ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 8 октября 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	**1.** Имеется 5 ненулевых чисел. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что пять сумм положительны и пять сумм отрицательны. Сколько произведений положительны и сколько — отрицательны? *Борис Френкин*
4	**2.** Существуют ли такие 99 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 100, следующее делится на 99, третье делится на 98, ..., последнее делится на 2? *Павел Кожевников*
4	**3.** В ряд лежат 100 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 26 фальшивых, причём они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету? *Рустэм Женодаров*
5	**4.** На одной из клеток поля 8×8 зарыт клад. Вы находитесь с металлоискателем в центре одной из угловых клеток этого поля и передвигаетесь, переходя в центры соседних по стороне клеток. Металлоискатель срабатывает, если вы оказались на той клетке, где зарыт клад, или в одной из соседних с ней по стороне клеток. Можно ли гарантированно указать клетку, где зарыт клад, пройдя расстояние не более 26? *Михаил Евдокимов*
5	**5.** Окружность радиуса 1 нарисована на шахматной доске так, что целиком содержит внутри белую клетку (сторона клетки равна 1). Докажите, что участки этой окружности, проходящие по белым клеткам, составляют суммарно не более $1/3$ от её длины. *Михаил Евдокимов*

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 8 октября 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
4	**1.**	Существуют ли нецелые числа x и y, для которых $\{x\}\cdot\{y\}=\{x+y\}$? (Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x.) *Михаил Евдокимов*
4	**2.**	В треугольнике ABC провели биссектрису CL. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает отрезок CL в точке K. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и AKL касаются. *Михаил Панов*
4	**3.**	Имеется 21 ненулевое число. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что половина всех сумм положительна и половина — отрицательна. Каково наибольшее возможное количество положительных произведений? *Борис Френкин, Сергей Кудря*
	4.	
2	а)	Может ли некоторый шар высекать на гранях какого-нибудь правильного тетраэдра круги радиусов 1, 2, 3 и 4?
3	б)	Тот же вопрос, если радиус шара должен быть равен 5. *Михаил Евдокимов*
5	**5.**	В левой нижней клетке доски 100×100 стоит фишка. Чередуя горизонтальные и вертикальные ходы в соседнюю по стороне клетку (первый ход — горизонтальный), она дошла сначала до левой верхней клетки, а потом до правой верхней. Докажите, что найдутся две такие клетки A и B, что фишка не менее двух раз делала ход из A в B. *Александр Грибалко*

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 22 октября 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	**1.** Имеется железная гиря в 6 кг, сахар и невесомые пакеты в неограниченном количестве, а также нестандартные весы с двумя чашами: весы находятся в равновесии, если грузы на левой и правой чашах относятся как 3:4. За одно взвешивание можно положить на весы любые уже имеющиеся грузы и добавить на одну из чаш пакет с таким количеством сахара, чтобы чаши уравновесились (такие пакеты с сахаром можно использовать при дальнейших взвешиваниях). Удастся ли отмерить 1 кг сахара? *Григорий Гальперин*
4	**2.** Даны две монеты радиуса 1 см, две монеты радиуса 2 см и две монеты радиуса 3 см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой? *Егор Бакаев*
6	**3.** Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из трёх ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за июль, на сколько — за август, и на сколько — за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на x%, то курс падал на x%, и наоборот). При этом через три месяца курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс? *Алексей Заславский*
	4. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более
1	а) 99 попыток;
3	б) 75 попыток;
4	в) 74 попыток. *Алексей Лебедев, Александр Шаповалов*
9	**5.** Цифры натурального числа $n > 1$ записали в обратном порядке и результат умножили на n. Могло ли получиться число, записываемое только единицами? *Фёдор Петров*
9	**6.** Вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC в точках N, K и M соответственно. Прямые MN и MK пересекают биссектрису внешнего угла B в точках R и S соответственно. Докажите, что прямые RK и SN пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC. *Михаил Евдокимов*
	7. Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседних по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесенном доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры
5	а) 20×20 клеток;
5	б) 50×90 клеток? *Михаил Мурашкин*

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,
10 – 11 классы, сложный вариант, 22 октября 2017 г.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более

1 а) 99 попыток;
2 б) 75 попыток;
3 в) 74 попыток.

Алексей Лебедев, Александр Шаповалов

2. Дан правильный шестиугольник с центром O. Провели шесть равных окружностей с цен-
5 трами в вершинах шестиугольника такие, что точка O находится внутри окружностей. Угол
величины α с вершиной O высекает на этих окружностях шесть дуг. Докажите, что суммарная величина этих дуг равна 6α.

Егор Бакаев

3. Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из 12 ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за октябрь, на сколько — за ноябрь, ..., на сколько — за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он
6 верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изме-
нения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на x%, то курс падал на x%, и наоборот). При этом через 12 месяцев курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?

Алексей Заславский

4. Покажите, что для любой последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, состоящей из единиц и ми-
8 нус единиц, найдутся такие n и k, что

$$|a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} + \ldots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}| = 2017.$$

Иван Митрофанов

5. Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил: 1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем на 2 куска, затем один из трёх кусков опять режем на 2 куска, и т.д.; 2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа R.

3 а) Докажите, что при $R = 0,5$ можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезаний можно будет отрезать ещё один кусок).
4 б) Докажите, что если $R > 0,5$, то процесс резки когда-нибудь остановится.
4 в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если $R = 0,6$?

Алексей Толпыго

6. Дан треугольник ABC. Пусть I — центр вневписанной окружности, касающейся стороны
10 AB, а A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC
и AC соответственно. Пусть M — середина отрезка IC, а отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки N, B_1, A и M лежат на одной окружности.

Фёдор Ивлев

7. Город имеет вид квадрата $n \times n$, разбитого на кварталы 1×1. Улицы идут с севера на юг и с запада на восток. Человек каждый день утром идёт из юго-западного угла в северо-
10 восточный, двигаясь только на север или восток, а вечером возвращается обратно, двигаясь
только на юг или запад. Каждое утро он выбирает свой путь так, чтобы суммарная длина знакомых участков пути (тех, которые он уже проходил в том или ином направлении) была минимальна, и каждый вечер тоже. Докажите, что за n дней он пройдёт все улицы целиком.

Максим Дидин

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 25 февраля 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. На доске 6×6 расставили 6 не угрожающих друг другу ладей. Затем каждое не занятое ладьей поле покрасили по такому правилу: если ладьи, угрожающие этому полю, находятся от него на одинаковом расстоянии, то это поле закрашивают в красный цвет, а если на разном — то в синий цвет. Могли ли все не занятые поля оказаться

1 а) красными;

2 б) синими?

Игорь Акулич

4 2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку K, а на катете AC — точку L так, что $AK = AC$, $BK = LC$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник CLM равнобедренный.

Егор Бакаев

3. В квадрате 4×4 расставили целые числа так, что в каждом из восьми рядов (строках и столбцах) сумма чисел одна и та же. Семь чисел известны, а остальные скрыты (см. рисунок). Можно ли по имеющимся данным восстановить

1	?	?	2
?	4	5	?
?	6	7	?
3	?	?	?

2 а) хотя бы одно скрытое число;

2 б) хотя бы два скрытых числа?

Егор Бакаев

4 4. Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

Борис Френкин

5 5. На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и провели 7 красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой?

Павел Кожевников

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 25 февраля 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Биссектриса и высота, проведённые из одной вершины некоторого треугольника, делят его противоположную сторону на три отрезка. Может ли оказаться, что из этих отрезков можно сложить треугольник? *Михаил Евдокимов*
4	2. Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трёх. Наименьшее общее кратное каждых трёх из данных чисел делится на оставшееся четвёртое. Докажите, что произведение данных чисел — точный квадрат. *Борис Френкин*
4	3. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке T. К ним проведена общая внешняя касательная, касающаяся первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Общая касательная к окружностям, проведенная в точке T, пересекает прямую AB в точке M. Пусть AC — диаметр первой окружности. Докажите, что отрезки CM и AO_2 перпендикулярны. *Павел Кожевников*
5	4. В углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. Петя и Вася двигают фишку по очереди, начинает Петя. Он делает фишкой один ход как ферзём (пройденной считается только клетка, куда в итоге переместилась фишка), а Вася — два хода как королем (обе клетки считаются пройденными). Нельзя ставить фишку на клетку, где она уже бывала (включая исходную клетку). Кто не сможет сделать ход — проигрывает. Кто из ребят может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? *Александр Шаповалов*
5	5. В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три грани. Каждая грань покрашена в красный, жёлтый или синий цвет. Докажите, что число вершин, в которых сходятся грани трёх разных цветов, чётно. *Егор Бакаев, Александр Грибалко, Инесса Раскина*

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 11 марта 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. В строку выписаны 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каков знак произведения всех чисел? *Борис Френкин*
5	2. У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать? *Александр Перепечко*
6	3. Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей? *Максим Дидин*
6	4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину стороны AB. *Егор Бакаев*
8	5. На улице дома стоят друг напротив друга, всего 50 пар. На правой стороне улицы расположены дома с чётными натуральными номерами, на левой — с нечётными натуральными номерами, номера возрастают от начала улицы к концу на каждой стороне, но идут не обязательно подряд (возможны пропуски). Для каждого дома на правой стороне улицы нашли разность между его номером и номером дома напротив, и оказалось, что все найденные числа различны. Наибольший номер дома на улице равен n. Найдите наименьшее возможное значение n. *Максим Дидин*
10	6. В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать куда-то и спросить сидящих: «Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца из вас?» После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник так, чтобы гарантированно узнать, кто за столом лжецы? (Посторонних рядом нет, на стол вставать нельзя. Людей считайте точками. Все, включая путешественника, могут точно измерить любое расстояние.) *Максим Дидин*
12	7. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a-18b$. *Николай Белухов*

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 11 марта 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать?

Александр Перепечко

5 2. Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей?

Максим Дидин

6 3. В таблице 10×10 записано 100 различных чисел. За ход можно выбрать любой составленный из клеток прямоугольник и переставить все числа в нем симметрично относительно его центра («повернуть прямоугольник на 180°»). Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа возрастали в каждой строке слева направо и в каждом столбце — снизу вверх?

Александр Шаповалов

4. Правильный треугольник, лежащий в плоскости α, ортогонально спроектировали на непараллельную ей плоскость β, полученный треугольник ортогонально спроектировали на плоскость γ и получили снова правильный треугольник. Докажите, что

4 а) угол между плоскостями α и β равен углу между плоскостями β и γ;

4 б) плоскость β пересекает плоскости α и γ по перпендикулярным друг другу прямым.

Лев Емельянов

10 5. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$.

Николай Белухов

10 6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA и CD пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P и параллельная касательной к окружности в точке D, пересекает в точках U и V касательные, проведённые к окружности в точках A и B. Докажите, что окружности, описанные около треугольника CUV и четырёхугольника $ABCD$, касаются.

Алексей Заславский

12 7. Король решил поощрить группу из n мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (чтобы все смотрели в одном направлении), на каждого наденут черную или белую шляпу. Каждый будет видеть шляпы всех впереди стоящих. Мудрецы по очереди (от последнего к первому) назовут цвет (белый или черный) и натуральное число по своему выбору. В конце подсчитывается число мудрецов, которые назвали цвет, совпадающий с цветом своей шляпы: ровно столько дней всей группе будут платить надбавку к жалованью. Мудрецам разрешили договориться заранее, как отвечать. При этом мудрецы знают, что ровно k из них безумны (кто именно — им неизвестно). Безумный мудрец называет белый или черный цвет и число вне зависимости от договоренностей. Какое максимальное число дней с надбавкой к жалованью могут гарантировать группе мудрецы, независимо от местонахождения безумных в очереди?

Иван Митрофанов

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 25 марта 2018 г.

1. Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков. Первый разрез проведён параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведён в оставшейся части от края до края перпендикулярно предыдущему разрезу, далее аналогично (сколько-то раз). Все отрезанные куски имеют равную площадь. Может ли оставшаяся часть торта быть квадратом?

Б. Френкин

2. Пусть X — некоторая фиксированная точка на стороне AC треугольника ABC (X отлична от A и C). Произвольная окружность, проходящая через X и B, пересекает отрезок AC и описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q, отличных от X и B. Докажите, что все возможные прямые PQ проходят через одну точку.

М. Панов

3. 16 карточек с целыми числами от 1 до 16 разложены лицевой стороной вниз в виде таблицы 4×4 так, что карточки, на которых записаны соседние числа, лежат рядом (соприкасаются по стороне). Какое наименьшее число карточек нужно одновременно перевернуть, чтобы наверняка определить местоположение всех чисел (как бы ни были разложены карточки)?

М. Евдокимов

4. Имеется натуральное 1001-значное число A. 1001-значное число Z — то же число A, записанное от конца к началу (например, для четырёхзначных чисел это могли быть 7432 и 2347). Известно, что $A > Z$. При каком A частное A/Z будет наименьшим (но строго больше 1)?

А. Толпыго

5. Можно ли расположить в пространстве пять сфер так, чтобы для каждой из сфер можно было провести через ее центр касательную плоскость к остальным четырем сферам? Сферы могут пересекаться и не обязаны иметь одинаковый радиус.

М. Мурашкин

6. Дано натуральное число $n > 1$. Что больше: количество способов разрезать клетчатый квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или количество способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на клетчатые прямоугольники 1×2?

В. Брагин

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 25 марта 2018 г.

Предварительная версия решений.

1. *Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков. Первый разрез проведён параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведён в оставшейся части от края до края перпендикулярно предыдущему разрезу, далее аналогично (сколько-то раз). Все отрезанные куски имеют равную площадь. Может ли оставшаяся часть торта быть квадратом?*

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Часть, оставшуюся после очередного разрезания, назовём остатком. Длиной остатка назовём размер той его стороны, по которой он отрезан, а шириной — размер другой стороны. Длиной отрезаемого прямоугольника (куска) также будем считать размер стороны, по которой он отрезан, а шириной — размер другой стороны. Индукцией по номеру разрезания покажем, что ширина остатка всегда меньше его длины (что и решает задачу).

После первого разрезания это очевидно. Пусть после i-го разрезания длина остатка и отрезанного куска равна l_i, ширина остатка и отрезанного куска равна соответственно w_i и z_i; положим также l_0 и w_0 равными стороне исходного квадрата). Пусть при всех $1 \leqslant j \leqslant i$ было $l_j > w_j$. Имеем

$$l_i = w_{i-1} \leqslant l_{i-1} \qquad (*)$$

(равенство выполнено лишь при $i = 1$). Площади i-го и $(i+1)$-го кусков одинаковы по условию, т.е. $l_i z_i = l_{i+1} z_{i+1} = w_i z_{i+1} < l_i z_{i+1}$, откуда

$$z_i < z_{i+1} \qquad (**).$$

С другой стороны, $z_i = l_{i-1} - w_i$, $z_{i+1} = l_i - w_{i+1}$. С учётом (*) и (**) получаем: $w_{i+1} < w_i = l_{i+1}$, ч.т.д.

2. *Пусть X — некоторая фиксированная точка на стороне AC треугольника ABC (X отлична от A и C). Произвольная окружность, проходящая через X и B, пересекает отрезок AC и описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q, отличных от X и B. Докажите, что все возможные прямые PQ проходят через одну точку.*

Решение. Обозначим вторую точку пересечения PQ и окружности (ABC) через S.

Тогда $\angle(BX, XC) = \angle(BX, XP) = \angle(BQ, QP) = \angle(BQ, QS) = \text{const}$ (равенство в ориентированных углах). Получили, что угол (BQ, QS), опирающийся на дугу BS окружности (ABC), постоянный, а значит и длина дуги BS постоянна, и тогда точка S не зависит от выбора окружности.

3. *16 карточек с целыми числами от 1 до 16 разложены лицевой стороной вниз в виде таблицы 4×4 так, что карточки, на которых записаны соседние числа, лежат рядом (соприкасаются по стороне). Какое наименьшее число карточек нужно одновременно перевернуть, чтобы наверняка определить местоположение всех чисел (как бы ни были разложены карточки)?*

Ответ. Восемь карточек

Решение.

Оценка. Занумеруем клетки, как показано на рисунке 1. Заметим, что одна из клеток с номером 1 должна быть открыта, иначе красный и синий способы заполнения таблицы на рисунке 2 были бы неразличимы. Одна из клеток с номером 2 также должна быть открыта, иначе красный и синий способы заполнения таблицы на рисунке 3 были бы неразличимы.

Аналогично, должны быть открыты хотя бы по одной из клеток с номерами 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть должно быть открыто не менее 8 карточек.

1	2	3	4
2	1	4	3
5	6	7	8
6	5	8	7

Рис. 1

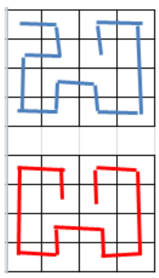


Рис. 2

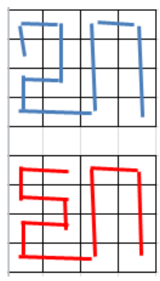


Рис. 3

Пример. Докажем, что увидев числа во втором и третьем столбце, мы сможем восстановить числа в первом и четвёртом столбцах. Заметим, что в чёрных клетках шахматной раскраски все числа одной чётности, в белых — другой. Увидев второй и третий столбцы, мы понимаем, в какой клетке какая чётность.

Из открытых клеток выделим те, для которых у записанного в клетке числа не все соседние числа открыты. Из каждой такой клетки проведём ребро в единственную неперевёрнутую соседнюю клетку и однозначно восстановим в ней число.

Заметим, что если в угол ведёт ребро, то мы восстановим число в нём. Если же в угловую клетку не ведёт ребро, то в ней стоит крайнее число, то есть 1 или 16, а так как мы знаем чётность числа в каждой клетке, то в этом случае мы тоже восстановим число в углу. Итак, числа в углах заведомо восстановлены.

Если среди угловых есть клетки, для которых не все соседние числа открыты, из каждого такого угла проведём ребро в неперевёрнутую соседнюю клетку и однозначно восстановим число в ней.

Остались не восстановленными разве что числа в неугловых клетках первого и четвёртого столбца. Рассмотрим любую из них. В неё не ведёт ребро ни из соседнего столбца, ни из угла, а тогда в этой клетке точно крайнее число (так как у неё осталась максимум одна клетка с соседним числом). По чётности легко узнаём, какое крайнее число там должно стоять.

Таким образом, мы восстановили числа во всех клетках.

4. *Имеется натуральное 1001-значное число A. 1001-значное число Z – то же число A, записанное от конца к началу (например, для четырёхзначных чисел это могли быть 7432 и 2347). Известно, что $A > Z$. При каком A частное A/Z будет наименьшим (но строго больше 1)?*

Ответ. При A, запись которого (слева направо) такая: 501 девятка, восьмёрка, 499 девяток.

Решение 1. Пусть $A = \overline{a_{1000}a_{999}\ldots a_0}$. Поскольку $A > Z$, среди цифр $a_0, a_1, \ldots, a_{499}$ есть хотя бы одна недевятка. Значит, $Z \leqslant Z_0 = \underbrace{99\ldots9}_{499}8\underbrace{99\ldots9}_{501}$.

Покажем, что $A - Z \geqslant 10^{501} - 10^{499}$. Отсюда будет следовать, что
$$\frac{A}{Z} - 1 \geqslant \frac{10^{501} - 10^{499}}{Z_0};$$
эта оценка достигается при $Z = Z_0$, что и даёт ответ.

Имеем
$$\begin{aligned} A - Z &= (a_{1000} - a_0)(10^{1000} - 1) + (a_{999} - a_1)(10^{999} - 10) + \cdots + (a_{501} - a_{499})(10^{501} - 10^{499}) = \\ &= \varphi_{499}\Delta_{499} + \varphi_{498}\Delta_{498} + \cdots + \varphi_0\Delta_0, \end{aligned}$$
где $\varphi_i = a_{501+i} - a_{499-i}$ и $\Delta_i = 10^{501+i} - 10^{499-i}$ при $i = 0, 1, \ldots, 499$. Заметим, что $\Delta_{i+1} > 10\Delta_i$.

Пусть j — наибольший индекс, при котором $\varphi_j \neq 0$. Тогда
$$\begin{aligned} |\varphi_j\Delta_j + \varphi_{j-1}\Delta_{j-1} + \cdots + \varphi_0\Delta_0| &\geqslant |\varphi_j\Delta_j| - |\varphi_{j-1}\Delta_{j-1}| - \cdots - |\varphi_0\Delta_0| \geqslant \\ &\geqslant \Delta_j\left(1 - \frac{9}{10} - \frac{9}{100} - \cdots - \frac{9}{10^j}\right) = \frac{\Delta_j}{10^j} \geqslant \Delta_0, \end{aligned}$$
что и требовалось.

Решение 2. Ясно, что можно минимизировать (положительное) число $\frac{A}{Z} - 1 = \frac{A-Z}{Z}$.

Пронумеруем цифры в A слева направо $a_1, a_2, \ldots, a_{1001}$. Пусть k — наименьший номер, для которого $a_k \neq a_{1002-k}$ (тогда $k \leqslant 500$ и $a_k > a_{1002-k}$, ибо $A > Z$).

Рассмотрим произвольный оптимальный пример. Заменим первые и последние $k-1$ цифр на девятки. $A - Z$ не изменится, Z не уменьшится, то есть наша дробь не увеличится. По этой же причине a_{501} можно заменить на 9.

Заменим a_k на 9, а a_{1002-k} на 8. При этом $A - Z$ не увеличится, а Z не уменьшится.

Заменим все цифры $a_{k+1}, \ldots, a_{500}$ на нули, а $a_{502}, \ldots, a_{1001-k}$ на девятки. Тогда $A - Z$ не увеличится, а Z если и уменьшится, то на меньшую величину (это произойдёт только тогда, когда вторая половина и так была девятками!). Поскольку в оптимальном примере $A - Z < Z$ (в первом просто меньше цифр), то, ясно, $\frac{A-Z}{Z}$ не возрастёт.

Итак, можно считать, что A имеет вид
$$\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{500-k}9\underbrace{99\ldots9}_{500-k}8\underbrace{99\ldots9}_{k-1}.$$
В этом случае
$$A - Z = 10^{501} + 10^{500} - 10^k - 10^{k-1}.$$
Это выражение достигает минимума при $k = 500$, и при этом же k достигается максимум значения рассматриваемых Z. Значит, это и есть ответ.

5. *Можно ли расположить в пространстве пять сфер так, чтобы для каждой из сфер можно было провести через ее центр касательную плоскость к остальным четырем сферам? Сферы могут пересекаться и не обязаны иметь одинаковый радиус.*

Ответ. Да, можно.

Решение 1. Возьмём в горизонтальной плоскости α правильный треугольник с высотой 2. Пусть J — центр одной из его вневписанных окружностей, а A, B, C — середины его сторон.

Выберем такие сферы: три с центрами в A, B, C радиуса 1; две радиуса 2 с центрами в точках J' и J'', получающихся из J поднятием и опусканием относительно α на 1.

Теперь осталось провести требуемые плоскости. Плоскость через J', параллельная α, касается четырёх остальных сфер; для J'' аналогично. Осталось провести плоскость, скажем, через A; она перпендикулярна α и содержит сторону треугольника, на которой лежит A.

Все проверки достаточно просты.

Решение 2. Ответ: да.

Центр сферы S_0 поместим в точке A_0 с координатами $(0, 0, 0)$, радиус r этой сферы выберем позже. Остальные сферы S_i, $i = 1, 2, 3, 4$ возьмем радиуса 1, а центры этих сфер поместим в точки $A_1(a, 0, 1)$, $A_2(-a, 0, 1)$, $A_3(0, a, -1)$, $A_4(0, -a, -1)$ (a выберем позже).

Плоскость Oxy проходит через A_0 и касается сфер S_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Можно подобрать a так, чтобы плоскость $A_2A_3A_4$ находилась на расстоянии $\varrho_1 = 1$ от точки A_1, тогда плоскость σ_1, проходящая через A_1 и параллельная плоскости $A_2A_3A_4$, будет касаться сфер S_i, $i = 2, 3, 4$. Действительно, уравнение плоскости $A_2A_3A_4$: $2x + az + a = 0$. Тогда $\varrho_1 = \dfrac{4a}{\sqrt{4 + a^2}}$ и достаточно положить $a = \sqrt{\dfrac{4}{15}}$.

Положим r равным расстоянию от A_0 до плоскости σ_1, так, чтобы плоскость σ_1 касалась также и сферы S_0.

Конструкция переводится в себя при симметрии относительно плоскостей Oxz, Oyz, а также при композиции поворота на 90° вокруг оси Oz и симметрии относительно плоскости Oxy. Поэтому условие задачи выполняется также для центров сфер S_i, $i = 2, 3, 4$.

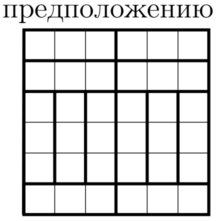
6. *Дано натуральное число $n > 1$. Что больше: количество способов разрезать клетчатый квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или количество способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на клетчатые прямоугольники 1×2?*

Ответ. Больше число разбиений на триминошки.

Решение. Дадим конструкцию отображения, каждому разбиению доски $2n \times 2n$ на доминошки сопоставляющего разбиение доски $3n \times 3n$ на триминошки.

Предположим, что задано некоторое разбиение доски $2n \times 2n$ на доминошки. Пронумеруем все вертикали числами от 1 до $2n$ и все горизонтали числами от 1 до $2n$. Сделает n горизонтальных разрезов через горизонтали с четным номером и n вертикальных разрезов через вертикали с четным номером. Получится доска $3n \times 3n$ (правда, разбитая на неравные клетки, но ничего страшного), далее её будем называть новой доской. Каждая отдельная клетка старой доски стала либо одной, либо двумя, либо четырьмя клетками новой (если соответственно нуль, одна или обе координаты старой клетки были четными числами). Доминошки после этой операции становятся либо триминошками, либо прямоугольниками 2×3. Так вот, разрежем каждый из этих прямоугольников 2×3 на две триминошки. Получим, наконец, некоторое разбиение доски $3n \times 3n$ на триминошки.

Докажем, что при этом из разных разбиений на доминошки получаются разные разбиения на триминошки. Предположим противное: пусть два различных разрезания на доминошки доски $2n \times 2n$ при построенном отображении становятся одним разрезанием на триминошки доски $3n \times 3n$. Поскольку разрезания на доминошки различны, существует клетка A доски $2n \times 2n$, накрытая в этих разрезаниях доминошками по-разному. Но тогда после нашей операции то, во что превратится клетка A, т.е. 1, 2, или 4 клеточки, будет накрыто триминошками по-разному. Значит, и разрезания на триминошки разные, что противоречит предположению.



Тем самым, мы доказали, что разрезаний на триминошки не меньше, чем разрезаний на доминошки. Осталось предъявить хотя бы одно разрезание $3n \times 3n$ на триминошки, которое не получается из разрезания $2n \times 2n$ на доминошки. Проверьте, что подойдет любое разбиение на триминошки, в котором к правому нижнему углу, (т.е. образованному последними строкой и столбцом), примыкает горизонтальная триминошка, а на ней стоят три вертикальные (пример см. на рисунке справа).