2,3.$$

а) Број ученика чије су тежине у границама $(\overline{X} - s, \ \overline{X} + s) = (67,9 - 2,3; \ 67,9 + 2,3) = (65,6; \ 70,2)$ је једнак $93 + 106 + 126 + 109 + 87 = 521$, што у процентима износи $100 \cdot \frac{521}{750} = 69\%$. Број ученика чије су тежине у границама $(\overline{X} - 2s,\ \overline{X} + 2s) = (63,3;\ 72,5)$ је једнак $11 + 38 + 57 + 521 + 75 + 23 = 725$, што у процентима износи $100 \cdot \dfrac{725}{750} = 96\%$. Интервал $(\overline{X} - 3s,\ \overline{X} + 3s) = (61;\ 74,8)$ обухвата тежине свих ученика то јест свих 100%. Како су у нормалној расподели ови проценти једнаки: 68,26%, 95,46% и 99,73% (видети правило три сигме у задатку 483), и значи да се добијени проценти незнатно разликују од ових процената код нормалне расподеле, то можемо закључити да се тежине ученика распоређују по нормалној расподели $N(67,9;\ 2,3)$.

б) И помоћу теста хи - квадрат прихвата се хипотеза о нормалној расподели ученика по тежинама са параметрима $\mu \approx \overline{X} = 67,9 \approx 68$ и $\sigma \approx s = 2,3$. $[f_{t1} = 750P(60,5 < X < 61,5) = 750P\left(\dfrac{60,5-68}{2,3} < T < \dfrac{61,5-68}{2,3}\right) = 750P(-3,27 < T < -2,82) = 750[\Phi(3,27) - \Phi(2,82)] = 750 \cdot 0,0025 = 1,88$. Зато што је $f_{t1} < 5$ прва и друга класа формираће једну класу, а исто тако последња и претпоследња класа формираће једну класу, па ће број степени слободе бити $k = 12 - 2 - 1 = 9$ и $\chi^{2(9)}_{0,05} = 16,92, \ldots]$

531. У табели су дати потребни прорачуни за одређивање $\overline{X}$, s и хи - квадрат:

Класе	Средине класа x_i	Фреквенције f_i	$t_i = \dfrac{x_i - 95}{10}$	$f_i t_i$	$f_i t_i^2$	f_{ti}	$\dfrac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
[30−40)	35	6	−6	−36	216	2,589	1,016
40−50	45	9	−5	−45	225	8,982	
50−60	55	25	−4	−100	400	24,255	0,027
60−70	65	46	−3	−138	414	50,677	0,431
70−80	75	78	−2	−156	312	94,423	2,856
80−90	85	108	−1	−108	108	112,210	0,900
90−100	95	141	0	0	0	129,804	0,965
100−110	105	125	1	125	125	114,566	0,950
110−120	115	84	2	168	336	82,482	0,027
120−130	125	48	3	144	432	46,273	0,064
130−140	135	21	4	84	336	22,319	0,080
140−150	145	8	5	40	200	7,619	0,019
Укупно	—	$N = 700$	—	−54	3106	—	$\chi^2 = 7,335$

Аритметичка средина и стандардно одступање су једнаки:

$$\overline{X} = \frac{d}{N}\sum_{i=1}^{12} f_i t_i + x_0 = \frac{10}{700}(-54) + 95 = 94,23$$

$$s^2 = \frac{d^2}{N}\left[\sum_{i=1}^{12} f_i t_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{12} f_i t_i\right)^2\right] = \frac{100}{700}\left[3106 - \frac{(-54)^2}{700}\right] = 443,58$$

и $s = 21,06$.

Хипотеза коју треба верификовати је да брзине кретања возила на уоченој деоници аутопута имају нормалну расподелу са параметрима $\mu \approx 94$ и $\sigma \approx 21$ (два оцењена параметра теоријске расподеле!). Сагласност емпиријске и претпостављене теоријске расподеле оцењујемо помоћу теста хи - квадрат.

Теоријске фреквенције, помоћу којих се израчунава хи - квадрат, добијамо помоћу обрасца $f_{ti} = NP_i = 700P_i$, где је P_i вероватноћа која одговара i-тој класи. Тако је P_1 вероватноћа која одговара првој класи, то јест то је вероватноћа да случајна промењлива X са нормалном расподелом $N(94,\ 21)$ узме вредност на интервалу $(30, 40)$:

$$P_1 = P(30 < X < 40) = P\left(\frac{30-94}{21} < T < \frac{40-94}{21}\right) = P(-3,05 < T < -2,58) =$$

$$= \Phi(-2,58) - \Phi(-3,05) = \Phi(3,05) - \Phi(2,58) = 0,0036995.$$

Следи: $f_{t1} = 700 \cdot 0,0036995 = 2,589$

На исти начин израчунате су и остале теоријске фреквенције (прет последња колона табеле). У последњој колони табеле израчунати су изрази $\dfrac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$ за $i = 1, 2, \ldots, r$ и $r = 11$ (прва и друга класа спојене су у једну класу јер је $f_{t1} = 2,58 < 5$). Како је

$$\chi^2 = 7,335 < \chi^{2(8)}_{0,05} = 15,507$$

немамо основа да одбацимо хипотезу да се брзине возила на посматраној деоници аутопута распоређују по нормалној расподели са средњом брзином $\mu \approx 94$ км/сат и стандардним одступањем $\sigma \approx 21$ км/сат.

Напоменимо да су многа снимања брзине кретања возила на различитим путевима Америке и Европе показала да је брзина кретања возила случајна промењлива са нормалном расподелом.