НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

ЗАДАЧИ
ПО
ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

– четврто дополнето издание –

„Просветно дело“
Скопје, 1996

Уредник:
Кирил Милчев

Рецензенти
Д-р *Бранко Трпеновски,* редовен професор на Машинскиот факултет – Скопје
Д-р *Александар Самарџиски,* редовен професор на Природно-математичкиот факултет – Скопје

Со одлука на Наставно-научниот совет на Машинскиот факултет во Скопје по бр. 08 – 703/1 од 27.03.1995 година и со решение на Ректорот на Универзитетот „Св. Кирил и Методиј" во Скопје под бр. 11 – 1598 од 22.11.1995 година се одобрува употребата на оваа книга како универзитетски учебник во категоријата учебни помагала.

ПРЕДГОВОР

Првото издание на збирката „Задачи по линеарна алгебра“ излезе од печат во 1972 година за потребите на предметот линеарна алгебра со аналитична геометрија во простор за студентите од Електротехничкиот и Машинскиот факултет во Скопје. За изборот на задачите беа користени соодветни збирки, учебници и списанија; повеќето од нив се наведени на крајот, во списокот на користена литература. Студентот што ќе ја користи збиркава може да ги најде потребните дефиниции и теореми во учебникот „Виша математика“, кн. II–IV, од Б. Трпеновски, Н. Целакоски и Ѓ. Чупона. Сепак, за поудобно користење на збирката, некои од нив се повторуваат во задачите, на соодветно место; заради поголема ефикасност при нивното пронаоѓање, се дава список на дефинираните поими, во делот „Показател на поимите“.

Материјалот е распореден во 16 параграфи (при што последниот е насловен со „Додаток“). Секој параграф се состои од три дела: решени задачи, задачи за вежбање и дополнителни задачи. Во првиот дел се даваат решенија на некои задачи, по правило карактеристични за соодветната материја, т.е. „типски задачи“. Откако ќе ги изработи тие задачи, би требало студентот да може самостојно да ги решава задачите за вежбање, коишто се снабдени со одговори или со кратки упатства. На крајот од секој параграф (освен во последните два) има дополнителни задачи, издвоени од претходните со три ѕвездички. Тие претставуваат, по правило, дополнување или проширување на материјалот, па во таа смисла се потешки од другите. Читателот може нив да ги изостави при првото читање.

Во ова (четврто) издание се направени неколку измени во однос на претходните. Имено, преуреден е делот од решените задачи во §6 (Аналитична геометрија во простор), целосно се преработени и проширени §14 (Сопствени вредности и сопствени вектори) и §16 (Додаток), внесен е како сосем нов §15 (Линеарни, билинеарни и квадратни форми), вметнати се нови задачи во повеќе параграфи и отстранети се воочените грешки. Повикувањата се вообичаени, ознаките се стандардни (тие се наведени во списокот „ознаки").

Како и порано, збиркава им е наменета, пред сé, на студентите од Машинскиот и од Електротехничкиот факултет во Скопје за изучување на соодветните наставни содржини од предметите математика I и математика III, а може да ја користат и студентите од Природно-математичкиот факултет на групите за математика и информатика.

На крајот, ја користам можноста на ова место да им изразам благодарност на рецензентите и на други колеги за корисните сугестии што придонесоа да се подобри ракописот, а и на сите што се заслужни за дефинитивното оформување на книгава и нејзиното излегување: лекторот – за експедитивноста, мајсторот на компјутерската обработка – за несебичното залагање во естетското обликување на текстот, коректорот – за упорноста и педантноста, како и на издавачот – за разбирањето да го прифати ракописот и да го вклучи во издавачкиот план.

Скопје, ноември 1995 — Авторот

СОДРЖИНА

1. МНОЖЕСТВА

Решени задачи

1.1. Да се употребат множествени ознаки за следниве искази:

а) a е елемент од множеството A,
б) x не е елемент од A,
в) A е подмножество од B,
г) A е вистинско подмножество од B,
д) M не е подмножество од B,
ѓ) A е празно множество.

Решение. а) $a \in A$. б) $x \notin A$. в) $A \subseteq B$. г) $A \subset B$. д) $M \nsubseteq B$. ѓ) $A = \emptyset$.

1.2. Ако сите елементи на множеството A се: $a, x, y, \ldots$, тогаш пишуваме $A = \{a, x, y, \ldots\}$ и велиме дека A е напишано во *табеларна форма*.

Да се запише во табеларна форма множеството:

а) негативни цели броеви не помали од -5;
б) природни броеви што се деливи со 3, а се помали од 15;
в) цифри од бројот 204220;
г) парни природни броеви;
д) ненегативни корени на равенката $\sin x = 0$.

Решение. а) $\{-5, -4, -3 \; - 2, -1\}$. б) $\{3, 6, 9, 12\}$. в) $\{0, 2, 4\}$. Да забележиме дека цифрата 0 се јавува двапати, а 2 – трипати во дадениот број, меѓутоа секоја од нив „влегува“ во даденото множество само еднаш. Освен тоа, распоредот на елементите не е битен. Така, множествата $\{2, 0, 4, 2, 2, 0\}$, $\{2, 4, 0\}$ и $\{0, 2, 4\}$ ги сметаме за еднакви. г) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. д) $\{0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\}$.

1.3. Множеството елементи x што имаат дадено својство P го означуваме со:

$$\{x | P(x)\}$$

и велиме дека тоа е запишано со *описна ознака*.

Да се употреби описна ознака за следниве множества:

а) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
б) $B = \{$ а, е, и, о, у$\}$,
в) C е множеството од сите позитивни рационални правилни дропки.

Решение. а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ -2 \leq x \leq 3\}$.
б) $B = \{x \mid x$ е самогласка од кирилицата$\}$.
в) $C = \{\frac{m}{n} \mid m,\ n \in \mathbb{N},\ m < n\}$.

1.4. Да се „прочитаат" следниве изрази:

а) $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A$ или $x \in B)$,
б) $(x \in A \backslash B) \Leftrightarrow (x \in A$ и $x \notin B)$,
в) $[(\forall a \in A) a \in B] \Rightarrow A \subseteq B$,
г) $[(\forall a \in A) a \in C, (\exists c \in C) c \notin A] \Rightarrow A \subset C$.

Решение. а) Елементот x ѝ припаѓа на унијата од множествата A и B ако и само ако x му припаѓа на A или x му припаѓа на B.

б) Елементот x ѝ припаѓа на разликата од множеството A со множеството B, ако и само ако x му припаѓа на A, но не му припаѓа на B.

в) Ако секој елемент a од множеството A му припаѓа и на множеството B, тогаш A е подмножество од B.

г) Ако секој елемент од множеството A му припаѓа и на множеството C, а постои елемент c од C што не му припаѓа на A, тогаш A е вистинско подмножество од C.

1.5. Дадени се множествата:
$A = \{1, 2, 3, a\}, \quad B = \{2, 3, 4\}, \quad C = \{1, 3, 5, c\}$.
Да се провери дали:

а) $A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$;
б) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Решение. а) Имаме: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$; $A \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, a\} = A$ и $A \cap (A \cup B) = \{1, 2, 3, a\} = A$, па значи, равенствата важат.
б) $(A \cap B) \cup C = \{2, 3\} \cup \{1, 3, 5, c\} = \{1, 2, 3, 5, c\}$; $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 5, a, c\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, c\} = \{1, 2, 3, 5, c\}$. Значи, важи равенство.

1.6. Дадени се множествата: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$.
Да се покаже дека: $(A \cup B) \backslash C = A \cup (B \backslash C)$.
Дали ова равенство важи за кои било множества A, B, C?

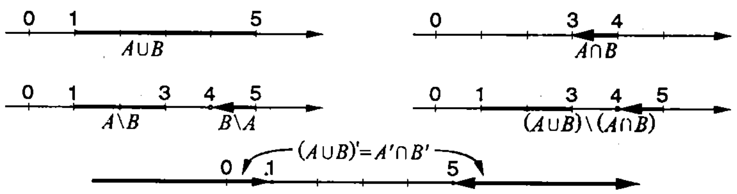
Решение. Имаме: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $B \backslash C = \{2, 3\}$, па $(A \cup B) \backslash C = \{1, 2, 3\} = A \cup (B \backslash C)$. Но, равенството не важи ако за A, B, C се земат множествата од задачата **1.5.**

1.7. Дадени се множествата:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 1 \leq x \leq 4\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 3 < x \leq 5\}$.
Да се најдат и графички да се претстават на бројната оска следниве множества:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \backslash B$; г) $B \backslash A$;

д) $(A \cup B)\backslash(A \cap B)$; ѓ) $(A \cup B)'$; е) $A' \cap B'$.
при што X' е комплементот на X во $\mathbb{R}$: $X' = \mathbb{R}\backslash X$.

Решение. Имаме:
а) $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ 1 \le x \le 5\} = [1, 5]$.
б) $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ 3 < x \le 4\} = (3, 4]$.
в) $A\backslash B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ 1 \le x \le 3\} = [1, 3]$.
г) $B\backslash A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ 4 < x \le 5\} = (4, 5]$.
д) $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ 1 \le x \le 3$ или $4 < x \le 5\} = [1, 3] \cup (4, 5]$.
ѓ) и е) $(A \cup B)' = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -\infty < x < 1$ или $5 < x < +\infty\} =$
$= (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) = A' \cap B'$.



1.8. Дадено е множеството $A = \{a, \{\iota\}\}$. Да се најде:
а) $\mathbb{P}(A)$; б) $A \cup \mathbb{P}(A)$.

Решение. а) $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{c\}\}, \{a, \{c\}\}\}$.
б) $A \cup \mathbb{P}(A) = \{a, \{c\}, \emptyset, \{a\}, \{\{c\}\}, \{a, \{c\}\}\}$.
Да забележиме дека a и $\{a\}$ се различни елементи од множеството $A \cup \mathbb{P}(A)$.

1.9. Да се покаже дека: $A \subseteq C,\ B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$,
за кои било множества A, B, C.

Решение. Нека A и B се подмножества од множеството C и нека x е кој било елемент од множеството $A \cup B$. Од дефиницијата за унија на две множества следува дека x му припаѓа барем на едното од множествата A, B, а бидејќи $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$, следува дека x му припаѓа на C. Според тоа, кој било елемент од множеството $A \cup B$ е елемент и на C, а тоа значи дека $A \cup B \subseteq C$.

1.10. Нека A и B се подмножества од некое множество M. Да се докаже дека $A\backslash B = A \cap B'$, каде што B' е комплементот на B во M.

Решение. Нека $x \in A\backslash B$; тоа значи дека $x \in A$ и $x \notin B$, т.е. $x \in A$ и $x \in B'$, па $x \in A \cap B'$. Според тоа:
$$A\backslash B \subseteq A \cap B'. \tag{1}$$
Обратно, нека $y \in A \cap B'$; тоа значи дека $y \in A$ и $y \in B'$, т.е. $y \in A$ и $y \notin B$, па $y \in A\backslash B$. Според тоа:
$$A \cap B' \subseteq A\backslash B. \tag{2}$$
Од (1) и (2) следува равенство.

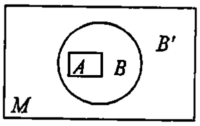
1.11. Нека е A подмножество од B, а B е подмножество од некое множество M. Да се упростат приведените изрази и да се нацртаат соодветните венови дијаграми.

а) $A \cap B'$; б) $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$, каде што $X' = M \backslash X$ (т.е. X' е комплементот на X во M).

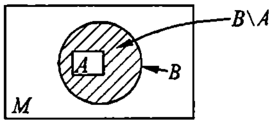
Решение. а) Бидејќи $A \subseteq B$, тогаш кој било елемент од A е елемент и од B, а бидејќи ниеден елемент од B не му припаѓа на B', следува дека A и B' се дисјунктни, т.е. $A \cap B' = \emptyset$. Соодветниот венов дијаграм е даден на црт. 1.

б) Според а), имаме $A \cap B' = \emptyset$, а според **1.10**, имаме $A' \cap B = B \backslash A$. Значи:

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = B \backslash A\,.$$



Црт. 1



Црт. 2

1.12. Да се докаже дека: $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.
Притоа, A, B и C се подмножества на некое множество M.

Решение. Користејќи ја **1.10** и асоцијативноста на $\cap$, имаме:
$A \cap (B \backslash C) = A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) \backslash C$.
Користејќи ја пак задачата **1.10**, а потоа равенствата
$(A \cap B)' = A' \cup B'$, $A \cap A' = \emptyset$ (види и **1.30**, **1.31**, **1.28**), имаме

$$(A \cap B) \backslash (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C') =$$
$$= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) \backslash C.$$

Со тоа точноста на даденото равенство е докажана.

1.13. Да се упрости изразот $[(A' \cup B)' \cup (A \cup B')]'$.
(Притоа, A и B се подмножества од некое множество M.)

Решение. Користејќи ги равенствата $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$ и $(X')' = X$, добиваме:

$$[(A' \cup B)' \cup (A \cup B')]' = [(A' \cup B)']' \cap (A \cup B')' =$$
$$= (A' \cup B) \cap (A' \cap B) = A' \cap B = B \backslash A\,.$$

(Притоа се користени и **1.10**, **1.37**.)

1.14. Да се докаже дека: A е подмножество од B ако и само ако за секое множество C е точно равенството:

$$(B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A)\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека $A \subseteq B$ и C е кое било множество. Применуваји го на левата страна од (1) дистрибутивниот закон на унијата спрема пресекот (види **1.27**), а потоа равенството $A \cup B = B$ (види **1.37**), добиваме:

$$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) = B \cap (C \cup A)\,,$$

т.е. точно е равенството (1).

Обратно, нека важи (1) за кое било множество C. Тогаш, ставајќи во (1) B на местото од C, го добиваме равенството:

$$(B \cap B) \cup A = B \cap (B \cup A)\,,$$

па бидејќи $B \cap B = B$ и $B \cap (B \cup A) = B$, го добиваме равенството:

$$B \cup A = B\,,$$

кое пак означува дека $A \subseteq B$ (види и **1.37**).

1.15. Нека паровите $(x-2, y-2)$ и $(3+y, 1-x)$ се еднакви. Да се најдат x и y.

Решение. Според дефиницијата за *еднаквост на парови*:

$$[(x_1, y_1) = (x_2, y_2)] \Leftrightarrow (x_1 = x_2, y_1 = y_2),$$

добиваме: $x - 2 = 3 + y$, $y - 2 = 1 - x$, т.е.

$$x - y = 5, \quad x + y = 3,$$

од каде што $x = 4$, $y = -1$.

1.16. Дадено е множеството $A = \{a, c, e\}$. Да се најде множеството:

а) $A \times A$ ($A \times A$ се означува и со A^2),

б) $\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}$ (кое се вика *дијагонала* на A^2),

в) $(A \times A) \cap A$.

Решение. а) $A \times A$ претставува множеството од сите подредени парови формирани од елементите на множеството A, што значи:

$A^2 = \{(a, a), (a, c), (a, e), (c, a), (c, c), (c, e), (e, a), (e, c), (e, e)\}$.

б) Дијагоналата на A^2 го содржи секој елемент од A^2 чии компоненти се еднакви, па значи:

$$\Delta = \{(a, a), (c, c), (e, e)\}.$$

в) Кој било елемент од $A \times A$ е подреден пар, па е различен од кој било елемент од A. Според тоа $(A \times A) \cap A = \emptyset$.

1.17. Дадени се множествата: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Да се најде:

а) $A \times (B \cup C)$, б) $(A \times B) \cup (A \times C)$.

Решение. а) Имаме: $B \cup C = \{2, 3, 4\}$, па

$$A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}.$$

б) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$, $A \times C = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$, па

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Значи, множествата под а) и под б) се еднакви (да се види и 1.59).

1.18. Да се докаже дека $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.

(Според тоа, директниот производ на множества не е комутативен.)

Решение. Ако $A = B$, тогаш $A \times B = A \times A = B \times A$.

Обратно, нека $A \times B = B \times A$. Тогаш, кој било подреден пар (x, y), $x \in A$, $y \in B$ е еднаков со некој подреден пар (b, a), $b \in B$, $a \in A$, па од дефиницијата за еднаквост на подредени парови имаме $x = b$ и $y = a$. Тоа значи дека кој било елемент од A е еднаков со некој елемент од B и обратно, т.е. $A = B$.

Задачи за вежбање

1.19. Да се запише во табеларна форма секое од следниве множества:
а) Множеството природни броеви што не се поголеми од 4,
б) множеството (позитивни) делители на 12,
в) множеството корени на равенката $x^2 + 3x + 2 = 0$,
г) множеството заеднички (позитивни) делители на 6 и 15,
д) множеството негативни броеви поголеми од 1,
ѓ) $\{x \mid x$ е буква во зборот „математика"$\}$,
е) $\{x \mid x$ е симбол во изразот $3a + c - a = 2a + c\}$.

1.20. Да се запише во описна форма секое од следниве множества:
а) множеството квадрати од природни броеви што не се поголеми од 100,
б) множеството корени на равенката $\sin x = 1$,
в) множеството заеднички корени на равенките $x^2 - 4 = 0$ и $3x = 9$,
г) множеството корени на равенките $x^2 - 4 = 0$, $3x = 9$,
д) множеството парни природни броеви.

1.21. Да се напишат барем девет различни подмножества од множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

1.22. Дадено е множеството: $A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$. Да се најде
а) $\mathbb{P}(A)$; б) $A \cup \mathbb{P}(A)$; в) $A \times A$; г) дијагоналата на A^2.

1.23. Да се најде односот меѓу множествата: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^*$, каде што $\mathbb{Q}^-$ е множеството негативни рационални броеви, $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви, а $\mathbb{R}^*$ е множеството реални броеви различни од нулата.
Да се докаже дека за кои било множества A, B, C, точни се равенствата **1.24 – 1.28**.

1.24. а) $A \cup A = A$; б) $A \cap A = A$ (*закони за идемпотентност*).

1.25. а) $A \cup B = B \cup A$; б) $A \cap B = B \cap A$ (*комутативни закони*).

1.26. а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*асоцијативни закони*).

1.27. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивен закон на унијата спрема пресекот*).

1.28. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивен закон на пресекот спрема унијата*).

Ако A и B се подмножества од некое множество M, тогаш се точни равенствата **1.29 – 1.31**.

1.29. а) $A \cup \emptyset = A$; б) $A \cup M = M$; в) $A \cap \emptyset = \emptyset$; г) $A \cap M = A$ (*закони за идентичност*).

1.30. а) $A \cup A' = M$; б) $A \cap A' = \emptyset$; в) $A'' = (A')' = A$; г) $M' = \emptyset$; д) $\emptyset' = M$ (*закони за комплемент*).

1.31. а) $(A \cup B)' = A' \cap B'$; б) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (*Де Морганови теореми*).

1.32. Да ги означиме со A, B, C множествата корени на равенките
$$\sin x = 0\,, \qquad \cos\frac{x}{2} = 1\,, \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{4} = 1$$
соодветно. Откако ќе се напишат A, B, C во описна и табеларна форма, да се најде: а) $A \cap B$; б) $B \cap C$; в) $C \cap B'_A$.

1.33. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$, $E = \{1, 3, 5, \ldots\}$ Да се најдат:
а) A', B', C', E' во $\mathbb{N}$. б) $A'' = (A')'$ во $\mathbb{N}$.
в) $B' \cap C'$ и $(B \cup C)'$. г) $E' \cap C'$. д) $(A \cap B') \setminus E'$.

1.34. Дадени се следниве интервали од реални броеви:
$A = (-1, 1]$, $B = [0, +\infty)$, $C = (-\infty, -1)$.
Да се најде:
а) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; б) $(A \cup B)'$; в) $A \cap (B \cup C)'$; г) $(A \cap B)' \cap C'$.
Добиените множества да се претстават и на бројната оска.

1.35. Дадени се следниве множества точки од рамнината M:
$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ y^2 \le 2x\}$, $B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 9\}$, $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 \ge 9\}$, $E = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 \le 0\}$.
Да се претстават графички овие множества, а потоа и множествата:
а) $A \cap B$; б) $B \cap C$; в) $(A \cup B) \setminus A$; г) $A \cap E'$; д) $B' \cap E$,
при што B' и E' се комплементите на B и E во M.

1.36. Да се покаже дека $A \subseteq B,\ A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$.

1.37. Да се покаже дека исказите
(i) $A \subseteq B$; (ii) $A \cup B = B$; (iii) $A \cap B = A$
се еквивалентни.

1.38. Нека A и B се подмножества од некое множество M. Да се покаже дека $A \subseteq B$ ако и само ако $B' \subseteq A'$.

1.39. Да се докаже дека $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

1.40. Да се докаже дека $(A \cup B) \cap B' = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Во задачите **1.41 – 1.47**, A, B и C се подмножества од некое множество M. Да се нацрта соодветниот *венов дијаграм* и да се упрости дадениот израз.

1.41. $(A \cap B) \cup (A \cap B')$.

1.42. $[(A' \cap B)' \cup (A \cup B')]'$.

1.43. $(A \backslash B) \cup [(A \backslash B) \backslash B]$.

1.44. $(A \cap B) \cup (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Во задачите **1.45 – 1.47**, A е подмножество од B.

1.45. $(A' \cup B) \cap A$.

1.46. $(A \cup B') \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

1.47. $[(A \cap B') \cap (A' \cup B)]'$.

1.48. Дали $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \cup C)$?

Во задачите **1.49 – 1.54**, A, B и C се подмножества од некое множество M. Да се утврди односот меѓу назначените множества.

1.49. $(A \cup B) \backslash C$ и $(A \cap C') \cup (B \cap C')$.

1.50. $A \backslash (A \backslash A)$ и $(A \backslash A) \backslash A$.

1.51. $A \backslash (B \backslash C)$ и $(A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

1.52. $A \backslash (B \backslash C)$ и $A \backslash (B \cap C)$.

1.53. $A \backslash (B \cup C)$ и $A \backslash (B \cap C)$.

1.54. $(A \cup B) \cap (A' \cup C') \cap (C' \cup B)$ и $(A \cup B) \cap C'$.

1.55. Да се покаже дека
а) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C')$; б) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

1.56. Подредените тројки $(x - 1, 4, y + z)$ и $(2, x + z, 3)$ се еднакви. Да се најдат x, y, z

1.57. Нека $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Да се најдат:
а) $A \times B \times C$; б) B^3; в) A^2; г) дијагоналата на A^2.

1.58. Дадени се следниве интервали од реални броеви:
$A = [1, 3]$, $B = [1, 2]$, $C = (4, 6]$, $E = (2, +\infty)$.
Да се најде (со осенчување на соодветниот дел од рамнината):

а) $A \times A = A^2$; б) $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$; в) $B \times E$;
г) $E \times B$; д) $E \times E$; ѓ) дијагоналата Δ на A^2.

1.59. Да се докаже дека за кои било множества A, B, C важи:
а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. б) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

1.60. Да се докаже: $(A \times B \subseteq B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$.

* * *

1.61. Да се покаже дека
а) од $A \cup C = B \cup C$ не следува $A = B$;
б) од $A \cap C = B \cap C$ не следува $A = B$;
в) од $A \cup C = B \cup C$ и $A \cap C = B \cap C$ следува $A = B$.

Да се докаже дека за кои било множества A, B, C се точни равенствата **1.62 – 1.65.**

1.62. $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

1.63. $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$.

1.64. $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$.

1.65. $A \cup B \cup C = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) \cup (A \cap B \cap C)$.

1.66. Дали е точно равенството:
а) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$; б) $(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash B$?
Ако не е точно, каков е односот меѓу множеството L од левата страна и на множеството D од десната страна?

1.67. Да се покаже дека
а) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \supseteq A \cap B \cap C$;
б) $(A' \cap B) \cup (A \cap B') \subseteq A \cup B$.
Притоа, A и B во б) се подмножества од некое множество M.

1.68. Цилиндар C со радиус a и висина H, да се претстави како директен производ на две множества.

1.69. Телото T што е наречено *торус* (личи на ѓеврек) да се прикаже како директен производ на две множества.

1.70. За произволни множества A, B, C важи:
$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C).$$
Докажи!

1.71. Да се докаже дека $A \subset B,\ C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D$.

1.72. При дадени множества A, B, ќе формираме ново множество $A\triangle B$ на следниов начин:
$A\triangle B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$, наречено *симетрична разлика* на множествата A, B,
а) Да се нацрта венов дијаграм за $A\triangle B$.
б) Да се најде $A\triangle B$ за $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{2, 3, 5\}$.

1.73. Дадени се множествата:
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ и $C = \{2, 4, 6\}$.
Да се покаже дека:
а) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$ (види и **1.80**);
б) $(A\cup B)\triangle C \subseteq (A\triangle C)\cup(B\triangle C)$.

1.74. За кое било множество A важи $A\triangle A = \emptyset$.

1.75. Да се покаже дека: $A\triangle B = A$ ако и само ако $B = \emptyset$.

1.76. Сметајќи ги A и B за подмножества на некое множество M, да се покаже дека: $A\triangle B = (A\cap B')\cup(B\cap A') = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

1.77. Нека A и B се подмножества од некое множество M. Да се докаже дека

$$[(A\cap B')\cup(A'\cap B) = A\cup B] \Leftrightarrow [A\cap B = \emptyset].$$

1.78. Да се докаже дека:
а) $A\triangle B = C \Leftrightarrow B = A\triangle C$; б) $A = B \Leftrightarrow A\triangle B = \emptyset$.

1.79. Да се докаже дека $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

1.80. Да се докаже дека за симетричната разлика важи асоцијативниот закон, т.е.

$$A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C.$$

1.81. Во $M = \{a, b, c\}$ се определени релациите α, β, γ со:
$\alpha = \{(a,b),(b,a)\}$, $\beta = \{$(а, б), (б, с), (а, с)$\}$,
$\gamma = \{$(а, а), (а, б), (б, б), (б, а), (с, с)$\}$.
Да се испитаат својствата на секоја од нив (рефлексивност, симетричност, транзитивност и антисиметричност).

1.82. Во $\mathbb{N}$ е дефинирана релација α на следниов начин:
а) $x\,\alpha\,y \Leftrightarrow x + y$ е парен број;
б) $x\,\alpha\,y \Leftrightarrow |x - y| = 3k$ за некој $k \in \mathbb{N}_0$;
в) $x\,\alpha\,y \Leftrightarrow x \cdot y = k^2$ за некој $k \in \mathbb{N}$; г) $x\,\alpha\,y \Leftrightarrow |x - y| \leq 3$;
д) $x\,\alpha\,y \Leftrightarrow x$ и y се целосни квадрати; ѓ) $x\,\alpha\,y \Leftrightarrow x\,|\,y$.
Дали α е еквивалентност? Во потврден случај: кои се класите од еквивалентни елементи?

2. ПРЕСЛИКУВАЊА

Решени задачи

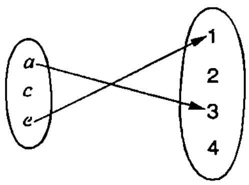
2.1. Ако A и B се непразни множества, а f пропис според кој на секој елемент $x \in A$ му се придружува по еден (и само по еден) елемент $y \in B$, тогаш велиме дека е определено *пресликување* f од A во B и пишуваме $y = f(x)$.

Да се запише горната дефиниција за пресликување употребувајќи ги ознаките од задачата 1.4.

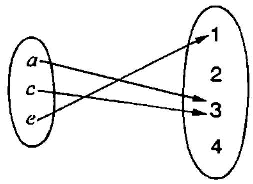
Решение. $(\forall x \in A)(\exists ! y \in B) \quad f(x) = y$.

Вообичаено е пресликувањето f од A во B да се означува со $f\colon A \to B$ или само со f. Притоа, за A велиме дека е *дефинициона област* (или *домен*), за B – *цел*, а за прописот f – *дејство* на пресликувањето. Ако на x од A му е придружен елементот y од B, за y ќе велиме дека е *слика* на x, а за x ќе велиме дека е *оригинал* на y.

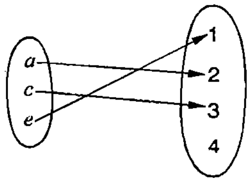
2.2. Да се утврди дали приложените дијаграми дефинираат пресликувања од множеството $A = \{a, c, e\}$ во множеството $B = \{1, 2, 3, 4\}$.



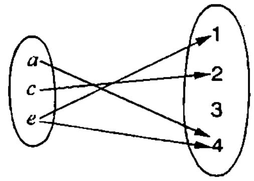
Д.1.



Д.2.



Д.3.

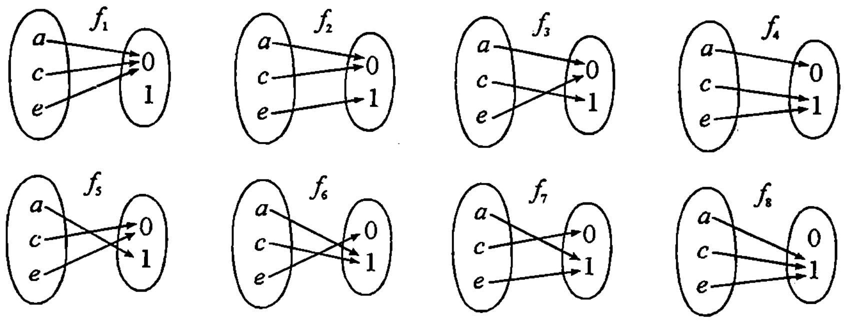


Д.4.

Решение. Со Д.2 и со Д.3 се дефинирани пресликувања. Со Д.1 не е дефинирано пресликување, зашто на елементот c од A не му одговара ниеден елемент од B. И со Д.4 не е дефинирано пресликување, зашто на елементот e му се придружени два елемента (1 и 4) од B.

2.3. Да се најдат сите различни пресликувања од $A = \{a, c, e\}$ во $B = \{0, 1\}$ и за секое од нив да се нацрта дијаграм.

Решение. На секој елемент од A ќе му придружиме 0 или 1, но не двата истовремено. Пресликувањата ќе ги прикажеме само со дијаграми.



2.4. Нека $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $f: A \to \mathbb{R}$ е пресликување дефинирано со формулата: а) $f(x) = x^2 - 1$; б) $f(x) = |x| + 1$.
Да се најде множеството V на вредностите (т.е. *опсегот*) на f.

Решение. Бидејќи $f(-2) = f(2) = 3$, $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = -1$, опсегот на f е $V = \{3, 0, -1\}$.
б) Имаме: $f(-2) = f(2) = 3$, $f(-1) = f(1) = 2$, $f(0) = 1$, па $V = \{3, 2, 1\}$.

2.5. Ако M е множество и $A \subseteq M$, тогаш секое пресликување $f: A \to M$ се вика *функција* на M, а секое пресликување $g: M \to M$ се вика *трансформација* на M.
Да се провери дали е трансформација на $\mathbb{R}$:

а) $f(x) = lg\,x$; $\quad$ *b*) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $\quad$ в) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение. а) Бидејќи f е пресликување од $\mathbb{R}^+$ во $\mathbb{R}$, тоа е функција, но не е трансформација на $\mathbb{R}$. б) И во овој случај f е функција, но не е трансформација на $\mathbb{R}$ зашто реалниот број 1 нема слика со f.
в) Ако x е реален број, тогаш и $1/(1+x^2)$ е реален број, т.е. f е пресликување од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$; значи, f е трансформација на $\mathbb{R}$.

2.6. Ако $f: M \to M$ е трансформација на M, при што M има конечен број елементи, тогаш е згодно, заради прегледност, трансформацијата f да се претстави со шема на која веднаш се гледаат доменот, опсегот и прописот. Трансформациите
$f, g: M \to M$, $\quad M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, дефинирани со:
а) $f: 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 2,\ 4 \mapsto 1,\ 5 \mapsto 2,\ 6 \mapsto 1,\ 7 \mapsto 2$;

б) $g(x) = x$ за секој x од M,
да се претставaт со шема.

Решение. Трансформацијата f може да се претстави со шема, составена од две редици: во првата се испишуваат сите елементи од M, а под нив, во втората редица, се ставаат соодветните слики. Така, за дадената трансформација имаме:

а) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. б) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Пресликувањето g се вика *идентична трансформација* на M и се означува, обично, со 1_M.

2.7. Да се провери дали се еднакви следниве пресликувања:

а) $f: A \to P$; $g: B \to P$, каде што е:
A множеството парни цели броеви,
B множеството непарни цели броеви,
P множеството ненегативни цели броеви,

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = |x| - 1.$$

б) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, $g(x) = 1$.

Решение. За две пресликувања $f: A \to B$, $g: C \to E$ велиме дека се *еднакви* и пишуваме $f = g$, ако се исполнети следниве услови:
(1) $A = C$ (доменот, т.е. дефиниционата област им е иста),
(2) $B = E$ (т.е. целта им е иста),
(3) $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$.
а) Условот (1) не е исполнет, па $f \neq g$.
б) Сите услови (1), (2), (3) се исполнети, па $f = g$.

2.8. Да се провери дали е сурјекција следново пресликување:

а) $f: A \to B$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$, дефинирано со:
$f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$, $f(5) = 4$.
б) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x| + 1$.

Решение. За пресликувањето $f: A \to B$ велиме дека е *сурјекција* од A на B ако:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\, y = f(x).$$

а) Бидејќи за елементот $2 \in B$ не постои елемент x од A, таков што $f(x) = 2$, пресликувањето не е сурјекција.

б) Нека x е кој било елемент од $\mathbb{N}$. Тогаш, $x - 1$ е цел број и

$$f(x-1) = |x-1| + 1 = x - 1 + 1 = x,$$

т.е. $x - 1$ е оригинал за x. Значи, f е сурјекција.

2.9. Нека s е фиксен природен број. За кој било цел број x, постојат еднозначно определени цели броеви q и r, наречени *количник и остаток*, соодветно, така што:

$$x = qs + r, \quad 0 \leq r < s, \quad \text{т.е.} \quad r \in \{0, 1, \ldots, s-1\} = \mathbb{Z}_s.$$

Нека $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_s$ е дефинирано со:

$$(\forall x = qs + r)\ f(x) = r.$$

Да се покаже дека: а) f е сурјекција; б) $f(xy) = f\big(f(x) \cdot f(y)\big)$.

Решение. а) Бидејќи секој елемент од множеството $\{0, 1, \ldots, s-1\}$ има свој оригинал (на пример, $0, 1, \ldots, s-1$ се оригинали на $0, 1, \ldots, s-1$, соодветно), пресликувањето е сурјекција.

б) Нека $x = q_1 s + r_1$, $y = q_2 s + r_2$. Тогаш
$$xy = (q_1 q_2 s + r_1 q_2 + r_2 q_1)s + r_1 r_2.$$
па, ставајќи $r_1 r_2 = q_3 s + r_3$, добиваме:
$$f(xy) = r_3 = f(r_1 r_2) = f\big(f(x) \cdot f(y)\big).$$

2.10. Да се провери дали е 1) инјекција; 2) биекција следново пресликување:

а) $f\colon A \to B$, $A = \{1, 2, 3, 4\} = B$, дефинирано со
$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 4.$$

б) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

в) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 2|x| + 1 & \text{за} \quad x < 0 \\ 1 & \text{за} \quad x = 0 \\ 2x & \text{за} \quad x > 0 \end{cases}$

Решение. За пресликувањето $f\colon A \to B$ велиме дека е *инјекција* ако:
$$x_1, x_2 \in A, \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \quad \text{т.е.}$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
Ако пресликувањето f е и инјекција, и сурјекција, тогаш за f велиме дека е *биекција*.

а) Бидејќи $f(1) = 2 = f(3)$, а $1 \neq 3$, f не е инјекција.

б) Ако $f(x) = f(y)$, тогаш имаме:
$$\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y.$$
што значи дека f е инјекција. Бидејќи, на пример, 0 не е слика на ниеден елемент од $\mathbb{N}$, f не е сурјекција, па значи не е ни биекција.

в) Од дефиницијата на пресликувањето f гледаме дека негативните цели броеви и нулата се пресликуваат во непарните природни броеви, а позитивните цели броеви се пресликуваат во парните природни броеви. Значи, секој природен број е слика на некој цел број при пресликувањето f, па f е сурјекција. Исто така е јасно дека кои било два различни броја имаат различни слики, т.е. f е инјекција.
Според тоа, f е биекција.

2.11. Нека A, B, C се непразни множества и $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ се пресликувања. Да се покаже дека прописот
$$(\forall x \in A) \ h(x) = g\big(f(x)\big)$$
дефинира пресликување од A во C.
За пресликувањето h велиме дека е *состав* (или *композиција*) на f и g; пишуваме: $h = g\,f$. Значи
$$(\forall x \in A) \ (g\,f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Решение. Нека x е произволен елемент од A. Бидејќи f е пресликување, $f(x)$ е еднозначно определен елемент од B, а бидејќи и g е пресликување, $g\big(f(x)\big)$ е, исто така, еднозначно определен елемент од C. Според тоа:
$$(\forall x \in A)(\exists!\, y \in C) \ g\big(f(x)\big) = y,$$

што значи дека h е пресликување од A во C.
Тоа може да се претстави нагледно со следниов дијаграм:

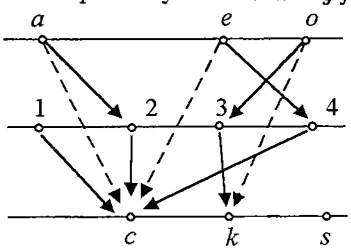
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

2.12. Дадени се множествата $A = \{a, e, o\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{c, k, s\}$ и пресликувањата $f: A \to B$, $g: B \to C$, дефинирани на следниов начин:

$f: a \mapsto 2,\ e \mapsto 4,\ o \mapsto 3;$ $\qquad g: 1 \mapsto c,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto k,\ 4 \mapsto c.$

Да се најде составот h на овие пресликувања и да се претстави нагледно, со цртеж.

Решение. Пресликувањето $h = g\,f$ е дефинирано вака:



$$h(a) = g\big(f(a)\big) = g(2) = c\,;$$
$$h(e) = g\big(f(e)\big) = g(4) = c\,;$$
$$h(o) = g\big(f(o)\big) = g(3) = k\,;$$

Дејството на пресликувањето h е претставено на цртежот со испрекинати стрелки.

2.13. Ако $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ се пресликувања, да се покаже дека $h(g\,f)$ и $(h\,g)f$ се пресликувања од A во D и дека $h(g\,f) = (h\,g)f$.

Решение. Како состави на пресликувања, $gf: A \to C$ и $h\,g: B \to D$ се пресликувања (види **2.11**), па тогаш и $h(g\,f): A \to D$, $(h\,g)f: A \to D$ се пресликувања.

Нека $f(a) = b$, $g(b) = c$, $h(c) = d$. Имаме:

$$\big(h(gf)\big)(a) = h\big((gf)(a)\big) = h\Big(g\big(f(a)\big)\Big) = h\big(g(b)\big) = h(c) = d\,,$$
$$\big((hg)f\big)(a) = (hg)\big(f(a)\big) = (hg)(b) = h\big(g(b)\big) = h(c) = d\,,$$

што значи, точно е равенството $h(gf) = (hg)f$.
Тоа можеме да го претставиме нагледно со следниот дијаграм:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h(gf)"', "(hg)f"'] \arrow[dr, dashed, "gf" near end] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "hg"' near end] \\ D & C \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

2.14. За две пресликувања $f, g: M \to M$ велиме дека *комутираат* ако
$$f\,g = g\,f, \quad \text{т.е.} \quad (\forall x \in M) \quad f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big).$$

Да се најдат сите функции $f(x) = ax + c$ од $\mathbb{R}$, коишто комутираат со функцијата $g(x) = 2x + 3$.

Решение. Равенството $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$ се сведува на равенството:
$$a(2x+3) + c = 2(ax+c) + 3, \quad \text{т.е.} \quad 3a - c = 3.$$
Значи, секоја функција $f(x) = ax + 3(a-1)$, каде што a е произволен реален број, комутира со функцијата $g(x) = 2x + 3$.

2.15. Нека $f: A \to B$ е биекција. Да се покаже дека постои една и само една биекција $g: B \to A$, таква што:
$$(gf)(x) = x \qquad \forall\, x \in A, \tag{1}$$
$$(fg)(y) = y \qquad \forall\, y \in B. \tag{2}$$
Таа единствена биекција g се вика *инверзна биекција* на f и се означува со f^{-1}. Од (1) и (2) директно следува:
$$f^{-1} f = 1_A, \quad f f^{-1} = 1_B. \tag{3}$$

Решение. Ако ставиме $x = g(y)$ секогаш кога $y = f(x)$, добиваме дека g е биекција од B на A што ги задоволува условите (1) и (2). Значи, постои барем една биекција.
Да докажеме дека не постојат други биекции. Навистина, нека $h: B \to A$ е биекција што ги задоволува условите (1) и (2), т.е.
$$(hf)(x) = x \quad \forall\, x \in A, \quad (fh)(y) = y \quad \forall\, y \in B,$$
и нека y е произволен елемент од B. Тогаш имаме:
$$(fh)(y) = (fg)(y), \quad \text{т.е.} \quad f\big(h(y)\big) = f\big(g(y)\big).$$
па, бидејќи f е инјекција, следува дека
$$h(y) = g(y) \quad \forall\, y \in B,$$
а тоа значи дека $h = g$.

2.16. Ако f^{-1} е инверзната биекција на биекцијата $f: A \to B$, тогаш $(f^{-1})^{-1} = f$.

Решение. Бидејќи f^{-1} е биекција, постои инверзна биекција $(f^{-1})^{-1}$ и притоа $(f^{-1})^{-1} f^{-1} = 1_B$. Но, исто така $f f^{-1} = 1_B$, па поради единственоста на инверзната биекција, добиваме $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.17. Да се покаже дека $f: A \to B$, $A = (0, +\infty)$, $B = (0, 1)$, дефинирано со формулата $f(x) = \frac{x}{1+x}$, е биекција и да се најде инверзната биекција.

Решение. Од $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$ следува $x_1 + x_1 x_2 = x_2 + x_1 x_2$, т.е. $x_1 = x_2$, па значи f е инјекција. Ако y е произволен елемент од B, тогаш за елементот $x = \frac{y}{1-y}$ од A имаме $\frac{x}{1+x} = y$, т.е. тој е оригинал за y. Според тоа, $f(x)$ е сурјекција, па значи и биекција.
Ставајќи $\frac{x}{1+x} = y$, добиваме $x = \frac{y}{1-y}$, па значи инверзната биекција $f^{-1}: B \to A$ е $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$.

2.18. За две множества A, B велиме дека се *еквивалентни* (или *биективни*), ако постои барем една биекција f од A на B; во тој случај пишуваме:

$$A \sim B.$$

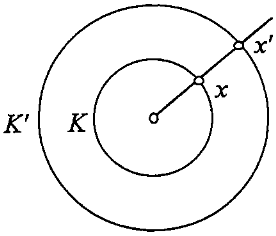
Да се покаже дека: а) за секое множество A важи $A \sim A$;
б) ако $A \sim B$, тогаш $B \sim A$;
в) ако $A \sim B$ и $B \sim C$, тогаш $A \sim C$.

Решение. а) Јасно е дека идентичното пресликување 1_A е биекција од A на A, па $A \sim A$. б) Ако $A \sim B$, тогаш постои биекција од A на B, а бидејќи инверзната е биекција од B на A, добиваме $B \sim A$. в) Ако $A \sim B$ и $B \sim C$, тогаш постои биекција f од A на B и биекција g од B на C. Бидејќи состав на две биекции е пак биекција (види **2.65**), составот $g\,f$ е биекција од A на C, па значи $A \sim C$.

2.19. Да се покаже дека кои било две кружници, како множества точки, се биективни (т.е. еквивалентни).

Решение. Можеме да претпоставиме дека кружниците K и K' се концентрични. Треба да докажеме дека постои биекција од K на K'. Нека x е произволна точка од K. Зракот повлечен од центарот низ точката x ја сече кружницата K' во точката x'. Пресликувањето $f\colon K \to K'$, дефинирано со

$$(\forall x \in K) \quad f(x) = x'$$



е инјекција, зашто различни точки од K имаат различни слики, а е и сурјекција, зашто секоја точка од K' е слика на некоја точка од K. Според тоа, f е биекција, па значи $K' \sim K$.

2.20. Нека $f\colon A \to B$ е пресликување. Множеството f^* од сите подредени парови во кои оригиналот е прв елемент, а неговата слика е втор елемент, т.е.

$$f^* = \{(x, y \mid x \in A,\ y = f(x)\}$$

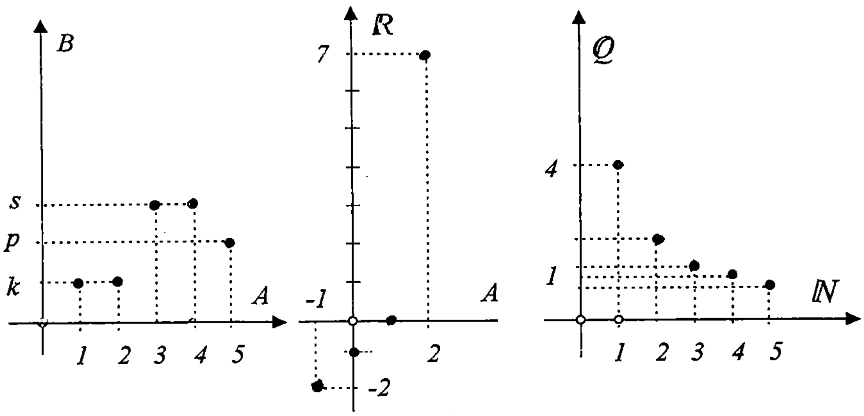
се вика *график на пресликувањето* f. Да забележиме дека $f^* \subseteq A \times B$.

Да се најде графикот f^* на пресликувањето f:

а) $f\colon A \to B$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{k, p, s\}$,
$$f(1) = f(2) = k,\ f(3) = f(4) = s,\ f(5) = p.$$
б) $f\colon A \to B$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 1$.
в) $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, $f(x) = \frac{4}{x}$.

Решение. а) $f^* = \{(1, k),\ (2, k),\ (3, s),\ (4, s)\ (5, p)\}$.
б) $f^* = \{(-1, -2),\ (0, -1),\ (1, 0),\ (2, 7)\}$.
в) $f^* = \{(1, 4),\ (2, 2),\ \left(3, \frac{4}{3}\right),\ (4, 1),\ \left(5, \frac{4}{5}\right), \ldots\}$.

Ако елементите на A ги претставиме како точки на една хоризонтална права, а елементите на B како точки на една вертикална права, секој пар (x, y), $x \in A$, $y \in f(A)$, т.е. секој елемент од f^*, се добива како пресек на вертикалната линија повлечена низ x и хоризонталната линија повлечена низ y. Така, графикот на даденото пресликување може да се претстави со следниов дијаграм:



Задачи за вежбање

2.21. Да се најде обласа V на вредностите (т.е. опсегот) на функцијата:

а) $f(x) = 2x - 1, \quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. б) $f(x) = 2x - 1, \quad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

в) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

г) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad f: \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

д) $f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad f: K \to \mathbb{R}$, K е множеството на сите квадрати од природни броеви.

2.22. Да се покаже дека е дефинирано пресликување од $\mathbb{Z}$ во $\mathbb{Z}$ со следниов пропис f:

а) $f(x) = \frac{3x}{|x|}$ за $x \neq 0, \quad f(0) = 0$.

б) $f(x) = -3$ за $x < 0, \quad f(x) = 3$ за $x > 0, \quad f(0) = 0$.

в) $f(x) = -3$ за $x > 0, \quad f(x) = 3$ за $x < 0, \quad f(0) = 0$.

г) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ за $x \leq 0, \quad f(x) = -2|x| \quad x > 0$.

Потоа, за секое од овие пресликувања да се најде множеството V на неговите вредности.

Дали пресликувањето во а) е еднакво со пресликувањето во б) и со пресликувањето во в)?

2.23. Кои од пресликувањата во **2.2** и **2.3** се а) инјекции, б) сурјекции?

2.24. Да се најдат сите биекции од $M = \{1, 2, 3\}$ на M.

2.25. Да се покаже дека е биекција пресликувањето $f\colon A \to B$:

а) $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c, \quad A=[a,b], \quad E=[c,d]$;

б) $f(x)=2^x, \quad A=\mathbb{R}^+, \quad B=\mathbb{R}$;

в) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}, \quad A=(-1,1), \quad B=\mathbb{R}$.

2.26. Прописот за едно пресликување f е даден со:

$$f(x)=5x^2.$$

Во кои случаи пресликувањето е биекција од доменот во опсегот на f, ако доменот е:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{N}$; в) $\mathbb{Q}^+$; г) $\mathbb{R}$; д) $\{-2,2,3,5\}$; ѓ) $\{-2,1,3,5\}$.

Во задачите **2.27–2.36** определен е пропис f со кој се врши придружување на елементите од дадено множество A кон елементи од друго множество B. Да се провери:

а) дали f е пресликување;

б) дали пресликувањето f е инјекција, сурјекција или биекција.

2.27. „$f(x)$ е 2 за секој x, $A=\mathbb{N}=B$“.

2.28. „$f(x)$ е следбеник на x, $A=\mathbb{N}=B$“.

2.29. „$f(x)$ е спротивен на x, $A=\mathbb{Z}=B$“.

2.30. „$f(x)$ е делител на x, $A=\mathbb{N}=B$“.

2.31. Нека A е множеството мајки што живеат во кулата кај Драмскиот театар, а B е множеството на нивните деца. Прописот е: „Секоја мајка да се придружи кон нејзиното дете“.

2.32. При ознаките од претходната задача, даден е прописот: „Секое дете се придружува кон својата мајка“.

2.33. Ако $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$, тогаш:

$$f(0)=1, \quad f(x)=2|x| \quad \text{за секој} \quad x\neq 0.$$

2.34. Нека A е множеството точки од еден рамнокрак исполнет триаголник, а B множеството точки од неговата основа. Зададен е прописот: „На секоја точка x од A да ѝ се придружи нејзината ортогонална проекција x' врз основата B“.

2.35. Нека A е множеството точки од еден исполнет триаголник, а B – точките од неговата периферија. Зададен е прописот: „На секоја точка x.од A да ѝ се придружи нејзината ортогонална проекција x' на најблиската страна".

2.36. „На секоја точка x од A, каде што A е даден круг, да ѝ се придружи најблиската точка до периферијата B на тој круг".

2.37. Пресликувањето $f\colon A \to B$, дефинирано со:

$$(\forall x \in A) \quad f(x) = c,$$

каде што c е фиксен елемент од B, се вика *константно пресликување*.

Во кој случај константното преликување е:

а) сурјекција; б) инјекција; в) биекција?

2.38. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и f, g, h се пресликувања од A во A дефинирани со:

$$\begin{aligned} &f\colon 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 5, \quad 4 \mapsto 1, \quad 5 \mapsto 3; \\ &g\colon 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 2, \quad 5 \mapsto 5; \\ &h\colon 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 5, \quad 4 \mapsto 1, \quad 5 \mapsto 3. \end{aligned}$$

Откако ќе се претстават со помош на таблица (како во **2.6**), да се најде:

а) $g\,f$; б) $h\,g$; в) $g\,h$ г) $(h\,g)f$; д) $h(g\,f)$.

Да се провери дали некое од дадените три и најдените пет пресликувања е инјекција, сурјекција, биекција. Дали меѓу тие осум пресликувања има еднакви?

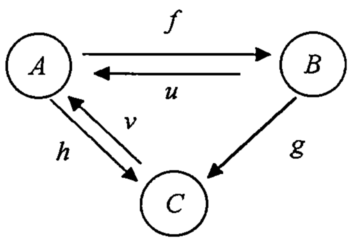
2.39. Пресликувањата $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon A \to C$, $u\colon B \to A$, $v\colon C \to A$ се претставени на дадениот дијаграм. Да се провери дали е дефиниран состав на пресликувања и, ако е, да се наведат доменот и целта:

а) $u\,f$; б) $f\,g$;

в) $h\,f$; г) $g\,f$;

д) $v\,g$; ѓ) $h\,u$;

е) $g\,f\,h$; ж) $g\,f\,v$.



2.40. Функциите $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ се дефинирани со:

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = x^2 - 2|x|.$$

Да се најде:

а) $(f\,g)(3)$; б) $(g\,f)(-2)$; в) $(f\,g)(-4)$;

г) $(g\,f)(5)$; д) $(g\,f)(x)$; ѓ) $(f\,g)(x)$.

2.41. Да се провери дали комутираат пресликувањата: $f, g\colon A \to A$, $\quad A = \{1, 2, 3, 4\}$, дефинирани со:

а) $\quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

б) $\quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

2.42. Да се најдат сите функции $f(x) = ax^3 + cx^2$ од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$, коишто комутираат со функцијата $\quad g(x) = x^2$.

2.43. Нека $\quad A = \{a, e, u, o, y\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad C = \{c, \kappa, s\}$, а $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ се пресликувања дефинирани со:
$f\colon a \mapsto 1, \quad e \mapsto 2, \quad u \mapsto 4, \quad o \mapsto 3, \quad y \mapsto 4,$
$g\colon 1 \mapsto \mathrm{s}, \quad 2 \mapsto k, \quad 3 \mapsto k, \quad 4 \mapsto c.$
Да се уочи дека f и g се сурјекции. Да се нȁјде нивниот состав и да се увиди дека и тоа пресликување е сурјекција.

2.44. Нека $\quad f\colon \mathbb{N} \to P = \{\frac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{N}, \ \ m < n\}$ и $g\colon P \to \mathbb{Q}$ се пресликувања зададени со формулите:

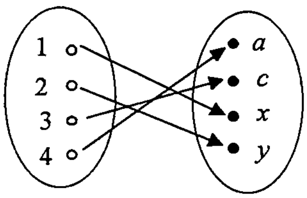
$$f(x) = \tfrac{1}{2x+1}; \qquad g(x) = \tfrac{1}{x^2+1}.$$

Да се покаже дека:

а) дадените пресликувања се инјекции;

б) составот $\ g\,f\ $ е, исто така, инјекција.

2.45. Нека $\ f\colon A \to B\ $ е пресликување дефинирано со следниов дијаграм:



а) Да се уочи дека f е биекција и да се најде инверзната биекција f^{-1}. $\quad$ б) Да се најде $\ (f^{-1})^{-1}$.

Во задачите **2.46–2.49** дадено е пресликување $\ f\colon A \to B$. Да се покаже дека тоа е биекција од A на B и да се најде инверзната биекција $\ f^{-1}$.

2.46. $f(x) = 3x + 1, \ \ A = B = \mathbb{R}.$ $\qquad$ **2.47.** $f(x) = x^3 - 1, \ \ A = B = \mathbb{R}.$

2.48. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad A = (0, +\infty), \quad B = (0, 1).$

2.49. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $\quad A = B = \mathbf{R}\setminus\{1\}$.

2.50. Нека $A = \{a, c, e, s\}$, $\quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Дали множеството парови

а) $\{(a, 1), (e, 2), (s, 3)\}$, $\quad$ б) $\{(a, 1), (c, 2), (e, 3), (s, 4), (s, 5)\}$

може да биде график на некое пресликување $\quad f: A \to B$?

2.51. Пресликувањето $f: M \to \mathbf{R}$, $M = \{1, 2, 3, 4\}$ е дефинирано со:

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

Да се утврди кои од паровите: $(1, 1)$, $(2, 7)$, $(3, 31)$, $(2, 9)$, $(-2, -7)$ му припаѓаат на графикот од f.

2.52. Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Да се утврди дали следново множество подредени парови е график на некое пресликување од A во A:

а) $\{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (2, 4), (4, 1)\}$. б) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.

в) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$. $\quad$ г) $\{(1, 2), (2, 6), (3, 4), (4, 4)\}$.

2.53. При кои услови множеството од подредени парови:

$$\Gamma = \{(a, 2), (c, 3), (e, 1), (k, 2)\}.$$

претставува график на некое пресликување $f: A \to B$?

2.54. Дадено е пресликувањето $\quad f: A \to B$, $\quad A = \{a, e, u, o, y\}$,

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\; f: a \mapsto 1$, $\; e \mapsto 2$, $\; u \mapsto 3$, $\; o \mapsto 4$, $\; y \mapsto 5$.

а) Да се најде графикот f^* и да се уочи дека f е биекција.

б) Да се најде графикот $(f^{-1})^*$ на инверзната биекција од f.

2.55. Дадени се графиците на пресликувањата

$f, g: M \to M$, $\quad M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$f^* = \{(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 1), (5, 2)\},$$
$$g^* = \{(1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}.$$

а) Да се одреди опсегот V_1 на f и опсегот V_2 на g.

б) Да се најде графикот на пресликувањето: $f\,g$; $g\,f$. Дали е $f\,g = g\,f$?

Во задачите **2.56–2.64** да се покаже дека се биективни дадените множества.

2.56. $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$ $\quad$ и $\quad$ $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

2.57. $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$ $\quad$ и $\quad$ $B = \mathbf{N}$. $\quad$ **2.58.** $\mathbf{N}$ $\quad$ и $\quad$ $\{3, 9, 27, 81, \ldots\}$.

2.59. Множеството точки од една полукружница и множеството точки од нејзиниот дијаметар.

2.60. Множествата точки од две отсечки.

2.61. Интервалот $(0,1)$ и $\mathbb{R}^+$. **2.62.** Интервалот $(-1,1)$ и $\mathbb{R}$.

2.63. $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$. **2.64.** $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$.

* * *

2.65. Да се покаже дека:

а) составот на две сурјекции е сурјекција;

б) составот на две инјекции е инјекција;

в) составот на две биекции е биекција.

2.66. Нека $f: A \to B$, $g: B \to A$ се пресликувања со својството $g\,f = 1_A$, каде што 1_A е идентичното пресликување на A. Да се утврди кое од следниве тврдења е точно, а кое не е:

а) $g = f^{-1}$; б) f е сурјекција; в) f е инјекција;

г) g е сурјекција; д) g е инјекција.

2.67. Ако $f: A \to B$, $g: B \to A$ се пресликувања и $f\,g = 1_B$ (1_B е идентично пресликување на B), тогаш f е сурјекција, а g е инјекција.

2.68. Нека $f: A \to B$, $g: B \to C$ се биекции. Да се покаже дека тогаш $h = g\,f$ е биекција и дека

$$(g\,f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}.$$

2.69. Нека $A = \{a, e\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{c, s\}$, а $f: A \to B$ е пресликување дефинирано со: $f(a) = 1$, $f(e) = 2$ и $g: B \to C$ е пресликување за кое се знае дека составот со f е следново пресликување:

$$g\,f: A \to C; \quad g\,f: a \mapsto s, \quad e \mapsto c.$$

Да се уочи дека $g\,f$ е сурјекција и да се покаже дека g мора да биде исто така сурјекција.

2.70. Нека A, B, C се множествата од задачата **2.69**, $g: B \to C$ е пресликување дефинирано со

$$g: 1 \mapsto s, \quad 2 \mapsto c, \quad 3 \mapsto c.$$

а $f: A \to B$ е пресликување за кое се знае дека составот со g е следново пресликување:

$$g\,f: A \to C; \quad g\,f: a \mapsto s, \quad e \mapsto c.$$

Да се уочи дека $g\,f$ е инјекција и да се покаже дека f мора да е инјекција.

2.71. Нека $f: A \to B$, $g: B \to C$ се пресликувања. Ако нивната композиција $g\,f: A \to C$ е сурјекција, тогаш g е сурјекција. Дали важи обратното?

2.72. Нека $f: A \to B$, $g: B \to C$ се пресликувања. Ако нивната композиција $g\,f: A \to C$ е инјекција, тогаш и f е инјекција. Дали важи обратното?

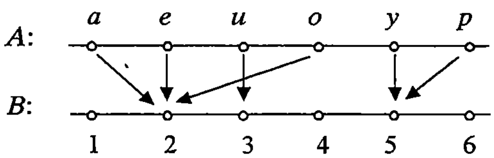
2.73. Нека $f: A \to B$ е пресликување и $S \subseteq A$, $T \subseteq B$. Множеството на сите елементи од B што се слики на елементите од S ќе го означуваме со $f(S)$. Множеството на сите елементи од A чии слики се наоѓаат во T ќе го означиме со $f^{-}(T)$. Значи,

$$S \subseteq A: \quad f(S) = \{y \mid y \in B,\ y = f(s),\ s \in S\},$$
$$T \subseteq B: \quad f^{-}(T) = \{x \mid x \in A,\ f(x) = t \in T\}.$$

Нека пресликувањето

$$f: A \to B, \quad A = \{a, e, u, o, y, p\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

е зададено со следниов дијаграм:



Да се најде $f(S_i)$, односно $f^{-}(T_i)$, ако:

а) $S_1 = \{a, u, p\}$, $S_2 = \{a, e, o, y\}$, $S_3 = \{u\}$, $S_4 = A$.

б) $T_1 = \{3, 4, 5\}$, $T_2 = \{2\}$, $T_3 = \{1, 4, 6\}$, $T_4 = B$.

2.74. При ознаките од задачата **2.73**, да се покаже дека:

а) $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$.

б) $f(S_2 \cup S_3) = f(S_2) \cup f(S_3)$.

в) $f(S_1 \cap S_3) = f(S_1) \cap f(S_3)$.

г) $f(S_1 \cap S_2) \subset f(S_1) \cap f(S_2)$.

2.75. При ознаките од задачата **2.73**, да се покаже дека:

а) $f^{-}(T_1 \cup T_2) = f^{-}(T_1) \cup f^{-}(T_2)$.

б) $f^{-}(T_1 \cap T_3) = f^{-}(T_1) \cap f^{-}(T_3)$.

в) $f^{-}(T_1 \cap T_2) = f^{-}(T_1) \cap f^{-}(T_2)$.

2.76. Нека $f: A \to B$ е пресликување. Во кој случај:

а) $f(A) = B$; б) $f(A) \supset B$; в) $f(A) \subseteq B$?

3. ОПЕРАЦИИ

Решени задачи

3.1. Нека M е непразно множество. Секое пресликување

$$f\colon M \times M \to M$$

се вика *операција* на M. Обично се пишува $x\, f\, y = z$ наместо $f(x, y) = z$. Множеството M, заедно со таа операција, се вика *групоид*.

Да се провери дали е операција на множеството $\mathbb{N}$ од природните броеви следниов пропис f:

а) $f\colon (x, y) \mapsto x + 2y$; б) $f\colon (x, y) \mapsto 2x\colon y$;
в) $f\colon (x, y) \mapsto x + y - xy$; г) $f\colon (x, y) \mapsto x$.

Решение. Во а) и г) f е пресликување, па според тоа, f е операција во $\mathbb{N}$. Во б) и в) f не е пресликување (на пример, во б), $f\colon (1, 3) \mapsto 2\colon 3 = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$, а во в), $f\colon (2, 3) \mapsto 2 + 3 - 6 = -1 \notin \mathbb{N}$); значи, f не е операција во $\mathbb{N}$.

3.2. Во $\mathbb{Q}$ е дефинирана операција $\odot$ со:

а) $x \odot y = x + y + x^2$; б) $x \odot y = \frac{x+y}{2}$; в) $x \odot y = x + y - xy$.
Да се провери дали операцијата $\odot$ е (1) *комутативна*; (2) *асоцијативна*.

Решение. Треба да провериме дали
(1) $x \odot y = y \odot x$; (2) $(x \odot y) \odot c = x \odot (y \odot c)$
за секои x, y, c од $\mathbb{Q}$.

а) Бидејќи, на пример, $1 \odot 2 = 1 + 2 + 1^2 = 4$, а $2 \odot 1 = 2 + 1 + 2^2 = 7$, како и $(1 \odot 2) \odot 3 = 4 \odot 3 = 4 + 3 + 4^2 = 23$, а $1 \odot (2 \odot 3) = 1 + (2 \odot 3) + 1^2 = 1+2+3+2^2+1 = 11$, следува дека $\odot$ не е ни комутативна ни асоцијативна.

б) Имаме: $x \odot y = \frac{x+y}{2} = \frac{y+x}{2} = y \odot x$ за кои било x, y од $\mathbb{Q}$, па значи, $\odot$ е комутативна. Бидејќи, на пример,

$$(1 \odot 2) \odot 3 = \tfrac{1+2}{2} \odot 3 = \tfrac{9}{4} \neq \tfrac{7}{4} = 1 \odot \tfrac{2 \odot 3}{2} = 1 \odot (2 \odot 3),$$

операцијата $\odot$ не е асоцијативна.

в) Бидејќи $x \odot y = x + y - xy = y + x - yx = y \odot x$, како и

$$(x \odot y) \odot c = (x + y - xy) \odot c = x + y - xy + c - (x + y - xy)c$$
$$= x + y + c - xy - xc - yc + xyc\,,$$
$$x \odot (y \odot c) = x \odot (y + c - yc) = x + y + c - yc - x(y + c - yc)$$
$$= x + y + c - xy - xc - yc + xyc\,,$$

за кои било x, y, c од $\mathbb{Q}$, заклучуваме дека операцијата $\odot$ е и комутативна и асоцијативна.

3.3. Во множеството $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ дефинирана е операција $\circ$ со:
$$(k,\, x) \circ (s,\, y) = (k + s,\, 3^s x + y).$$
Да се провери дали $G(\circ)$ е група.

Решение. За едно непразно множество G велиме дека е *група* во однос на една операција $\cdot$ ако се исполнети следниве услови:

1) $G(\cdot)$ е групоид;
2) $(\forall\, x,\, y,\, z \in G)\ (xy)z = x(yz)$, т.е. G е *полугрупа*;
3) постои *неутрален елемент* $e \in G$, т.е.
$$(\forall\, x \in G)\ e\,x = x\,e = x;$$
4) за секој $x \in G$ постои *инверзен елемент* (или: *инверзија*) $y \in G$; т.е.
$$xy = yx = e\,.$$

Ќе испитаме прво дали е $\circ$ асоцијативна. Имаме:
$$[(k,x) \circ (s,y)] \circ (p,c) = (k + s,\, 3^s x + y) \circ (p,\, c) = \big(k + s + p,\, 3^p(3^s x + y) + c\big) =$$
$$= (k + s + p,\, 3^{s+p}\, x + 3^p\, y + c) = (k,\, x) \circ (s + p,\, 3^p\, y + c) =$$
$$= (k,\, x) \circ [(s,\, y) \circ (p,\, c)]\,,$$
што значи, $G(\circ)$ е полугрупа.

Од равенството $(k,\, x) \circ (s,\, y) = (k,\, x)$, т.е. $(k + s,\, 3^s\, x + y) = (k,\, x)$, добиваме:
$$k + s = k, \qquad 3^s x + y = x,$$
од каде што $s = 0$ и $y = 0$. Бидејќи
$$(0,\, 0) \circ (k,\, x) = (k,\, x) \circ (0,\, 0) = (k,\, x),$$
добиваме дека $(0,\, 0)$ е неутрален елемент во $G(\circ)$.

Нека $(k,\, x)$ е кој било даден елемент од G. Од равенството
$$(k,\, x) \circ (s,\, y) = (0,\, 0),$$
т.е. $(k + s,\, 3^s\, x + y) = (0,\, 0)$, добиваме:
$$s = -k, \qquad y = -3^{-k}\, x,$$
па, бидејќи е и $(-k,\, -3^{-k}\, x) \circ (k,\, x) = (0,\, 0)$, добиваме дека $(-k,\, -3^{-k}\, x)$ е инверзен елемент на $(k,\, x)$.

Од сето тоа следува дека $G(\circ)$ е група. Бидејќи, на пример,
$$(1,\, 3) \circ (-1,\, 4) = (0,\, 5) \neq (0,\, 15) = (-1,\, 4) \circ (1,\, 3),$$
следува дека групата е некомутативна.

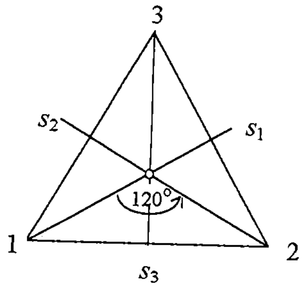
3.4. Даден е рамностран триаголник. Да се најде множеството на неговите симетрии и да се покаже дека тоа е група во однос на операцијата составување на пресликувања.

Решение. Темињата на триаголникот ќе ги означиме со 1, 2, 3, како на приложената слика. Ротациите на триаголникот околу неговиот центар за 120^0, 240^0 и 360^0 ќе ги означиме со ρ_1, ρ_2 и ε соодветно. Значи, имаме:
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Симтетриите во однос на симетралите s_1, s_2, s_3 ќе ги означиме со σ_1, σ_2, σ_3 соодветно. Така, имаме:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Според тоа, множеството од сите симетрии на рамностраниот триаголник е:

$$G = \{\varepsilon, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$



Сега треба да покажеме прво дека множеството G, во однос на операцијата составување на пресликувања, е групоид, т.е. дека составот на кои било два елемента од G е елемент од G. На пример:

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho_2 \in G.$$

Работејќи на овој начин ја добиваме таблицата:

	ε	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ε	ε	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ε	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	ε	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	ε	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	ε	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	ε

Бидејќи составот на пресликувања е асоцијативен (**2.13**), заклучуваме дека групоидот $G(\cdot)$ е полугрупа.

Од таблицата е јасно дека ε е неутрален елемент и дека за секој елемент од G постои инверзен. Значи, $G(\cdot)$ е група.

Бидејќи, на пример, $\sigma_2\sigma_1 = \rho_2 \neq \rho_1 = \sigma_1\sigma_2$, групата е некомутативна.

3.5. Во множеството $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ се дефинирани две операции $\oplus$ и $\odot$ со:

а) $x \oplus y = s \Leftrightarrow x + y = 6a + s, \quad 0 \leq s < 6;$

б) $x \odot y = p \Leftrightarrow x \cdot y = 6c + p, \quad 0 \leq p < 6.$

Да се покаже дека $\mathbb{Z}_6(\oplus)$ и $\mathbb{Z}_6(\odot)$ се полугрупи и да се напишат нивните таблици. Дали овие полугрупи се и групи?

Решение. Да забележиме дека s е остатокот што се добива при делењето на $x + y$ со 6, а p остатокот што се добива при делењето на xy со 6. На пример, имаме $4 \oplus 5 = 3$, зашто бројот $4 + 5 = 9$ при делењето со 6 дава остаток 3, а $4 \odot 5 = 2$, зашто бројот $4 \cdot 5 = 20$ при делењето со 6 дава остаток 2. На тој начин ги добиваме таблиците:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Да докажеме дека важи асоцијативниот закон за $\odot$, (а слично се докажува и за $\oplus$), т.е. да го докажеме равенството:

$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z). \tag{1}$$

Ако барем еден од x, y, z е нула, тогаш и левата и десната страна на (1) е нула, па ќе претпоставиме дека x, y, z се различни од нула.
За левата, односно за десната страна на (1) имаме:

$$(x \odot y) \odot z = p_1 \odot z = p_2\,,$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot p_3 = p_4\,,$$

каде што p_1 е остатокот што се добива при делењето со 6 на бројот xy, p_2 – на $p_1 z$, p_3 – на yz и p_4 – на xp_3, т.е. имаме:

$$xy = 6c_1 + p_1\,, \qquad p_1 z = 6c_2 + p_2\,,$$

$$yz = 6c_3 + p_3\,, \qquad xp_3 = 6c_4 + p_4\,.$$

Од првите две равенства добиваме:

$$xyz = 6zc_1 + 6c_2 + p_2.$$

а од вторите две:

$$xyz = 6xc_3 + 6c_4 + p_4,$$

па според тоа:

$$6(xc_3 + c_4 - zc_1 - c_2) = p_2 - p_4\,. \tag{2}$$

Можеме да претпоставиме дека $p_2 - p_4 \geq 0$; во спротивно, (2) можеме да го помножиме со -1. Тогаш $xc_3 + c_4 - zc_1 - zc_2 \geq 0$, а бидејќи $p_2 - p_4 < 6$, равенството (2) е можно само за $xc_3 + c_4 - zc_1 - c_2 = 0$, т.е. добиваме $p_2 = p_4$, со што равенството (1) е докажано.
Од сето тоа следува дека $\mathbb{Z}_6(\oplus)$ и $\mathbb{Z}_6(\odot)$ се полугрупи, а од симетријата на таблиците во однос на главните дијагонали заклучуваме дека тие полугрупи се комутативни.
Да забележиме дека 0 е неутрален елемент во $\mathbb{Z}_6(\oplus)$ и дека секој елемент е инверзибилен, т.е. $\mathbb{Z}_6(\oplus)$ е група. Исто така, 1 е неутрален елемент во $\mathbb{Z}_6(\odot)$, но $\mathbb{Z}_6(\odot)$ не е група, зашто за 0, 2, 3 и 4 не постојат инверзии.
Операцијата $\oplus$ се вика *собирање модуло* 6 (mod 6), а $\odot$ – *множење модуло* 6 (mod 6).

3.6. Да се покаже дека множеството

$$P = \{x + y \cdot \sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

е поле во однос на операциите собирање и множење на реални броеви.

Решение. Едно множество P во однос на две операции $+$ и $\cdot$ е *прстен*, ако се исполнети следниве услови:

1) $P(+)$ е комутативна група;
2) $P(\cdot)$ е полугрупа;
3) операцијата $\cdot$ е дистрибутивна спрема операцијата $+$, т.е.

$$(\forall x, y, z \in P) \quad x(y+z) = xy + xz\,, \quad (x+y)z = xz + yz.$$

Ако наместо условот 2) се стави условот:
2*) $P^*(\cdot)$ е комутативна група,
тогаш $P(+, \cdot)$ се вика *поле*. (Притоа, P^* е множеството P без неутралниот елемент на $P(+)$.)
Значи, за конкретниот случај треба да извршиме проверка на условите 1), 2*) и 3).
Ако $a + c\sqrt{3}$ и $x + y\sqrt{3}$ се елементи од P, тогаш

$$(a + c \cdot \sqrt{3}) + (x + y \cdot \sqrt{3}) = a + x + (c + y)\sqrt{3}\,,$$

$$(a + c \cdot \sqrt{3})(x + y \cdot \sqrt{3}) = ax + 3cy + (ay + cx)\sqrt{3}\,,$$

т.е. нивниот збир и нивниот производ се елементи од P, што значи, $P(+)$ и $P(\cdot)$ се групоиди. Бидејќи комутативните и асоцијативните закони за собирање и множење важат за произволни реални броеви, тие важат и за реалните броеви што се во P. Значи, $P(+)$ и $P(\cdot)$ се комутативни полугрупи.
Бидејќи $(a+c\cdot\sqrt{3})+(0+0\cdot\sqrt{3}) = a+c\cdot\sqrt{3}$ и $(a+c\cdot\sqrt{3})(1+0\cdot\sqrt{3}) = a+c\cdot\sqrt{3}$, $0 = 0+0\cdot\sqrt{3}$ и $1 = 1+0\cdot\sqrt{3}$ се неутрални елементи во однос на $+$ и $\cdot$ соодветно. За $a+c\cdot\sqrt{3}$ во однос на $+$, инверзен (т.е. спротивен) е $(-a)+(-c\cdot\sqrt{3})$, а ако $a+c\cdot\sqrt{3}\in P^*$, т.е. $a+c\sqrt{3}\neq 0$, тогаш равенството $(a+c\sqrt{3})(x+y\cdot\sqrt{3}) = 1$ ги дава равенките:

$$ax+3cy = 1\,, \qquad ay+cx = 0,$$

чие решение по x, y е: $x = \frac{a}{a^2-3c^2}$, $y = \frac{-c}{a^2-3c^2}$, па:

$$(a+c\cdot\sqrt{3})^{-1} = \frac{a}{a^2-3c^2} + \frac{-c}{a^2-3c^2}\sqrt{3}\,.$$

(Јасно е дека $a^2-3c^2 \neq 0$ за кои било a, $c \in \mathbb{Q}$.) Значи, $P(+)$ и $P^*(\cdot)$ се комутативни групи.
Дистрибутивните закони на $\cdot$ спрема $+$ важат за целото множество на реални броеви, па важат и во P.
Од сето тоа следува дека $P(+,\,\cdot)$ е поле.

3.7. Да се покаже дека множеството

$$B = \{0,\, a,\, c,\, 1\}$$

е булова алгебра во однос на операциите $\vee$ и $\wedge$, дефинирани со таблиците:

$\vee$	0	a	c	1
0	0	a	c	1
a	a	a	1	1
c	c	1	c	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	c	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
c	0	0	c	c
1	0	a	c	1

Решение. Едно множество B, на кое се дефинирани две операции $\vee$ и $\wedge$, се вика *булова алгебра*, ако се исполнети следниве услови 1) до 4):

1) Групоидите $B(\vee)$ и $B(\wedge)$ се комутативни;
2) $B(\vee)$ и $B(\wedge)$ имаат неутрални елементи 0 и 1 соодветно;
3) $(\forall x,y,z \in B)\ x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$,

$$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

(*дистрибутивни закони*).
4) $(\forall x\in B)(\exists x'\in B)\, x\vee x' = 1$ и $x\wedge x' = 0$ (x' се вика *комплемент* на x).
Значи, за да утврдиме дали е дефинирана булова алгебра со зададените таблици, треба да ги провериме условите 1) до 4).
Бидејќи таблиците се симетрични во однос на „главните“ дијагонали, групоидите $B(\vee)$ и $B(\wedge)$ се комутативни. Потоа, имаме $x\vee 0 = x$ и $x\wedge 1 = x$ за секој x од B, па значи 0 и 1 се неутрални елементи на $B(\vee)$ и $B(\wedge)$ соодветно. Бидејќи 1 во првата (а 0 во втората) таблица се јавува во секоја редица и во секоја колона, за секој x постои x' од B со својствата $x\vee x' = 1$, односно $x\wedge x' = 0$. Значи, исполнети се условите 1), 2) и 4), па останува уште да се провери 3).
Да покажеме дека важи дистрибутивниот закон

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{1}$$

а другиот се докажува слично. Ако $x = 0$ или $x = 1$, тогаш точноста на (1) е јасна (да се види и **3.80**). Нека $x = a$; тогаш (користејќи ги **3.8** и **3.80**) имаме:

$$a \wedge (0 \vee z) = a \wedge z, \ (a \wedge 0) \vee (a \wedge z) = 0 \vee (a \wedge z) = a \wedge z, \tag{2}$$

$$a \wedge (1 \vee z) = a, \ (a \wedge 1) \vee (a \wedge z) = a \vee (a \wedge z) = a, \tag{3}$$

$$a \wedge (a \vee c) = a, \ (a \wedge a) \vee (a \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a. \tag{4}$$

Ако, пак, $x = c$, тогаш, пишувајќи c наместо a и a наместо c во (2), (3) и (4), се добиваат соодветни равенства, што значи, точно е (1).
Од сето тоа следува дека $B(\vee, \wedge)$ е булова алгебра.

3.8. Да се покаже дека за секој пар елементи x, y од една булова алгебра B се исполнети равенствата:

$$x \vee (x \wedge y) = x \quad \text{и} \quad x \wedge (x \vee y) = x.$$

Решение. Користејќи ги по ред условите 2), 3), равенството $1 \vee x = x$, односно $0 \wedge x = 0$ (види **3.80**) и 2), наведени во **3.7**, добиваме:

$$x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x,$$

$$x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x.$$

3.9. Да се докаже дека $\vee$ и $\wedge$ во една булова алгебра B се асоцијативни.

Решение. Треба да докажеме дека за секои x, y, $z \in B$:

а) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$; б) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

Ќе го докажеме само првото равенство. Нека $(x \vee y) \vee z = a$ и $x \vee (y \vee z) = c$. Користејќи ја **3.8** и условот 3) од **3.7**, добиваме:

$$\begin{aligned} x \wedge a &= x \wedge [(x \vee y) \vee z] = [x \wedge (x \vee y)] \vee (x \wedge z) \\ &= x \vee (x \wedge z) = x = x \wedge [x \vee (y \vee z)] = x \wedge c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' \wedge a &= x' \wedge [(x \vee y) \vee z] = [x' \wedge (x \vee y)] \vee (x' \wedge z) = \\ &= [(x' \wedge x) \vee (x' \wedge y)] \vee (x' \wedge z) = [0 \vee (x' \wedge y)] \vee (x' \wedge z) = \\ &= (x' \wedge y) \vee (x' \wedge z) = x' \wedge (y \vee z) = \\ &= (x' \wedge x) \vee [x' \wedge (y \vee z)] = x' \wedge [x \vee (y \vee z)] = \\ &= x' \wedge c. \end{aligned}$$

Оттука:

$$(x \wedge a) \vee (x' \wedge a) = (x \wedge c) \vee (x' \wedge c),$$

$$(x \vee x') \wedge a = (x \vee x') \wedge c,$$

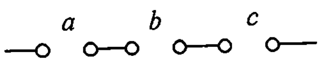
$$a = c.$$

3.10. Да се формираат возможни контактни шеми, составени од три прекинувачи a, b, c.

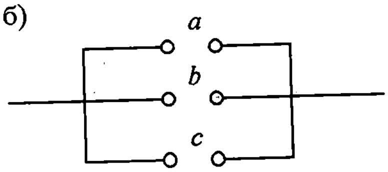
Решение. Возможни се четири случаи за врзување на прекинуbачите:
а) сериски; б) паралелно; в) две сериски, сврзани паралелно со третата;
г) две паралелно, сврзани сериски со третата.

Шемите се:

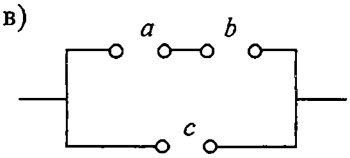
а)



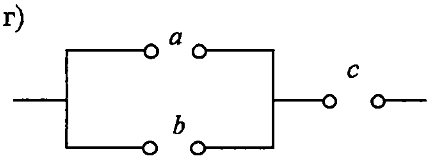
б)



в)



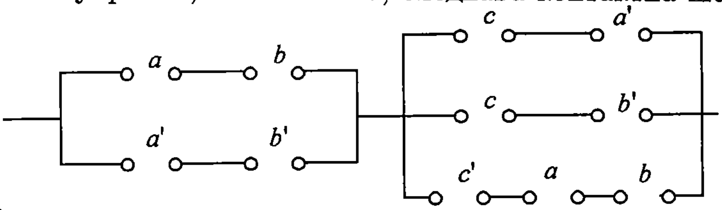
г)



Изразите што одговараат на тие шеми се:

а) $a \wedge b \wedge c$; б) $a \vee b \vee c$; в) $(a \wedge b) \vee c$; г) $(a \vee b) \wedge c$.

3.11. Да се упрости, ако е можно, следнава контактна шема:



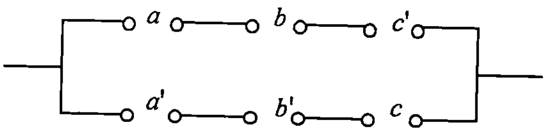
Решение. Изразот што одговара на оваа шема е:

$$K = [(a \wedge b) \vee (a' \wedge b')] \wedge [(c \wedge a') \vee (c \wedge b') \vee (c' \wedge a \wedge b)].$$

Пишувајќи $+$ наместо $\vee$ и $\cdot$ наместо $\wedge$, а имајќи предвид дека $x + x = x = xx$, $x + x' = 1$ и $xx' = 0$, добиваме:

$$K = (ab + a'b')(ca' + cb' + c'ab) =$$
$$= abca' + abcb' + abc'ab + a'b'ca' + a'b'cb' + a'b'c'ab =$$
$$= 0 + 0 + abc' + a'b'c + a'b'c + 0 =$$
$$= abc' + a'b'c, \qquad \text{т.е.}$$
$$K = (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c).$$

Така, контактната шема што одговара на последниот израз е



и е еквивалентна со дадената.

Задачи за вежбање

3.12. Во $\mathbb{N}$ е дефинирана операција $\circ$ со:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N}) \ x \circ y = x.$$

Да се испитаат нејзините својства.

3.13. Во $\mathbb{R}$ е дефинирана операција $\ominus$ со: $x \ominus y = x + y - xy$. Да се покаже дека:

а) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, x \ominus y = y \ominus x$.
б) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, x \ominus (y \ominus z) = (x \ominus y) \ominus z$.
в) ако $a \neq 1$, тогаш $x \ominus a = y \ominus a$ ако и само ако $x = y$.

3.14. Да се испитаат својствата на операциите $\circ$ и $\oplus$ на множеството $A = \{a, c, e, p\}$, определени со следните таблици:

а)

$\oplus$	a	c	e	p
a	a	c	e	p
c	c	e	p	a
e	e	p	a	c
p	p	a	c	e

б)

$\circ$	a	c	e	p
a	p	a	e	c
c	a	e	c	p
e	c	p	a	e
p	e	c	p	a

3.15. Да се испитаат својствата операцијата $\oplus$, дефинирана во $\mathbb{R}$ на следниов начин:

$$x \oplus y = x + y + 2xy.$$

3.16. Да се испитаат својствата на операцијата $\circ$, дефинирана во множеството $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (подредените парови на рационалните броеви) на следниов начин:

$$(a, c) \circ (x, y) = (ax, ay + c).$$

3.17. Да се утврди дали е групоид во однос на множењето цели броеви следново множество:

а) $\{-1, 0, 1\}$; б) $\{1, 3\}$; в) $\{2, 4, 6, \ldots\} = \{x \mid x$ е парен $\}$;
г) $\{1, 3, 5, \ldots\} = \{x \mid x$ е непарен $\}$; д) $\{x \mid x$ е прост $\}$;
ѓ) $\{3, 9, 27, \ldots\} = \{3^x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Да се испита дали се групоиди (**3.18–3.29**) зададените множества во однос на означените операции. Кои од групоидите се комутативни, кои се полугрупи и кои се со неутрален елемент?

3.18. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; собирање на природни броеви.

3.19. $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$; одземање на цели броеви.

3.20. $\{1, 3, 5, \ldots\}$; собирање на природни броеви.

3.21. $\mathbb{Q}^*$; собирање на рационални броеви.

3.22. $\mathbb{Q}^*$; делење на рационални броеви.

3.23. $\mathbb{Q}$; $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. **3.24.** $\mathbb{R}$; $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

3.25. $\mathbb{R}$; $x \circ y = x^2 + y^2$. **3.26.** $\mathbb{R}$; $x \circ y = |x + y|$.

3.27. $\mathbb{R}$; $x \circ y = \max\{x, y\}$.

3.28. $G = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$; одземање на цели броеви.

3.29. $G = \{1, -1, i, -i\}$; собирање на комплексни броеви.

3.30. Толкувајќи ги точките од рамнината P како парови реални броеви, да се покаже дека се операции во P следниве прописи:
а) $(x, y) \circ (x_1, y_1) = (x, y)$ ако $(x, y) = (x_1, y_1)$;
$(x, y) \circ (x_1, y_1) =$ средната точка од отсечката што ги сврзува точките (x, y), (x_1, y_1) кога тие се различни;
б) $(x, y) \circ (x_1, y_1) = (xx_1, yy_1)$;
в) $(x, y) \circ (x_1, y_1) = (x + x_1, x_1 y + y_1)$.
Да се испитаат својствата на групоидот $P(\circ)$.

3.31. Во множеството $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ е дефинирана операција $\circ$ со:
а) $(x, y) \circ (a, c) = (x + a, (-1)^a \cdot y + c)$.
б) $(x, y) \circ (a, c) = (x + a, (-1)^a \cdot y - c)$.
Да се испита $G(\circ)$.

Да се испита дали се групи (**3.32**–**3.44**) зададените множества во однос на назначените операции.

3.32. $\mathbb{N}$; множење на природни броеви.

3.33. $G = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$; собирање на цели броеви.

3.34. $G = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$; множење на цели броеви.

3.35. $G = \{-1, 1\}$; множење на цели броеви.

3.36. $G = \{a^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, a е фиксен реален број, $a \neq 0$; множење на реални броеви.

3.37. $G = \{3^p 5^s \,|\, p,\ s \in \mathbb{Z}\}$; множење на рационални броеви.

3.38. $G = \left\{\frac{c}{10^k} \,|\ c \in \mathbb{Z};\ \ k \in \mathbb{N}\right\}$; собирање на рационални броеви.

3.39. $G = \{x + y\sqrt{2} \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\}$; собирање на реални броеви.

3.40. $G = \{x + y\sqrt{2} \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$; множење на реални броеви.

3.41. $G = \{x + y\sqrt{2} \,|\, x, y \in \mathbb{Q}^*\}$; множење на реални броеви.

3.42. $G = \left\{\frac{x}{y} \,|\, x, y \in \mathbb{N},\ \ x \leq y\right\}$; множење на рационални броеви.

3.43. $G = \{1, -1, 1, i, -i\}$; множење на комплексни броеви.

3.44. $G = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R},\ \ x^2 + y^2 = 1\}$; множење на комплексни броеви.

3.45. Во множеството $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ е дефинирана операција $\circ$ со:
а) $(k, x) \circ (s, y) = (k + s,\, 3^{-s} x + y)$.
б) $(k, x) \circ (s, y) = (k + s,\, 3^{s} x - y)$.
Дали $G(\circ)$ е група?

3.46. Да се покаже дека множеството T од сите функции $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, каде што a, b, c, d се реални броеви што го задоволуваат условот $ad - bc = 1$, е група во однос на операцијата состав на пресликувања.

3.47. Да се покаже дека множеството $G = \{\rho_1, \rho_2, \varepsilon\}$ од ротациите на рамностран триаголник околу неговиот центар за 120^0, 240^0 и 360^0 е група во однос на операцијата состав на пресликувања. Да се напише таблицата и да се провери дали G е комутативна.

3.48. Да се најде множеството G_i, $i = 1, 2, 3, 4$, од симетрии на:
1) рамнокрак триаголник, 2) ромб,
3) правоаголник, 4) квадрат,
а потоа да се покаже дека тоа множество е група во однос на операцијата состав на пресликувања. Да се напише таблицата на секоја од овие групи и да се види дали некоја од нив е комутативна.

3.49. Во множеството $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ се дефинирани операции $\oplus$ и $\odot$ со:
а) $x \oplus y = s \Leftrightarrow x + y = na + s, \quad 0 \le s < n$;
б) $x \odot y = p \Leftrightarrow xy = nc + p, \quad 0 \le p < n$.
Да се покаже дека $\mathbb{Z}_n(\oplus)$ е група. Дали и $\mathbb{Z}_n^*(\odot)$ е група?
Да се испита дали се групи (**3.50–3.54**) зададените множества во однос на назначените операции.

3.50. $\{1, 3, 5, 7\}$; множење mod 8.

3.51. $\{1, 3, 4, 5, 9\}$; множење mod 11.

3.52. $\{1, 3, 5, 7, 8\}$; множење mod 11.

3.53. $\{1, 5, 7, 11\}$; множење mod 12.

3.54. $\{1, 5, 8, 12\}$; множење mod 13.

3.55. Да се провери дали множеството
а) $P = \{2k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$; б) $S = \{2k + 1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ е прстен во однос на операциите собирање и множење на цели броеви.

3.56. Дадено е множеството:

а) $P = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$; б) $P = \{m + n\sqrt[3]{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.
Да се испита дали P, во однос на операциите собирање и множење на реални броеви, е прстен.

3.57. Да се покаже дека множеството

а) $P = \left\{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Q},\, k \in \mathbb{N}^0\right\}$; б) $P = \left\{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N}^0\right\}$

во однос на операциите собирање и множење на рационални броеви е комутативен прстен со единица. Дали е поле?

3.58. Во множеството

$$P = \{(a, c) \mid a, c \in \mathbb{Z},\, c \neq 0\}$$

дефинираме еднаквост, собирање $(+)$ и множење $(\cdot)$ на следниов начин:

$$(a, c) = (x, y) \Leftrightarrow ay = cx\,;$$
$$(a, c) + (x, y) = (ay + cx, cy)\,;$$
$$(a, c) \cdot (x, y) = (ax, cy)\,.$$

Да се покаже дека $P(+, \cdot)$ е поле.

3.59. Во множеството од сите парови реални броеви

$$T = \{(a, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\},$$

дефинираме еднаквост и операции $+$ и $\cdot$ со:

$$(a, c) = (x, y) \Leftrightarrow a = x,\ \ c = y$$
$$(a, c) + (x, y) = (a + x, c + y)\,,$$
$$(a, c) \cdot (x, y) = (ax - cy, ay + cx)\,.$$

Да се покаже дека $T(+, \cdot)$ е поле.

3.60. Да се покаже дека $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ во однос на операциите $\oplus$ и $\odot$, дефинирани во задачата **3.49**, е поле.

3.61. Во множеството $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ се дефинирани операции $\oplus$ и $\odot$ како во задачата **3.49**. Да се покаже дека $\mathbb{Z}_n(\oplus, \odot)$ е прстен. Дали е и поле?

3.62. Да се покаже дека множеството $B = \{0, 1\}$ во однос на операциите $\vee$ и $\wedge$, дефинирани со:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

е булова алгебра.

3.63. Нека $M = \{x, y\}$. Да се покаже дека множеството $B = \mathsf{P}(M)$ е булова алгебра во однос на операциите $\cup$ и $\cap$ на множества. Да се напишат таблиците на операциите.

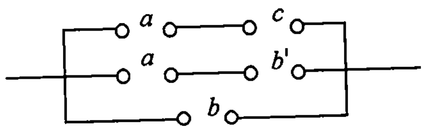
3.64. Да се упрости изразот:

а) $(x \wedge y \wedge c) \vee (x' \vee y' \vee c')$; б) $[x \vee (x' \wedge y)] \wedge [y \vee (y \vee c)]$;

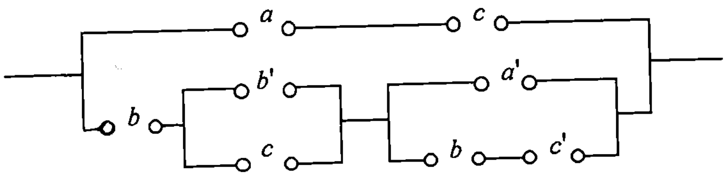
в) $[(x \vee y)' \wedge c] \vee (x' \wedge y)'$; г) $[(x' \wedge y') \vee (c' \wedge y)] \wedge [y' \vee (x \wedge c)]$.

3.65. Да се упрости контактната шема:

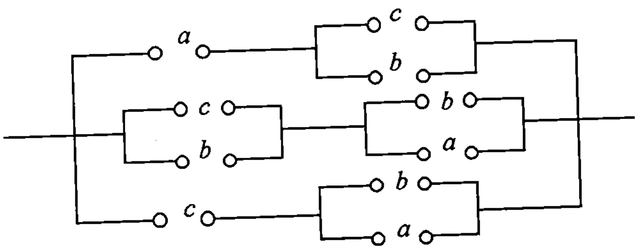
а)



б)



в)



* * *

3.66. Нека $S(\cdot)$ е полугрупа. Ставајќи $x \circ y = yx$, добиваме групоид $S(\circ)$. Да се покаже дека $S(\circ)$ е полугрупа.

3.67. Нека $S(\cdot)$ е полугрупа и a даден елемент од S. Да ставиме:

$$x \circ y = xay.$$

Да се покаже дека и $S(\circ)$ е полугрупа.

3.68. Нека M е дадено множество. Во $S = \mathbf{P}\,(M)$ дефинираме операција $\circ$ со:

$$A \circ B = A \cup B \quad \text{ако} \quad A \cup B = \emptyset,$$
$$A \circ B = M \quad \text{ако} \quad A \cup B \neq \emptyset.$$

Да се покаже дека $S(\circ)$ е комутативна полугрупа со неутрален елемент.

3.69. Да се покаже дека множеството

$$G = \left\{0, \tfrac{1}{k}, \tfrac{2}{k}, \ldots, \tfrac{k-1}{k}\right\},$$

каде што k е фиксен природен број, во однос на операцијата $+$:

$$\frac{p}{k} + \frac{s}{k} = \begin{cases} \frac{p+s}{k} & \text{за} \quad p+s \leq k \\ \frac{p+s-k}{k} & \text{за} \quad p+s \geq k \end{cases}$$

е група.

3.70. Нека $S(\cdot)$ е полугрупа во која е исполнет условот:

$$(\forall\, a,\, x \in S)\, a^2x = xa^2 = x\,. \tag{1}$$

Да се покаже дека $S(\cdot)$ е комутативна група.

3.71. Нека M е дадено множество и $G = \mathbf{P}\,(M)$ партитативното множество на M. Да се покаже дека G во однос на операцијата $\triangle$ (симетрична разлика на множества) е група.

3.72. Да се провери дали множеството

а) $P = \{x + y \cdot \sqrt[4]{9} \mid x,\, y \in \mathbf{Z}\}$; б) $M = \{x + y\sqrt[5]{9} \mid x,\, y \in \mathbf{Z}\}$,
е прстен во однос на операциите собирање и множење на реални броеви.

3.73. Да се покаже дека множеството

$$P\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{Q}\}$$

е поле во однос на операциите собирање и множење на реални броеви.

3.74. Дадено е полето $\mathbf{Z}_5$ (види **3.60**). Да се покаже дека множеството

$$P = \{(x,\, y) \mid x,\, y \in \mathbf{Z}_5\}$$

е поле во однос на операциите $+$ и $\cdot$, дефинирани со:

$$(a,\, c) + (x,\, y) = (a + x,\, c + y)\,,$$
$$(a,\, c)(x,\, y) = (ax - cy,\, ay + cx)\,.$$

Колку елементи има полето $P(+,\, \cdot)$?

3.75. Нека M е дадено множество и нека $P = \mathbb{P}(M)$ е партитивното множество на M. Да се покаже дека $P(\triangle, \cap)$, каде што $\triangle$ е симетрична разлика, а $\cap$ е операцијата пресек на множества, е комутативен прстен.

3.76. За прстенот од претходната задача, да се покаже дека:

а) $x^2 = x$ за секој $x \in P$; б) $x + x = 0$ за секој $x \in P$;
в) $xy(x + y) = 0$ за кои било $x, y \in P$. (Притоа: $+$ е $\triangle$, а $\cdot$ е $\cap$.)

3.77. Ако прстенот P го има својството

$$(\forall x \in P)\, x^2 = 0,$$

тогаш тој го има и својството $xy = -yx$, за кои било x, $y \in P$.

3.78. Нека B е подмножество од $\mathbb{N}$. За кои било x, y од B дефинираме $x \vee y$ и $x \wedge y$ да бидат најмалиот заеднички содржател и најголемиот заеднички делител на x и y. Дали во однос на овие операции, следниве множества се булови алгебри:

а) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; б) $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$;
в) $\{1, 2, 3, 4, 12\}$; г) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

3.79. Да се докаже дека за секој x од буловата алгебра B, елементот x дефиниран во (4) од задачата **3.7** е еднозначно определен.

3.80. Да се докаже дека за секој x од буловата алгебра B се исполнети следниве равенства:

а) $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$. б) $x \vee 1 = 1$ и $x \wedge 0 = 0$.
в) $(x \vee y)' = x \wedge y$ и $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

3.81. За две групи $G = G(\circ)$ и $G'(*)$ се вели дека се *изоморфни*, ако постои биекција $f\colon G \to G'$, таква што

$$(\forall x, y \in G)\ f(x \circ y) = f(x) * f(y).$$

Да се покаже дека групата $G = \mathbb{Z}\ (+)$ е изоморфна со групата

а) $G' = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (од **3.33**); б) $G' = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (од **3.36**).

3.82. Да се провери дали е изоморфна групата од зад. **3.50** со групата од задачата: а) **3.53**; б) **3.43**; в) **3.54**; г) **3.48**, G_2 и G_3.

4. ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД

Решени задачи

4.1. Нека a, b, c, d се реални броеви. Шемата $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ќе ја сметаме за реален број еднаков со $ad - bc$,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1}$$

и ќе ја викаме *детерминанта од втор ред.* Да се покаже дека

а) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Потоа, да се искаже со зборови значењето на секое од горните равенства.

Решение. Користејќи ја дефиницијата (1), добиваме:

а) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,

што значи дека детерминантата не се менува ако редиците си ги разменат местата со соодветните колони, т.е. колоните се „рамноправни“ со редиците.

б) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,

а тоа значи дека детерминантата добива спротивен знак ако редиците си ги разменат местата.

в) $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\,a\,d - k\,c\,b = k(ad - bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,

т.е. детерминантата се множи со број ако секој член од една колона се помножи со тој број.

г) $\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix} = a(d+kc) - c(b+ka) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Значи, детерминантата не се менува ако кон едната колона се додадат соодветните членови од другата колона помножени со ист број k.

4.2. Да се пресмета детерминантата од трет ред: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Под *детерминанта од трет ред* подразбираме квадратна шема од девет реални броеви a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$, сместени во три редици и три колони, а нејзиното значење е определено со помош на детерминанти од втор ред на следниов начин:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Во овој случај велиме дека детерминантата е *развиена по првата редица.* Според тоа, имаме:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (0-6) - 3 \cdot (0+3) + 4 \cdot (2-1) = -12 - 9 + 4 = -17.$$

Забелешка. Детерминантите од втор ред:

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_{11}, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_{12}, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_{13}$$

се викаат *минори* (од втор ред) на детерминантата D што одговараат на елементите од првата редица, a_1, a_2, a_3 соодветно, а бројот

$$A_i = (-1)^{1+i}\,\Delta_{1i}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

се вика *алгебарски комплемент* што му одговара на елементот a_i. Имајќи го тоа предвид, (2) можеме да го напишеме на следниов начин:

$$D = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \tag{2'}$$

а се покажува дека се точни и равенствата

$$D = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 \quad \text{и} \quad D = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, \tag{2''}$$

каде што

$$B_i = (-1)^{2+i}\,\Delta_{2i} \quad \text{и} \quad C_i = (-1)^{3+i}\,\Delta_{3i} \tag{3'}$$

се алгебарски коплементи на елементите b_i (од втората редица) и c_i (од третата редица) соодветно.

За пример, дадената детерминанта ќе ја развиеме по третата редица Имаме:

$$C_1 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -13, \quad C_2 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$C_3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_1 + (-2) \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 = 1 \cdot (-13) + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 5 = -17.$$

Да забележиме дека според (3) и (3′), се добива следново едноставно „правило на знаците":

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

4.3. Да се најдат: а) минорите Δ_{2i} и б) алгебарските комплементи B_i што одговараат на елементите од втората редица на детерминантата:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Имаме (види **4.2**):

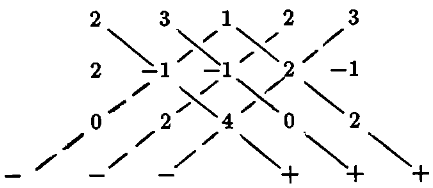
а) $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -13, \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -11$

б) $B_1 = (-1)^{2+1}\,\Delta_{21} = 5, \quad B_2 = -13, \quad B_3 = 11.$

4.4. Со помош на Сарусовото правило, да се пресмета:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Допишувајќи ги првата и втората колона до дадената детерминанта, ја добиваме следнава правоаголна шема:



Вредноста на детерминантата се добива ако од збирот на трите производи, земени по полните линии, се одземе збирот на трите производи земени по точкестите линии, т.е.

$D = 2\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 2 - \big(0\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 3\big) = -24.$

4.5. Користејќи ја особината $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + ka_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 + kb_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 + kc_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,

да се пресмета: а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & a & pc \\ 1 & p & ca \\ 1 & c & ap \end{vmatrix}$.

Решение. а) Ако првата колона ја помножиме прво со 3 и ја додадеме на втората колона, а потоа со −4 и ја додадеме на третата колона, детерминантата нема да се промени. Но, затоа, пак, во првата редица се појавуваат две нули, па пресметувањето со помош на (2) од **4.2** се упростува. Значи, имаме:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \\ -3 & -7 & 16 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 16 \end{vmatrix} = -(80-49) = -31.$$

б) Ако од втората, а потоа од третата ја одземеме првата редица, добиваме:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & pc \\ 1 & p & ca \\ 1 & c & ap \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & pc \\ 0 & p-a & ca-pc \\ 0 & c-a & ap-pc \end{vmatrix}$$

$$= p(p-a)(a-c) - c(a-p)(c-a) = (a-p)(p-c)(c-a).$$

4.6. Со помош на Крамеровото правило, да се реши системот линеарни равенки:

а) $3x + 2y = 1\,,\quad -x - 2y = 5\,;$ б) $3x - 2y + z = 1\,,\quad 2x + 3y - 5z = 8\,,\quad -x + y - z = 0\,.$

Решение. Пишувајќи ги коефициентие пред x, y, односно z како прва, втора, односно трета колона, добиваме детерминанта D, наречена детерминанта на системот. Ако слободните членови ги поставиме на соодветните места од коефициентите на x, y, односно z, добиваме детерминанти D_x, D_y односно D_z. Ако е $D \neq 0$, тогаш решението на системот е дадено со формулите:

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{S}, \quad \text{односно} \quad z = \frac{D_z}{D}, \tag{4}$$

наречени правило на Крамер за решавање системи линеарни равенки. За дадените системи имаме:

а) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0;\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12;\ D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 16,$

па, заменувајќи во (4), добиваме:

$$x = \tfrac{-12}{-4} = 3, \qquad y = \tfrac{16}{-4} = -4.$$

б) $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 17 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 17 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3;$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & -13 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 19 & -13 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -9;$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -3,$$

па, заменувајќи во (4), добиваме:

$$x = 2, \qquad y = 3, \qquad z = 1.$$

4.7. Даден е системот:

$$\begin{aligned} b\cos\alpha + a\cos\beta &= c \\ c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b\,, \\ c\cos\beta + b\cos\gamma &= a\,, \end{aligned}$$

по непознатите $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Ако α, β, γ се аглите на еден триаголник и a, b, c соодветните страни, да се даде геометриско толкување на решението на системот.

Решение. Да ја означиме со D детерминантата на системот, а со D_1, D_2, D_3 – детерминантите што се однесуваат на непознатите $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ соодветно. Добиваме:
$D = -2abc$, $D_1 = a(a^2 - c^2 - b^2)$, $D_2 = b(b^2 - c^2 - a^2)$, $D_3 = c(c^2 - a^2 - b^2)$.
Од условот имаме: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, па

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Геометриски, со овие равенства се дадени конусните теореми.

Задачи за вежбање

Да се пресметаат следниве детерминанти (**4.8**–**4.12**):

4.8. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$ **4.9.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}.$ **4.10.** $\begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}.$

4.11. $\begin{vmatrix} a+1 & c+1 \\ c-1 & a-1 \end{vmatrix}.$ **4.12.** $\begin{vmatrix} \operatorname{ctg} x & 1 \\ \cos^2 x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}.$

Да се решат равенките (4.13–**4.18**):

4.13. $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$ **4.14.** $\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ x-3 & 2x \end{vmatrix} = 0.$

4.15. $\begin{vmatrix} x^2-4 & 4 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0.$ **4.16.** $\begin{vmatrix} x^2-2 & -2 \\ 6x+2 & x+2 \end{vmatrix} = 0.$

4.17. $\begin{vmatrix} 2\sin x & 1 \\ 3 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$ **4.18.** $\begin{vmatrix} \cos 8x & \sin 5x \\ -sin8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0.$

4.19. Да се решат неравенките:

а) $\begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} > 0;$ б) $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ -5 & x+2 \end{vmatrix} > 0.$

Со помош на детерминанти да се решат следниве системи линеарни равенки (**4.20**–**4.23**):

4.20. $3x - 7y = 5\,,$ $x + 4y = 8\,.$ **4.21.** $4x + 6y = 2\,,$ $2x + 3y = 1\,.$

4.22. $ax + by = c,$ $x - ay = c\,;$ $(a^2 + b^2 \neq 0)\,.$ **4.23.** $3ax - 5by = 2c\,,$ $ax - 2by = c\,;$ $(ab \neq 0)\,.$

4.24. Со директно пресметување да се докаже дека една детерминанта од трет ред не се менува ако редиците и колоните си ги разменат улогите.

4.25. Ако сите елементи во некоја редица (колона) се нули, тогаш и самата детерминанта е нула.

4.26. За детерминанти од трет ред да се формулираат тврдењата: а′), б′), в′) и г′), аналогни на а), б), в) и г) од задачата **4.1**, а потоа да се докажат.

4.27. Ако две редици (колони) на една детерминанта од трет ред се еднакви, тогаш детерминантата е еднаква со нула.

4.28. Развивајќи ги по елементите од некоја (на пример, првата) редица, да се пресметаат следните детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -a & b & 1 \\ c & 1 & -b \\ -1 & c & -a \end{vmatrix}$.

4.29. Со помош на Сарусовото правило, да се пресметаат следниве детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{tg} x \\ \cos x & 0 & \cos x \\ \operatorname{tg} x & \cos x & 0 \end{vmatrix}$.

Да се пресметаат следниве детерминанти (**4.30**–**4.33**):

4.30. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. **4.31.** $\begin{vmatrix} 1-a & 3 & 3 \\ 3 & 5+a & 3 \\ 6 & 6 & 4-a \end{vmatrix}$.

4.32. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ap & ac \\ ap & p^2+1 & pc \\ ac & pc & c^2+1 \end{vmatrix}$. **4.33.** $\begin{vmatrix} y^2+c^2 & y^2 & c^2 \\ x^2 & c^2+x^2 & c^2 \\ x^2 & y^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}$.

Во задачите **4.34**–**4.37**, да се реши по x равенката:

4.34. $\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ a & x+a & a \\ a & a & x+a \end{vmatrix} = 0.$ **4.35.** $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & 3 \\ x+3 & 2 & x+1 \\ 1 & x+2 & x+3 \end{vmatrix} = 0.$

4.36. $\begin{vmatrix} 3+x & 1 & 1 \\ 5 & 3-x & 1 \\ 6 & 6 & 4+x \end{vmatrix} = 0.$ **4.37.** $\begin{vmatrix} x^2+a^2 & -1 & 1 \\ 1 & x^2+a^2 & 1 \\ x^2+a^2 & x^2+a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Во задачите **4.38**–**4.42**, не развивајќи ја детерминантата, а користејќи ги особините на детерминантите (**4.25**–**4.27**), да се покаже дека:

4.38. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$ **4.39.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

4.40. $\begin{vmatrix} 1 & a & p+c \\ 1 & p & c+a \\ 1 & c & a+p \end{vmatrix} = 0.$ **4.41.** $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \cos 2x \\ \sin^2 y & \cos^2 y & \cos 2y \\ \sin^2 z & \cos^2 z & \cos 2z \end{vmatrix} = 0.$

4.42. а) $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-p \\ x+a & 0 & x-c \\ x+p & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0,$ за $x = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2+ax & ax+a^2 & -ax \\ x^2+ax & -ax & ax+a^2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ за $x = -a/2$.

Со помош на детерминанти, да се решат системите (**4.43–4.46**)

4.43. $\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 2, \\ x + 10y - 3z &= 5, \\ -x + y + z &= -3. \end{aligned}$ **4.44.** $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8, \\ -x + 2y + z &= 4, \\ 3x + y - 4z &= 0. \end{aligned}$

4.45. $\begin{aligned} x + ay &= 3, \\ ax + z &= 2, \\ y + az &= 1; \end{aligned}$ $a \neq -1$ **4.46.** $\begin{aligned} 5ax - 4by + 2cz &= 3abc, \\ 3ax - 6by + 5cz &= 2abc, \\ 2ax - 3by + cz &= 0; \end{aligned}$ $abc \neq 0$.

4.47. Ако $21x-8y+a=5x-2y-1=2x-3y+4=0$, докажи дека $a=-5$.

4.48. Да се елиминираат x, y, односно z од равенките:

а) $\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ bx + cy + a &= 0, \\ cx + ay + b &= 0. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} az &= cx - y, \\ cy &= bz - x, \\ x &= ay - z. \end{aligned}$

4.49. Зададен е триаголник ABC, со страни a, b, c и агли α, β, γ, што лежат наспроти страните a, b, c соодветно. Да се покаже дека детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} c^2 & a\sin\gamma & b\sin\gamma \\ a\sin\gamma & 1 & \cos\gamma \\ b\sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} b^2 & c\sin\beta & a\sin\beta \\ c\sin\beta & 1 & \cos\beta \\ a\sin\beta & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$;

се еднакви на нула.

4.50. При кои услови е точно равенството:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

* * *

4.51. Да се покаже *Лагранжовиот идентитет*:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$

4.52. Да се покаже дека

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1c_1 + a_2c_3 & a_1c_2 + a_2c_4 \\ a_3c_1 + a_4c_3 & a_3c_2 + a_4c_4 \end{vmatrix}.$$

Користејќи го тоа равенство и ставајќи $a_3 = -a_2$, $a_4 = a_1$, $c_3 = -c_2$, $c_4 = c_1$, да се покаже дека е:

$$(a_1^2 + a_2^2)(c_1^2 + c_2^2) = (a_1c_1 - a_2c_2)^2 + (a_2c_1 + a_1c_2)^2.$$

Да се покаже (во **4.53–4.59**) точноста на равенството:

4.53. $$\begin{vmatrix} a & a^2 & p+c \\ p & p^2 & c+a \\ c & c^2 & a+p \end{vmatrix} = (a+p+c)(a-p)(p-c)(c-a).$$

4.54. $$\begin{vmatrix} x+1 & x+1 & 1 \\ x+1 & 2 & x+1 \\ 3 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 2(2-x)(1+x)^2 - 6.$$

4.55. $$\begin{vmatrix} (p+c)^2 & p^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & p^2 & a^2+p^2 \end{vmatrix} = 2apc \cdot (a+p+c)^2.$$

4.56. $$\begin{vmatrix} 0 & (a-p)^3 & (a-c)^3 \\ (p-a)^3 & 0 & (p-c)^3 \\ (c-a)^3 & (c-p)^3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4.57. $$\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) & -\cos(x+y) \\ \sin(x-y) & \cos(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin 2x & 0 & \sin 2y \end{vmatrix} = \sin 2(x+y).$$

4.58. $$\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \sin^2 x \cos y & -\sin x \sin y \cos x \\ \cos(x+y) & \cos y & \cos x \cos(x+y) \\ \cos y & \cos x \cos y & \cos(x+y) \end{vmatrix} = \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos y.$$

4.59. $$\begin{vmatrix} a+p & a^2+p^2 & a^3+p^3 \\ 1 & c & c^2 \\ 2 & a+p & a^2+p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & p & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (a-p)^2(a-c)(p-c).$$

4.60. Без да се развива детерминантата, да се покаже дека:

$$\begin{vmatrix} ka_1+p_1 & kp_1+c_1 & kc_1+a_1 \\ ka_2+p_2 & kp_2+c_2 & kc_2+a_2 \\ ka_3+p_3 & kp_3+c_3 & kc_3+a_3 \end{vmatrix} = (k+1)(k^2-k+1) \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. ВЕКТОРИ

Решени задачи

5.1. Дадени се векторите $\mathbf{a} = -2\mathbf{p} + 3\mathbf{r} - \mathbf{s}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{r} + 2\mathbf{s}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{p} + \mathbf{r} - 3\mathbf{s}$. Да се определи вектор $\mathbf{d}$, таков што векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ да формираат четириаголник.

Решение. Векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, ќе формираат четириаголник ако нивниот збир е $\mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{o}$, од каде што добиваме:

$$\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{p} + \mathbf{r} - 2\mathbf{s} + \mathbf{p} - \mathbf{r} + 3\mathbf{s}, \quad \text{т.е.}$$

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{r} + 2\mathbf{s}.$$

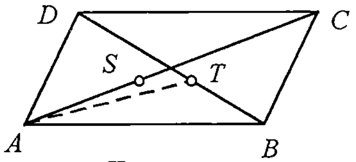
5.2. Да се докаже дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали заемно се преполовуваат.

Решение. Нека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм и нека S е средина на AC, а T средина на BD (црт. 5.1) Бидејќи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, добиваме:

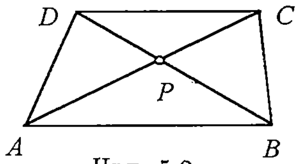
$$\overrightarrow{AS} = (1/2)\overrightarrow{AC} = (1/2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} + (1/2)(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AT},$$

што значи, точките S и T се совпаѓаат, т.е. дијагоналите заемно се преполовуваат. Обратно, нека дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ заемно се преполовуваат во точката P (види црт. 5.2), т.е.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}, \quad \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PB}.$$



Црт. 5.1



Црт. 5.2

Тогаш имаме:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DC},$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC},$$

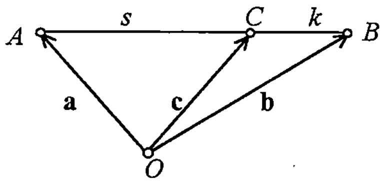
што значи, четириаголникот $ABCD$ има два пара паралелни страни, т.е.

тој е паралелограм.

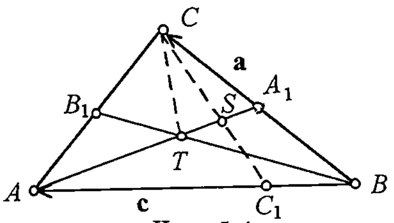
5.3. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се радиус–векторите на точките A и B соодветно во однос на еден почеток O. Ако C е точка што ја дели отсечката AB во однос $s\colon k$, да се покаже дека радиус–векторот на точката C е даден со:

$$\mathbf{c} = \frac{k\mathbf{a} + s\mathbf{b}}{k+s}. \tag{1}$$

Решение. Од условите на задачата имаме: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{s}{k}\overrightarrow{CB} = \frac{s}{k}(-\mathbf{c}+\mathbf{b})$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \frac{s}{k}\mathbf{c} + \frac{s}{k}\mathbf{b}$, па, по средувањето, се добива (1).



Црт. 5.3



Црт. 5.4

5.4. Во триаголникот ABC дадени се $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$. Тежишните линии AA_1 и BB_1 се сечат во точката T.

а) Да се најдат односите $\overline{AT}\colon\overline{TA_1}$ и $\overline{BT}\colon\overline{TB_1}$.

б) Да се покаже дека тежишната линија CC_1 минува низ точката T (т.е. тежишните линии се сечат во иста точка T).

Решение. а) При решавањето ќе се повикуваме на црт. 5.4. Имаме:
$\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BB_1} = \mathbf{c} + \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c})$, $\overrightarrow{TA_1} = x\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{TB_1} = y\overrightarrow{BB_1}$.

Да го изразиме векторот $\overrightarrow{BT}$ на следниве два начина:

$$\overrightarrow{BT} = \frac{\mathbf{a}}{2} - \overrightarrow{TA_1}, \qquad \overrightarrow{BT} = \mathbf{c} + \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{TB_1}.$$

Изедначувајќи ги десните страни, добиваме:

$$\frac{\mathbf{a}}{2} - \overrightarrow{TA_1} = \mathbf{c} + \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{TB_1}, \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{\mathbf{a}}{2} - x\left(-\mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right) = \mathbf{c} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c}) - \frac{y}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}),$$

од каде што, по средувањето, добиваме:

$$(-x+y)\mathbf{a} + (2x+y-1)\mathbf{c} = \mathbf{o}.$$

Бидејќи $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ се неколинеарни, имаме:

$$-x+y = 0, \qquad 2x+y-1 = 0,$$

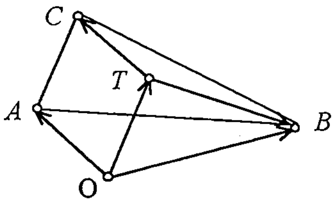
од каде што следува дека $x = y = 1/3$. Значи, имаме

$\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{TA_1}$, $\overrightarrow{BB_1} = 3\overrightarrow{TB_1}$, т.е. $\overline{AT}\colon\overline{TA_1} = 2\colon1$ и $\overline{BT}\colon\overline{TB_1} = 2\colon1$.

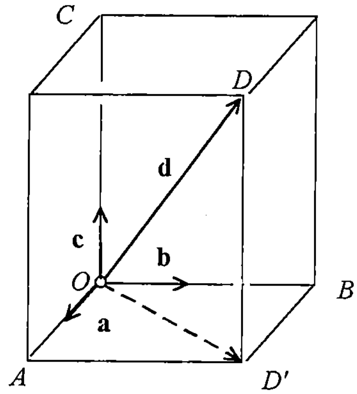
б) Нека CC_1 е тежишната линија повлечена од темето C (црт. 5.4) и S е пресекот на CC_1 со AA_1. Според резултатот од а), од причини на симетрија, имаме $\overline{CS}\colon\overline{SC_1} = 2\colon1$, т.е. $\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. За да покажеме дека S се совпаѓа со T, ќе покажеме дека $\overrightarrow{TS} = \mathbf{o}$. Имаме:

$$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{CS} - \overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{B_1T} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{c}}{2} - \mathbf{a}\right) - \frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = \mathbf{o}\,,$$

а тоа значи дека S се совпаѓа со T, т.е. во T се сечат сите три тежишни линии на триаголникот.



Црт. 5.5



Црт. 5.6

5.5. Во исполнет триаголник ABC да се најде точка T, таква што сумата на векторите што одат од T до темињата на триаголникот да биде еднаква со $\mathbf{o}$.

Решение. Нека $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \mathbf{o}$, а O произволна точка (црт. 5.5). Тогаш имаме:

$$\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OT}, \quad \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OT}, \quad \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT},$$

па, собирајќи ги и имајќи предвид дека $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \mathbf{o}$, добиваме:

$$\overrightarrow{OT} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Последново равенство значи дека T е тежиштето на триаголникот.

5.6. Да се докаже дека:

а) векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се линеарно зависни ако и само ако се колинеарни;

б) векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се линеарно зависни ако и само ако се компланарни;

в) кои било четири вектори се линеарно зависни.

Решение. За векторите $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ велиме дека се *линеарно зависни* ако постојат скалари $x_1, \ldots, x_k$, од кои барем еден е различен од 0, така што

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}\,; \tag{1}$$

во спротивниот случај, т.е. ако

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_k = 0\,, \tag{2}$$

велиме дека векторите $\mathbf{a}_1 \ldots, \mathbf{a}_k$ се *линеарно независни*.

а) Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни. Ако барем едниот е нула–вектор, на пример $\mathbf{b}$, тогаш $0 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{o}$, што значи $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се линеарно зависни. Затоа, нека **a** и **b** се различни од нултиот вектор. Тогаш, ставајќи $x = b/a$ ако **a** и **b** имаат иста насока, а $x = -b/a$, ако тие имаат спротивна насока, имајќи ја предвид дефиницијата за множење на вектор со скалар, добиваме $\mathbf{b} = x\mathbf{a}$, т.е. $x\mathbf{a} + (-1)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{o}$, што значи, **a** и **b** се линеарно зависни.

Обратно, нека $x\mathbf{a} + x\mathbf{b} = \mathbf{o}$, при што барем еден од x, $y \neq 0$, на пример $y \neq 0$. Тогаш $\mathbf{b} = -\frac{x}{y}\mathbf{a}$, што, според дефиницијата за множење на вектор со скалар, значи дека **a** и **b** се колинеарни.

б) Нека **a**, **b** и **c** се компланарни. Ако барем еден од нив е нула или барем два меѓу нив се колинеарни, тогаш е јасно дека тие се линеарно зависни. Затоа, нека кои било два од нив не се колинеарни и нека O е нивна заедничка точка. Ако низ крајната точка C на векторот **c** повлечеме прави паралелни со векторите **b** и **a**, со правите на кои лежат **a** и **b** ќе добиеме пресечни точки A и B. Тогаш имаме:

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}, \quad \text{т.е.} \quad x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = \mathbf{o}.$$

Обратно, нека **a**, **b**, **c** се линеарно зависни, т.е. $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{o}$, а барем еден од x, y, z не е нула, на приемер $z \neq 0$. Бидејќи векторите **a**, **b** и $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b}$ се компланарни за кои било скалари x_1, y_1, добиваме дека **a**, **b** и **c** се компланарни.

в) Ако некои три од векторите **a**, **b**, **c**, **d** се компланарни, тогаш е јасно дека тие се линеарно зависни (на пример, ако е $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, тогаш е $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} + 0\mathbf{d} = \mathbf{o}$). Затоа ќе претпоставиме дека кои било три не се компланарни, со заедничка точка O (црт. 5.6). Низ крајната точка D на векторот **d** поставуваме рамнини паралелни со векторите **b** и **c**, **c** и **a**, **a** и **b** и ги добиваме точките A, B, C соодветно. Имаме:

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{D'D}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c},$$

од каде следува дека **a**, **b**, **c**, **d** се линеарно зависни.

Да забележиме дека при дадени вектори **a**, **b**, **c**, **d**, скаларите x, y, z се еднозначно определени. Навистина, ако x_1, y_1, z_1 се скалари за кои $\mathbf{d} = x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} + z_1\mathbf{c}$, тогаш имаме:

$$(x_1 - x)\mathbf{a} + (y_1 - y)\mathbf{b} + (z_1 - z)\mathbf{c} = \mathbf{o},$$

па, бидејќи **a**, **b**, **c** се некомпланарни (т.е. според б) линеарно независни), добиваме $x_1 - x = 0$, $y_1 - y = 0$, $z_1 - z = 0$, т.е. $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$.

5.7. Да се претстави векторот $\mathbf{d} = (3, -3, 4)$ како линеарна комбинација од векторите $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 0)$.

Решение. Векторот **d** е *линеарна комбинација* од векторите **a**, **b**, **c** ако за некои скалари x, y, z имаме:

$$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}. \tag{1}$$

(Според забелешката во в) од **5.6**, x, y, z постојат и определени се еднозначно.) Од (1) имаме:

$$(3, -3, 4) = (x, x, 2x) + (2y, 0, y) + (z, 2z, 0),$$

$$(3, -3, 4) = (x + 2y + z\,,\ x + 2z\ \ 2x + y), \qquad \text{па:}$$

$$x + 2y + z = 3, \quad x + 2z = -3, \quad 2x + y = 4.$$

Решение на системот е: $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$, па:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}.$$

5.8. Да се покаже дека точките $A(-2, 7, -9)$, $B(4, -5, 9)$, $C(1, -1, -3)$ и $D(4, -7, 6)$ се темиња на еден трапез.

Решение. Ако се дадени точките $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тогаш векторот $\overrightarrow{AB}$ го добиваме на следниов начин:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Според тоа, имаме:

$$\overrightarrow{AB} = (6, -12, 18), \qquad \overrightarrow{CD} = (3, -6, 9).$$

Но, $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се паралелни, па значи A, B, C, D се темиња на еден трапез.

5.9. Дадени се векторите:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}, \tag{1}$$

каде што $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ се некомпланарни вектори. Да се разложи векторот $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{r}$ по векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Решение. Ако $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ се некомпланарни вектори, тогаш секој вектор $\mathbf{s}$ од просторот може да се претстави во вид:

$$\mathbf{s} = x\,\mathbf{p} + y\,\mathbf{q} + z\,\mathbf{r}, \tag{2}$$

при што скаларите x, y, z се еднозначно определени (види и **5.6** в)). Тогаш велиме дека $\mathbf{s}$ е *разложен по базата* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, а x, y, z се викаат коефициенти на тоа разложување.

Решавајќи го системот (1) по „непознатите“ $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ добиваме:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} - \mathbf{c}, \qquad \mathbf{q} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Според тоа, за $\mathbf{s}$ имаме:

$$\mathbf{s} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{c}) - (-2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \text{т.е.}$$

$$\mathbf{s} = 3\mathbf{a} - 4\mathbf{c}.$$

5.10. Нека $\mathbf{a} = x\mathbf{p} - 4\mathbf{q} - 6\mathbf{r}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{p} + 2\mathbf{q} + y\mathbf{r}$, каде што $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ се три некомпланарни вектори. Да се определат x и yтака што $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ да бидат колинеарни.

Решение. Еден ненулти вектор $\mathbf{a}$ е колинеарен со даден вектор $\mathbf{b}$ ако и само ако постои реален број k, таков што $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$. Според тоа, имаме:

$$-3\mathbf{p} + 2\mathbf{q} + y\mathbf{r} = kx\mathbf{p} - 4k\mathbf{q} - 6k\mathbf{r}$$

од каде што, поради некомпланарноста на $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, добиваме:

$$-3 = kx, \quad 2 = -4k, \quad y = -6k, \quad \text{т.е.}$$

$$k = -\tfrac{1}{2}, \quad y = 3, \quad x = 6.$$

5.11. Да се испита дали се линеарно зависни или линеарно независни следниве системи вектори:

а) $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{p} + \mathbf{q} + 3\mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} - 2\mathbf{r}$;

б) $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{p} + \mathbf{r}$,

каде што $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, се три некомпланарни вектори.

Решение. а) За дадениот систем, бидејќи $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ се некомпланарни, имаме:

$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3=(2x_1+x_2+x_3)\mathbf{p}+(3x_1+x_2+2x_3)\mathbf{q}+(x_1+3x_2-2x_3)\mathbf{r}=\mathbf{o}$

$$2x_1+x_2+x_3=0,\quad 3x_1+x_2+2x_3=0,\quad x_1+3x_2-2x_3=0;$$

решението на овој систем е: $x_1=k$, $x_2=-k$, $x_3=-k$, каде што k е произволен реален број.
Ставајќи, на пример, $k=1$, добиваме: $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3=\mathbf{o}$, што значи дека системот е линеарно зависен.

б) Бидејќи $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ се некомпланарни, од
$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3=(x_1+x_2+x_3)\mathbf{p}+(x_1-x_2+x_3)\mathbf{q}+(-x_1+x_2+x_3)\mathbf{r}=\mathbf{o}$
го добиваме системот равенки:

$$x_1+x_2+x_3=0,\qquad x_1-x_2+x_3=0,\qquad -x_1+x_2+x_3=0,$$

чие единствено решение е $x_1=x_2=x_3=0$.
Значи, системот е линеарно независен.

5.12. Потребен и доволен услов векторите
$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ и $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$
да се линеарно независни е:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0. \tag{1}$$

Решение. Нека е исполнет условот (1) и нека $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{o}$. Тогаш го добиваме системот:

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z=0,\quad a_3x+b_3y+c_3z=0, \tag{2}$$

кој, поради (1), има единствено решение $x=y=z=0$, што значи дека векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно независни.
Обратно, ако $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно независни, т.е. ако

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{o}\Rightarrow x=y=z=0,$$

тогаш детерминантата на системот (2) мора да биде различна од нула, т.е. важи (1).

5.13. Дадени се четири вектори:
$\mathbf{a}=(1,0,1)$, $\mathbf{b}=(1,1,0)$, $\mathbf{c}=(1,2,1)$, $\mathbf{d}=(0,-1,2)$.

а) Да се покаже дека кои било три од овие вектори се линеарно независни.

б) Да се разложи секој од дадените вектори земајќи ги за база преостанатите три.

Решение. а) Постојат четири можности за избирање на три вектори од четирите: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$; $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Детерминантите формирани од нивните координати се:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}=2,\quad \begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&2\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=4,\quad \begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&1&2\end{vmatrix}=3,$$

што значи, кои било три вектори од дадените се линеарно независни.

б) На пример, за $\mathbf{d}$ имаме: $\mathbf{d}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$, $(0,-1,2)=(x,0,x)+(y,y,0)+(z,2z,z)$, од каде што го добиваме системот:

$$0=x+y+z,\quad -1=y+2z,\quad 2=x+z.$$

Неговото решение е $x=\frac{3}{2}$, $y=-2$, $z=\frac{1}{2}$, па разложувањето на $\mathbf{d}$ е:

$$\mathbf{d} = \tfrac{3}{2}\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{c}.$$

Од тоа добиваме:

$$\mathbf{c} = -3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 2\mathbf{d}; \quad \mathbf{b} = \tfrac{3}{4}\mathbf{a} + \tfrac{1}{4}\mathbf{c} - \tfrac{1}{2}\mathbf{d}; \quad \mathbf{a} = \tfrac{4}{3}\mathbf{b} - \tfrac{1}{3}\mathbf{c} + \tfrac{2}{3}\mathbf{d}.$$

5.14. Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуваат агол $\alpha = 60^0$, а нивните интензитети се $a = 4$ и $b = 5$. Да се пресмета:

а) $\mathbf{ab}$; б) $\mathbf{a}^2$; в) $\mathbf{b}^2$; г) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$; д) $(2\mathbf{a} - 5\mathbf{b})(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$.

Решение. Под ***скаларен производ*** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ го подразбираме скаларот $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$, каде што α е аголот меѓу $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е.

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha = a \cdot b \cdot \cos\alpha\,. \tag{1}$$

Според тоа, имаме:

а) $\mathbf{ab} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^0 = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$. б) $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 4 \cdot 4 \cos 0^0 = 16 \cdot 1 = 16$.

в) $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 5 \cdot 5 \cdot \cos 0^0 = 25 \cdot 1 = 25$.

г) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 16 + 2\mathbf{ab} + 25 = 16 + 20 + 25 = 61$.

д) $(2\mathbf{a} - 5\mathbf{b})(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 2\mathbf{a}^2 - 5\mathbf{ba} - 6\mathbf{ab} - 15\mathbf{b}^2 = 2\cdot 16 - 5\cdot 10 + 6\cdot 10 - 15\cdot 25 = -333$.

5.15. Да се докаже дека

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,. \tag{1}$$

Потоа да се пресмета интензитетот на векторот $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, каде што $\mathbf{a} = (0, 1, 8)$ и $\mathbf{b} = (1, 1, -1)$.

Решение. Ставајќи $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ во (1) од **5.14**, добиваме $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| \cos 0^0$, т.е. $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, од каде што го добиваме равенството (1). За $\mathbf{a} = (0, 1, 8)$ и $\mathbf{b} = (1, 1, -1)$ имаме $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (2, 3, 6)$, па, според (1), добиваме:

$$|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})} = 7.$$

5.16. Дадени се точките

$$A(3, 2, -3), \quad B(4, 3, 1), \quad C(7, 0, 1), \quad D(6, -1, -3).$$

а) Да се покаже дека точките A, B, C, D лежат во иста рамнина.

б) Да се најде аголот ψ меѓу дијагоналите на четириаголникот $ABCD$.

в) Да се најдат единичните вектори поставени на дијагоналите.

Решение. Доволно е да покажеме дека векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ се компланарни, т.е. линеарно зависни. Имаме:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 4) = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AC} = (4, -2, 4) \quad \overrightarrow{AD} = (3, -3, 0) = \mathbf{b},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

б) Од дефиницијата за скаларен производ добиваме:

$$\cos\psi = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})}{(a + b)\cdot(a - b)}\,,$$

а бидејќи $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (4, -2, 4)\cdot(-2, 4, 4) = -8 - 8 + 16 = 0$, добиваме $\cos\psi = 0$, т.е. $\psi = 90^0$. (Бидејќи $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, четириаголникот е ромб.)

в) Единичните вектори на дијагоналите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ да ги означиме со $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{e}_0$ соодветно. Бидејќи

$$\overrightarrow{AC}^2 = 4^2 + (-2)^2 + 4^2 = 36, \qquad \overrightarrow{BD}^2 = |(2, -4, -4)|^2 = 36,$$

за единичните вектори $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{e}_0$ добиваме:

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \tfrac{1}{3}(2, -1, 2), \qquad \mathbf{e}_0 = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \tfrac{1}{3}(1, -2, -2).$$

(Бидејќи $\overline{AC} = \overline{BD}$, ромбот $ABCD$ е квадрат.)

5.17. Да се најде проекцијата од векторот $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$ врз векторот $\mathbf{c} = (1, 0, 1)$.

Решение. Имаме $\text{пр}_\mathbf{c}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\alpha$, каде што α е аголот меѓу векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$;

$$|\mathbf{a}| = 3, \quad |\mathbf{c}| = \sqrt{2}, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 3, \quad \text{па} \quad \cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значи, $\text{пр}_\mathbf{c}\mathbf{a} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

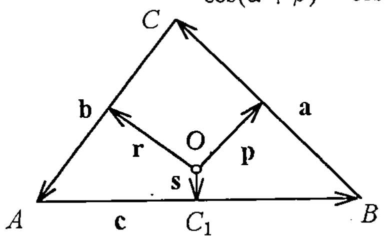
5.18. Да се докаже дека симетралите на страните на кој било триаголник ABC се сечат во една точка O.

Решение. Да ги означиме со $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ векторите поставени на симетралите на страните BC и CA соодветно, како што е означено на црт. 5.7, а $\mathbf{s} = \overrightarrow{TC_1}$, $\overline{AC_1} = \overline{C_1B}$. Имаме: $\mathbf{pa} = 0$, $\mathbf{rb} = 0$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$. Множејќи ги скаларно равенствата $\mathbf{p} - \mathbf{s} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}$ и $\mathbf{r} - \mathbf{s} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$ со $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соодветно, а потоа собирајќи ги, добиваме: $\mathbf{pa} + \mathbf{rb} - \mathbf{s}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 0$, т.е. $\mathbf{sc} = 0$, што значи дека $\mathbf{s}$ лежи на симетралата од страната AB.

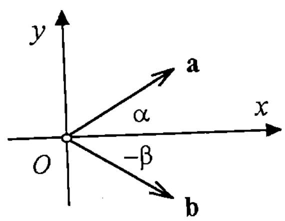
5.19. Со помош на вектори да се изведе формула за косинус од збирот на два остри агли.

Решение. Нека аголот меѓу единичните вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е $\alpha + \beta$, како на црт. 5.8. Бидејќи е $|\mathbf{a}| = 1 = |\mathbf{b}|$ и $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathbf{b} = (\cos\beta, -\sin\beta)$, од $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$, добиваме:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta.$$



Црт. 5.7



Црт. 5.8

5.20. Дадени се векторите $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$ и $\mathbf{c} = (1, 2, -2)$. Да се најде *векторскиот производ*:

а) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ б) $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$; в) $(\mathbf{a}+\mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})$.

Решение. а) Имајќи предвид дека:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},$$

како и $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}$, добиваме:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) =$$

$$= 2\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) - 3\mathbf{j}\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) + \mathbf{k}\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) =$$

$$= 2\mathbf{i}\times\mathbf{i} + 4\mathbf{i}\times\mathbf{j} - 4\mathbf{i}\times\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\times\mathbf{i} - 6\mathbf{j}\times\mathbf{j} + 6\mathbf{j}\times\mathbf{k} + \mathbf{k}\times\mathbf{i} + 2\mathbf{k}\times\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\times\mathbf{k} =$$

$$= \mathbf{o} + 4\mathbf{k} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \mathbf{o} + 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{i} - \mathbf{o} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Друг метод:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

б) $\mathbf{c}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$

в) $\mathbf{a}+\mathbf{c} = (3,\ -1,\ -1)$, $\quad \mathbf{a}-\mathbf{c} = (1,\ -5,\ 3)$, $\quad$ па

$$(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}-\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 14\mathbf{k}.$$

Друг метод:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}-\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}-\mathbf{c}) =$$

$$= \mathbf{a}\times\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{c}\times\mathbf{a} - \mathbf{c}\times\mathbf{c} = \mathbf{o} - \mathbf{a}\times\mathbf{c} - \mathbf{a}\times\mathbf{c} - \mathbf{o} =$$

$$= -2\mathbf{a}\times\mathbf{c} = -2(4,\ 5,\ 7) = (-8,\ -10,\ -14).$$

5.21. Да се докаже дека плоштината P на еден паралелограм со (соседни) страни $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$. Потоа, да се пресмета плоштината на паралелограмот со темиња
$A(3,\ -1,\ 2)$, $\quad B(1,\ 2,\ -1)$, $\quad C(2,\ 5,\ -6)$, $\quad D(4,\ 2,\ -3)$.

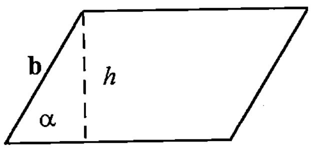
Решение. Плоштината на паралелограмот е еднаква на производот од основата и соодветната висина (црт. 5.9). Според тоа:

$$P = |\mathbf{a}|\cdot h = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\alpha = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$

Од тоа следува дека плоштината на триаголник со страни $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е $P = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

За дадениот случај имаме: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = (-2,\ 3,\ -3) = \overrightarrow{DC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD} = (1,\ 3,\ -5) = \overrightarrow{BC}$, т.е. $ABCD$ е паралелограм. Потоа:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-6,\ -13,\ -9), \quad \text{па}$$



Црт. 5.9

$$P = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{286}.$$

5.22. Да се пресмета мешаниот производ на векторите
$\mathbf{a} = (1,\ -1,\ 1)$, $\qquad \mathbf{b} = (2,\ 2,\ -1)$, $\qquad \mathbf{c} = (3,\ -1,\ 0)$.

Решение. За *мешаниот производ* на векторите $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, во ознака $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, имаме:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Според тоа, мешаниот производ можеме да го пресметаме на два начина.

Прв начин. $$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Друг начин. Имаме

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-1, -3, -8) \qquad \text{и}$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (1, -1, 1) \cdot (-1, -3, -8) = -6\,.$$

5.23. Дадени се векторите $\mathbf{a} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{c} = (3, 0, 2)$. Да се пресмета *двојниот векторски производ*

а) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$; б) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$,

на два начина: директно и со помош на формулите:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})\,, \tag{1}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc}) \tag{2}$$

Решение. а) Имаме: $$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, -5, -6);$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = (-6, 12, -14)$$

Да го извшиме пресметувањето со помош на (1). Имаме:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 6 \cdot +0 + 0 = 6, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 + 2 - 0 = 4, \qquad \text{па}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 6(1, 2, -1) - 4 \cdot (3, 0, 2) = (6, 12, -6) - (12, 0, 8) = (-6, 12, -14).$$

б) Имаме:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 3)\,;$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, 11, -6)\,.$$

Бидејќи $\mathbf{bc} = 3 + 0 - 2 = 1$, според (2), имаме:

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = 6(1, 2, -1) - 1(2, 1, 0) = (6, 12, -6) - (2, 1, 0) = (4, 11, -6).$

Примерите во а) и б) покажуваат дека асоцијативниот закон за векторско множење не важи.

Задачи за вежбање

5.24. Дадени се два неколинеарни вектори **a** и **c**. Да се покаже дека:
а) векторите $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $-\mathbf{a}+\mathbf{c}$ формираат паралелограм;

б) краевите на векторите $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $-\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $-\mathbf{a}-\mathbf{c}$, со заеднички почеток во некоја точка O, се темиња на еден паралелограм.

5.25. Ако за четириаголникот $ABCD$ важи равенството:

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC},$$

каде што O е произволна точка, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

5.26. Даден е паралелограм $ABCD$ и произволна точка O. Ако S е пресекот на дијагоналите, тогаш

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OS}.$$

5.27. Ако $ABCD$ е паралелограм и O произволна точка, тогаш

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{o}.$$

ако и само ако O е пресекот на дијагоналите.

5.28. Во тетраедарот $OABC$ дадени се рабовите: $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Со помош на овие вектори да се изразат преостанатите рабови на тетраедарот, тежишната линија $\overrightarrow{CM}$ на страната ABC и векторот $\overrightarrow{OT}$, каде што T е тежиштето на страната ABC.

5.29. Ако $ABCDEF$ е правилен шестоаголник, да се најде резултантата на силите претставени со векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AF}$.

5.30. Страните на еден (просторен) четириаголник $ABCD$ се разделени со точките E, F, G, H во ист однос k. Да се покаже дека векторите $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$ формираат четириаголник.

5.31. Во паралелограмот $ABCD$ точката E е средина на $\overrightarrow{AB}$, S е средина на $\overrightarrow{AD}$, а T е пресечната точка на отсечките $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{CS}$. Да се најдат $\overline{ET}:\overline{ED}$ и $\overline{ST}:\overline{SC}$.

5.32. Во паралелограмот $ABCD$, точките E и F се средини на страните BC и CD соодветно. Да се докаже дека AE и AF ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела.

5.33. Дадени се три последователни темиња $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $C(\mathbf{r}_3)$ на еден трапез. Да се најдат радиус–векторите: $\mathbf{r}_4$ на темето D, $\mathbf{r}_5$ на пресекот P на дијагоналите и $\mathbf{r}_6$– на пресекот S од бочните страни, знаејќи притоа дека долната основа AD е $k(\neq 1)$ пати поголема од горната основа BC.

5.34. Ако $\mathbf{p}$ и $\mathbf{s}$ се неколинеарни вектори и $\mathbf{a} = (x + 2y + 1)\mathbf{p} + (2x - y - 2)\mathbf{s}$, $\mathbf{b} = (4x + 3y - 6)\mathbf{p} + (x - y + 2)\mathbf{s}$, да се определат x и y, така што да важи $2\mathbf{b} = 3\mathbf{a}$.

5.35. Векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ се изразени со помош на векторите $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$, $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3$.

Ако $\mathbf{s} = 3\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$, да се изрази $\mathbf{s}$ со помош на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

5.36. Ако $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се некомпланарни вектори, да се испита дали векторите $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $\mathbf{s} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$ се линеарно независни.

5.37. Да се покаже дека векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно зависни ако и само ако се линеарно зависни векторите $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} + \mathbf{a}$.

5.38. Да се испита дали дадениот систем вектори е линеарно независен или линеарно зависен. Во вториот случај $\mathbf{c}$ да се изрази како линеарна комбинација на другите два вектора.

а) $\mathbf{a} = (7, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 4, 6)$, $\mathbf{c} = (-2, -1, 5)$.

б) $\mathbf{a} = (8, 2, 2)$, $\mathbf{b} = (-6, 3, 3)$, $\mathbf{c} = (0, 3, 3)$.

в) $\mathbf{a} = (2, -6, 4)$, $\mathbf{b} = (-3, 9, -6)$, $\mathbf{c} = (8, 7, 3)$.

г) $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, -3)$, $\mathbf{c} = (4, 7, 3)$.

д) $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{c} = (3, 5, 2)$.

5.39. Да се најде вектор, паралелен со сумата на векторите $\mathbf{a} = (2, 4, -5)$ и $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$.

5.40. Дадени се векторите
$\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{c} = (-2, 1, -3)$ и $\mathbf{d} = (3, 2, 5)$.
Да се најдат скалари x, y, z, такви што $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

5.41. Да се докаже дека за кој било вектор $\mathbf{a}$ важи:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}.$$

5.42. Нека $\mathbf{p}$ е произволен вектор, а $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуваат триаголник. Да се пресмета:

$$\mathbf{ap} + \mathbf{bp} + \mathbf{cp}.$$

5.43. Познато е дека векторите $\mathbf{p} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{c}$ и $\mathbf{s} = 2\mathbf{a} - 4\mathbf{c}$ се заемно нормални и дека $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 2$. Да се пресмета аголот меѓу векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$.

5.44. Должините на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ се $a = 2$ и $c = 3$, а аголот меѓу нив е еднаков со 120^0. За векторот $\mathbf{p} = 3\mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ да се најде:

а) $|\mathbf{p}|$; б) единичниот вектор $\mathbf{p}_0$;

б) аголот меѓу векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$.

5.45. При кои услови сумата на три вектори со должини 7, 24 и 25 е нула?

5.46. Да се пресмета аголот α меѓу векторите:

а) $(1, 2, 3)$ и $(3, 2, 1)$; б) $(4, -6, 5)$ и $(9, 1, -6)$.

5.47. Да се најдат аглите α, β, γ што ги зафаќа векторот $(6, -2, 9)$ со координатните оски Ox, Oy, Oz соодветно.

5.48. Даден е триаголникот ABC и единичните вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, нормални на страните AB, BC и CA соодветно. Да се покаже дека

$$c\mathbf{p} + a\mathbf{r} + b\mathbf{s} = 0,$$

каде што $c = \overline{AB}$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$.

5.49. Дадени се векторите: $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 4)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 1)$. Да се покаже дека:

а) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$; б) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;

в) $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|$.

Потоа, да се покаже дека неравенствата а), б), в) важат за кои било вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

5.50. Дадени се три некомпланарни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ чии интензитети се $a = 3$, $b = 3$, $c = 2$ и $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \angle(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 120^0$, $\angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 60^0$. Над тие вектори е конструиран паралелопипед. Да се најдат:

а) скаларните производи $\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$; $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$;

б) косинусите на аглите меѓу векторите $\mathbf{d}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ и $\mathbf{c}$.

в) ортогоналните проекции на дијагоналата $\mathbf{d}$ врз $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

5.51. Да се најде проекцијата на векторот $\mathbf{a}$ врз векторот $\mathbf{c}$:

а) $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -4, 7)$.

б) $\mathbf{a} = (2, -3, 6)$, $\quad \mathbf{c} = (1, 2, 2)$.

в) $\mathbf{a} = (-1, 7, 1)$, $\quad \mathbf{c} = (-3, 1, 3)$.

5.52. Дадени се векторите $\mathbf{a} = (1, 2x, -3)$ и $\mathbf{b} = (2, x, -2x)$. За кои вредности на x дадените вектори се меѓусебно а) нормални; б) паралелни?

5.53. Векторите $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ се единични и заемно нормални. Да се најде векторот x од равенките:

$$\mathbf{i}\,\mathbf{x} = 2, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{x} = 3, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{x} = 4.$$

5.54. Да се покаже дека векторот $\mathbf{a}(\mathbf{b}\,\mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{a})$ е нормален на $\mathbf{c}$.

5.55. Да се покаже дека, ако дијагоналите на еден четириаголник се меѓусебно нормални, тогаш должините a, b, c, d на страните на четириаголникот го задоволуваат условот $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

5.56. Да се покаже дека за паралелните страни a, c, краците b, d и дијагоналите e, f, на кој било трапез, важи релацијата

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

5.57. Дадени се векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, со интензитети k и $2k$ соодветно, а аголот меѓу нив е 150^0. Да се пресмета:

а) $\mathbf{a}\mathbf{b}$ $\qquad$ б) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

5.58. Да се пресмета $(\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2$.

5.59. Да се претстави сумата:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

со помош на еден векторски производ.

5.60. Да се пресметаат $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ и $(2\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{c})$, ако:

а) $\mathbf{a} = (2, -3, 5)$, $\quad \mathbf{c} = (-4, 1, -2)$.

б) $\mathbf{a} = (3 - 1, -2)$, $\quad \mathbf{c} = (1, 2, -1)$.

в) $\mathbf{a} = (-2, 6, -4)$, $\quad \mathbf{c} = (3, -9, 6)$.

5.61. Дадени се: $\mathbf{a} = (2, -3, -1)$ и $\mathbf{c} = (1, 4, -2)$. Да се најде:

а) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$; $\quad$ б) $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$; $\quad$ в) $|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|$; $\quad$ г) $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})$.

5.62. Дадени се: $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$ и $\mathbf{c} = (2, 3, 1)$. Да се пресмета:

а) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$; $\quad$ б) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{c}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{c})$; $\quad$ в) $|(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})|$.

5.63. Да се пресмета плоштината на триаголникот определен со:

а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - \mathbf{s}$, $\quad \mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{s}$, $\quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{s}| = 1$, $\quad \angle(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 45^0$;

б) $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 5\mathbf{s}$, $\quad \mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{s}$, $\quad |\mathbf{p}| = 1/2$, $\quad |\mathbf{s}| = 3$, $\quad \angle(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 135^0$.

5.64. Да се пресметаат аглите и плоштината на триаголникот ABC: $A(0, 4, -4)$, $B(1, -1, 3)$, $C(4, 1, -3)$.

5.65. Да се најде плоштината на паралелограмот определен со:

а) $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (-3, -2, 1)$;

б) $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{c} = (1, -1, 2)$.

5.66. Да се најде плоштината на паралелограм чии дијагонали се формирани од векторите $\mathbf{a} = (3, 1, -2)$ и $\mathbf{b} = (1, -3, 4)$.

5.67. Да се најде $\sin\varphi$, ако φ е аголот меѓу векторите $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 4)$.

5.68. Ако $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ да се покаже дека:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Користејќи ги својствата на детерминантите од трет ред, да се докажат равенствата:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

5.69. Да се провери дали се компланарни векторите:

а) $\mathbf{a} = (5, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (0, -1, 4)$, $\mathbf{c} = (6, 9, -10)$,

б) $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{c} = (-1, -4, 4)$,

в) $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{c} = (-2, 1, -1)$,

г) $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 3, 2)$, $\mathbf{c} = (2, -3, -2)$,

д) $\mathbf{a} = (4, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$.

5.70. Да се провери дали лежат во иста рамнина точките:

а) $A(4, 1, 3)$, $B(3, 2, -1)$, $C(5, 5, 4)$, $D(2, -1, 1)$,

б) $A(3, -1, -1)$, $B(-2, -1, 4)$, $C(1, 1, -1)$, $D(2, -1, 0)$,

в) $A(-1, -1, 4)$, $B(2, 3, 1)$, $C(1, 4, 2)$, $D(3, 2, -4)$.

5.71. Да се упрости изразот: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})]$.

5.72. Да се пресмета висината на паралелопипедот, определен со векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, земајќи ја за основа страната определена со векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

а) $\mathbf{a} = (3, -2, 5)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 4)$, $\mathbf{c} = (1, -3, 1)$.

б) $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 4)$, $\mathbf{c} = (3, -1, 2)$.

5.73. Да се пресмета висината SE на тетраедарот $ABCS$ зададен со:

а) $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 2, -1)$ $C(2, 1, 0)$, $S(0, 1, 2)$.
б) $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$ $C(6, 3, 7)$, $S(-5, -4, 8)$.

5.74. Да се пресметаат $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, ако:
а) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, -3)$.
б) $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 7, 4)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 1)$.

5.75. Дадени се векторите: $\mathbf{a} = (1, -2, -3)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 3, -2)$. Да се пресмета:
а) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$; б) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$; в) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$; г) $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}|$;
д) $|\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$; ѓ) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

* * *

5.76. Да се докаже дека сумата на векторите што го сврзуваат центарот на рамностран триаголник со неговите темиња е нула. Дали тоа важи за произволен правилен n–аголник?

5.77. Да се најде единичниот вектор $\mathbf{c}_0$ на симетралата од аголот што го градат двата ненулти вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

5.78. Во триаголникот ABC повлечена е симетралата BM на аголот во темето B. Да се изрази векторот $\overrightarrow{BM}$ со помош на векторите $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$ и $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$.

5.79. Да се докаже дека симетралите на аглите во триаголникот се сечат во една точка.

5.80. Нека е $ABCD$ паралелограм. Да се докаже дека:
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

5.81. Ако е $ABCD$ произволен четириаголник, а S и T се средини на дијагоналите, да се докаже дека:
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{ST}^2.$$

5.82. Нека за неколинеарните вектори $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ и скаларите x, y, z важи равенството:
$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{o}. \tag{1}$$
Да се покаже дека точките A, B, C лежат на иста права ако и само ако:
$$x + y + z = 0. \tag{2}$$

5.83. Нека AC е дијагонала на паралелограмот $ABCD$, а S точка на страната AD, така што $\overline{AD} : \overline{AS} = k$. Да се покаже дека, тогаш, отсечката BS ја сече AC во точка T, оддалечена од A за $\overline{AC}/(k+1)$.

5.84. Ако $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$ се четири вектори повлечени од заедничка точка O и се сврзани со релацијата $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}+u\mathbf{p}=\mathbf{o}$, при што x, y, z, u се променливи коефициенти сврзани со релацијата

$$x+y+z+u=0\ ,$$

тогаш крајните точки на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$ лежат во иста рамнина.

5.85. Нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се радиус–векторите на темињата A, B, C од еден триаголник во однос на дадена точка O, а S е пресекот на:

а) симетралите на страните; б) висините;

в) симетралите на аглите на триаголникот ABC.

Да се покаже дека:

а) $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$. б) $\overrightarrow{OS}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha)\mathbf{a}+(\operatorname{tg}\beta)\mathbf{b}+(\operatorname{tg}\gamma)\mathbf{c}}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$.

в) $\overrightarrow{OS}=\frac{a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{a+b+c}$.

5.86. Ако постои вектор x кој истовремено ги задоволува равенките $\mathbf{a}_1\times\mathbf{x}=\mathbf{c}_1$, $\mathbf{a}_2\times\mathbf{x}=\mathbf{c}_2$, тогаш е исполнет условот: $\mathbf{a}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{c}_1=0$. Да се докаже.

5.87. Дадени се три некомпланарни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Да се најде вектор $\mathbf{x}$ кој го задоволува системот равенки:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{x}=k,\qquad \mathbf{b}\,\mathbf{x}=p,\qquad \mathbf{c}\,\mathbf{x}=s.$$

5.88. Да се најде вектор $\mathbf{x}$, така што:

а) $\mathbf{x}+\mathbf{a}\times\mathbf{x}=\mathbf{c}$; б) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=k$, $\mathbf{a}\times\mathbf{x}=\mathbf{c}$.

5.89. Да се докаже дистрибутивниот закон за векторското множење

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} \tag{1}$$

со помош на особините на скаларното множење.

5.90. Ако векторите $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ се компланарни, тогаш тие се и колинеарни.

5.91. Ако $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ е колинеарен со $\mathbf{c}+\mathbf{d}$, а $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ е колинеарен со $\mathbf{c}-\mathbf{d}$, тогаш $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ е колинеарен со $\mathbf{d}\times\mathbf{b}$, а $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ со $\mathbf{d}\times\mathbf{a}$.

5.92. Да се докаже дека $[\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\,\mathbf{b},\,\mathbf{c}]=[\mathbf{a}_1,\,\mathbf{b},\,\mathbf{c}]+[\mathbf{a}_2,\,\mathbf{b},\,\mathbf{c}]$.

5.93. Векторот $\mathbf{d}$ е разложен по векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{d}=x\,\mathbf{a}+y\,\mathbf{b}+z\,\mathbf{c}.$$

Да се одредат скаларите x, y, z.

5.94. Да се докаже дека:

а) $\mathbf{a} \neq 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$;

б) ако $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ или $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, тогаш $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$.

5.95. Со точките A_1, B_1, C_1 разделени се во ист однос $k{:}\,s$, страните BC, CA, AB на еден триаголник ABC, со плоштина P_0. Да се покаже дека векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ образуваат триаголник и да се пресмета неговата плоштина P.

5.96. Со помош на вектори да се докаже синусната теорема (за рамнински триаголник ABC).

5.97. Три соседни рабови на еден паралелопипед се a, b, и c, а рабовите a и b, b и c, c и a ги зафаќаат аглите α, β, γ соодветно. Ако V е волуменот на паралелопипедот, да се покаже дека

$$V^2 = a^2 b^2 c^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

5.98. Темињата на еден тетраедар се во тежиштата на страните на еден друг тетраедар. Да се покаже дека нивните волумени V_1 и V_2 се однесуваат како $1{:}\,27$.

5.99. Просторните дијагонали на еден паралелопипед со волумен V_0 се паралелни со просторните дијагонали на еден друг паралелопипед. Должините на соодветните паралелни дијагонали се однесуваат како $k_1{:}\,k_2$, $p_1{:}\,p_2$, $s_1{:}\,s_2$. Да се покаже дека волуменот V на вториот паралелопипед е:

$$V = \frac{k_2\, p_2\, s_2}{16\, k_1 p_1 s_1}\, V_0\,.$$

5.100. Да се докаже дека:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

5.101. Да се докаже дека: $\quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \Leftrightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

5.102. Да се докажат следниве идентитети:

а) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{b}$. б) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{a}$.

в) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d}$.

г) $$\mathbf{a} \times \big(\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\big) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \\ = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})\,.$$

д) $$[\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \mathbf{c} \times \mathbf{d},\ \mathbf{e} \times \mathbf{f}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\,[\mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{f}] - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\,[\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}] = \\ = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}][\mathbf{f}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}]\,[\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\,.$$

6. АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР

Решени задачи

6.1. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(2, -1, 3)$ и е нормална на векторот $\mathbf{n} = (4, 2, -1)$.

Решение. Една рамнина е наполно определена со една своја точка M_0 и со еден ненулти вектор $\mathbf{n}$, нормален на неа. Ако M е произволна точка од рамнината, тогаш векторот $\overrightarrow{M_0M}$ е нормален на $\mathbf{n}$ (црт. 6.1), па:

$$\mathbf{n}\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{o}\,; \tag{1}$$

(1) е ***равенка на рамнината во векторска форма.*** Ако $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е дадена точка, а $M(x, y, z)$ е произволна точка од рамнината, тогаш равенката (1) може да се напише во ***координатна форма:***

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,. \tag{2}$$

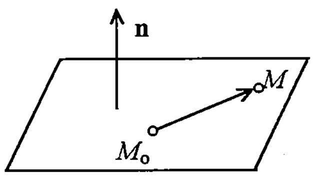
За конкретниот случај имаме: $\mathbf{n} = (4, 2, -1)$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - 2,\ y + 1,\ z - 3)$, па значи

$$(4, 2, -1) \cdot (x - 2,\ y + 1,\ z - 3) = 0$$

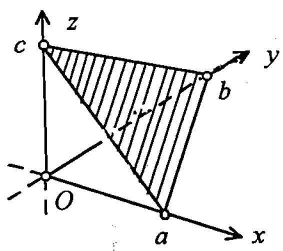
е бараната равенка во векторска форма, а

$$4 \cdot (x - 2) + 2(y + 1) - 1 \cdot (z - 3) = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad 4x + 2y - z - 3 = 0$$

е равенка во координатна форма.



Црт. 6.1



Црт. 6.2

6.2. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(-2, -1, 6)$ и на координатните оски Ox, Oy, Oz отсечува сегменти a, b, c коишто се во однос $4 : (-2) : 3$.

Решение. Ако a, b, c се сегментите (сите $\neq 0$) што ги отсечува една рамнина на координатните оски (црт. 6.2), тогаш равенката на рамнината во *сегментен* вид е:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Бидејќи $a{:}b{:}c = 4{:}(-2){:}3$, следува дека $a=4k$, $b=-2k$, $c=3k$, а бидејќи рамнината минува низ точката $M_0(-2,\,-1,\,6)$, добиваме:

$$\frac{-2}{4k}+\frac{-1}{-2k}+\frac{6}{3k}=1;\qquad \frac{-6+6+24}{12k}=1,\qquad \text{т.е.}\qquad k=2,$$

па $a=8$, $b=-4$, $c=6$. Значи, бараната равенка е:

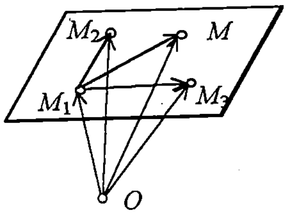
$$\frac{x}{8}-\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1,\qquad \text{т.е.}\qquad 3x-6y+4z=24.$$

6.3. Да се најде равенката на рамнината што минува низ трите точки $M_1(1,\,1,\,-1)$ $M_2(2,\,2,\,3)$, $M_3(3,\,1,\,-4)$.

Решение. Ако M_1, M_2, M_3 се три дадени неколинеарни точки, $\mathbf{r}_i$ е радиус–векторот на M_i, а $\mathbf{r}$ е радиус–векторот на произволна точка M од рамнината во однос на еден почеток O (црт. 6.3), тогаш векторите $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ се компланарни, па нивниот мешан производ е нула, т.е. $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]=0$.

Ако $\mathbf{r}=(x,\,y,\,z)$, а $\mathbf{r}_i=(x_i,\,y_i,\,z_i)$, $i=1,\,2,\,3$, тогаш горната векторска равенка преминува во координатна форма:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$



Црт. 6.3

Во конкретниот случај, точките M_1, M_2, M_3 се неколинеарни (провери!) и:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1\\ 2-1 & 2-1 & 3+1\\ 3-1 & 1-1 & -4+1\end{vmatrix}=0,\qquad \text{т.е.}\qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=0;$$

ако ја развиеме детерминантата, ќе ја добиеме бараната равенка:

$$3x-11y+2z+10=0.$$

6.4. Да се најде равенката на рамнината што е поставена нормално на векторот $\overrightarrow{OE}=(2,\,-2,\,-1)$, на растојание 5 од координатниот почеток O.

Решение. Една рамнина е наполно определена со нормалното растојание од координатниот почеток, $\overline{OT}=p$ и со единичниот вектор $\mathbf{n}_0$, нормален на неа и насочен од O кон неа. Ако M е произволна точка од рамнината, а $\mathbf{r}$ е нејзиниот радиус–вектор (црт. 6.4), тогаш:

$$\text{пр}_{\mathbf{n}_0}\mathbf{r}=\overline{OE}=p,\qquad \text{т.е.}$$

$$\mathbf{n}_0\mathbf{r}-p=0\,, \tag{1}$$

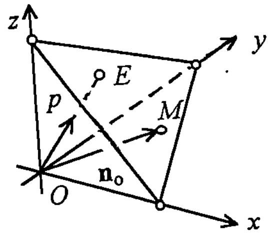
што претставува *нормална равенка на рамнината* во векторска форма. Преминувајќи на координати, имајќи предвид дека $\mathbf{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\mathbf{r}=(x,\,y,\,z)$, добиваме:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0\,. \tag{2}$$

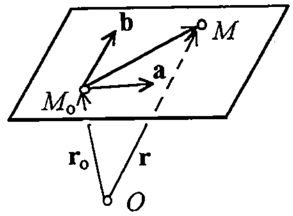
Во дадениот случај:

$p = 5$, $n_0 = \frac{\overrightarrow{OE}}{OE} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, па бараната равенка е:

$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 5 = 0$ (во нормална форма, (2)), т.е. $2x - 2y - z - 15 = 0$ (во општ облик).



Црт. 6.4



Црт. 6.5

6.5. Да се најдат параметарските равенки на рамнината што минува низ точката $M_0(4, -1, 3)$ и е паралелна со векторите $\mathbf{a} = (2, 5, 0)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, 1)$.

Решение. Нека M е произволна точка од рамнината, чија равенка се бара. Дадените вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни, а векторот $\overrightarrow{M_0M}$ е компланарен со нив (црт. 6.5). Според тоа, постојат скалари u, v, така што $\overrightarrow{M_0M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. Бидејќи $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$, добиваме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

каде што $\mathbf{r}$ е радиус–векторот на $M(x, y, z)$, а $\mathbf{r}_0$ – на M_0. Преминувајќи на координати, ќе имаме:

$$(x, y, z) = (4, -1, 3) + u(2, 5, 0) + v(-3, 0, 1), \text{ т.е.}$$
$$x = 4 + 2u - 3v, \quad y = -1 + 5u, \quad z = 3 + v,$$

а тоа се бараните *параметарски равенки* на рамнината. (Да забележиме дека тие не се еднозначно определени.) (Ако ги елиминираме параметрите u и v, ќе добиеме равенка во општ облик:

$u = \frac{y+1}{5}$, $\quad v = z - 3$; $\quad x = 4 + 2 \cdot \frac{y+1}{5} - 3(z - 3)$, $\quad 5x - 2y + 15z - 67 = 0$.)

6.6. *Општата равенка* на рамнината

$$2x - 2y + z - 6 = 0 \qquad (1)$$

да се запише во: а) сегментен, б) параметарски, в) нормален вид. Дали равенката $2x - 2y + z = 0$ има сегментен вид?

Решение. а) Равенката (1) ја делиме со слободниот член 6:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{6} = 1$$

– тоа е сегментниот вид на (1). Притоа, „сегментите“ се: 3, −3, 6.

Равенката $2x - 2y + z = 0$ не може да се запише во сегментен вид, зашто слободниот член е нула (т.е. соодветната рамнина минува низ координатниот почеток).

б) Две од променливите ги избираме за параметри, на пример $x = u$ и $y = v$, па со нивна помош ја изразуваме третата променлива од дадената равенка, $z = 6 - 2u + 2v$. Значи,

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = 6 - 2u + 2v$$

се параметарски равенки на дадената рамнина.

Како што спомнавме во зад. **6.5**, параметарските равенки на една рамнина не се еднозначно определени. Параметарски равенки на дадената рамнина се, на пример, и: $x = 1 - u, \quad y = 2 + u - v, \quad z = 8 + 4u - 2v.$

в) За да ја претвориме општата равенка $Ax+By+Cz+D = 0$ во нормална, треба да ја поделиме со $\pm|\mathbf{n}|$, $\mathbf{n} = (A, B, C)$, т.е. со $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; притоа, треба да се земе знакот што е спротивен на знакот од слободниот член.

Во дадениот случај имаме $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3$ па, бидејќи знакот на $D(= -6)$ е негативен, дадената равенка ќе ја поделиме со $+3$ и ќе добиеме:

$$\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z - 2 = 0$$

– нормалниот вид на дадената равенка.

Од добиената равенка, патем, можеме да заклучиме дека единичниот вектор, нормален на рамнината и насочен од O кон неа е:

$$\mathbf{n}_0 = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \quad \text{т.е.} \quad \cos\alpha = \tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \tfrac{1}{3},$$

а растојанието од O до рамнината е $p = 2$.

6.7. Да се најде аголот меѓу рамнините

$$(\Pi)\colon 3x + 4y - 5z = 7, \qquad (\Pi_1)\colon 4x - 3y - 5z = 9.$$

Решение. Под *агол меѓу две рамнини* го подразбираме помалиот од аглите α и $\pi - \alpha$, каде што α е аголот меѓу кои било два вектора, едниот нормален на едната а другиот нормален на другата рамнина.

Еден нормален вектор на рамнината (Π) е $\mathbf{a} = (A, B, C) = (3, 4, 5)$, а на $(\Pi_1)\colon \mathbf{a}_1 = (A_1, B_1, C_1) = (4, -3, -5)$. Од дефиницијата на скаларен производ имаме:

$$\cos\alpha = \pm\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}||\mathbf{a}_1|} = \pm\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm\frac{12-12+25}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = \pm\frac{1}{2}$$

па $\alpha = 60^0$.

6.8. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(2, -1, 6)$ и е паралелна со рамнината $3x - 4y + 5z - 7 = 0$.

Решение. Бараната рамнина минува низ точката $M_0(2, -1, 6)$, па нејзината равенка е $A(x-2)+B(y+1)+C(z-6) = 0$. Од условот за паралелност меѓу две рамнини имаме:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-4} = \frac{C}{5} = k, \qquad \text{т.е.} \qquad A = 3k, \qquad B = -4k, \qquad C = 5k,$$

па за нормален вектор (A, B, C) на бараната рамнина можеме да го земеме векторот $(3, -4, 5)$ (при $k = 1$). Така, бараната равенка е $3(x-2) - 4(y+1) + 5(z-6) = 0$, т.е. $3x - 4y + 5z - 40 = 0$.

6.9. Да се најде равенката на рамнината Σ што минува низ точките $M_1(1,-1,3)$ и $M_2(0,2,3)$, а е нормална на рамнината $(\Pi)\colon 5x-y+2z=7$.

Решение. Рамнината Σ минува низ точката $M_1(1,-1,3)$, па

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-3)=0,$$

а бидејќи минува и низ $M_2(0,2,3)$, ќе добиеме:

$$-A+3B=0. \tag{1}$$

Од условот за нормалност на две рамнини

$$AA_1+BB_1+CC_1=0, \tag{*}$$

за рамнините Σ и Π ќе добиеме:

$$5A-B+2C=0. \tag{2}$$

Од (1) имаме $A=3B$, па, заменувајќи во (2), ќе добиеме:

$$5\cdot 3B-B+2C=0, \quad \text{т.е.} \quad C=-7B.$$

Значи, нормалните вектори на рамнината Σ се колинеарни со векторот $(3B,\ B,\ -7B)$. Можеме да земеме $B=1$, па $(3,\ 1,\ -7)$ е еден нормален (ненулти) вектор на Σ. Според тоа,

$$3\cdot(x-1)+1\cdot(y+1)-7\cdot(z-3)=0, \quad \text{т.е.} \quad 3x+y-7z+19=0$$

е бараната равенка.

6.10. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(3,-4,5)$ и е нормална на рамнините $(\Pi)\colon 2x-y+3z=0$ и $(P)\colon x+3y-2z=6$.

Решение. Точката $M_0(3,\ -4,\ 5)$ лежи на рамнината, па имаме:

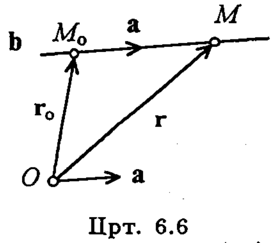
$$A(x-3)+B(y+4)+C(z-5)=0.$$

Бидејќи бараната рамнина е нормална на рамнините (Π) и (P), следува дека векторот $\mathbf{a}=(A,\ B,\ C)$ е нормален на векторите $\mathbf{a}_1=(2,\ -1,\ 3)$, $\mathbf{a}_2=(1,\ 3,\ -2)$ истовремено, па значи, тој е колинеарен со нивниот векторски производ $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=(-7,\ 7,\ 7)$, т.е. со $(-1,\ 1,\ 1)$. Според тоа, бараната равенка е:

$$-1\cdot(x-3)+1\cdot(y+4)+1\cdot(z-5)=0, \quad \text{т.е.} \quad -x+y+z+2=0.$$

6.11. Да се најдат параметарските и каноничните равенки на правата што минува низ точката $M_0(2,-1,3)$ и е нормална на рамнината $4x-5y+6z=7$.

Решение. Ако $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ е точка од правата (p), а $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ е векторот на правецот на (p) (црт. 6.6), тогаш



Црт. 6.6

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a} \tag{1}$$

е *векторска равенка на правата* (p), при што $\mathbf{r}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, t е параметар и $\mathbf{r}=(x,\ y,\ z)$ е радиус–векторот на произволна точка $M(x,\ y,\ z)$ од правата (p). Преминувајќи на координати, ги добиваме равенките:

$$x=x_0+ta_1, \quad y=y_0+ta_2, \quad z=z_0+ta_3 \tag{2}$$

наречени *параметарски равенки на правата* (p). Од (2) добиваме:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3} \tag{3}$$

наречени *канонични равенки на правата* (p). (Притоа, ако некој од броевите a_1, a_2, a_3 е нула, на пример $a_1=0$, тогаш $\frac{x-x_0}{0}$ е само ознака за равенството $x-x_0=0$.)
Во дадениот случај имаме: $\mathbf{r}_0=(2,\,-1,\,3)$ и $\mathbf{a}=(4,\,-5,\,6)$, па $(x,\,y,\,z)=(2,\,-1,\,3)+t(4,\,-5,\,6)$; $x=2+4t$, $y=-1-5t$, $z=3+6t$ се параметарски равенки, а

$$\tfrac{x-2}{4}=\tfrac{y+1}{-5}=\tfrac{z-3}{6}$$

се канонични равенки на правата.

Забелешка. Параметарските, односно каноничните равенки на една права не се еднозначно определени. Имено, за точка M_0 во (2), односно во (3), може да се земе која било точка од правата, а за вектор на правецот – кој било ненулти вектор колинеарен со векторот $\mathbf{a}$.

6.12. Да се најдат каноничните равенки на правата што минува низ точките $M_1(1,\,1,\,-1)$ и $M_2(3,\,2,\,-1)$.

Решение. Ако $M_1(x_1,\,y_1,\,z_1)$ и $M_2(x_2,\,y_2,\,z_2)$ се две различни точки од една права, тогаш за вектор на правецот на таа права може да се земе векторот $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, па, според (3) од зад. **6.11**, нејзините равенки се:

$$\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\tfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\tfrac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

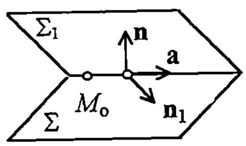
Во дадениот случај имаме $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,\,1,\,0)$, па

$$\tfrac{x-1}{2}=\tfrac{y-1}{1}=\tfrac{z+1}{0}$$

се бараните равенки.

6.13. Да се најдат каноничните равенки на правата што претставува пресек на рамнините $2x+3y-z=9$, $x-y+3z=8$.

Решение. Правата (p) што е пресек на две рамнини $Ax+By+Cz+D=0$, $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ е нормална на нивните нормални вектори $\mathbf{n}=(A_1,\,B,\,C)$ и $\mathbf{n}_1=(A_1,\,B_1,\,C_1)$, па нејзиниот вектор на правецот, $\mathbf{a}$, е паралелен со векторскиот производ на тие вектори (црт. 6.7), т.е.



Црт. 6.7

$$\mathbf{a}\parallel(A,\,B,\,C)\times(A_1,\,B_1,\,C_1)=\left(\begin{vmatrix}B & C\\ B_1 & C_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}C & A\\ C_1 & A_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A & B\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}\right).$$

Избирајќи точка $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ што лежи на двете рамнини истовремено, ќе можеме да ги напишеме каноничните равенки на правата (p).
Во дадениот случај имаме: $\mathbf{a}=(2,\,3,\,-1)\times(1,\,-1,\,3)=(8,\,-7,\,-5)$, а ставајќи во равенките на рамнините, на пример, $y=0$, добиваме:

$$2x-z=9\,,\qquad x+3z=8,$$

од каде што лесно добиваме $x = 5$, $z = 1$. Каноничните равенки на правата што минува низ точката $M_0(5, 0, 1)$ паралелно со векторот $\mathbf{a} = (8, -7, -5)$ се:

$$\frac{x-5}{8} = \frac{y}{-7} = \frac{z-1}{-5}.$$

6.14. Да се најде прободот на рамнината $(\Pi)\colon 2x + y - 2z - 1 = 0$ со правата:

а) што минува низ точките $M_1(3, 2, 3)$ $M_2(2, 2, 1)$;

б) што е пресек на рамнините $x - y - z + 4 = 0$, $3x - 2y - z + 5 = 0$.

Решение. Каноничните равенки на правата M_1M_2 се:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{2},$$

а параметарските се:

$$x = 3 + t, \qquad y = 2, \qquad z = 3 + 2t.$$

Заменувајќи во равенката $(\Pi)\colon 2x + y - 2z - 1 = 0$, добиваме:

$$2 \cdot (3 + t) + 2 - 2 \cdot (3 + 2t) - 1 = 0,$$

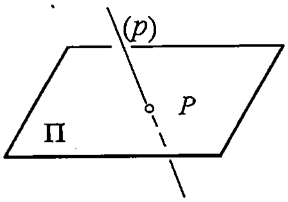
т.е. $\quad -2t + 1 = 0, \quad t = \frac{1}{2}, \quad$ па $\quad x = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, \quad y = 2, \quad z = 4.$

Значи, прободот е точката $P\left(\frac{7}{2}, 2, 4\right)$.

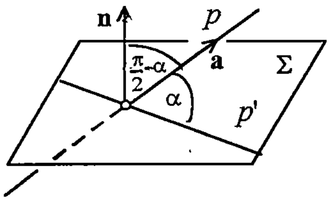
б) Дадената права можеме да ја претставиме со канонични равенки (како во зад. **6.13**) и потоа да работиме како погоре, во а). Но, може и поинаку: бараниот пробод е заедничката точка на трите рамнини:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= \ \ 1\,, \\ x - y - z &= -4\,, \\ 3x - 2y - z &= -5\,. \end{aligned}$$

Решението на овој систем, т.е. тројката (1, 3, 2) е прободот на дадената рамнина со дадената права.



Црт. 6.8



Црт. 6.9

6.15. Да се најде аголот меѓу правата $(p)\colon \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ и рамнината $3x + 4y - 5z = 1$.

Решение. Агол меѓу права (p) *и рамнина* (Σ) е помалиот од аглите меѓу правата и нејзината ортогонална проекција врз рамнината (кога правата не е нормална на рамнината), црт. 6.9. Ако

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{и} \quad \mathbf{n} = (A, B, C),$$

тогаш:

$$\sin\alpha = \frac{|a_1A+a_2B+a_3C|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Во дадениот случај имаме: $\mathbf{a}=(4,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{n}=(3,\ 4,\ -5)$, па

$$\sin\alpha = \frac{|4\cdot 3-1\cdot 4+1\cdot(-5)|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}} = \frac{3}{30}, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{10}.$$

6.16. Да се најде аголот меѓу двете прави:

$$(p)\colon \frac{x}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}, \qquad (q)\colon \begin{cases} x+2y+2z=1 \\ x+4y+3z=2. \end{cases}$$

Решение. *Агол меѓу две прави* е помалиот од аглите α и $\pi-\alpha$, каде што α е аголот меѓу векторите на правците на тие прави. Според тоа,

$$\cos\alpha = \pm\frac{a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}},$$

каде што $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $\mathbf{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ се векторите на правците на тие прави.

Векторот на правецот на правата (p) е
$\mathbf{a}=(4,\ -1,\ -1)$, а на (q) е $\mathbf{c}=(1,\ 2,\ 2)\times(1,\ 4,\ 3)=(-2,\ -1,\ 2)$, па:

$$\cos\alpha = \pm\frac{4\cdot(-2)-1\cdot(-1)-1\cdot 2}{\sqrt{16+1+1}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \mp\frac{-9}{9\sqrt{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Можеме да земеме $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, па: $\alpha=45^0$. (Ако го земеме знакот $-$, ќе го добиеме аголот $\alpha_1=135^0$, што е суплементен со $\alpha=45^0$.)

6.17. Дадена е правата $(p)\colon \frac{x-2}{3}=\frac{x-1}{0}=\frac{z}{2}$, точката $M(-3,\ 0,\ 1)$ и рамнината $(\Pi)\colon x-2y+3z=7$. Да се најдат равенки на правата (s) што минува низ точката M:

а) паралелно со правата (p);

б) паралелно со рамнината (Π) и нормално на правата (p).

Решение. а) Бараната права треба да е паралелна со правата (p), па затоа, за вектор на правецот можеме да го земеме векторот $\mathbf{a}=(3,\ 0,\ 2)$, а бидејќи минува низ точката $M(-3,\ 0,\ 1)$, ќе добиеме:

$$(s)\colon \frac{x+3}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{2}.$$

б) Нека $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ е векторот на правецот на бараната права (s). Од условот за паралелност на права со рамнина ($s\perp\Pi$), односно од условот за нормалност меѓу две прави ($s\perp p$), имаме:

$$a_1-2a_2+3a_3=0, \qquad \text{односно} \qquad 3a_1+2a_3=0,$$

од каде што добиваме $a_3=-\frac{3}{2}a_1$, $a_2=-\frac{7}{4}a_1$, па: $\mathbf{a}=\left(a_1,\ -\frac{7}{4}a_1,\ -\frac{3}{2}a_1\right)$.
Можеме да ставиме $a_1=4$, па $\mathbf{a}=(4,\ -7,\ -6)$. Така, равенките на правата што минува низ точката M, паралелно со (Π) и нормално на (p) се:

$$(s)\colon \frac{x+3}{4}=\frac{y}{-7}=\frac{z-1}{-6}.$$

6.18. Да се најдат равенките на правата (p) којашто минува низ точката $M_2(2,\ 4,\ 5)$, паралелно со рамнината $(\Pi)\colon 2x-2y+z=7$ и ја сече правата $(q)\colon \frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}$.

Решение. Нека $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е векторот на правецот на (p). Од паралелноста на (p) и (П) добиваме

$$2a_1 - 2a_2 + a_3 = 0\,. \qquad (1)$$

Да избереме по една точка од правите (p) и (q), на пример $M_1(2, 4, 5)$ од (p) и $M_2(3, 4, 6)$ од (q). Бидејќи правата (p) ја сече правата (q), векторите $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (-1, 3, 3)$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1, 0, 1)$ се компланарни, па

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

од каде што ја добиваме равенката

$$a_1 + a_2 - a_3 = 0\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме: $a_2 = 3a_1$, $a_3 = 4a_1$, т.е.

$$\mathbf{a} = (a_1, 3a_1, 4a_1).$$

Можеме да земеме $a_1 = 1$, па $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$. Значи, каноничните равенки на (p) се:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{4}.$$

Општо, две прави чии канонични равенки се

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \qquad \text{и} \qquad \frac{x-x_2}{c_1} = \frac{y-y_2}{c_2} = \frac{z-z_2}{c_3}$$

лежат во иста рамнина ако и само ако е исполнет условот:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (3)$$

6.19. Дадена е правата $(p)\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$.

а) Да се најде равенката на рамнината што минува низ правата (p) и низ точката $M(4, 2, 6)$.

б) Да се најдат равенките на проекцијата на правата (p) врз рамнината $x + y - z - 2 = 0$, ако проектирањето е паралелно со векторот $\mathbf{c} = (1, 2, 2)$.

Решение. Множеството рамнини што минуваат низ дадената права (p) се вика *прамен рамнини.* Ако правата е зададена како пресек на две рамнини, т.е. со равенките:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

тогаш *равенката на праменот рамнини* е:

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0\,; \qquad (1)$$

секоја рамнина од тој прамен, освен рамнината $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, се добива за некоја вредност на параметарот λ, $\lambda \in \mathbf{R}$.

а) Треба да ја најдеме равенката на онаа рамнина од праменот определен со правата (p), што минува низ точката M. Од каноничните равенки на (p) ги добиваме равенките $x - 2y - 1 = 0$ и $3y - z + 2 = 0$, па равенката на праменот е:

$$x - 2y - 1 + \lambda(3y - z + 2) = 0\,. \qquad (1')$$

Заменувајќи ги во $(1')$ координатите на M, добиваме $4 - 2\cdot 2 - 1 + \lambda(3\cdot 2 - 6 + 2) = 0$, т.е. $2\lambda = 1$. Така, ставајќи во $(1')$ $\lambda = 1/2$, добиваме $2x - y - z = 0$, а тоа е бараната равенка.

б) *Проекцијата на правата* (p) е права што се добива како пресек на дадената рамнина и проектирачката рамнина (П). Според тоа, треба да ја најдеме само уште равенката на (П). Таа му припаѓа на праменот рамнини, чија равенка е $(1')$, т.е.

$$x + (3\lambda - 2)y - \lambda z + 2\lambda - 1 = 0\,, \tag{1''}$$

а е паралелна со векторот $\mathbf{c} = (1,\, 2,\, 2)$. Тоа значи дека за $\mathbf{c} = (1,\, 2,\, 2)$ и $\mathbf{n} = (1,\, 3\lambda - 2,\, -\lambda)$ е исполнет условот (6) од **6.5**, т.е.

$$1 + 6\cdot\lambda - 4 - 2\cdot\lambda = 0,$$

од каде што добиваме $\lambda = 3/4$. Заменувајќи во $(1'')$, ја добиваме равенката на (П): $4x + y - 3z + 2 = 0$.

Според тоа, равенките на проекцијата на (p) врз дадената рамнина, паралелно со дадениот вектор $\mathbf{c}$, се:

$$x + y - z - 2 = 0, \qquad 4x + y - 3z + 2 = 0.$$

6.20. Дадена е рамнината (П): $2x + 3y - 6z - 1 = 0$. Да се најде:

а) отклонот на точката $M_0(-1,\, 2,\, -3)$ од рамнината (П);

б) растојанието од точката $M_0(-1,\, 2,\, -3)$ до рамнината (П);

в) растојанието меѓу паралелните рамнини (П) и (P): $2x + 3y - 6z - 15 = 0$.

Решение. а) Ако $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ е дадена точка, а $Ax + By + Cz + D = 0$ е дадена рамнина, тогаш *отклон на точката M од рамнината* (П) е бројот

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,, \tag{1}$$

при што од знаците $\pm$ треба да се земе оној што е спротивен од знакот на слободниот член (при $D = 0$ знакот се избира произволно).

Во дадениот случај имаме:

$$\delta = \frac{2\cdot(-1)+3\cdot 2-6\cdot(-3)-1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{21}{-7} = -3.$$

Тоа што отклонот $\delta = -3$ е негативен број, значи дека точката M_0 и координатниот почеток O се наоѓаат *на иста страна* од рамнината (П). (Кога $\delta > 0$, тогаш M_0 и O се наоѓаат *на спротивни страни* од (П).)

б) Растојанието d од M_0 до (П) е еднакво со апсолутната вредност на отклонот, т.е.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \tag{2}$$

За дадениот случај:

$$d = \tfrac{21}{7} = 3.$$

в) Под *растојание меѓу две паралелни рамнини* се подразбира растојанието од која било точка на едната рамнина до другата рамнина. Според тоа, задачава се сведува на претходната, под б).

Избираме точка од рамнината (П), на пример $T(5,\, -3,\, 0)$, и ја применуваме формулата (2):

$$d = \frac{2\cdot 5+3\cdot(-3)-6\cdot 0-15}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{14}{7} = 2.$$

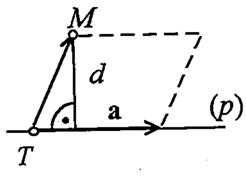
6.21. Дадена е правата (p): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{8}$. Да се најде растојанието:

а) од точката $M(3, 4, 2)$ до правата (p);

б) меѓу паралелните прави (p) и (p_1): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{8}$.

Решение. а) Да избераме точка T од правата (p), на пример $T(2, 3, 0)$. Векторот $\mathbf{a}$ на правецот на (p) со векторот $\overrightarrow{TM}$ формира паралелограм, чија висина d е бараното растојание (црт. 6.10). Бидејќи плоштината на паралелограмот е еднаква, од една страна со $d|\mathbf{a} \times \overrightarrow{TM}|$, а од друга страна со $|\mathbf{a}|$, следува дека:

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \overrightarrow{TM}|}{|\mathbf{a}|}.$$



Црт. 6.10

За дадениот случај имаме;

$\mathbf{a} = (1, 4, 8)$, $\overrightarrow{TM} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{a} \times \overrightarrow{TM} = (0, 6, -3)$,

$|\mathbf{a}| = 9$, $|\mathbf{a} \times \overrightarrow{TM}| = 3\sqrt{5}$; $d = \frac{3\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

б) Растојанието меѓу две паралелни прави (p) и (p_1) е еднакво со растојанието од која било точка на (p_1), на пример $S(1, 3, -1)$, до правата (p), па задачата се сведува на претходната, под а). За $T(2, 3, 0)$ од (p) $\overrightarrow{TS} = (-1, 0, -1)$, $\mathbf{a} \times \overrightarrow{TS} = (-4, -7, 4)$, $|\mathbf{a}| = 9$, $|\mathbf{a} \times \overrightarrow{TS}| = 9$, па $d = \frac{9}{9} = 1$.

6.22. Да се најде растојанието меѓу правите:

$$(p): \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \qquad (q): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{1}$$

Решение. Ако S и T се точки од правите (p) и (q) соодветно, на пример $S(2, 3, 1)$ и $T(3, 4, 5)$, а $\mathbf{a} = (2, 1, 0)$ и $\mathbf{c} = (-2, 0, 1)$ се векторите на правците на правите (p) и (q) соодветно, тогаш растојанието d меѓу (p) и (q) е еднакво со висината на паралелопипедот образуван од векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ и $\overrightarrow{ST} = (1, 1, 4)$ што е спуштена кон основата паралелна со $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ (црт. 6.11). Бидејќи волуменот на паралеопипедот е еднаков, од една страна со $|[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \overrightarrow{ST}]|$, а од друга страна со $|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| \cdot d$, следува дека:

$$d = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \overrightarrow{ST}]|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|}. \tag{1}$$

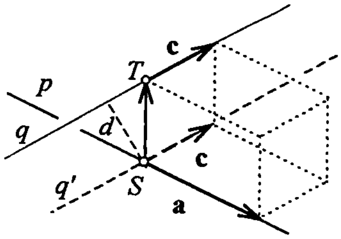
За дадениот случај имаме

$$[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \overrightarrow{ST}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

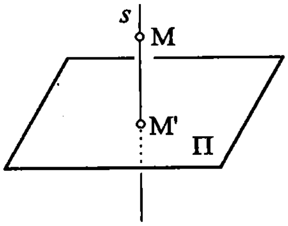
$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (1, -2, 2), \qquad |\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = 3,$$

па според (1): $d = 7/3$.

Да забележиме дека зададените прави (p) и (q) не лежат во иста рамнина; в.(3) од зад. **6.18**. Ако (p) и (q) се сечат, тогаш броителот во (1) ќе биде нула, а именителот различен од нула, па $d = 0$. Ако, пак, (p) и (q) се паралелни, тогаш ќе постапиме како во зад. **6.21**; б).



Црт. 6.11



Црт. 6.12

6.23. Да се најде ортогоналната проекција M' на точката $M(2, -3, 5)$ врз рамнината $(\Pi)\colon x + 2y - 2z - 4 = 0$.

Решение. Бараната проекција M' е прободот на рамнината (П) со правата (s) што минува низ M и е нормална на (П) (црт. 6.12). Параметарските равенки на правата (s) се:

$$x = 2 + t, \qquad y = -3 + 2t, \qquad z = 5 - 2t.$$

Заменувајќи во (П) (в. и зад. **6.14**), добиваме:

$$2 + t - 6 + 4t - 10 + 4t - 4 = 0,$$

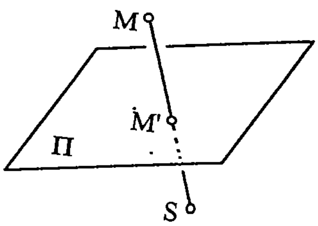
т.е. $t = 2$, а потоа во равенките (s), ја добиваме бараната точка $M(4, 1, 1)$.

6.24. Да се најде точката S што е симетрична на точката $M(3, 4, 7)$ во однос на рамнината $(\Pi)\colon 2x - y + z + 9 = 0$.

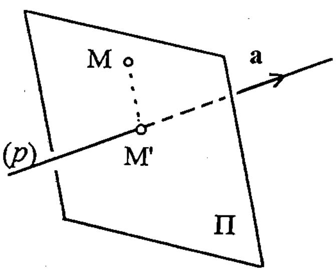
Решение. Прво, ќе ја најдеме ортогоналната проекција M' на точката M врз рамнината (П) (црт. 6.13). Работејќи како во зад. **6.23**, добиваме: $x = 3 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = 7 + t$, $t = -3$, па $M'(-3, 7, 4)$. Точката $M'(-3, 7, 4)$ е средина на отсечката $MS\colon M(3, 4, 7)$, $S(x, y, z)$. Според тоа:

$$-3 = \tfrac{3+x}{2}, \quad 7 = \tfrac{4+y}{2}, \quad 4 = \tfrac{7+z}{2}, \quad \text{т.е.} \quad x = -9, \quad y = 10, \quad z = 1.$$

Значи, симетричната точка на M во однос на (П) е $S(-9, 10, 1)$.



Црт. 6.13



Црт. 6.14

6.25. Да се најде ортогоналната проекција M' на точката $M(3, 4, 6)$ врз правата (p): $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - t$.

Решение. Ортогоналната проекција M' на точката M врз правата (p) можеме да ја добиеме како пробод на правата (p) врз рамнината (Π) што минува низ точката M нормално на (p) (црт. 6.14).

Бидејќи (Π) минува низ $M(3,4,6)$ и е нормална на векторот $\mathbf{a} = (-1,1,-1)$, следува дека нејзината равенка е:

$$-1\cdot(x-3)+1\cdot(y-4)-1\cdot(z-6)=0, \qquad \text{т.е.} \qquad -x+y-z+5=0.$$

Заменувајќи ги равенките (p) во оваа равенка, добиваме:

$$-(3-t)+(2+t)-(1-t)+5=0, \qquad t=-1.$$

Така бараната проекција е $M'(4,\ 1,\ 2)$.

6.26. Да се најде точката S што е симетрична на точката $T(2,\ 1,\ 3)$ во однос на правата (p): $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

Решение. Ќе ја најдеме прво ортогоналната проекција T' на точката T врз правата (p) (црт. 6.15). За таа цел, ја поставуваме рамнината (Π) низ точката $(2,\ 1,\ 3)$ со нормален вектор $\mathbf{a} = (1,\ 2,\ -1)$

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)-1\cdot(z-3)=0,$$
$$(\Pi)\colon x+2y-z-1=0.$$

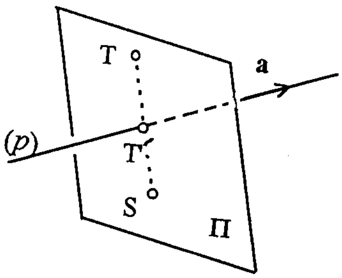
Ставајќи ги во (Π): $x=-2+t$, $y=-1+2t$, $z=1-t$ (добиени од (p)), ќе имаме:

$$(-2+t)+2(-1+2t)-(1-t)-1=0;$$

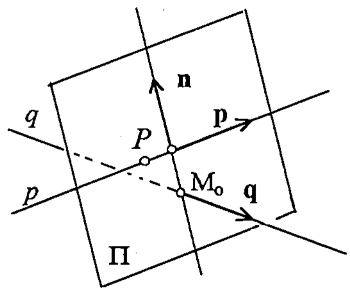
$t=1$, па $T'(-1,\ 1,\ 0)$. Точката $T'(-1,\ 1,\ 0)$ е средина на отсечката TS: $T(2,\ 1,\ 3)$, $S(x,\ y,\ z)$. Според тоа:

$$-1=\frac{2+x}{2}, \qquad 1=\frac{1+y}{2}, \qquad 0=\frac{3+z}{2}, \qquad \text{т.е. } x=-4, \quad y=1,\ z=-3.$$

Значи, симетричната точка на T во однос на (p) е $S(-4,1,-3)$.



Црт. 6.15



Црт. 6.16

6.27. Да се најде заедничката нормала (n) на правите

$$(p)\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}, \qquad (q)\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

Решение. Лесно се увидува дека правите (p) и (q) се разминувачки. Каноничните равенки на нивната заедничка нормала се:

$$(n)\colon \tfrac{x-x_0}{1} = \tfrac{y-y_0}{2} = \tfrac{z-z_0}{3}$$

при што $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ е некоја точка од (n), а векторот на правецот е:

$\mathbf{n} \parallel \mathbf{p} \times \mathbf{q} = (1,\, 2,\, 1) \times (1,\, -1,\, 1) = (3,\, 0,\, -3)$, па $\quad \mathbf{n} = (1,\, 0,\, -1)$.

За да најдеме точка M_0, поставуваме рамнина (П) низ правата (p) паралелно со векторот $\mathbf{n}$ (црт. 6.16); еден нејзин нормален вектор е:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} \times \mathbf{n} = (1,\, 2,\, 1) \times (1,\, 0,\, -1) = (-2,\, 2,\, -2) \parallel (1,\, -1,\, 1).$$

Рамнината (П) минува низ точката $P(1,\, 2,\, 0)$ нормално на $\mathbf{a} = (1,\, -1,\, 1)$, па:

$$1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-2) + z = 0, \quad \text{т.е.} \quad (\Pi)\colon x - y + z + 1 = 0.$$

Прободот на рамнината (П) со правата (q) е точка од нормалата (n); неа ќе ја земеме за M_0. Параметарските равенки на (q): $x = 3+t \;\; y = -1-t$, $z = 1+t$, ги заменуваме во (П):

$(3+t) - (-1-t) + (1+t) + 1 = 0; \quad t = -2, \quad$ па $\; x = 1, \quad y = 1, \quad z = -1,$

се координатите на бараната точка $M_0\colon M_0(1,\, 1,\, -1)$. Значи, заедничката нормала на правите (p) и (q) има канонични равенки:

$$(n)\colon \tfrac{x-1}{1} = \tfrac{y-1}{0} = \tfrac{z+1}{-1}.$$

II решение . Задачава можеме да ја решиме и инаку: $\mathbf{n}$ да го најдеме од условот за нормалност меѓу: (p) и (n), односно (q) и (n); потоа, координатите на една точка M_0 од (n) можеме да ги најдеме од условот (p) и (n), односно (q) и (n) да лежат во иста рамнина (избирајќи една координата произволно).

Имено, од нормалноста на $\mathbf{n} = (n_1,\, n_2,\, n_3)$ со $\mathbf{p} = (1,\, 2,\, 1)$ и со $\mathbf{q} = (1,\, -1,\, 1)$ го добиваме системот равенки:

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0, \qquad n_1 - n_2 + n_3 = 0,$$

чиешто решение е $n_2 = 0$, $n_3 = -n_1$ (при што n_1 е произволен број $\neq 0$); за $n_1 = 1$ имаме $\mathbf{n} = (1,\, 0,\, -1)$.

Од условите (n) и (p), односно (n) и (q) да лежат во иста рамнина (в. (3) во зад. **6.18**)

$$\begin{vmatrix} x_0 - 1 & y_0 - 2 & z_0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_0 - 3 & y_0 + 1 & z_0 - 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

го добиваме системот: $x_0 - y_0 + z_0 + 1 = 0, \;\; -x_0 - 2y_0 - z_0 + 2 = 0$

чиешто решение е $y_0 = 1, \;\; z_0 = -x_0$, па по $x_0 = 1$ имаме $M_0(1,\, 1,\, -1)$.

6.28. Да се најде *равенката на цилиндричната површина* чија генератриса е паралелна со векторот $\mathbf{a} = (2,\, 1,\, 1)$, а директриса е кривата

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + 16 = 0, \quad z = 0\,. \tag{1}$$

Решение. Нека

$$x = f(u), \quad y = g(u), \quad z = 0, \tag{2}$$

се параметарски равенки на една крива во рамнината Oxy и $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е даден вектор што не е паралелен со Oxy. Да ја најдеме равенката на цилиндричната површина, чија директриса е кривата (2), а генератрисата е паралелна со векторот $\mathbf{a}$. Ако $T(X, Y, Z)$ е произволна точка од цилиндричната површина, тогаш правата што минува низ T и низ точката $M\big(f(u), g(u), 0\big)$ од директрисата има равенки:

$$\frac{X - f(u)}{a_1} = \frac{Y - g(u)}{a_2} = \frac{Z - 0}{a_3} \; (= v) \tag{3}$$

Така, *параметарските равенки на површината* се:

$$X = f(u) + a_1 v, \qquad Y = g(u) + a_2 v, \qquad Z = a_3 v, \tag{4}$$

а со елиминацијата (ако е возможна) на параметрите u и v од (4) се добива бараната равенка (во општ случај, во имплицитен облик).
Првата од равенките (1) можеме да ја претставиме во вид:

$$(x - 2)^2 + 4(y - 2)^2 = 4,$$

па, ставајќи $x - 2 = 2\cos u$, $y - 2 = \sin u$, добиваме:

$$x = 2 + 2\cos u, \qquad y = 2 + \sin u, \qquad z = 0 \tag{1'}$$

т.е. параметарски равенки на директрисата. Имајќи ги точката $M(2 + 2\cos u,\, 2 + \sin u,\, 0)$ и векторот $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, според (3), добиваме:

$$\tfrac{X-2-2\cos u}{2} = \tfrac{Y-2-\sin u}{1} = \tfrac{Z-0}{1} = v,$$

па според (4): $X = 2 + 2\cos u + 2v$, $Y = 2 + \sin u + v$, $Z = v$. Ставајќи $v = Z$ во X и Y, добиваме:

$$\tfrac{1}{2}(X - Z - 2) = \cos u \qquad Y - Z - 2 = \sin u,$$

па, по квадрирањето и собирањето на овие равенки, добиваме:

$$(X - Z - 2)^2 + 4(Y - Z - 2)^2 = 4,$$

а тоа е бараната равенка.

6.29. Да се најде *равенката на конусната површина* со врв $A(0, -a, 0)$ и директриса:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad y + z = a. \tag{1}$$

Решение. Нека директрисата е зададена со параметарските равенки:

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = c. \tag{2}$$

Равенките на генератрисата, т.е. на правата што минува низ врвот $A(x_0, y_0, z_0)$ на конусната површина и низ точката $M\big(f(u), g(u), c\big)$ од директрисата (при што е $z_0 \neq c$) гласат:

$$\frac{X - x_0}{f(u) - x_0} = \frac{Y - y_0}{g(u) - y_0} = \frac{Z - z_0}{c - z_0} \; (= v). \tag{3}$$

Така добиваме *параметарски равенки на конусната површина*:

$$X = x_0 + v \cdot \big(f(u) - x_0\big), \quad Y = y_0 + v \cdot \big(g(u) - y_0\big), \quad Z = z_0 + v \cdot (c - z_0). \tag{4}$$

Ако е можно од (4) да се елиминираат параметрите u и v, ја добиваме равенката на конусната површина во имлицитен облик.
Во дадениот случај, од втората равенка на (1), имаме $z = a - y$, па, заменувајќи во првата, добиваме:

$$x^2 + 2y^2 - 2ay = 0, \quad \text{т.е.} \quad x^2 + 2\left(y - \tfrac{a}{2}\right)^2 = \tfrac{a^2}{2}.$$

Ставајќи $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos u$, $y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin u$, добиваме $z = a - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \sin u$, па:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos u\,, \qquad y = \frac{a}{2}(1 + \sin u)\,, \qquad z = \frac{a}{2}(1 - \sin u) \tag{5}$$

се параметарски равенки на директрисата.
Според (3), т.е. (4) добиваме:

$$X = \tfrac{a}{\sqrt{2}} \cos u, \qquad Y + a = \tfrac{av}{2}(3 + \sin u), \qquad Z = \tfrac{a}{2}(1 - \sin u),$$

а тоа се параметарски равенки на бараната конусна површина.

6.30. Да се најде *равенката на ротационата површина* што се добива со ротација на кривата $z = \frac{1}{1+y^2}$, $x = 0$ околу: а) оската Oz; б) оската Oy. Потоа, да се нацртаат површините.

Решение. За ротационите површини имаме:

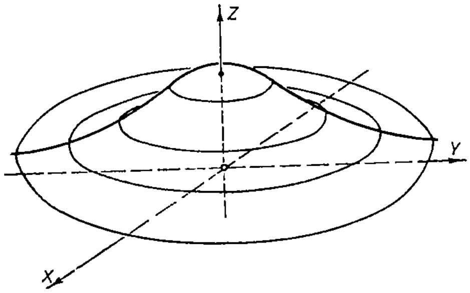
Равенки на кривата	Оска на ротацијата	Равенка на ротационата површина
$F(x, y) = 0$	Ox	$F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
$z = 0$	Oy	$F\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$
$F(x, z) = 0$	Ox	$F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
$y = 0$	Oz	$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$
$F(y, z) = 0$	Oy	$F\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$
$x = 0$	Oz	$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$

а) За да ја добиеме равенката на површината што се добива кога кривата $z = \frac{1}{1+y^2}$, $x = 0$ ротира околу оската Oz, треба на местото од y да ставиме $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Така добиваме $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, а тоа е равенката на бараната ротациона површина (црт. **6.17**).

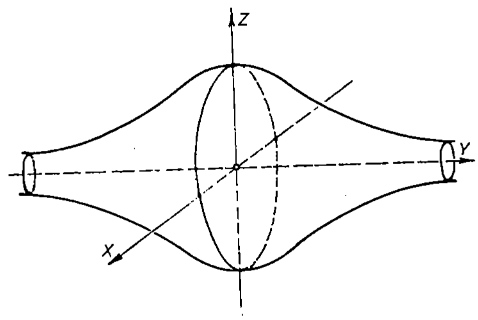
б) Заменувајќи го z со $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ во равенките на дадената крива, добиваме:

$$\pm\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \text{т.е.} \qquad (x^2 + z^2)(1 + y^2)^2 = 1.$$

Површината е претставена на црт. 6.18.



Црт. 6.17



Црт. 6.18

6.31. Со пресекот на две сфери определена е кружницата:

$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2+y^2+(z-1)^2&=1\,,\\ x^2+y^2+z^2&=1\,.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Да се најде нејзината ортогонална проекција на рамнината Oxy.

Решение. Треба да ја најдеме равенката на цилиндарот што ја проектира дадената кружница на рамнината Oxy. За таа цел треба z да се елиминира од равенките (1). Ако ја одземеме втората од првата, добиваме:

$$x+z=1\,.\tag{2}$$

Оттука имаме $z=1-x$, па, ставајќи во која било од равенките (1) $1-x$ наместо z добиваме:

$$2x^2+y^2-2x=0\tag{3}$$

а тоа е равенката на проектирачкиот цилиндар. Според тоа, равенката на проекцијата е зададена со равенките:

$$2x^2+y^2-2x=0\,,\qquad z=0\,.\tag{4}$$

Првата од равенките (4) може да добие вид:

$$\frac{(x-1/2)^2}{1/4}+\frac{y^2}{1/2}=1.$$

па, значи, бараната проекција е елипса со полуоски $a=1/2$, $b=1/\sqrt{2}$.

6.32. Да се најдат вредностите на параметарот k за кои рамнината $x+y-2z+k=0$ ќе ја допира сферата $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24$. Потоа, да се најде допирната точка (за секоја од добиените вредности на k).

Решение. Една рамнина допира дадена сфера ако и само ако нејзиното растојание d до центарот C на сферата е еднакво со радиусот r на сферата. Во дадениот случај имаме:

$$C(1,\ -2,\ 3)\,,\quad r=\sqrt{24},\quad d=\frac{|1\cdot 1+1\cdot(-2)-2\cdot 3+k|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{|k-7|}{\sqrt{6}},$$

па од $d=r$ добиваме: $|k-7|=\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$, $|k-7|=12$, $k_1=19$, $k_2=-5$. Допирната точка M на рамнината и сферата ќе ја добиеме како прободна сферата со правата што е нормална на рамнината и минува низ C. Параметарските равенки на таа права се: $x=1+t$, $y=-2+t$, $z=3-2t$. Заменувајќи во равенката на сферата, добиваме: $6t^2=24$, $t=\pm 2$, па $M_1(-1,\ -4,\ 7)$ и $M_2(3,\ 0,\ -1)$ се бараните точки (за $k=19$ и $k=-5$ соодветно).

Задачи за вежбање

6.33. Да се провери кои од точките $M_1(3,1,2)$, $M_2(1,3,1)$ и $M_3(2,9,4)$ лежат на рамнината $2x+y-3z-1=0$.

6.34. Дадена е отсечката ST, $S(2,3,1)$ и $T(4,7,-3)$. Да се најде равенката на рамнината што минува низ:

а) точката S, нормално на отсечката ST;

б) средината на отсечката ST и нормално на неа.

6.35. Дадени се точките $M_1(2,2,3)$, $M_2(-1,2,-2)$ и $M_3(3,1,1)$. Да се најде равенката што минува

а) низ точката M_1 и е нормална на векторот $\overrightarrow{M_2M_3}$;

б) низ точката M_1 и на координатните оски Ox, Oy, Oz отсечува сегменти кои се во однос $1:2:3$;

в) низ трите точки M_1, M_2, M_3;

г) на растојание 4 од координатниот почеток O, нормално на векторот $\overrightarrow{OM}_2$.

д) низ точката M_1 и е паралелна со векторите $\overrightarrow{M_1M}_2$ и $\overrightarrow{M_1M}_3$.

6.36. Да се најде волуменот на тетраедарот ограничен со координатните рамнини и со рамнината $3x+4y+6z-12=0$.

6.37. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M(1,2,3)$ и е

а) нормална на оската Ox; б) паралелна со рамнината Oxy;

в) паралелна со y–оската и зафаќа агол од 120^0 со xy–рамнината.

6.38. Да се најдат должината p и насоката на нормалната отсечка, спуштена од координатниот почеток до рамнината $3x - 6y + 2z - 56 = 0$.

6.39. Општата равенка $2x + y - 2z - 4 = 0$ на една рамнина да се запише во:

а) сегментен; б) нормален; в) параметарски облик.

6.40. Каква посебна положба има рамнината со равенка:

а) $z - 3 = 0$; б) $5x - 2 = 0$; в) $x + y - z = 0$;

г) $2x - 3z - 6 = 0$; д) $x + 4y = 0$?

6.41. Да се најде пресечната точка на рамнините:

а) $x + 2y + z - 4 = 0$, $3x - 5y + 3z - 1 = 0$, $2x + 7y - z - 8 = 0$;

б) $2x - y + z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z + 1 = 0$, $x - 3y - 2z - 3 = 0$;

в) $2x + y + z + 1 = 0$, $4x + 2y + 2z - 3 = 0$, $6x + 3y + 3z + 4 = 0$;

г) $x - 2y - 3z + 1 = 0$, $2x - y + z - 3 = 0$, $3x + y - 2z + 1 = 0$;

д) $2x - y + 2z = 0$, $3x + 3z + 1 = 0$, $x - 2y + z - 1 = 0$.

6.42. Дадени се општите равенки на две рамнини: $(\Pi){:}\, 2x - y + 2z - 1 = 0$, $(P){:}\, x + y + 4z - 5 = 0$. Да се најде:

а) аголот меѓу (Π) и (P);

б) равенка на рамнината што минува низ $M_1(3, -1, 2)$, паралелно со (Π);

в) равенка на рамнината што минува низ точките $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(0, 1, 2)$ нормално на (Π);

г) равенка на рамнината што минува низ точката $M_1(3, -1, 2)$ нормално на рамнините (Π) и (P).

6.43. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M(1, 1, 1)$ нормално на правата $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

6.44. Дадени се точките $M_1(3, 1, 2)$, $M_2(-1, 1, 0)$ и рамнините $(\Pi){:}\, x - 2y + z - 1 = 0$, $(P){:}\, 2x + y - 2z - 4 = 0$. Да се најдат:

а) параметарски и канонични равенки на правата што минува низ точката M_1, нормално на рамнината (Π);

б) канонични равенки на правата што минува низ M_1 и M_2;

в) равенки на правата што е пресек на рамнините (Π) и (P);

г) прободот T на рамнината (Π) со правата M_1M_2.

6.45. Дадени се правата $(p)\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2}$, точката $M(-1,\, 0,\, 3)$ и рамнините $(\Pi)\colon 2x - y + z - 5 = 0$, $(P)\colon x + y - z + 2 = 0$. Да се најдат:

а) аголот меѓу (Π) и (P);

б) аголот меѓу (p) и правата што е пресек на (Π) и (P);

в) правата што минува низ M паралелно со (p);

г) правата што минува низ M, нормално на (Π);

д) правата што минува низ M, паралелно со (P) и нормално на (p).

6.46. Да се најдат равенки на правата (p) што минува низ точката $M(2,\, 3,\, 4)$, паралелна е со рамнината $x - y + 2z - 3 = 0$ и ја сече правата $\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{1}$.

6.47. Дадени се: точката $M(3,\, 5,\, 4)$, рамнината $(\Pi)\colon 2x + y - 2z + 3 = 0$ и правата $(p)\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$. Да се најдат:

а) отклонот на M од рамнината (Π);

б) растојанието од M до (Π);

в) растојанието меѓу (Π) и $(\Pi_1)\colon 2x + y - 2z - 12 = 0$;

г) растојанието од M до (p);

д) растојанието меѓу (p) и $(p_1)\colon \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$;

ѓ) растојанието меѓу (p) и $(q)\colon \frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{1}$.

6.48. Да се најде отклонот на точката $M(4,\, 3,\, 1)$ од рамнината $3x - 4y + 12z + 14 = 0$.

6.49. Да се провери дали точките $M_1(4,\, 6,\, 1)$ и $M_2(-3,\, -2,\, 2)$ лежат на иста страна од рамнината $3x + 4y - 12z + 2 = 0$.

6.50. Дадени се точката $M(2,\, 3,\, 4)$, рамнината $(\Pi)\colon x - y + 2z + 5 = 0$ и правата $(p)\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Да се најдат:

а) ортогоналната проекција M' на M врз (Π);

б) точката S што е симетрична на M во однос на (Π);

в) ортогоналната проекција M'' на M врз (p);

г) точката T што е симетрична на M во однос на (p).

6.51. Дали рамнината $4x - 2y + 3z - 7 = 0$ ги сече страните на триаголникот $A(4,\, -3,\, 2)$, $B(3,\, -1,\, 7)$, $C(-2,\, 1,\, -5)$?

6.52. Да се најде равенката на рамнината паралелна со рамнината $2x + 2y - z - 11 = 0$, оддалечена 5 единици од неа, а бараната рамнина и точката $M(1, 2, 4)$ се на различни страни од дадената рамнина.

6.53. Две страни на една коцка лежат на рамнините:

а) $6x - 18y - 9z - 5 = 0, \quad 4x - 12y - 6z - 7 = 0.$

б) $2x - 6y + 3z - 5 = 0, \quad 6x - 18y + 9z - 27 = 0.$

Да се пресмета волуменот на коцката.

6.54. Да се провери дали правата $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$ минува низ точките $M_1(1, 3, -1)$, $M_2(2, 4, 3)$, $M_3(-2, 1, 1)$ и $M_4(1, 7, -3)$.

6.55. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M(4, -3, 1)$ и е паралелна со правите:

$$\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}, \qquad \frac{x}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{2}.$$

6.56. Да се најдат равенките на правата што минува низ прободот на рамнината $2x + y + z - 6 = 0$ со правата $x - 2 = y - 3 = \frac{z-4}{2}$ и е нормална на дадената рамнина.

6.57. Да се најде косинусот на аголот меѓу правите:

а) $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \qquad \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{-2}.$

б) $\begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0, \\ x + 2y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0. \end{cases}$

в) $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \qquad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}.$

г) $\begin{cases} 3x + 2y + z - 5 = 0, \\ x + y - 2z - 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x - 4y - 4z = 0, \\ 7x + 10y - 8z = 0. \end{cases}$

6.58. Да се пресмета аголот меѓу правите што го сврзуваат координатниот почеток со точките $(-4, 4, 2)$ и $(2, 1, 2)$.

6.59. Да се најдат косинусите на аглите што ги зафаќа со координатните оски рамнината што минува низ средината на отсечката AB, $A(2, 5, 7)$, $B(-1, 1, -5)$ и е нормална на неа.

6.60. Да се најде аголот меѓу правата $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ и рамнината што минува низ точката $M(2, 3, 4)$ и е паралелна со векторите $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$ и $\mathbf{c} = (-2, -1, 2)$.

6.61. Да се најде прободот на дадената рамнина со дадената права:

а) $x+y+z+4=0$ со $x+1=\frac{y-2}{2}=z-1$;

б) $3x-y+2z-5=0$ со $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$.

6.62. Да се најде равенката на правата што минува низ точката $M(2,-1,3)$ и е нормална на рамнината $x+3y-4z-13=0$. Потоа, да се најдат координатите на прободот.

6.63. Да се покаже дека правата:

а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{3}$ лежи во рамнината $x+y-z-6=0$;

б) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ лежи во рамнината $x+2y-4z+1=0$.

6.64. Да се провери кои од дадените рамнини (Π_i), $i=1,2,3$, минуваат низ дадената права (p).

а) $(\Pi_1)\colon x-y-z+1=0$, $(\Pi_2)\colon 2x+y+3z+4=0$, $(\Pi_3)\colon 3x-y+z+1=0$; $(p)\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

б) $(\Pi_1)\colon x+y-2z-1=0$, $(\Pi_2)\colon 2x-3y+z=0$, $(\Pi_3)\colon 3x+2y+4z-11=0$; $(p)\colon \dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{-1}$.

6.65. Да се најде равенката на рамнината што минува низ дадената точка M и низ дадената права (p).

а) $M(2,3,1)$, $(p)\colon \begin{cases} x+y-2z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0. \end{cases}$

б) $M(5,2,3)$, $(p)\colon \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{3}$.

в) $M(1,-1,2)$, $(p)\colon \begin{cases} 3x+y-4z+5=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

6.66. Дадена е права (p) со равенките

$$3x+2y+5z+6=0, \qquad x+4y+3z+4=0.$$

Да се најде равенката на рамнината што минува низ (p) и

а) низ точката $M(2,-1,0)$;

б) е паралелна со правата $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-3}$;

в) е паралелна со рамнината $x-y+z-8=0$;

г) е паралелна со рамнината $x+2y+z-9=0$.

6.67. Низ оската Oz да се постави рамнина, којашто со рамнината $2x+y-z\sqrt{5}-5=0$ зафаќа агол од 60^0.

6.68. Во равенката на рамнината $x + y + az - 5 = 0$ да се определи параметарот a, така што низ оската Ox да може да се постави само една рамнина (P), којашто со зададената ќе образува агол од 30^0.

6.69. Да се испита дали се сечат зададените прави. Во потврден случај, да се најде пресечната точка S и рамнината во која лежат.

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

в) $x=2+2t,\ y=1+4t,\ z=-1-t$ и $x=-31+3u,\ y=6+2u,\ z=3+6u$.

г) $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ и $\frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z}{12}$.

6.70. Дадени се правите

$$(p)\colon \begin{cases} 7x + 2y - 2z + 7 = 0, \\ 3x + 2y + 1 = 0, \end{cases} \qquad (q)\colon \frac{x-7}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

Да се определи a, така што (p) и (q) да се сечат. Потоа, да се најде пресечната точка S.

6.71. Да се определи параметарот a, така што правите:

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y - 5z + 8 = 0\,, \\ x - 2z + 1 = 0\,, \end{cases}$$

да се сечат. Потоа да се најде равенката на правата што минува низ координатниот почеток и е нормална на рамнината во која лежат дадените прави.

6.72. Дадени се правите:

$$(p)\colon \frac{x-2}{a} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}\,, \qquad (s)\colon \begin{array}{l} x = -2 + t\,, \\ y = 1 + 2t\,, \\ z = t \end{array}.$$

Да се определи a, така што (p) и (s) да лежат во иста рамнина. Да се најде равенката на таа рамнина, пресечната точка S на правите и косинусот на аголот меѓу нив.

6.73. Да се најде ортогоналната проекција M' на точката M врз правата (p):

а) $M(1, 2, 8)$, $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$;

б) $M(1, 2, 8)$, $\frac{x-1}{2} = -y = z$;

в) $M(1, 0, 1)$, $x = 3z + 2$, $y = 2z$.

6.74. Да се најде ортогоналната проекција на отсечката AB: $A(1, 2, -1)$, $B(3, 1, 2)$ врз правата

$$\{2x - y + z - 2 = 0, \quad x + y - z - 1 = 0\}.$$

6.75. Да се најдат равенките на нормалата, повлечена низ точката M на правата (p):

а) $M(1, 0, 1)$; (p): $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$;

б) $M(2, -3, 1)$; (p): $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-1}$.

6.76. Да се најде ортогоналната проекција на дадената права врз дадената рамнина.

а) $\frac{x+2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$ врз $5x + 2y + 2z - 7 = 0$.

б) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ врз $x + z - 2 = 0$.

в) $\{3x - y + z - 4 = 0, \ 2x - y = 0\}$ врз $x + 2y - z + 4 = 0$.

г) $\{x-6y+3z-7 = 0, \ 2x+3y+4z+5 = 0\}$ врз $2x+2y+z+15 = 0$.

6.77. Да се најде равенката на рамнината што минува низ дадените паралелни прави и да се најде растојанието меѓу правите.

а) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

б) $\begin{cases} x + 2y - 2z - 7 = 0, \\ 4y - 3z - 12 = 0, \end{cases}$ и $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

в) $\begin{cases} x - 2y - 2z + 4 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y - 2z - 3 = 0, \\ x + y - z - 2 = 0. \end{cases}$

6.78. Да се најде растојанието од дадената точка M до дадената права (p).

а) $M(1, 1, 1)$, (p): $\{4x - 2y - z - 4 = 0, \quad x + z - 15 = 0\}$.

б) $M(1, 0, 1)$, (p): $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$.

в) $M(4, 1, 1)$, (p): $\{x + y + z = 4, \quad x - 2y - z = 4\}$.

6.79. Да се најде растојанието меѓу правите:

а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x+31}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{6}$.

б) $x=-5+3t$, $y=-5+2t$, $z=1-2t$ и $x=9+16u$, $y=-2u$, $z=2-u$.

в) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ и $x = 5 + 2t$, $y = 4 + 2t$, $z = 1 + t$.

г) $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ и $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$.

д) $4x = 3y = -z$ и $3(x - 1) = -y - 2 = -4z + 2$.

ѓ) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = z - 3$ и $\{ax - y = 0, \ z = 0\}$.

6.70. Да се најде равенката на висината на триаголникот ABC:

$$A(1,\,-2,\,-4),\quad B(3,\,1,\,-3),\quad C(5,\,1,\,-7),$$

повлечена од темето B.

6.81. Темињата на еден тетраедер се:

а) $A(1,\,2,\,-1)$, $B(2,\,2,\,2)$, $C(3,\,3,\,-4)$ и $D(5,\,1,\,-4)$.

б) $A(1,\,1,\,2)$, $B(2,\,1,\,-2)$, $C(-1,\,-2,\,-3)$ и $D(3,\,3,\,3)$.

Да се најдат должината и равенките на висината спуштена од темето D.

6.82. Точката $M(x,\,y,\,z)$, со почетна положба $M_0(1,\,0,\,0)$, се движи праволиниски и рамномерно во иста насока со векторот $\mathbf{p} = (2,\,3,\,6)$ со брзина $v = 14$. Да се состават равенките на движењето.

6.83. Точката $M(x,\,y,\,z)$ се движи праволиниски и рамномерно од почетната положба $M_0(2,\,1,\,0)$ со брзина $v = 3,5$ по нормалата, спуштена од M_0 на рамнината $2x - 3y + 6z - 20 = 0$. Да се најдат:

а) равенките на движењето на точката M;

б) пресекот P на траекторијата на M со дадената рамнина;

в) должината на отсечката M_0P;

г) времето за кое M поминала од M_0 до P.

6.84. Точката $M(x,\,y,\,z)$ се движи праволиниски и рамномерно од $M_0(2,\,0,\,6)$ во насока на векторот $\mathbf{a} = (1,\,2,\,2)$ со брзина $v = 2$. За колку време M ќе го помине делот од својата траекторија што се наоѓа меѓу паралелните рамнини:

$$2x + 3y - 2z = 0 \quad \text{и} \quad 2x + 3y - 2z - 8 = 0?$$

6.85. Да се најде точка S, симетрична на дадената точка M во однос на дадената рамнина.

а) $M(13,\,0,\,3)$, $6x - y + 3z = 41$;

б) $M(-3,\,6,\,-3)$, $2x - y + 3z = -23$.

6.86. Дадена е рамнината $x + 2y - 3z + 2 = 0$. Да се провери дали точките A и B лежат од иста или од различни страни на рамнината.

а) $A(3,2,1)$ и $B(1,\,1,\,-1)$; б) $A(2,\,3,\,5)$ и $B(4,\,1,\,1)$.

6.87. На дадената рамнина Σ да се најде точка P, таква што збирот на растојанијата до дадените точки A и B да биде најмал.

а) $z = 0$, $A(5,\,1,\,4)$, $B(-1,\,7,\,-2)$;

б) $z = 1$, $\quad A(-1, 4, 3)$, $\quad B(5, 1, 2)$;

в) $x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\quad A(2, 3, 5)$, $\quad B(4, 1, 1)$;

г) $2x - y + z - 11 = 0$, $\quad A(4, -3, 6)$, $\quad B(4, 1, 10)$.

6.88. На дадената рамнина Σ да се најде точка P, таква што разликата од нејзините растојанија до дадените точки A и B да биде најголема.

а) $x - 2y + 2z - 3 = 0$, $\quad A(1, 3, -1)$, $\quad B(0, 5, -3)$;

б) $2x + 3y - 4z = 15$, $\quad A(5, 2, -7)$, $\quad B(7, -25, 10)$;

в) $2x - 2y + z = 1$, $\quad A(6, -4, -1)$, $\quad B(-5, 6, -13)$.

6.89. Да се најде точка S, симетрична на дадената точка M во однос на дадената права.

а) $M(3, 2, 1)$, $\quad x = 1 - t$, $\quad y = 2t$, $\quad z = 1 + t$;

б) $M(2, 9, 6)$, $\quad x = 1 + 2t$, $\quad y = 2 + 4t$, $\quad z = 3 + 5t$;

в) $M(4, 1, -3)$, $\quad x = 5 + t$, $\quad y = 4 + 3t$, $\quad z = 6 + 2t$.

6.90. Да се најде заедничката нормала на правите:

а) $x = -1 + 3t$, $\quad y = 1 + 2t$, $\quad z = -2 + t$ $\quad$ и: $\quad 6x = 3y = 2z$;

б) $x = -1 + 2t$, $\quad y = 1 + t$; $\quad z = 9 - 3t$ $\quad$ и:
$x = 3 + 2t$, $\quad y = -15 - 7t$, $\quad z = 9 + 5t$.

6.91. Дадени се точките

$A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, -3, -1)$ и $D(1, -2, -1)$.

Да се најдат равенките на:

а) рамнината што минува низ A паралелно со правите AB и CD.

б) заедничката нормала на правите AB и CD.

6.92. Да се најде равенката на сферата со центар C и радиус r:

а) $C(1, 2, 3)$, $\quad r = 5$; $\qquad$ б) $C(3, -2, 0)$, $\quad r = 4$.

6.93. Да се одреди центарот C и радиусот r на сферата, чијашто равенка е зададена. Потоа, да се скицира сферата.

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 5 = 0$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2z + 14 = 0$.

в) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12y - 18z + 19 = 0$.

6.94. Да се најде равенката на сферата што минува низ дадената точка M и има центар C:

а) $M(0, 0, 3)$, $\quad C(-2, 0, 3)$; $\qquad$ б) $M(4, 1, 2)$, $\quad C(1, -2, 3)$.

6.95. Еден тетраедар е определен со координатните рамнини и со рамнината:

а) $3x + 4y + 12z - 18 = 0$; б) $3x - 4y - 12z - 18 = 0$.

Да се најде равенката на сферата, впишана во тој тетраедар.

6.96. Да се најде равенката на рамнината што ја допира дадената сфера во дадената точка.

а) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$ во $M(1, 1, 3)$.

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 9 = 0$ во $M(2, 1, 2)$.

6.97. Да се најдат равенките на рамнините што минуваат низ дадената права и ја допираат дадената сфера. Потоа, да се најде аголот меѓу тие рамнини.

а) $-x = y = z - \sqrt{2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

б) $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-4}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z - 22 = 0$.

в) $\{x + z - 6 = 0,\ y = 0\}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z + 4 = 0$.

6.98. Какви површини се определени со равенките:

а) $x^2 + 4y^2 = 1$; б) $y = x^2$; в) $x^2 - z^2 = 4$; г) $y^2 - z^2 = 0$.

6.99. Да се најде равенката на цилиндричната површина, при зададена директриса и зададен правец на генератрисата.

а) $x = t$, $y = 2$ $z = t^2 + 1$; $\mathbf{a} = (-1, 1, 3)$.

б) $z = y^2$, $x = 0$, $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$.

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 1$; $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$.

6.100. Да се најде равенката на конусната површина, при зададен врв A и зададена директриса. Површините да се нацртаат.

а) $A(0, 2, 4)$ $x = 2\cos u$, $y = 2 + 3\sin u$, $z = 1$.

б) $A(2, 1, 5)$; $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x - z = 0$.

6.101. Да се најде равенката на конусот, опишан околу сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, а темето му е во $A(5, 0, 0)$.

6.102. Да се најде равенката на површината, добиена со ротација на дадената крива околу дадената оска. Добиената површина да се нацрта.

а) $y = 2x$, $z = 0$; околу оската Ox.

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$; околу Ox; околу Oy.

в) $(y-2)^2 + (z-2)^2 = 1$, $x = 0$; околу Oy.

г) $z = y^2 + 1$, $x = 0$; околу Oz; околу Oy.

6.103. Каква површина е зададена со секоја од следниве равенки:

а) $8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0$; б) $2x^2 - 6y^2 - 3z^2 = 6$;

в) $y^2 - 2x + 1 = 0$; г) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;

д) $x^2 + y^2 - z = 0$; ѓ) $x^2 + y^2 + 4 = 0$;

е) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0$; ж) $2x^2 - 3y^2 - 6z = 0$.

6.104. Да се најдат заедничките точки на дадената права и дадената површина.

а) $x = -2 + t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3t, \quad z = x^2 + 2y^2$.

б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}, \quad 2x^2 + 3y^2 = 1$.

в) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}, \quad x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 6z - 12 = 0$.

* * *

6.105. Да се докаже дека равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралелно со правите

$$x = x_1 + a_1 t, \qquad y = y_1 + a_2 t, \qquad z = z_1 + a_3 t,$$
$$x = x_2 + c_1 t, \qquad y = y_2 + c_2 t, \qquad z = z_2 + c_2 t,$$

може да се претстави во следниов вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6.106. Да се докаже дека равенката на рамнината што минува низ паралелните прави

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3},$$

може да се напише во следниов вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6.107. Да се покаже дека правите:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-11}{8} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-2}{1}$$

се сечат и да се најдат равенките на симетралата на тапиот агол меѓу нив.

6.108. Во триаголникот што е отсечен од рамнината Oxy со рамнините $3x + 2y + 4z - 7 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$, $5x + y - z \cdot \sqrt{3} + 6 = 0$ да се најде точка еднакво оддалечена од тие рамнини.

6.109. Да се најде радиус–векторот $\mathbf{r}$ на проекцијата на точката M_0 врз рамнината $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = a$.

6.110. Да се најде растојанието d од почетокот O до правата $\mathbf{a} \times (\mathbf{r} - \mathbf{c}) = \mathbf{o}$, каде што $\mathbf{r}$ е радиус-векторот на произволна точка од правата.

6.111. Да се најдат пресечните точки на следниве три површини (P_1), (P_2), $P_3)$:

(P_1) сфера со центар $(-1, -1, 0)$ и радиус 5,

(P_2) сфера со центар $(1, 1, 3)$ и радиус 4,

(P_3) рамнина, паралелна со Oxy, а на оската Oz отсечува „сегмент" $+3$.

6.112. На сферата $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ да се најде точката M_0, што е најблиска до рамнината $3x + 4z + 19 = 0$, и да се пресмета растојанието од M_0 до рамнината.

6.113. Да се изведе услов при кој рамнината $Ax + By + Cz + D = 0$ ја допира сферата $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

6.114. Да се најде геометриското место на средините од тетивите на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ што минуваат низ точката $(-3, 0, 0)$.

6.115. Дадени се точките $A(1, 2, 3)$ и $B(2, -1, 3)$. Една точка $M(x, y, z)$ се движи така што:

а) $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 30$; б) $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 60$; в) $2\overline{MA}^2 + 3\overline{MB}^2 = 45$.

Да се најде, за секој од случаите, гометриското место на точката M.

6.116. Дадени се равенките на две сфери:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{21}{4}, \quad (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Да се најде равенката на рамнината што минува низ пресечната кружница на сферите и радиусот на таа кружница.

6.117. Да се најде равенката на сферата што минува низ кружницата $\{x^2 + y^2 = 4, \ z = 0\}$ и е пресечена од рамнината $x + 2y + 2z = 0$ во кружница со радиус 3.

6.118. Со равенките $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = z$ е определена кружница. Да се најдат равенките на нејзината ортогонална проекција врз рамнината: а) Oxy; б) Oxz.

6.119. Пресекот на конусот $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ со рамнината $x + 2z - 4 = 0$ е елипса. Да се најде ортогоналната проекција на таа елипса врз рамнината Oxy.

6.120. Да се најде равенката на кружниот цилиндар опишан околу сферите:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 36, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 36.$$

6.121. Дадена е равенката:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0\,. \tag{1}$$

Извршувајќи ја трансформацијата:

$$x = \tfrac{1}{3}(x' + 2y' + 2z'), \quad y = \tfrac{1}{3}(2x' + y' - 2z'), \quad z = \tfrac{1}{3}(2x' - 2y' + z')$$

да се покаже дека (1) е равенка на елипсоид.

6.122. Извршувајќи трансформација на равенката:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0\,, \tag{1}$$

со $x = \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z')$, $y = \frac{1}{3}(2x' - 2y' + z')$, $z = \frac{1}{3}(2x' + y' - 2z')$, да се покаже дека (1) определува еднокрилен хиперболоид.

6.123. Да се покаже дека правите:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z - 6 = 0\,, \\ 2x - 3y + 6z - 6 = 0\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 3z = 0\,, \\ y - 2 = 0\,, \end{cases}$$

лежат на хиперболоидот $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$.

6.124. Да се покаже дека правите:

$$\begin{cases} p \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = s \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ s \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = p \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right)\,, \end{cases} \quad \begin{cases} p' \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = s' \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right)\,, \\ s' \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = p' \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right)\,, \end{cases}$$

за кои било ненулти вредности на p, p', s и s', лежат на хиперболоидот:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{2}$$

6.125. Да се покаже дека правите:

$$\begin{cases} p \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = sz\,, \\ s \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2p\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} p' \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2s'\,, \\ s' \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = p'z\,, \end{cases}$$

за кои било ненулти вредности на p, p', s и s', лежат на хиперболичниот параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\,.$$

7. МАТРИЦИ

Решени задачи

7.1. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} x & y & x+y \\ a & c & a-c \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad B \begin{bmatrix} a-c & 2c & 1 \\ -x-y & a-x & x \end{bmatrix}.$$

Да се определат x, y, a и c, така што A и B да бидат еднакви.

Решение. За *две матрици* $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ велиме дека имаат *иста форма* ако имаат еднаков број редици и еднаков број колони. За A и B велиме дека *се еднакви* ако тие имаат иста форма и

$$a_{ij} = b_{ij} \,. \tag{1}$$

Во дадениот случај матриците A и B имаат иста форма 2×3 (две редици и три колони). За да се еднакви, треба да е исполнет уште условот (1), т.е.

$$x = a - c\,, \qquad y = 2c\,, \qquad x + y = 1$$
$$a = -x - y\,, \qquad c = a - x\,, \qquad a - c = x\,.$$

Од овие шест равенки првата, петтата и шестата се една иста равенка. Од третата и четвртата добиваме $a = -1$, а потоа, од $x = -1 - c$, $y = 2c$ и $x + y = 1$ добиваме $c = 2$, $y = 4$, $x = -3$.
Според тоа, матрицата A (т.е. B) е:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

7.2. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се пресметаат:

а) $A + B$; б) $A + C$; в) $-2C$; г) $A - B$; д) $-2A + 3B$.

Решение. Нека $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ се матрици со иста форма $m \times n$. *Собирање на матрици* со иста форма дефинираме со:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]\,, \tag{1}$$

а *множење на матрица* $[a_{ij}]$ *со скалар* x, со:

$$x[a_{ij}] = [x\, a_{ij}]\,. \tag{2}$$

а) Матриците A и B имаат иста форма. Според (1), имаме:

$$A+B=\begin{bmatrix}1+3 & 2+0 & 0+(-1)\\ 2+1 & 3+(-2) & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

б) Збирот $A+C$ не е дефиниран зашто A и C немаат иста форма.

в) Според (2), имаме:

$$-2C=\begin{bmatrix}-2\cdot(-3) & -2\cdot 4\\ -2\cdot(-2) & -2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -8\\ 4 & -2\end{bmatrix}.$$

г) $$A-B=\begin{bmatrix}1-3 & 2-0 & 0-(-1)\\ 2-1 & 3-(-2) & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

д) $$-2A+3B=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 0\\ -4 & -6 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 0 & -3\\ 3 & -6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -4 & -3\\ -1 & -12 & 1\end{bmatrix}.$$

7.3. Да се покаже дека за секоја двојка реални броеви x, y и кои било $m\times n$–матрици A, B, точни се равенствата:

а) $x(A+B)=xA+xB$; б) $(x+y)A=xA+yA$;

в) $(xy)A=x(yA)$.

Решение. а) Нека се $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ со облик $m\times n$. Применувајќи ги (1) и (2) од **7.2**, добиваме:

$$\begin{aligned}x(A+B)&=x([a_{ij}]+[b_{ij}])=x[a_{ij}+b_{ij}]=[x(a_{ij}+b_{ij})]=[xa_{ij}+xb_{ij}]=\\&=[xa_{ij}]+[xb_{ij}]=x[a_{ij}]+x[b_{ij}]=xA+xB.\end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned}(x+y)A&=(x+y)[a_{ij}]=[(x+y)a_{ij}]=[xa_{ij}+ya_{ij}]=[xa_{ij}]+[ya_{ij}]=\\&=x[a_{ij}]+y[a_{ij}]=xA+yA.\end{aligned}$$

в) $$(xy)A=(xy)[a_{ij}]=[(xy)a_{ij}=[x(ya_{ij})]=x[ya_{ij}]=x(y[a_{ij}])=x(yA).$$

7.4. Да се пресмета $A\cdot B$ ако

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -1\\ -3 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Ако $A=[a_{ij}]$ е $m\times n$–матрица, а $B=[b_{ij}]$ е $n\times p$–матрица, тогаш ***производот*** AB е матрицата $C=[c_{ij}]$, со форма $m\times p$ чии елементи се добиваат на следниов начин:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \tag{1}$$

$(i=1,\ldots,m;\ \ j=1,\ldots,p)$. Да забележиме дека производ на две матрици не е дефиниран ако бројот на колоните од првата матрица не е еднаков со бројот на редиците од втората.

Во конкретниот случај, A има форма 2×3, а B 3×4, па производот $AB=C$ постои и има форма 2×4. Користејќи го (1), ќе ги најдеме членовите на матрицата C. Имаме:

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=-2\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot(-3)=3,$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=-2\cdot2+1\cdot3+0\cdot0=-1,$$

$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=-2\cdot(-3)+1\cdot0+0\cdot1=6,$$

$$c_{14}=a_{11}b_{14}+a_{12}b_{24}+a_{13}b_{34}=-2\cdot0+1\cdot(-1)+0\cdot2=-1;$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 3(-3) = -8\,,$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = -1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 3\cdot 0 = -2\,,$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = -1\cdot(-3) + 0\cdot 0 + 3\cdot 1 = 6\,,$$

$$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} = -1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 6\,.$$

Според тоа, производот на A и B е матрицата:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 & -1 \\ -8 & -2 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

(Воочи дека за дадените матрици A и B не е дефиниран производ BA.)

7.5. Да се покаже дека матриците што комутираат со $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ се комутативни и меѓу себе.

Решение. Нека е

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

произволна матрица комутативна со A, т.е. $AX = XA$. Имаме:

$$XA = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} = AX,$$

што значи $x_2 = x_3 = a$, $x_1 = x_4 = c$. Значи, матриците што се комутативни со A имаат облик:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & a \end{bmatrix},$$

а лесно се проверува дека кои било две метрици од тој вид комутираат меѓу себе.

7.6. Да се најде производот AB на матриците:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{и} \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

користејќи го извршеното разбивање на блокови.

Решение. Со помош на вертикални и хоризонтални линии, дадена матрица може да се разбие на блокови (т.е. клетки). Така разбиената *матрица* ја викаме *блочна* (т.е. *клеточна*). Всушност, со такво разбивање на една матрица на блокови се сретнавме и порано, при дефиницијата за производ на матрици (види 7.4): првата матрица ја разбиваме на m блокови со форма $1 \times n$, а втората – на p матрици со форма $n \times 1$. Се покажува дека за множење може да се користи и друго разбивање. Притоа, колоните на A и редиците на B мора да се разбиени на сосема ист начин, па множењето се врши со множење на блоковите на аналоген начин како во **7.4**. На пример, ако

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{и} \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right]$$

тогаш

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{bmatrix},$$

при што A_{ij} се блокови на A, а B_{ij}–блокови на B. Точно на тој начин се разбиени дадените матрици. Според тоа, имаме:

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [6 \;\; 6] + [0 \;\; 0] & [0 \;\; 0] + [4 \;\; 4] & [6] + [3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [6 \;\; 6] & [4 \;\; 4] & [9] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

7.7. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Да се пресметаат: а) A^{T} и B^{T}; б) AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$; в)$(AB)^{\mathrm{T}}$ и $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, каде што со X^{T} е означена транспонираната матрица на X.

Решение. Ако $A = [a_{ij}]$ е $m \times n$–матрица, тогаш поставувајќи ги редиците на A (по ред) во колони, добиваме нова матрица со форма $n \times m$. За неа велиме дека е *транспонирана матрица* на A и ја означуваме со A^{T}. Значи:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A^{\mathrm{T}} = [a_{ij}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]_{n\times m} \,. \tag{1}$$

За дадените матрици имаме:

а) $$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

б) Двата производа AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$ се дефинирани. Имаме:

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1\cdot(-1)+0\cdot 0+3\cdot 3 & -1\cdot 2+0\cdot 1+3\cdot 0 \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} -1\cdot(-1)+2\cdot 2 & -1\cdot 0+2\cdot 1 & -1\cdot 3+2\cdot 0 \\ 0\cdot(-1)+1\cdot 2 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 3+1\cdot 0 \\ 3\cdot(-1)+0\cdot 2 & 3\cdot 0+0\cdot 1 & 3\cdot 3+0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Да забележиме дека производите AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$ се дефинирани за каква и да е форма на матрицата A и дека во општ случај $AA^{\mathrm{T}} \neq A^{\mathrm{T}}A$.

в) Прво забележуваме дека множењето на матрицата A и B е возможно, а возможно е и за B^{T} и A^{T}. Потоа, работејќи како во претходните примери на множење, добиваме:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 5 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

7.8. Нека $A = [a_{ij}]$ е $m \times n$, а $b = [b_{ij}]$ $n \times p$–матрица. Да се покаже дека производите AB и $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ се дефинирани и дека

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\,. \tag{1}$$

Решение. Дека $(AB)^{\mathrm{T}}$ и $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ се дефинирани и имаат иста форма $p \times m$ е јасно. За да го докажеме равенството (1), ќе ставиме: $AB = C = [c_{ij}]$ и $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = D = [d_{ij}]$. Имаме:

$$d_{ij} = b^{\mathrm{T}}_{i1}a^{\mathrm{T}}_{ij} + \cdots + b^{\mathrm{T}}_{in}a^{\mathrm{T}}_{nj} = b_{1i}a_{j1} + \cdots + b_{ni}a_{jn} = a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jn}b_{ni} =$$
$$= c_{ji} = c^{\mathrm{T}}_{ij}\,,$$

од каде што, според дефиницијата за еднаквост на матрици (**7.1**), добиваме дека $D = C^{\mathrm{T}} = (AB)^{\mathrm{T}}$, т.е. равенството (1).

7.9. Да се пресмета A^k, $k \in \mathbb{N}$, ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. За една матрица A која има n редици и n колони велиме дека е *квадратна матрица* со ред n. Производот AA е дефиниран за кој било n и се означува со A^2. Воопшто, за кој било $k \in \mathbb{N}$, $k+1$-ви степен од A дефинираме со:

$$A^{k+1} = AA^k\,. \tag{1}$$

За дадената матрица A ќе ги најдеме првите неколку степени, за да установиме некоја законитост при добивањето на членовите на тие матрици – степени од A.

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^4 = AA^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad A^5 = AA^4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Јасно е како се добиваат сите членови освен, можеби, членот x_{13}. Но, ако забележиме дека $1 = \binom{2}{2}$, $3 = \binom{3}{2}$, $6 = \binom{4}{2}$, $10 = \binom{5}{2}$, тогаш тоа може да нѐ наведе на претпоставката дека

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \binom{k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad k \geq 2\,. \tag{2}$$

При претпоставката дека (2) е точно, имаме:

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \binom{k}{2}+k \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \binom{k+1}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Притоа: $\binom{k}{2}+k = \binom{k}{2}+\binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}$.) Бидејќи (2) е точно за $k = 2$, според принципот на математичката индукција следува дека е точно за секој $k \in \mathbb{N}$.

7.10. Дадени се матриците: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Да се покаже дека: а) AA е дијагонална матрица; б) BB е горно триаголна матрица; в) матрицата AB (односно BA) се добива ако секоја редица i (односно колона j) од B се помножи со соодветен член a_{ii} (односно a_{jj}) од A; г) секоја матрица C, комутативна со A, е дијагонална.

Решение. Квадратната матрица $A = [a_{ij}]$ се вика:

– *горно триаголна* ако $\quad a_{ij} = 0 \quad$ за $\quad i > j,$ $\hfill (1)$

– *долно триаголна* ако $\quad a_{ij} = 0 \quad$ за $\quad i < j,$ $\hfill (2)$

– *дијагонална* ако $\quad a_{ij} = 0 \quad$ за $\quad i \neq j.$ $\hfill (3)$

Така, на пример, дадената матрица B е горно триаголна, а A е дијагонална. Ако $A = [a_{ij}]$ е дијагонална, често се пишува:

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \quad \text{или} \quad A = < a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} > .$$

Ако при дијагоналната матрица A е $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$, тогаш таа се вика *скаларна*; во тој случај $A = kE$, каде што E е единичната матрица со ред n.

а) $AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ б) $BB = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

в) $$AB = \begin{bmatrix} -1\cdot 2 & -1\cdot 1 & -1\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1) & 1\cdot 3 & -1\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) & 1\cdot 3 & -1\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) & 0\cdot 3 & 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

г) Нека $C = [c_{ij}]$ е матрица со ред 3. Тогаш имаме

$$AC = \begin{bmatrix} -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ 3c_{21} & 3c_{22} & 3c_{23} \\ 2c_{31} & 2c_{32} & 2c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{11} & 3c_{12} & 2c_{13} \\ -c_{21} & 3c_{22} & 2c_{23} \\ -c_{31} & 3c_{32} & 2c_{33} \end{bmatrix} = CA;$$

од $-c_{12} = 3c_{12}$, $-c_{13} = 2c_{13}$, $3c_{21} = -c_{21}$, $3c_{23} = 2c_{23}$ $2c_{31} = -c_{31}$ и $2c_{32} = 3c_{32}$ следува дека сите членови се еднакви со нула, а c_{11}, c_{22} и c_{33} можат да се земат произволно. Значи,

$$C = \operatorname{diag}(c_{11}, c_{22}, c_{33}).$$

7.11. Дадени се квадратните матрици:

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека: а) A е симетрична, ортогонална и инволуторна; б) $B + B^{\mathrm{T}}$ е симетрична, а $B - B^{\mathrm{T}}$ е антисиметрична, иако B нема ни една од тие особини; в) B е периодична матрица со период 2; г) C е нилпотентна со индекс 3; д) $B + B^{\mathrm{T}}$ и $C + C^{\mathrm{T}}$ се симетрични, но нивниот производ не е симетрична матрица.

Решение. За квадратната матрица A велиме дека е:

– *симетрична* ако $A = A^{\mathrm{T}}$; (1)

– *антисиметрична* ако $A = -A^{\mathrm{T}}$; (2)

– *ортогонална* ако $AA^{\mathrm{T}} = E$; (3)

– *инволуторна* ако $A^2 = E$; (4)

– *периодична* ако $A^{k+1} = A$, (5)

$k \in \mathbb{N}$; ако k е најмалиот број за кој важи (5), тогаш k се вика *период* на A; ако периодот k е 1, т.е. ако $A^2 = A$, (6)

тогаш A се вика *идемпотентна матрица*;

– *нилпотентна* ако $A^k = 0$, (7)

каде што k е природен број; ако k е најмалиот природен број за кој е $A^k = 0$, тогаш велиме дека A е *нилпотентна со индекс* k.

а) Лесно се проверува дека се исполнети равенствата (1), (3) и (4), т.е. дека A е симетрична, ортогонална и инволуторна.

б) $B + B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -5 & 4 & 9 \\ -4 & 9 & -6 \end{bmatrix}$, $B - B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 9 \\ 8 & -9 & 0 \end{bmatrix}$;

членовите во матрицата $S = B + B^{\mathrm{T}}$ се распоредени симетрично, а во $M = B - B^{\mathrm{T}}$ »антисиметрично" во однос на главната дијагонала. Јасно е дека: $S = S^{\mathrm{T}}$, $M^{\mathrm{T}} = -M$, т.е. $B + B^{\mathrm{T}}$ е симетрична, а $B - B^{\mathrm{T}}$ е антисиметрична, но B не е ни симетрична ни антисиметрична.

в) Треба да покажеме дека $B^{2+1} = B$. Имаме:

$$B^3 = B^2 B = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

г) Треба да покажеме дека $C^3 = 0$. Имаме:

$$C^3 = C^2 C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

д) $$(B + B^{\mathrm{T}})(C + C^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -5 & 4 & 9 \\ -4 & 9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & -10 & 9 \end{bmatrix}.$$

7.12. Нека A е $m \times n$–матрица. Да се покаже дека:

а) во општ случај $AA^{\mathrm{T}} \neq A^{\mathrm{T}}A$;

б) AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$ се симетрични; в) елементите од главната дијагонала на матрицата AA^{T} (а и на $A^{\mathrm{T}}A$) се ненегативни.

Решение. а) Ако $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, тогаш $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$AA^{\mathrm{T}} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Значи, $AA^{\mathrm{T}} \neq A^{\mathrm{T}}A$. (Види и 7.7.)

б) Нека $AA^{\mathrm{T}} = C = [c_{ij}]$; тогаш имаме:

$$c_{ij} = a_{i1}\, a^{\mathrm{T}}_{1j} + \cdots + a_{in}\, a^{\mathrm{T}}_{nj} = a_{i1}\, a_{j1} + \cdots + a_{in}\, a_{jn} =$$
$$= a_{j1}\, a^{\mathrm{T}}_{1i} + \cdots + a_{jn}\, a^{\mathrm{T}}_{ni} = c_{ji},$$

што значи дека матрицата AA^{T} е симетрична. Слично и за $A^{\mathrm{T}}A$.

в) За $AA^{\mathrm{T}} = C = [c_{ij}]$ имаме:
$$c_{ii} = a_{i1}\, a^{\mathrm{T}}_{1i} + \cdots + a_{in}\, a^{\mathrm{T}}_{ni} = a^2_{i1} + \cdots + a^2_{in},$$
од каде што следува дека $c_{ii} \geq 0$. Слично и за $A^{\mathrm{T}}A$.

7.13. Дадени се матриците A, B и H со комплексни членови:
$$A = \begin{bmatrix} 1-i & -2 & 2i \\ 0 & i & -3i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1+i & 2+3i & 2-i \\ -3i & 0 & -1 \\ 1 & i & 2i \end{bmatrix},$$
$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 3-i \\ 1-i & 1 & i \\ 3+i & -i & 2 \end{bmatrix}.$$

а) Да се напише матрицата $\overline{A}$ (конјугирана на A).

б) Да се покаже дека $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

в) Да се покаже дека $B+\overline{B}^{\mathrm{T}}$ е ермитска, а $B-\overline{B}^{\mathrm{T}}$ антиермитска.

г) Да се уочи дека матрицата H е ермитска и да се покаже дека iH е антиермитска.

д) Да се покаже дека $\overline{B}^{\mathrm{T}}HB$ е ермитска.

Решение. Ако x и y се реални броеви, а $i^2 = -1$, тогаш за комплексниот број $x - iy = \overline{z}$ велиме дека е *конјугиран* (или *спрегнат*) со комплексниот број $x + iy = z$. Ако членовите a_{ij} на една матрица A се комплексни броеви, тогаш, земајќи $\overline{a}_{ij}$ наместо a_{ij}, добиваме нова матрица $\overline{A}$:
$$\overline{A} = [\overline{a}_{ij}] \tag{1}$$
наречена *конјугирана матрица* од A. Квадратната матрица A се вика:

– *ермитска* ако $\qquad \overline{A}^{\mathrm{T}} = A,$ (2)

– *антиермитска* ако $\qquad \overline{A}^{\mathrm{T}} = -A.$ (3)

а) $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1+i & -2 & -2i \\ 0 & -i & 3i \end{bmatrix}$ б) $\overline{B} = \begin{bmatrix} 1-i & 2-3i & 2+i \\ 3i & 0 & -1 \\ 1 & -i & -2i \end{bmatrix}$
$$\overline{A}\,\overline{B} = \begin{bmatrix} 2-8i & 3-i & -i+3i \\ 3+3i & 3 & 6+i \end{bmatrix} = \overline{AB}.$$

в) $$B+\overline{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+3i & 2-i \\ -3i & 0 & -1 \\ 1 & i & 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-i & 3i & 1 \\ 2-3i & 0 & -i \\ 2+i & -1 & -2i \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 2+6i & 3-i \\ 2-6i & 0 & -1-i \\ 3+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

Да ставиме $B+\overline{B}^{\mathrm{T}} = K$, $B-\overline{B}^{\mathrm{T}} = M$. Тогаш
$$\overline{K}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 2-6i & 3+i \\ 2+6i & 0 & -1+i \\ 3-i & -1-i & 0 \end{bmatrix} = K, \quad \overline{M}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2i & 2 & 1+i \\ -2 & 0 & -1-i \\ -1+i & 1-i & -4i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = -M,$$
што значи $B+\overline{B}^{\mathrm{T}}$ е ермитска, а $B-\overline{B}^{\mathrm{T}}$ е антиермитска.

г) Да ја означиме iH со P. Имаме:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & -1+i & 1+3i \\ 1+i & i & -1 \\ -1+3i & 1 & 2i \end{bmatrix}, \quad \overline{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & -1-i & 1-3i \\ 1-i & -i & -1 \\ -1-3i & 1 & -2i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=-P,$$

што значи дека $P=iH$ е антиермитска.

д) Имаме:

$$\overline{B}^{\mathrm{T}}HB=\begin{bmatrix} 6+4i & 2+2i & 1-4i \\ 1-3i & 4-i & 3-13i \\ 1-5i & -2+3i & 7-4i \end{bmatrix}\cdot B=\begin{bmatrix} 9 & 4+27i & 22+2i \\ 4-27i & 24 & 21 \\ 22-2i & 21 & 7 \end{bmatrix}.$$

За матрицата $S=\overline{B}^{\mathrm{T}}HB$ имаме $\overline{S}^{\mathrm{T}}=S$, што значи таа е ермитска.

7.14. Да се уочат истакнатите елементи во дадените скалести матрици. Кои од тие матрици имаат редично редуцирана скалеста форма?

$$A=\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 7 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 2 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. За една матрица велиме дека е *скалеста* или дека има скалеста форма ако бројот на нулите што му претходат на првиот ненулти член од една редица, наречен *истакнат* елемент, расте од редица до редица сè додека не останат само нулти редици. Ако истакнатите елементи се единствените ненулти членови во своите колони и ако се еднакви со 1, тогаш велиме дека матрицата има *редично-канонична скалеста форма* или дека е редично*редуцирана скалеста матрица.* Истакнати елементи се:

во A: 3, 1, 2, 5; во B: 1, 1; во C: 2, 1, 7; во D: 1, 1, 1. Во B и D истакнатите елементи се само единици и тие се единствени ненулти членови во своите колони. Според тоа, B и D се редично редуцирани, а A и C не се.

7.15. Со помош на елементарни редични операции, дадената матрица A да се редуцира во:

а) скалеста форма; б) канонична скалеста форма

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Под *елементарни операции со редици* од една матрица ги подразбираме следниве правила:

(e_1) разменување на i–тата и j–тата редица: $P_i \leftrightarrow P_j$;

(e_2) множење на j–тата редица со ненулти скалар c: $P_j \to cP_j$, $c \neq 0$;

(e_3) замена на i–тата редица со c–пати j–тата редица плус i–тата; $P_i \to cP_j + P_i$, $c \neq 0$.

(Една *матрица* A се вика *редично еквивалентна* со друга матрица B ако B може да се добие од A со конечна низа елементарни операции со редици: пишуваме $A \sim B$. Аналогно се дефинираат *елементарни операции со колони* и *колонично еквивалентни матрици*; види и **7.121**.)

а) Ако ги примениме следниве елементарни трансформации (по ред):

$$P_1 \leftrightarrow P_2; \qquad P_1 \rightarrow \tfrac{1}{2} P_1, \qquad P_3 \rightarrow 2P_1 + P_3$$

матрицата A ќе добие скалеста форма.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

б) Применувајќи ги на последната матрица операциите: $P_1 \rightarrow -1 \cdot P_2 + P_1$ и $P_2 \rightarrow -1 \cdot P_3 + P_2$, добиваме:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

што претставува матрица во канонична скалеста форма.

Задачи за вежбање

7.16. Да се определат x, y, a и c, така што

а) $2 \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ a & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ c & a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y \\ -1 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

б) $\begin{bmatrix} x & 2y-6 \\ 2a+1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ a+c & 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x & y \\ a & c \end{bmatrix}$.

7.17. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Да се најде матрица S, таква што $2A - B + 3C - 2S = 0$.

Да се пресметаат следниве производи (**7.18-7.21**).

7.18. а) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

7.19. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. **7.20.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

7.21. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

7.22. Дадени се матриците

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad BA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Да се најде $(AB)^{\mathrm{T}}$. Да се обопшти за (соодветни) матрици од n–ти ред.

7.23. Дадени се матриците

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{\mathrm{T}}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се најде $(BA)^{\mathrm{T}}$. Да се обопшти.

За дадените матрици A и B (**7.24–7.30**) да се пресметаат производите AB, BA.

7.24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$

7.25. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$

7.26. $A = \begin{bmatrix} a & c \\ -c & a \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$

7.27. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

7.28. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$

7.29. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

7.30. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

7.31. Да се пресмета $AB - BA$ ако:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix};$

б) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -6\\ 3 & 2 & 9\\ -1 & -1 & -4\end{bmatrix}$.

7.32. Дадени се матриците:

а) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

б) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Да се пресметаат производите $(AB)C$ и $A(BC)$.

7.33. Да се покаже дека $AB = AC$, каде што:

а) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ 2 & -5 & -1\end{bmatrix}$.

(Значи, од равенството $AB = AC$ не мора да следува $B = C$.)

7.34. Да се пресмета:

а) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^3$; б) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}^4$; в) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}^3$;

г) $\begin{bmatrix}0 & c & p\\ -c & 0 & a\\ -p & -a & 0\end{bmatrix}^3$; д) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^5$.

ако $a^2 + p^2 + c^2 = 1$.

7.35. Дадени се матриците:

$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$.

а) Да се пресметаат: AB, BA, AC, CA.

б) Користејќи ги резултатите од а), да се покаже дека:

$ACB = CBA$; $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$; $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

7.36. Нека $M(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$. Да се покаже дека:

$$M(x_1)\,M(x_2) = M(x_2)\,M(x_1) = M(x_1 + x_2).$$

7.37. Ако $x - y = \pi/2$, тогаш производот на матриците:

$$\begin{bmatrix} \cos^2 x & \cos x \sin x \\ \cos x \sin x & \sin^2 x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos^2 y & \cos y \sin y \\ \cos y \sin y & \sin^2 y \end{bmatrix}$$

е нултата матрица.

7.38. Да се покаже дека наведените матрици се идемпотентни.

$$\begin{bmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

7.39. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека $A^2B = BA^2$, но дека $AB \neq BA$.

Во задачите **7.40–7.49**, k е природен број. Да се пресмета:

7.40. $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k$. **7.41.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^k$. **7.42.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k$.

7.43. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^k$. **7.44.** $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^k$. **7.45.** $\begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix}^k$.

7.46. $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^k$ $(i^2 = -1)$. **7.47.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^k$.

7.48. $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^k$. **7.49.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^k_{n\times n}$.

Користејќи го укажаното разбивање на матриците, да се пресмета производот AB (**7.50–7.53**).

7.50. $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ и $B = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]$.

7.51. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$ и $B = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$.

7.52. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ \hline 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{array}\right]$ $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ \hline 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{array}\right]$.

7.53. $A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ и $B = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Да се пресмета A^2 користејќи го укажаното разбивање на дадената квадратна матрица (**7.54–7.57**).

7.54. $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^2$. **7.55.** $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]^2$.

7.56. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a & x & -1 & 0 \\ c & y & 0 & -1 \end{array}\right]^2$. **7.57.** $\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^2$.

7.58. Дадена е матрицата: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Да се покаже дека $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$, но $A^2 - 2A - 9E \neq 0$.

7.59. Да се најдат сите скаларни матрици A што ја задоволуваат дадената равенка.

а) $A^2 - 9A + 20E_2 = 0$; б) $A^2 + 2A^2 - 4A - 8E_2 = 0$;

в) $8A^3 - 27E_n = 0$,

каде што E_k е единичната матрица со ред k.

7.60. Ако x, y се реални (или комплексни) броеви, а A е квадратна матрица со ред n, тогаш:

$$A^2 - (x+y)A + xy\,E = (A - x\,E)(A - y\,E),$$

каде што E е единичната матрица со ред n.

7.61. Да се пресметаат $A^{\mathrm{T}}A$ и AA^{T}, ако

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

7.62. Да се покаже дека секоја од матриците:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

е симетрична, ортогонална и инволуторна.

7.63. Да се покаже дека матриците:

а) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

се инволуторни. Дали се ортогонални?

7.64. Да се покаже дека матриците:

а) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$;

в) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

се ортогонални. Дали некоја од нив е инволуторна?

7.65. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 6 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да се уочи дека A, B и C се симетрични, а D антисиметрична и да се покаже дека: а) AB е симетрична и $AB = BA$; б) CD е антисиметрична и $CD = -DC$.

7.66. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 21 & 19 \\ 21 & 8 & -26 \\ 19 & -26 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека $AB = -BA$ и дека AB е симетрична матрица.

7.67. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека A и B се антикомутативни и дека матрицата AB е антисиметрична (т.е. $AB = -BA$ и $-(AB)^{\mathrm{T}} = AB$).

7.68. Да се претстави како производ на долно триаголна матрица B и горно триаголна матрица C, при што $c_{ij} = 1$, матрицата:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

7.69. Дадени се следниве матрици со комплексни членови:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4+2i \\ 4-2i & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се уочи дека тие се ермитски и да се покаже дека:

а) AB е ермитска и $AB = BA$;

б) AC не е ермитска и $AC \neq CA$;

в) iC е антиермитска; г) C^3 е ермитска.

Дадената матрица да се доведе до (редично) еквивалентна матрица во скалеста форма, а потоа со канонична скалеста форма (**7.70–7.73**).

7.70. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. **7.71.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

7.72. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 4 \end{bmatrix}$. **7.73.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Во следните две задачи дадената матрица да се доведе до (редично) еквивалентна матрица со канонична скалеста форма:

7.74. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. **7.75.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$

* * *

7.76. Да се најдат сите квадратни матрици од втор ред чиј квадрат е еднаков со нултата матрица.

7.77. Да се најдат сите квадратни матрици X, комутативни со матрицата:

а) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

7.78. Нека е A квадратна матрица. Да се покаже дека:

а) $A^kA^p = A^{k+p}$; б) $(A^k)^p = A^{kp}$, $k, p \in \mathbb{N}$.

7.79. Да се покаже дека, ако се A и B комутативни, тогаш се комутативни и матриците A^k и B^p, $k, p \in \mathbb{N}$.
Дали важи обратното?

7.80. Нека се A и B квадратни матрици со ист ред и c, k, x, y скалари за кои $cy \neq kx$. Да се покаже дека матриците

$$P = cA + kB \qquad \text{и} \qquad S = xA + yB$$

меѓусебно комутираат ако и само ако A и B меѓусебно комутираат.

7.81. Да се докаже дека:

а) ако е A квадратна матрица и $C = pA + sE$, каде што p и s се скалари, а E единична матрица, тогаш A и C комутираат;

б) ако е A матрица со ред 2, различна од скаларна, тогаш која било матрица C што комутира со A има облик $C = pA + sE$.

7.82. Нека A и B се квадратни матрици од n–ти ред. Два полинома $f(A)$ и $g(B)$ меѓусебно комутираат ако A и B комутираат меѓусебно.

7.83. Да се докаже дека матричното равенство

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

важи ако и само ако $AB = BA$ и дека $kA^2 + 2pAB + sB^2$ не може, во општ случај, да се напише како производ од два линеарни фактора ако не е $AB = BA$.

7.84. Дадени се матриците A и B од n–ти ред, такви што: $AB = BA$ и $B^2 = 0$. Да се докаже дека $(A + B)^k = A^k + kA^{k-1}B$.

7.85. Ако A и B се квадратни матрици од n–ти ред и $AB = BA$, тогаш:

$$(A+B)^k = A^k + \binom{k}{1} A^{k-1} B + \binom{k}{2} A^{k-2} B^2 + \cdots + B^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

7.86. Нека A и B се квадратни матрици од n–ти ред и $AB = C$. Ако во i–тата редица на A само елементот $a_{ik} = 1$, а сите други се нули, што може да се рече за i–тата редица на C?

7.87. Како ќе се измени производот AB на матриците A и B, ако:

а) си ги разменат местата i–тата и j–тата редица на A;

б) на i–тата редица од A, се додаде j–тата редица на A помножена со број c;

в) си ги разменат местата i–тата и j–тата колона на B;

г) на i–тата колона од B се додаде j–тата колона од B помножена со број c?

7.88. Нека $A = [a_{ij}]$ е квадратна матрица со ред n, а $C = [c_{ij}]$ дијагонална квадратна матрица со ред n. Да се покаже дека:

а) $AC = [a_{ij}\,c_{jj}]$ (т.е. j–тата колона на A се множи со c_{ij}, $j = 1, \ldots, n$), б) $CA = [c_{ii}\,a_{ij}]$ (т.е. i–тата редица се множи со c_{ii}, $i = 1, \ldots, n$), в) ако е и A дијагонална матрица, тогаш:

$$AC = \operatorname{diag}(a_{11}\,c_{11}, \ldots, a_{nn}\,c_{nn}) = CA.$$

7.89. Да се покаже дека:

а) ако $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ е дијагонална матрица, тогаш:

$$C = \operatorname{diag}(c_1^k, \ldots, c_n^k), \qquad k \in \mathbb{N};$$

б) ако C е дијагонална матрица со ненегативни елементи и A квадратна матрица со ист ред, тогаш $AC^k = C^kA$ ако и само ако $AC = CA$.

7.90. Да се докаже дека:

а) ако $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ и $c_i \neq c_j$ за $i \neq j$, тогаш секоја матрица X, комутативна со C, е дијагонална;

б) квадратната матрица A со ред n комутира со секоја матрица (со ред n) ако и само ако A е скаларна.

7.91. Да се најдат сите дијагонални матрици X од n–ти ред што се идемпотентни. Колкав е бројот на таквите матрици?

7.92. Ако A и B се долно односно горно триаголни со ист ред, да се покаже дека и AB е долно (односно горно) триаголна. Дали $AB = BA$?

7.93. Да се покаже дека, ако матриците $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ги задоволуваат условите:

$$A_iA_j = 0, \quad \text{за} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 + \cdots + A_p = E,$$

тогаш секоја од матриците A_j е идемпотентна.

7.94. Ако матриците A и B се идемпотентни, тогаш матрицата $A+B$ е идемпотентна ако и само ако $AB + BA = 0$.

7.95. Да се покаже дека за матриците A и C од задачата **7.35** се исполнети условите:

$$AC = A \qquad \text{и} \qquad CA = C. \tag{1}$$

Нека A и C се произволни квадратни матрици со ист ред.
а) Дали од равенствата (1) следува дека A и C се идемпотентни? б) Ако A и C се идемпотентни, дали се исполнети равенствата (1)?

7.96. Ако a, b, c и k, p, s се косинусите на правците на две прави, тогаш производот

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k^2 & kp & ks \\ kp & p^2 & ps \\ ks & ps & s^2 \end{bmatrix}$$

е нултата матрица ако и само ако правите се заемно нормални.

7.97. Да ја означиме со A првата од матриците во претходната задача. Да се покаже дека $A^2 = A$ (т.е. A е идемпотентна).

7.98. Квадратните матрици A и B, со ред n, го задоволуваат равенството $2A - B = E$, каде што E е единичната матрица.
Да се покаже дека B е инволуторна ако и само ако е A идемпотентна.

7.99. Да се покаже дека A е инволуторна ако и само ако

$$(E - A)(E + A) = 0.$$

Да се даде пример за $A \neq E, -E$.

7.100. Да се докаже дека:

а) $(kA)^{\text{т}} = kA^{\text{т}}$; б) $(A^{\text{т}})^{\text{т}} = A$;

в) $(A^p)^{\text{т}} = (A^{\text{т}})^p$; г) $(ABC)^{\text{т}} = C^{\text{т}}B^{\text{т}}A^{\text{т}}$.

(k – скалар, p – природен број, $X^{\text{т}}$ – транспонирана матрица од X.)

7.101. Да се докаже дека: а) збир на две симетрични матрици е симетрична матрица; б) збир на две антисиметрични матрици е антисиметрична матрица.

7.102. Да се покаже дека за произволна квадратна матрица A
а) $A + A^{\text{т}}$ е симетрична; б) $A - A^{\text{т}}$ е антисиметрична.

7.103. Нека A и B се симетрични квадратни матрици. Да се покаже дека: а) во општ случај AB не е симетрична (со пример); б) AB е симетрична ако и само ако A и B меѓусебно комутираат. (Да се види и **7.65**).

7.104. Ако е A симетрична, а B антисиметрична матрица, тогаш: а) AB е симетрична ако и само ако $AB = -BA$; б) AB е антисиметрична ако и само ако $AB = BA$ (да се види и **7.65**).

7.105. Ако A и B се антисиметрични матрици, тогаш:

а) AB е симетрична ако и само ако $AB = BA$;

б) AB е антисиметрична ако и само ако $AB = -BA$ (да се види и **7.65**).

7.106. Нека A и B се квадратни матрици со ист ред. Ако A е симетрична, тогаш матрицата $B^{\mathrm{T}}AB$ е симетрична.

7.107. Што може да се каже за елементите од главната дијагонала на матрицата AA^{T} кога A е антисиметрична матрица, а што за оние од A^2?

7.108. Да се покаже дека секое од трите својства на една квадратна матрица, симетричност, ортогоналност и инволуторност следува од преостанатите две.

7.109. Да се покаже дека, која било ортогонална матрица со ред 2 има еден од следниве два вида:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix},$$

7.110. Да се покаже дека матрицата: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

е нилпотентна со индекс 4 и, воопшто, секоја квадратна матрица $A = [a_{ij}]$ со ред n, за која $a_{ij} = 0$, при $i \geq j$, е нилпотентна со индекс n.

7.111. Да се докаже дека: а) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$; б) $\overline{AC} = \overline{A}\,\overline{C}$;

в) $\overline{(kA)} = \overline{k}\,\overline{A}$; г) $\overline{(\overline{A})} = A$; д) $\overline{(A^{\mathrm{T}})} = (\overline{A})^{\mathrm{T}}$;

ѓ) $(A+B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} + B^{\mathrm{H}}$; е) $(A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = A$; ж) $(AB)^{\mathrm{H}} = B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}$.

(k е скалар, $\overline{X}$ е конјугирана, X^{T} е транспонирана, а X^{H} е *ермитски транспонирана матрица* од X, т.е. $X^{\mathrm{H}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}$.)

7.112. Ако е A квадратна матрица, тогаш $A + \overline{A}^{\mathrm{T}}$, $A\overline{A}^{\mathrm{T}}$ и $\overline{A}^{\mathrm{T}}A$ (т.е. $A + A^{\mathrm{H}}$, AA^{H} и $A^{\mathrm{H}}A$) се ермитски. Да се докаже.

7.113. Збирот и разликата од две ермитски матрици се ермитски матрици, а збирот и разликата на две антиермитски матрици се, исто така, антиермитски матрици.

7.114. Ако A е ермитска а B антиермитска, тогаш:

а) AB е ермитска ако и само ако $AB = -BA$,

б) AB е антиермитска ако и само ако $AB = BA$.

7.115. Ако A и B се ермитски матрици, тогаш:

а) AB е ермитска ако и само ако $AB = BA$ (да се види **7.69**),

б) AB е антиермитска ако и само ако $AB = -BA$.

7.116. Ако A и H се квадратни матрици со ист ред, при што H е ермитска, тогаш и матрицата $\overline{A}^{\mathrm{T}}\, H\, A$ е ермитска.

7.117. Да се докаже дека секоја ермитска матрица H може да се напише како $B + iC$, каде што B е реална и симетрична, а C е реална и антисиметрична.

7.118. Да се покаже дека: а) секоја антиермитска матрица A може да се напише како $B+iC$, каде што B е реална и антисиметрична, а C е реална и симетрична; б) $A\overline{A}$ е реална ако и само ако B и C се антикомутативни.

7.119. Комплексната матрица U се вика *унитарна матрица*, ако $U^{\mathrm{H}}U = UU^{\mathrm{H}} = E$.

а) Да се покаже дека, ако A и B се унитарни, тогаш и AB е унитарна.

б) Да се опишат сите матрици од втор ред коишто се и унитарни и дијагонални.

в) Да се опишат сите 3×3 матрици A коишто истовремено се: унитарни, ермитски и дијагонални.

7.120. Да се покаже дека секоја од елементарните операции со редици (задача **7.15**) има инверзна операција од ист вид.

7.121. Да се формулираат елементарни операции со колони, аналогни на елементарните трансформации со редици и да се применат за добивање канонична скалеста форма на матрицата A од **7.15**.

7.122. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Покажи дека

$$A^k = A^{k-2} + A^2 - E$$

за кој било природен број $k \geq 2$ ($A^0 = E$).

7.123. Нека $B(R_1, R_2, \ldots, R_n)$, т.е. нека R_i е i–тата редица на матрицата B и нека производот BA е дефиниран. Да се покаже дека $BA = (R_1A, R_2A, \ldots, R_nA)$, т.е. дека R_iA е i–тата редица на BA.

8. ДЕТЕРМИНАНТИ

Решени задачи

8.1. Дадени се пермутациите

$$\alpha{:}\,1\ 4\ 2\ 3\ 5\ 7\ 6, \qquad \beta{:}\,3\ 1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7,$$
$$\gamma{:}\,2\ 4\ j\ 5\ 3\ k\ 7, \qquad \delta{:}\,4\ 1\ 2\ j\ 6\ k\ 7.$$

од елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

а) Да се најде бројот на инверзиите во секоја од пермутациите α и β.

б) Да се определат j и k така што γ да е парна.

в) Да се определат j и k така што δ да е непарна.

Решение. Нека $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ е множество од првите n природни броеви. Секоја биекција $f{:}\,M \to M$ (види **2.10**) се вика *пермутација* на M без повторување. (Бројот на сите такви пермутации на M е $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n!$) Понатаму ќе велиме „пермутација на M", наместо „пермутација на M без повторување". Така, на пример, користејќи ја ознаката од **2.6**, пермутацијата α е биекцијата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Меѓутоа, вообичаено е да се пишува само втората редица, сметајќи дека во првата редица броевите секогаш се наредени во „природниот распоред", по големина. Така, на пример, во β, 3 е слика на 1, а 6 е слика на 3.

Секое отстапување од природниот распоред во втората редица се вика *инверзија* во пермутацијата. Ако бројот на сите инверзии е парен, тогаш пермутацијата се вика *парна*, а во спротивниот случај – *непарна*.

а) Да го најдеме бројот I_α на инверзиите во α. Бидејќи 4 е пред 2 и 3, а 7 пред 6, имаме само три отстапувања од природниот распоред. Според тоа: $I_\alpha = 3$. Значи, пермутацијата α е непарна.

Во β, 3 е пред 1 и 2, 6 е пред 4, 2 и 5, 4 е пред 2, вкупно шест отстапувања (други нема), па $I_\beta = 6$. Значи, пермутацијата β е парна.

б) Во γ, j може да биде 1 или 6. Ако е 1, тогаш мора да е $k = 6$, па во тој случај би ја имале пермутацијата $\gamma{:}\,2\ 4\ 1\ 5\ 3\ 6\ 7$. Како и во а), лесно наоѓаме дека $I_\gamma = 4$, т.е. γ е парна, а пермутацијата 2 4 6 5 3 1 7 има 9 инверзии. Според тоа, треба да се земе $j = 1$, $k = 6$.

в) Во δ, j може да биде 3 или 5. За $j = 3$ се добива пермутација 4 1 2 3 6 5 7, којашто има 4 инверзии, а за $j = 5$ се добива пермутацијата 4 1 2 5 6 3 7 којашто има пет инверзии. Значи: $j = 5$, $k = 3$.

8.2. Нека $|a_{jk}|$ е детерминанта од шести ред. Да се определи знакот на производот:

а) $a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{45} \cdot a_{53} \cdot a_{66}$; б) $a_{16} \cdot a_{25} \cdot a_{34} \cdot a_{42} \cdot a_{51} \cdot a_{63}$.

Решение. Ако $A = |a_{jk}|$ е квадратна матрица од n-ти ред, тогаш под *детерминанта од n-ти ред* го подразбираме бројот $\det A$, определен со:

$$\det A = \sum_{\alpha} (-1)^{I_\alpha} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}, \tag{1}$$

каде што $\sum_{\alpha}$ означува дека треба да се соберат сите можни производи $a_{1\alpha_1} \ldots a_{n\alpha_n}$, кои ги има $n!$ на број (т.е. колку што има пермутации на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$). Знакот на производот $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$ е определен со изразот $(-1)^{I_\alpha}$, каде што I_α е бројот на инверзиите на пермутацијата $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

а) Бројот на инверзиите на пермутацијата 2 4 1 5 3 6 е $I_\alpha = 4$, па $(-1)^{I_\alpha} = +1$. Значи, знакот на дадениот производ е $+$.

б) Бројот на инверзиите на пермутацијата 6 5 4 2 1 3 е 13, па $(-1)^{-13} = -1$. Значи, знакот на дадениот производ е минус.

8.3. Да се пресметаат детерминантите:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1k} \\ 0 & & a_{2k-1} & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk-1} & a_{kk} \end{vmatrix};$$

(во A се нули сите членови над главната дијагонала, а во B – сите над споредната дијагонала).

Решение. Детерминантите чии сите елементи над или под главната (или споредната) дијагонала се нули се викаат *детерминанти со триаголна форма* или *триаголни детерминанти*. Значи, A и B се триаголни. За тие детерминанти во сите производи $a_{1\alpha_1} \ldots a_{k\alpha_k}$ (види (1) од **8.2**), освен во $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}$, односно $a_{1k}\, a_{2k-1} \ldots a_{k1}$, како множител се јавува барем по една нула. Според тоа:

$$A = (-1)^{I_\alpha} a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}, \qquad B = (-1)^{I_\beta} a_{1k}\, a_{2k-1} \ldots a_{k1},$$

каде што I_α, односно I_β, е бројот на инверзиите на пермутацијата $1\ 2 \ldots k$, односно $k\ k-1 \ldots 3\ 2\ 1$. Јасно е дека $I_\alpha = 0$, а лесно увидуваме дека:

$$I_\beta = (k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{k(k-1)}{2}. \tag{1}$$

Според тоа, имаме:

$$A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}, \tag{2}$$

$$B = (-1)^{k(k-1)/2} a_{1k}\, a_{2k-1} \cdots a_{k1}. \tag{3}$$

8.4. Да се пресмета детерминантата $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

а) со разложување по првата редица; б) со трансформирање во детерминанта што има три нули во првата колона и потоа со разложување по таа колона; в) со сведување на триаголна форма.

Решение. а) Дадената детерминанта од четврти ред се разложува на четири детерминанти од трет ред:

$$A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

По пресметувањето на овие детерминанти од трет ред, добиваме:

$$A = 1 \cdot (-15) - 3(-21) + 2 \cdot (-12) - 1 \cdot 0 = 24.$$

б) Ако елементите од една редица (односно колона) ги помножиме со даден број и ги додадеме на соодветните елементи од друга редица (односно колона), детерминантата не се менува. Според тоа, множејќи ја првата редица по ред со -2, 1, -2 и додавајќи ја по ред на втората, третата, четвртата редица, добиваме:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 24.$$

в) По добивањето на трите нули во првата колона, ја земаме втората редица и со аналогна постапка добиваме нули во втората колона на третото и четвртото место. Постапката се продолжува додека се добие горно триаголна детерминанта. Значи:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 24.$$

8.5. Со сведување на триаголна детерминанта, да се пресмета

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -k \\ 1 & 0 & 3 & \dots & k \\ 1 & 2 & 0 & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 5 \\ 2 & 2 & \dots & 5 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(редот е k).

Решение. Да ја пресметаме прво A. Додавајќи ја првата редица кон сите други редици, добиваме детерминанта со триаголна форма, чии елементи под главната дијагонала се само нули:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -k \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k \end{vmatrix}.$$

Според (2) од **8.3**, добиваме:

$$A = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-k) = (-1)^k 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = (-1)^k k!$$

Детерминантата B се сведува на триаголна, на следниов начин: на последната колона ѝ ги додаваме сите други колони и заедничкиот множител $5+2(k-1) = 3+2k$ од последната колона го изнесуваме пред знакот за детерминантата; потоа, од секоја колона ја одземаме последната помножена со 2. Значи, имаме:

$$B = (3+2k)\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 5 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3+2k)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k(k-1)/2}\,(3+2k)3^{k-1}.$$

8.6. Применувајќи го методот на издвојување линеарни множители, да се пресмета детерминантата:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & \dots & 2k-1 \\ 2 & x+2 & 5 & \dots & 2k-1 \\ 2 & 3 & x+2 & 2k-1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 5 & \dots & x+2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Методот на издвојување линеарни множители се состои во тоа што детерминантата се разгледува како полином (од n–ти степен) од една или повеќе променливи (букви) што се содржани во детерминантата. Непосредно, или по извесни трансформации, се наоѓаат n заемно прости линеарни множители со кои се дели дадената детерминанта. Значи, полиномот што се добива од неа ќе биде производ од тие линеарни множители, помножен со некоја константа c, која дополнително се определува со споредување.

Во дадената детерминанта забележуваме дека производот на елементите по дијагоналата го содржи највисокиот степен на x, имено $(k-1)$–от, па значи детерминантата е полином од $(k-1)$–ви степен. За $x = 3-2 = 1$, $x = 5-2 = 3, \dots, x = 2k-1-2 = 2k-3$ детерминантата е еднаква со нула, бидејќи при тие вредности на x еднакви се по две редици: првата и втората, првата и третата, ..., првата и n–тата. Според тоа, A се дели со: $x-1$, $x-3$, ..., $x-2k+3$, па значи:

$$A = c(x-1)(x-3)\dots(x-2k+3)\,. \tag{1}$$

За да ја определиме константата c, го споредуваме членот $2x^{k-1}$ што се добива со множење на елементите од главната дијагонала, со членот cx^{k-1} што се добива од десната страна на (1). Бидејќи тие членови мора да се совпаѓаат, добиваме $c = 2$, па значи:

$$A = 2(x-1)(x-3)\,\dots\,(x-2k+3)\,. \tag{2}$$

8.7. Со методот на рекурентни врски да се пресмета следнава детерминанта:

$$A_{k+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

Решение. *Методот на рекурентни* (или *повратни*) *врски* се состои во тоа што дадената детерминанта од k–ти ред, разложувајќи ја по некоја редица или колона, се изразува со помош на една или повеќе детерминанти од ист вид. Добиеното равенство се вика рекурентна врска.
За да добиеме израз за детерминанта од произволен ред k од таков вид, треба да пресметаме неколку детерминанти од понизок ред, стремејќи се да го насетиме општиот вид на бараниот израз. Потоа, со индукција по k, користејќи ја рекурентната врска, ја докажуваме точноста на тој израз за кој било природен број k.
Да ја пресметаме дадената детерминанта A_{k+1}. Развивајќи ја по последната колона, добиваме две детерминанти од k–ред: едната (субдетерминантата на x) од ист вид како зададената, а другата (субдетерминантата на a_k) триаголна, еднаква со $(-1)^k x^k$. Така ја добиваме рекурентната врска:

$$A_{k+1} = x \cdot A_k + (-1)^{k+2}\, a_k (-1)^k\, x^k \,,$$

т.е.

$$A_{k+1} = x \cdot A_k + a_k\, x^k \,. \tag{1}$$

За да го најдеме општиот израз за детерминантата A_{k+1}, ќе ги разгледаме детерминантите од прв и втор ред од ист вид:

$$A_1 = a_0,\ A_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -x & x \end{vmatrix} = (a_0 + a_1)x \,. \tag{2}$$

Ќе покажеме дека за A_{k+1} важи аналоген израз:

$$A_{k+1} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)x^k \,. \tag{3}$$

За $k = 1$, (3) е точно. Да претпоставиме дека е точно за $k-1$, т.е.

$$A_k = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1})x^{k-1} \,. \tag{4}$$

Заменувајќи го A_k од (4) во рекурентната врска (1), добиваме дека:

$$A_{k+1} = x(a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1})x^{k-1} + a_k x = (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)x^k.$$

Значи, според принципот на математичката индукција, (3) е точно за кој било природен број k.

8.8. Нека A_k е детермината од k–ти ред ($k > 2$) за која важи рекурентната врска

$$A_k = pA_{k-1} + qA_{k-2} \,, \tag{1}$$

при што константите p и q се различни од нула, и нека a и c се корените на равенката $x^2 - px - q = 0$. Да се покаже дека:
а) ако $a \neq c$, тогаш

$$A_k = M_1\, a^{k-1} + M_2 c^{k-1} \,, \tag{2}$$

каде што

$$M_1 = (A_2 - cA_1)/(a-c) \,, \qquad M_2 = -(A_2 - aA_1)/(a-c) \,; \tag{3}$$

б) ако $a = c$, тогаш:

$$A_k = a^k[(k-1)M_1 + M_2] \,, \tag{4}$$

каде што

$$M_1 = (A_2 - aA_1)/a^2 \,, \qquad M_2 = A_1/a \,. \tag{5}$$

Решение. Имајќи ги предвид Виетовите правила $p = a + c$, $q = -ac$, равенството (1) можеме да го напишеме на следниов начин:

$$A_k - aA_{k-1} = c(A_{k-1} - aA_{k-2}) \tag{6}$$

или

$$A_k - cA_{k-1} = a(A_{k-1} - cA_{k-2}). \tag{7}$$

а) Нека $a \neq c$. Од (6) гледаме дека $A_k - aA_{k-1}$ можат да се разгледуваат како членови на геометриска прогресија со количник c и слично за $A_k - cA_{k-1}$ од (7). Според формулата за $(k-1)$–от член на геометриска прогресија, од (6) и (7) добиваме:

$$A_k - aA_{k-1} = c^{k-2}(A_2 - aA_1), \tag{8}$$

$$A_k - cA_{k-1} = a^{k-2}(A_2 - cA_1). \tag{9}$$

Изразувајќи го A_{k-1} од (8) и заменувајќи го во (9), по средувањето, добиваме:

$$(a-c)A_k = a^{k-1}(A_2 - cA_1) + c^{k-1}(A_2 - aA_1),$$

т.е. равенството (2). Ова равенство го докажавме за $k > 2$, а за бројот $k = 2$ се проверува непосредно.

б) Ако $a = c$, тогаш (6) и (7) се едно исто равенство:

$$A_k - aA_{k-1} = a(A_{k-1} - aA_{k-2});$$

$x_k = A_k - aA_{k-1}$ можеме да ги сметаме за членови на геометриска прогресија со количник a, па:

$$A_k - aA_{k-1} = a^{k-2}(A_2 - aA_1) = a^k M_1, \tag{10}$$

каде што $M_1 = (A_2 - aA_1)/a^2$. Од (10) имаме:

$$\frac{A_k}{a^k} - \frac{A_{k-1}}{a^{k-1}} = M_1$$

што значи дека A_k/a^k е член на аритметичка прогресија со разлика M_1. Според формулата за k–тиот член, имаме:

$$\frac{A_k}{a^k} = \frac{A_1}{a} + (k-1)M_1,$$

од каде што ја добиваме формулата (4).

8.9. Да се пресметаат следниве детерминанти:

а) $$A_k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

б) $$A_k = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение. а) Разложувајќи ја A_k по првата колона, ја добиваме следнава рекурентна врска:

$$A_k = 2A_{k-1} + 3A_{k-2}.$$

Според 8.8, имајќи предвид дека корени на равенката $x^2 - 2x - 3 = 0$ се 3 и -1, добиваме:

$$A_k = 3^{k-1}M_1 + (-1)^{k-1}M_2. \tag{*}$$

Бидејќи $A_1 = 2$, $A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$, за $k = 1$ и $k = 2$ од (*) го добиваме системот $M_1 + M_2 = 2$, $3M_1 - M_2 = 7$, од каде што $M_1 = 9/4$, $M_2 = -1/4$, па значи:

$$A_k = \frac{1}{4}\left(3^{k+1} + (-1)^k\right) .$$

б) Разложувајќи ја A_k по првата колона, добиваме:

$$A_k = -2A_{k-1} - A_{k-2}.$$

Корени на равенката $x^2 + 2x + 1 = 0$ се $a = c = -1$. Значи, го имаме случајот б) од **8.8**, па:

$$A_k = a^k \left[(k-1)M_1 + M_2\right] . \tag{*}$$

Од дадената детерминанта имаме:

$$A_1 = -2, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

За $k = 1$ и $k = 2$, од (*) го добиваме системот:

$$-2 = (-1)^1 M_2 , \quad 3 = (-1)^2(M_1 + M_2) ,$$

од каде што $M_2 = 2$, $M_1 = 1$. Значи:

$$A_k = (-1)^k (k+1).$$

8.10. Со помош на Крамеровото правило да се реши системот:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 , \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 1 , \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 &= 1 , \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 &= 1 . \end{aligned}$$

Решение. Ако е даден систем од k линеарни равенки со k непознати x_j, при што детерминантата A на системот не е нула, тогаш решението на системот, според *Крамеровото правило*, е зададено со:

$$x_j = \frac{A_j}{A} , \qquad j = 1, 2, \dots , k , \tag{1}$$

каде што A_j е детерминантата што одговара на непознатата x_j.
Детерминантата на зададениот систем е:

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} .$$

Да ги додадеме сите колони на четвртата колона и да го извлечеме пред детерминантата заедничкиот множител $a + 3$; потоа, од секоја колона да ја одземеме последната, (претходно) помножена со a; така добиваме триаголна детерминанта, од каде што лесно увидуваме дека $A = (a+3)(a-1)^3$. Детерминантата што одговара на x_1 е:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} .$$

Ако ја помножиме првата колона со a и ја извадиме од другите, добиваме:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3.$$

Исто така лесно добиваме: $A_2 = A_3 = A_4 = (a-1)^3$.
Ако $(a+3)(a-1) \neq 0$, тогаш, според (1), добиваме:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{a+3}.$$

Ако $a = 1$, тогаш сите четири равенки од системот се една иста равенка, па решенија на системот се сите четворки $(x_1, x_2, x_3, 1 - x_1 - x_2 - x_3)$, каде што x_1, x_2, x_3 се произволни реални броеви.
Ако $a = -3$, тогаш, собирајќи ги првите две равенки од системот, добиваме $-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$, т.е.

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1\,, \qquad (2)$$

а собирајќи ги последните две, добиваме:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1\,. \qquad (3)$$

Од (2) и (3) е јасно дека системот е противречен.

Задачи за вежбање

Во задачите **8.11–8.18** да се најде бројот на инверзиите и да се установи парноста на пермутацијата.

8.11. 2 3 4 9 5 1 7 6 8. **8.12.** 4 2 1 3 7 5 6 9 8.

8.13. 1 2 3 12 4 11 5 6 7 10 9 8. **8.14.** $2\ 4\ 6 \ldots 2k \quad 1\ 3\ 5 \ldots 2k-1$.

8.15. $1\ 4\ 7 \ldots 3k-2 \quad 2\ 5\ 8 \ldots 3k-1 \quad 3\ 6\ 9 \ldots 3k$.

8.16. $2\ 5\ 8 \ldots 3k-1 \quad 3\ 6\ 9 \ldots 3k \quad 1\ 4\ 7 \ldots 3k-2$.

8.17. $1\ 5 \ldots 4k-3 \quad 2\ 6 \ldots 4k-2 \quad 3\ 7 \ldots 4k-1 \quad 4\ 8 \ldots 4k$.

8. 18. $4k\ \ 4k-4\ \ldots 8\ 4\ \ 4k-1\ \ 4k-5 \ldots 7\ 3\ \ 4k-2\ \ 4k-6 \ldots 6\ 2$
$4k-3\ \ 4k-7 \ldots 5\ 1$.

Да се објасни кои од приложените производи (**8.19–8.27**) се членови на детерминанти од соодветен ред и со какви знаци „влегуваат“ во соодветната детерминанта.

8.19. $a_{13} \cdot a_{25} \cdot a_{34} \cdot a_{42} \cdot a_{51}$. **8.20.** $a_{24} \cdot a_{45} \cdot a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{53}$.

8.21. $a_{31} \cdot a_{52} \cdot a_{25} \cdot a_{34} \cdot a_{13}$. **8.22.** $a_{13} \cdot a_{25} \cdot a_{34} \cdot a_{45} \cdot a_{51}$.

8.23. $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{64} \cdot a_{55} \cdot a_{46}$. **8.24.** $a_{12} \cdot a_{23} \ldots a_{k-1,k} \cdot a_{kk}$.

8.25. $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} \ldots a_{2k-1,2k} \cdots a_{2k,2k-1}$.

8.26. $a_{1k} \cdot a_{2,k-1} \ldots a_{k-1,2} \cdot a_{k1}$.

8.27. $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{35} \ldots a_{k,2k-1} \cdot a_{k+1,2} \cdot a_{k+2,4} \ldots a_{2k,2k}$.

8.28. Да се изберат j и k така што производот

$$a_{12} a_{3j}\, a_{45}\, a_{2k}\, a_{61}\, a_{54}$$

да влегува во детерминанта од шести ред со знак плус.

8.29. Да се изберат j и k така што производот

$$a_{12}\, a_{3j}\, a_{23}\, a_{44}\, a_{58}\, a_{6k}\, a_{86}\, a_{75}$$

да влегува во детерминанта од осми ред со знак минус.

Во задачите **8.30–8.33** за дадените матрици A и B да се пресметаат $\det A$, $\det B$, AB, $\det(AB)$ и да се уочи дека

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

8.30. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **8.31.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

8.32. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

8.33. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Да се пресметаат детерминантите (**8.34**–**8.41**) со разложување по некоја редица или со сведување на триаголна форма.

8.34. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **8.35.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

8.36. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **8.37.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 11 \end{vmatrix}$

8.38. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ **8.39.** $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ y & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

8.40. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **8.41.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

Во задачите **8.42–8.49**, да се пресметаат детерминантите со сведување на триаголна форма. (Притоа, ако со видот на детерминантата не е определен нејзиниот ред, се претпоставува дека тој е k.)

8.42. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ **8.43.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 5 \\ 5 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 6 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 2k \end{vmatrix}$

8.44. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 7 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 7 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 7 \end{vmatrix}$ **8.45.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-1 \\ 1 & 0 & 5 & \dots & 2k-1 \\ 1 & 3 & 0 & \dots & 2k-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

8.46. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-1 \\ -2 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2k \end{vmatrix}$ **8.47.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & k \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k & k & k & \dots & k \end{bmatrix}$

8.48. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & k-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & k-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k-1 & k-2 & k-3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ **8.49.** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k & x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & a_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & x & a_2 & \dots & \dots & a_k \\ x & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix}$

Во задачите **8.50–8.55**, детерминантите да се решат со методот на рекурентни врски.

8.50. $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & 0 & 0 & \dots & k \end{vmatrix}$ **8.51.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & x \end{vmatrix}$

8.52. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & k-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 1 & c & c^2 & \dots & c^{k-1} \end{vmatrix}$ **8.53.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & k-1 \\ k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$

8.54. $\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-a_{k-1} & a_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-a_k \end{vmatrix}$

8.55. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & c_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{2k-1} & 0 & \dots & 0 & a_{2k-1} & 0 \\ c_{2k} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2k} \end{vmatrix}$

Во задачите 8.56–8.59 детерминантите да се решат користејќи ја задачата 8.8.

8.56. $A_k = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{vmatrix}$ **8.57.** $A_k = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 4 \end{vmatrix}$

8.58. $A_k = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -6 & 5 \end{vmatrix}$ **8.59.** $A_k = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -6 \end{vmatrix}$

Во задачите 8.60–8.65 да се пресметаат детерминантите, применувајќи го методот на издвојување линеарни множители.

8.60. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 6-x^2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & 2 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ **8.61.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & x^2-3 & 5 \\ 3 & x^2-5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

8.62. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & x^2-4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 & 5 \\ 2 & 9 & x^2-9 & 5 \end{vmatrix}$ **8.63.** $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 & \dots & k \\ 7 & x+1 & 2 & \dots & k \\ 7 & 1 & x+1 & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 7 & 1 & 2 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$

8.64*. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ y^2 & y^3 & 1 & y \\ y & y^2 & y^3 & 1 \end{vmatrix}$ **8.65.** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_k \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$

Да се пресметаат следниве детерминанти (**8.66–8.73**):

8.66. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ **8.67.** $\begin{vmatrix} x & -x & 0 & \dots & 0 \\ x+1 & x & -x & \dots & 0 \\ x+2 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x+k-1 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$

8.68. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (редот е k) **8.69*.** $\begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x \end{vmatrix}$ (редот е k)

8.70. $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & y & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & y & \dots & x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & \dots & 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$ (редот е $2k$) **8.71*.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{k-1} \\ a^{k-1} & 1 & a & \dots & a^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

8.72. $\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-k & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-k \end{vmatrix}$ (редот е k) **8.73.** $\begin{vmatrix} 2/a & a^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2/a & a^{-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/a & a^{-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2/a \end{vmatrix}$. (редот е k)

Во задачите **8.74–8.78** да се докажат наведените равенства.

8.74*. $D=\begin{vmatrix} a & -x & -c & -y \\ x & a & -y & c \\ c & y & a & -x \\ y & -c & x & a \end{vmatrix}=\left(a^2+x^2+c^2+y^2\right)^2.$ **8.75.** $\begin{vmatrix} 1 & a & x+c & y \\ 1 & x & c+y & a \\ 1 & c & y+a & x \\ 1 & y & a+x & c \end{vmatrix}=0.$

8.76. $\begin{vmatrix} 0 & a & x & c \\ -a & 0 & y & e \\ -x & -y & 0 & p \\ -c & -e & -p & 0 \end{vmatrix}=(ap-ex+cy)^2.$ **8.77.** $\begin{vmatrix} 2a & a+x & a+c & a+y \\ x+a & 2x & x+c & x+y \\ c+a & c+x & 2c & c+y \\ y+a & y+x & y+c & 2y \end{vmatrix}=0.$

8.78. Не развивајќи ги детерминантите, да се покаже дека

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix},$$

а потоа дека тие се еднакви со

$$D = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

Во задачите **8.79–8.84** дадените системи линеарни равенки да се решат со помош на Крамеровото правило.

8.79.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -6. \end{aligned}$$

8.80.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

8.81.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 0, \\ x_1+2x_2+5x_3-x_4+2x_5 &= -5, \\ 2x_1-x_2+7x_3+x_4+2x_5 &= -1, \\ 3x_1+3x_2+4x_3+x_4+2x_5 &= -2, \\ 3x_1-3x_2+6x_3+x_4-2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

8.82.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3-x_4-4x_5 &= -2, \\ 5x_1+x_2-2x_3+x_4-3x_5 &= -1, \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4-2x_5 &= 1, \\ 3x_1+2x_2-2x_3-x_4-x_5 &= -6, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4-6x_5 &= 1. \end{aligned}$$

8.83.
$$\begin{aligned} 7x_1+4x_2 &= 0, \\ 3x_1+7x_2+4x_3 &= 0, \\ 3x_2+7x_3+4x_4 &= 0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ & \cdots \\ 3x_{k-2}+7x_{k-1}+4x_k &= 0, \\ 3x_{k-1}+7x_k &= 0. \end{aligned}$$

8.84.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+\cdots+kx_k &= 0, \\ -x_1+x_2 \qquad &= 0, \\ -x_2+x_3 \qquad &= 0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ & \cdots \\ -x_{k-1}+x_k &= 0. \end{aligned}$$

Да се решат следниве системи :

8.85.
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= 2, \\ x + y + az &= 2. \end{aligned}$$

8.86.
$$\begin{aligned} ax + cy + 2z &= 1, \\ ax + (2c-1)y + 3z &= 1, \\ ax + cy + (c+3)z &= 2c - 1. \end{aligned}$$

8.87.
$$\begin{aligned} ax + y + z + u &= 1, \\ x + ay + z + u &= a, \\ x + y + az + u &= a^2, \\ x + y + z + au &= a^3. \end{aligned}$$

8.88.
$$\begin{aligned} y + ax + a^2u &= 1, \\ x + a^2z + au &= -1, \\ ax + a^2y + u &= 1, \\ a^2x + ay + z &= -1. \end{aligned}$$

* * *

8.89. Во која пермутација од броевите $1, 2, \ldots, k$ бројот на инверзиите е најголем?

8.90. Како ќе се измени детерминантата, ако секој нејзин елемент се замени со елементот што е симетричен со дадениот во однос на „центарот" на детерминантата?

8.91. Да се покаже дека детерминантата нема да се измени ако секој нејзин елемент се замени со елементот што е симетричен со дадениот во однос на споредната дијагонала.

8.92. Ако A е антисиметрична матрица од непарен ред $2k-1$, тогаш $\det A = 0$.

8.93. Ако матрицата A е ортогонална, тогаш $\det A = \pm 1$.

8.94. Да се покаже дека две детерминанти од ред k се множат на ист начин како квадратни матрици од ред k.

8.95. Ако A и B се квадратни матрици од ист ред, тогаш:

$$\det(AB) = \det(BA).$$

8.96. Нека $P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ е блочна матрица, при што 0 означува дека тој блок е нулта матрица. Ако A и C се квадратни матрици, да се покаже дека:

$$\det P = (\det A)(\det C).$$

8.97. Да се покаже дека:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

и поопшто:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & -1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & \dots & & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1k} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & c_{21} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix}.$$

8.98. Да се покаже дека:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1 + a_2y_1 & a_1x_2 + a_2y_2 & a_3 \\ p_1x_1 + p_2y_1 & p_1x_2 + p_2y_2 & p_3 \\ c_1x_1 + c_2y_2 & c_1x_2 + c_2y_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8.99. Да се покаже дека детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 + y_1 & \dots & c_1 + z_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 + y_2 & \dots & c_2 + z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k + x_k & b_k + y_k & \dots & c_k + z_k \end{vmatrix}$$

е еднаква со сумата од 2^k–те детерминанти што одговараат на 2^k–те различни можности за избор на по една буква од секоја колона.

8.100. Ако е $a_k = \frac{1}{k!}$, докажи дека:

$$A_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix} = a_k\,.$$

8.101. Да се пресмета

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \dots & \frac{1}{2k-1} \end{vmatrix}.$$

8.102. Детерминантата со облик

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \qquad a_i \neq a_j \quad \text{за} \quad i \neq j,$$

се вика *вандермондова детерминанта*. Да се покаже дека:

а) $\Delta_3 = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1);$

б) $\Delta_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})\cdot\Delta_{n-1}$;

в) $\Delta_n = \prod_{j>i}(a_j - a_i)$.

Помош. Секоја колона од Δ_n да се помножи со $-a_n$ и да се додаде на наредната колона – ќе се добие детерминанта при која сите елементи од n–тата редица, освен првиот елемент, се нули. Добиената детерминанта да се развие по n–тата редица и да се извлечат заедничките фактори од секоја редица – ќе се добие равенството под б), каде што Δ_{n-1}, има ист облик како Δ_n. Имајќи предвид дека $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$, од б) ќе се добие в).

Забелешка. Задачата може да се реши и со издвојување линеарни множители (в. 8.6): $\Delta_n = 0$ за $a_n = a_1$, $a_n = a_2, \dots, a_n = a_{n-1}$, па $a_n - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}$ се линеарни множители на Δ_n.

8.103. Две квадратни равенки

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0\,, \qquad a_0 \neq 0\,, \tag{1}$$

$$c_0x^2 + c_1x + c_2 = 0\,, \qquad c_0 \neq 0\,, \tag{2}$$

имаат еднакви корени ако и само ако

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Користејќи го тоа, да се докаже дека равенките

$$ax^2 + x + 1 - a = 0 \qquad \text{и} \qquad (1-c)x^2 + x + c = 0$$

имаат заеднички корен за кои било a и c.

Да се решат системите **8.104–8.106**.

8.104.
$$\begin{aligned} (a+1)x_1 + ax_2 + \dots + ax_k &= 1\,, \\ ax_1 + (a+1)x_2 + \dots + ax_k &= 1\,, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ x_1 \ + \ x_2 \ + \ x_k &= 1\,. \end{aligned}$$

8.105.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \dots + x_{k-1} + x_k &= 1\,, \\ x_1 + \quad x_3 + \dots + x_{k-1} + x_k &= 2\,, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\dots\dots\ \dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k-1} \quad &= k\,. \end{aligned}$$

8.106.
$$\begin{aligned} ax_1 + ax_2 + \dots + ax_{k-1} + px_k &= c_k\,, \\ ax_1 + ax_2 + \dots + px_{k-1} + ax_k &= c_{k-1}\,, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ px_1 + ax_2 + \dots + ax_{k-1} + ax_k &= c_1\,, \qquad a \neq p\,. \end{aligned}$$

9. ИНВЕРЗНИ МАТРИЦИ

Решени задачи

9.1. Да се најде *адјунгираната матрица* $\operatorname{adj} A$ на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ако $A = [a_{ij}]$ е квадратна матрица од n–ти ред, тогаш $\operatorname{adj} A = [a^*_{ij}]^{\mathrm{T}}$, каде што a^*_{ij} е *алгебарскиот комплемент* на елементот a_{ij}, т.е.

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}\,; \tag{1}$$

притоа, Δ_{ij} е *субдетерминантата* (*минорот*) на елементот a_{ij}, т.е. детерминантата што се добива од $\det A$ кога се „исфрлат“ i–та редица и j–та колона.

За конкретно дадената матрица A, имаме:

$$a^*_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad a^*_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad a^*_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$a^*_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad a^*_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5; \quad a^*_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$a^*_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad a^*_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7; \quad a^*_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Така,

$$\operatorname{adj} A = [a^*_{ij}]^{\mathrm{T}} = [a^*_{ji}] = \begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -7 \\ -5 & -9 & 3 \end{vmatrix}.$$

9.2. За квадратната матрица A велиме дека е *несингуларна* (или *инверзибилна*) ако постои квадратна матрица B, таква што:

$$AB = BA = E\,, \tag{1}$$

каде што E е единичната матрица.

Да се докаже дека B со (1) е еднозначно определена.

(Матрицата B се вика *инверзна* на A и се означува со A^{-1}.)

Решение. Да претпоставиме дека за квадратната матрица A, покрај матрицата B, постои матрица C, таква што:

$$AC = CA = E. \tag{2}$$

Тогаш, користејќи ги равенствата $X = XE = EX$ и асоцијативноста на множењето на матрици, добиваме:

$$C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B.$$

Значи, ако постои, B е единствена. Ако B ја означиме со A^{-1}, тогаш (1) станува:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{3}$$

9.3. Да се покаже дека матрицата $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ е несингуларна и да се најде нејзината инверзна матрица.

Решение. Да се потсетиме дека една квадратна матрица A е несингуларна ако и само ако $\det A \neq 0$; во тој случај за инверзната матрица имаме:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A. \tag{1}$$

За дадената матрица A лесно наоѓаме дека $\det A = 3$, па значи A е несингуларна. За да ја најдеме A^{-1} од (1), треба да ја најдеме $\operatorname{adj} A$. Работејќи како во задачата **9.1**, добиваме:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -8 & 19 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{значи:} \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -8 & 19 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По добивањето на инверзната матрица препорачливо е секогаш да се изврши проверка на добиениот резултат покажувајќи дека $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
Да забележиме дека дадената матрица A е симетрична, па значи, наместо 9, овде пресметуваме 6 субдетерминанти.
Воопшто, ако A е симетрична матрица од n–ти ред, наместо n^2 субдетерминанти, се пресметуваат $\frac{1}{2}(n^2 + n)$.

9.4. Секоја матрица H што се добива со извршување на некоја елементарна редична операција (види **7.15**) над единичната матрица E, се вика *елементарна (редична) матрица.*
Да се напишат елементарните матрици од трет ред што одговараат на укажаните елементарни операции со редици:

а) H_{12} (т.е. H_{21}): $P_1 \leftrightarrow P_2$; б) $H_2(3)$: $P_2 \to 3P_2$;
в) $H_{12}(4)$: $P_1 \to 4P_2 + P_1$; г) $H_{21}(4)$: $P_2 \to 4P_1 + P_2$.

Решение. За да се добијат спомнатите матрици, треба да се извршат назначените елементарни редични операции над единичната матрица

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имаме:

а) $H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H_{21}$. б) $H_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

в) $H_{12}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. г) $H_{21}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.5. Нека e е елементарна (редична) операција и H соодветна елементарна матрица од m–ти ред, т.е. $H = e(E_m)$. Тогаш за која било $m \times n$–матрица A имаме:

$$e(A) = HA\,, \tag{1}$$

т.е. резултатот $e(A)$ од извршувањето на елементарната операција e врз матрицата A се добива со множење на A (одлево) со соодветната елементарна матрица H.

Решение. Ќе усвоиме некои ознаки за решавањето на оваа задача. За $m \times n$–матрицата A ќе ставиме $A = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$, каде што P_j е j–тата редица на A. Ако B е $n \times p$–матрица, тогаш со оваа ознака, според дефиницијата за множење на матрици, имаме (в. и **7.123**):

$$AB = (P_1B,\ P_2B,\ \ldots,\ P_mB)\,. \tag{2}$$

Освен тоа, ќе ставиме

$$e_j = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)\,, \tag{3}$$

што значи дека 1 се наоѓа на j–тото место во оваа „матрица со 1 редица“. Со овие ознаки, единичната матрица E од m–ти ред може да се напише: $E = (e_1, \ldots, e_m)$.

а) Ако e е елементарната операција $P_j \leftrightarrow P_k$ (j и k фиксирани), тогаш:

$$H = e(E) = (e_1,\ \ldots,\ e_k,\ \ldots,\ e_j,\ \ldots,\ e_m)$$

и

$$e(A) = (P_1,\ \ldots,\ P_k,\ \ldots,\ P_j,\ \ldots,\ P_m).$$

Според (2), добиваме:
$HA = (e_1A, \ldots, e_kA, \ldots, e_jA, \ldots e_mA) = (P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_j, \ldots, P_m) = e(A)$,
т.е. равенството (1).

б) Ако e е елементарната операција $P_j \to cP_j$, $c \neq 0$ (j–фиксиран), тогаш:
$H = e(E) = (e_1, \ldots, ce_j, \ldots, e_m)$ и $e(A) = (P_1, \ldots, cP_j, \ldots, P_m)$,
па значи,

$$(HA = (e_1A,\ \ldots,\ ce_jA,\ \ldots,\ e_mA) = (P_1,\ \ldots,\ cP_j,\ \ldots,\ P_m) = e(A).$$

в) Нека сега, e е елементарната операција $P_j \to cP_k + P_j$, за некои фиксирани j и k. Тогаш:

$H = e(E) = (e_1, \ldots, ce_k{+}e_j, \ldots, e_m)$ и $e(A) = (P_1, \ldots, cP_k{+}P_j, \ldots, P_m)$.
Бидејќи $(ce_k + e_j)A = c(e_kA) + e_jA = cP_k + P_j$, добиваме:

$$HA = (e_1A,\ \ldots,\ (ce_k + e_j)A, \ldots,\ e_mA) = (P_1,\ \ldots,\ cP_k + P_j,\ \ldots,\ P_m) = e(A).$$

Значи, извршувањето на елементарна редична операција e врз A и множењето на A со елементарната матрица H што одговара на e даваат ист резултат.

9.6. Да се покаже дека матрицата A е редично еквивалентна со матрицата B (види **7.15**) ако и само ако постојат елементарни матрици $H_1, H_2, \ldots, H_s$, такви што $H_s \ldots H_2\, H_1\, A = B$.

Решение. Според дефиницијата, A е редично еквивалентна со B ако постои конечна низа елементарни редични операции $e_1, e_2, \ldots, e_s$, за кои $e_s\big(\ldots\big(e_2(e_1(A))\big)\ldots\big) = B$. Според претходната задача, ова е исполнето ако и само ако $H_s \ldots H_2\, H_1\, A = B$, каде што H_j е елементарната матрица што одговара на e_j.

9.7. Да се покаже дека која било елементарна матрица H е несингуларна и дека нејзината инверзна е, исто така, елементарна матрица.

Решение. Елементарната матрица H се добива од единичната матрица E со некоја елементарна редична операција. Инверзната операција (види **7.120**) одговара на некоја елементарна матрица H' и ја враќа H во E. Според **9.5** добиваме дека

$$H'H = E \qquad \text{и, аналогно,} \qquad HH' = E,$$

што значи дека H е несингуларна и елементарната матрица H' е нејзината инверзна.

9.8. Нека A е несингуларна и редично еквивалентна со единичната матрица E (види **9.108**) преку елементарните операции $e_1, \dots, e_s$. Да се покаже дека оваа низа елементарни операции извршени на E доведуваат до A^{-1}.

Решение. Нека H_j е елементарна матрица што одговара на операцијата e_j. Тогаш, според претпоставката и задачата **9.6**, имаме: $H_s \dots H_1 A = E$, па $(H_s \dots H_1 E)A = E$, т.е.

$$A^{-1} = H_s \dots H_1 E.$$

Значи, A^{-1} може да се добие од E со извршување на елементарните операции $e_1, \dots, e_s$.

9.9. Со помош на елементарни операции со редици, да се најде инверзната матрица на:

$$\text{а)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \text{б)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. а) Ќе ја формираме блочната матрица (A, E) и ќе ја редуцираме на нејзината канонична форма. (Види **7.15**.)

$$(A, E) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 33 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & 0 & 4/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -11/14 & 1/14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -11/14 & 1/14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \end{array}\right].$$

Последната блочна матрица има вид (E, B). Значи, A е несингуларна и B е нејзината инверзна:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -11/14 & 1/14 \\ 0 & 3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

б)
$$(A,E)=\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -2 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -2 & 1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -2 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -12 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -2 & 1\end{array}\right]=$$

$=(E,\,A^{-1})$,
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -12 & 1 & 3 & -2\\ -6 & 1 & 1 & -1\\ 4 & 0 & -1 & 1\\ 7 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

9.10. Дадени се матриците: $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}$.

Да се решат матричните равенки: а) $AX=B$; б) $YA=B$.

Решение. а) Бидејќи $\det A=-1$, матрицата A е несингуларна, па од равенката $AX=B$ добиваме:
$$X=A^{-1}B.$$
Работејќи како во задачата 9.3 или 9.9, ја наоѓаме матрицата A^{-1};
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$
а потоа и:
$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 9 & 16 & 5\\ -2 & -4 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

б) Слично, за $YA=B$, добиваме:
$$Y=BA^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1\\ -10 & 6 & 3\\ -11 & 6 & 3\end{bmatrix}.$$

9.11. Со помош на матрици да се реши системот:
$$\begin{aligned} 3x-2y-z&=1,\\ x+2y+z&=7,\\ -x+y+z&=2.\end{aligned}\tag{1}$$

Решение. Ставајќи $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $X\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1\\ 7\\ 2\end{bmatrix}$,

системот (1) можеме да го претставиме со една матрична равенка:
$$AX=B. \tag{2}$$
Бидејќи $\det A=4$, матрицата A е несингуларна, па од (2) добиваме:
$$X=A^{-1}B.$$

Ја наоѓаме инверзната матрица A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

а потоа:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

што значи, решението на системот е $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.

9.12. Дадени се матриците:

$$E, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

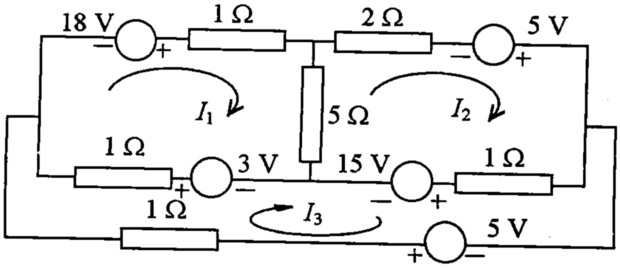
Да се покаже дека множеството $M = \{E, A, B, C\}$ е групоид во однос на операцијата множење на матрици и да се напише таблицата на тој групоид. Дали групоидот M е комутативен? Дали M е група?

Решение. Наоѓајќи ги производите на елементите од M, можеме да ја формираме следнава таблица:

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

од што е јасно дека $M(\cdot)$ е групоид.
Групоидот M е комутативен, бидејќи неговата таблица е симетрична во однос на „главната“ дијагонала. Бидејќи множењето на матрици е асоцијативно, а од таблицата е јасно дека E е неутрален елемент и $A^{-1} = C$, $B^{-1} = B$, $C^{-1} = A$, заклучуваме дека $M(\cdot)$ е група.

9.13. Да се најдат струите I_1, I_2, I_3 во гранката на колото, претставено со приложената шема, по методот на независни (контурни) струи. (Вредностите за отпорот R и напонот U се зададени на самата шема).



Решение. За колото, претставено со дадената шема, го добивме следниов систем линеарни равенки по непознатите I_1, I_2 и I_3:

$$R_{j1}I_1 + R_{j2}I_2 + R_{j3}I_3 = U_j\,, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

при што $R_{11} = 7$, $R_{12} = R_{21} = -5$, $R_{13} = R_{31} = -1$, $R_{22} = 8$, $R_{23} = R_{32} = -1$, $R_{33} = 3$ и $U_1 = 21$, $U_2 = -10$, $U_3 = 17$.

Системот (1) можеме да го претставиме со матричната равенка:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -10 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Наоѓајќи $\det R = 68$ и $\operatorname{adj} R$, добиваме: $R^{-1} = \frac{1}{68} \begin{bmatrix} 23 & 16 & 13 \\ 16 & 20 & 12 \\ 13 & 12 & 31 \end{bmatrix}$,

па $I = R^{-1}U = \frac{1}{68} \begin{bmatrix} 544 \\ 340 \\ 680 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, т.е. $I_1 = 8,\ I_2 = 5,\ I_3 = 10$.

Да забележиме дека матрицата R е симетрична.

Задачи за вежбање

Во задачите **9.14–9.21**, за дадената матрица да се најде нејзината адјунгирана.

9.14. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. **9.15.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. **9.16.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **9.17.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

9.18. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. **9.19.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **9.20.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. **9.21.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

9.22. Дадена е матрицата: $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Да се покаже дека секој елемент од A е еднаков со својот алгебарски комплемент и дека $A(\operatorname{adj} A) = E$.

9.23. Матрицата $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ е пример на *магичен квадрат* (т.е. сумите по која било редица се еднакви).

Да се покаже дека сумата на алгебарските комплементи на елементите од една редица е еднаква со сумата на алгебарските комплементи на елементите од која било друга редица.

Да се покаже дека дадената матрица (**9.24–9.31**) е несингуларна и да се најде нејзината инверзна со помош на адјунгираната (како во **9.3**).

9.24. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$. **9.25.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **9.26.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. **9.27.** $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.28. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **9.29.** $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **9.30.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **9.31.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

9.32. Да се покаже дека:

$$\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ -\operatorname{tg}\frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

9.33. Ако a, b, c, d се реални броеви, такви што $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, а $i^2=-1$, покажи дека:

$$\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{bmatrix}.$$

Во задачите **9.34–9.41** да се најдат инверзните матрици на зададените матрици со помош на елементарни операции со редици.

9.34. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. **9.35.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. **9.36.** $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

9.37. $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. **9.38.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. **9.39.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

9.40. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. **9.41.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

9.42. Да се докаже дека инверзната матрица на антисиметричната матрица од ред $2n$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{е} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Со помош на елементарни операции со редици да се најде инверзната матрица од k–ти ред (**9.43–9.46**):

9.43. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **9.44.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.45. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. **9.46.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k-1 & k \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & k-3 & k-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Да се најде инверзната матрица на матрицата (**9.47**–**9.51**).

9.47. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **9.48.** $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **9.49.** $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.50. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.51.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$.

Во секоја од задачите **9.52**–**9.55** да се пресмета назначениот (негативен) степен на дадената матрица.

9.52. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-2}$. **9.53.** $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-3}$.

9.54. $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. **9.55.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

9.56. Ако A е несингуларна матрица, да се определи матрицата X, така што блочната матрица $\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ X & A^{-1} \end{bmatrix}$ да е инверзна на $\begin{bmatrix} A & O \\ B & A \end{bmatrix}$.

9.57. Дадени се квадратните матрици A, B и C, при што A и B се несингуларни. Да се најде инверзната матрица на блочната матрица:

а) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$.

9.58. Разбивајќи ја на блокови на погоден начин и користејќи ја задачата **9.57**, да се најде инверзната матрица на следнава матрица:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

в) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 & 0 & 0 \\ -5 & 18 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.59. Нека $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ и $C = [c]$, каде што a, b, c се ненулти броеви и нека:

$$P = \begin{bmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека:

$$P^2 = \begin{bmatrix} A^2 & O & O \\ O & B^2 & O \\ O & O & C^2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O & O \\ O & B^{-1} & O \\ O & O & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

9.60. Нека A е квадратна матрица, а S несингуларна матрица од ист ред како A. Да се докаже дека:

$$(SAS^{-1})^k = SA^kS^{-1}$$

за кој било природен број k.

Во задачите **9.61–9.64** да се покаже дека матрицата S е несингуларна и да се пресмета $(SAS^{-1})^k$, $k \in \mathbf{N}$.

9.61. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. **9.62.** $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

9.63. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.64. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Во задачите **9.65–9.67** да се пресмета $f(A)$, сметајќи дека $\frac{p(A)}{q(A)} = p(A) \cdot [\,q(A)\,]^{-1}$.

9.65. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad f(x) = \frac{x^k+2}{x^2+4x-3}$, $\quad k \in \mathbb{N}$.

9.66. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.

9.67. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+2}$.

9.68. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Со директна проверка да се покаже дека извршувањето на редичните операции

а) $P_1 \leftrightarrow P_2$; б) $P_2 \to 3P_2$; в) $P_3 \to 4P_1 + P_3$ над A доведуваат до матриците

а) $H_{12}A$; б) $H_2(3)A$; в) $H_{31}(4)A$, каде што H_{12}, $H_2(3)$, H_{31} се елементарни матрици (види **9.4**).

9.69. Да се најдат инверзните на следниве елементарни матрици од трет ред:

$$H_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; H_3(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; H_{23}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9.70. Да се покаже дека за елементарните матрици од n–ти ред важат равенствата

$$H_{jk}^{-1} = H_{jk}; \quad H_j(c)^{-1} = H_j\left(\tfrac{1}{c}\right), \quad c \neq 0; \quad H_{jk}(c)^{-1} = H_{jk}(-c).$$

Во задачите **9.71–9.79** да се решат зададените матрични равенки.

9.71. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\qquad$ **9.72.** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

9.73. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. $\qquad$ **9.74.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

9.75. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$. $\qquad$ **9.76.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

9.77. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$ **9.78.** $X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [4 \quad 5 \quad 7].$

9.79. $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$

9.80. При кои услови матричната равенка $AXB = C$, каде што A и B се квадратни матрици, може да се реши по X?

Да се решат следниве матрични равенки (**9.81–9.84**):

9.81. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{c^2}{a} \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0.$

9.82. $A^{-1}XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

9.83. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}.$

9.84. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$

Со помош на матрици, да се решат следниве системи линеарни равенки (**9.85–9.91**):

9.85. $x + 2y = 5,$
$-x + 2y = 7.$

9.86. $4x - 5y = 2,$
$x + 3y = 9.$

9.87. $x \cos\alpha - y \sin\alpha = \cos 2\alpha,$
$x \sin\alpha + y \cos\alpha = \sin 2\alpha.$

9.88. $x - y \operatorname{tg}\alpha = 1/\cos^2\alpha,$
$x \operatorname{tg}\alpha + y = 0.$

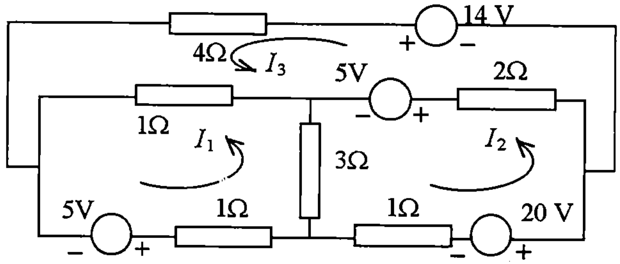
9.89. $x - 4y - 3z = -2,$
$x - 5y - 3z = -3,$
$-x + 6y + 4z = 4.$

9.90. $x + 2y + 2z = 1,$
$x + 3y + 3z = 1,$
$x + 2y + 3z = 3.$

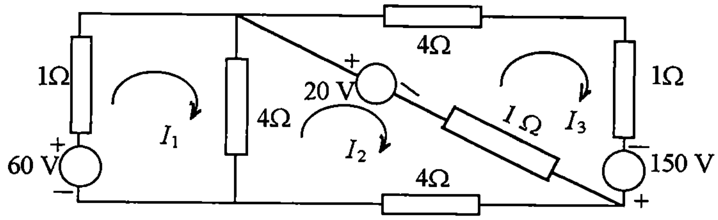
9.91. $$\begin{aligned} x-2y+2z-u&=-4\,,\\ x-y+2z-2u&=-3\,,\\ x-y+z-2u&=-2\,,\\ x-y+z-u&=-1\,. \end{aligned}$$

Во задачите **9.92–9.94** да се најдат струите I_1, I_2, I_3 во гранките на колото претставено со приложената шема.

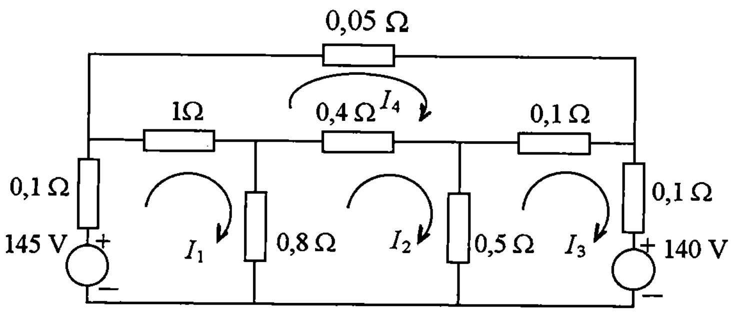
9.92.



9.93.



9.94.



9.95. Да се покаже дека множеството

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

е група во однос на операцијата множење матрици.

9.96. Да се покаже дека множеството

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

е група во однос на операцијата множење матрици.

9.97. Да се покаже дека множеството M квадратни матрици од втор ред од вид

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

за кои $ad - bc \neq 0$, е група во однос на операцијата множење матрици. Дали таа е комутативна?

9.98. Да се покаже дека множеството M на сите матрици од вид

$$\begin{bmatrix} a & c \\ pc & a \end{bmatrix},$$

каде што a и c се рационални броеви, а p природен број кој не е полн квадрат, е поле во однос на операциите собирање и множење матрици.

9.99. Следниве матрици од трет ред:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

се наречени *пермутациони матрици.*

Да се покаже дека тие формираат група во однос на операцијата множење матрици и да се напише таблицата за множење.

9.100. Дадено е множеството M матрици со облик:

$$A = \begin{bmatrix} y\cos x & y\sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix},$$

каде што x и y се реални броеви. Да се покаже дека во однос на операцијата множење матрици, во општ случај, M не е група, но подмножествата M_1 и M_2, што се добиваат при $y = 1$ и $y^2 = 1$ соодветно, се групи во однос на множењето матрици.

* * *

9.101. Да се докаже дека за која било квадратна матрица A, точно е равенството $\operatorname{adj} A^{\mathrm{T}} = (\operatorname{adj} A)^{\mathrm{T}}$.

9.102. Да се докаже дека адјунгираната матрица:

а) на скаларна матрица е скаларна;

б) на дијагонална матрица е дијагонална;

в) на горно триаголна матрица е горно триаголна;

г) на симетрична матрица е симаетрична.

Ако се работи за несингуларни матрици, овие тврдења важат и за нивните инверзни.

9.103. Ако $\det(AB) = 0$, докажи дека барем едната од матриците A, B е сингуларна.

9.104. Ако A е несингуларна матрица, тогаш:

а) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, б) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$,

в) $\det(A^{-1}BA) = \det B$.

9.105. Ако A е несингуларна матрица, тогаш за која било квадратна матрица B и која било несингуларна матрица P, такви што $PAB = E$, важи равенството $A^{-1} = BP$.

9.106. Нека $B = P^{-1}AP$. Да се покаже дека матрицата C го задоволува условот $C^{-1}AC = B$ ако и само ако $C = SP$, каде што S е несингуларна матрица, комутативна со A.

9.107. Ако две $m \times n$–матрици A и B се редично еквивалентни, тогаш постои несингуларна матрица P, таква што $B = PA$.

9.108. Да се дскаже дека за една матрица A следниве тврдења се еквивалентни:

а) A е несингуларна;

б) A е редично еквивалентна со единичната матрица E;

в) A е производ од елементарни матрици.

9.109. Ако A го задоволува равенството $A^2 - A + E = 0$, докажи дека A е несингуларна и $A^{-1} = E - A$.

9.110. Нека $E - A$ е несингуларна матрица. Да се покаже дека:
$$(E-A)^{-1}A = A(E-A)^{-1}.$$

9.111. Ако $S_k = E + A + \cdots + A^k$ и $E - A$ е несингуларна, да се покаже дека тогаш $S_k = (E - A^{m+1})(E-A)^{-1}$.

9.112. Елементите на матриците A и A^{-1} се цели броеви ако и само ако $\det A = \pm 1$.

9.113. Ако матриците A и B се симетрични, несингуларни и меѓусебно комутираат, тогаш $A^{-1}B$, AB^{-1} и $A^{-1}B^{-1}$ се симетрични.

9.114. Ако A е произволна квадратна матрица, тогаш $A^{\text{T}}A$ и AA^{T} се симетрични. Ако A е несингуларна, да се покаже дека:
$$A^{-1} = (A^{\text{T}}A)^{-1}A^{\text{T}}.$$
Значи, A^{-1} се сведува на наоѓање инверзна од симетрична матрица. Да се види и забелешката во **9.3**.

9.115. Нека A е ортогонална матрица. Докажи дека:

а) A^{-1} и $(A^{\text{T}})^{-1}$ се ортогонални;

б) ако S е симетрична, тогаш и $A^{-1}SA$ е симетрична;

в) ако P е антисиметрична, тогаш $A^{-1}PA$ е антисиметрична.

9.116. Нека A е квадратна матрица, $E + A$ е несингуларна матрица и $B = (E-A)(E+A)^{-1}$. Да се покаже дека:

а) ако A е антисиметрична, тогаш B е ортогонална;

б) ако A е ортогонална, тогаш B е антисиметрична.

9.117. Да се најде инверзната матрица на антисиметричната матрица со ред $2n$, чии елементи над главната дијагонала се само единици.

9.118. Нека A е произволна квадратна матрица од n–ти ред. Да се докаже дека множеството $K(A)$ од сите квадратни матрици што комутираат со A е полугрупа во однос на операцијата собирање матрици. Дали е група?

9.119. Да се покаже дека множеството од сите дијагонални несингуларни матрици од n–ти ред е група во однос на операцијата множење матрици.

9.120. Да се покаже дека множеството од сите ортогонални матрици од n–ти ред е група во однос на операцијата множење матрици.

9.121. Да се покаже дека групата од задачата **9.99** е изоморфна со групата од задачата **3.4**.

10. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

Решени задачи

10.1. Да се покаже дека множеството V од сите подредени k–тки елементи a_j од дадено поле P,

$$V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k);\ a_j \in P\}$$

е векторски простор во однос на операциите собирање

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) + (c_1, c_2, \ldots, c_k) = (a_1 + c_1, a_2 + c_2, \ldots a_k + c_k) \qquad (1)$$

и множење со скалар $x \in P$

$$x(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (xa_1, xa_2, \ldots, xa_k)\,. \qquad (2)$$

Решение. Нека е P поле, чии елементи $x, y, p, \ldots$ се наречени *скалари*, и V непразно множество, чии елементи $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ се наречени *вектори*. Потоа, нека во V е дефинирана операција собирање (т.е. на секој пар елементи $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in V$ му е придружен еднозначно елементот $\mathbf{a} + \mathbf{c} \in V$) и операција множење со скалар, според која, на секои $\mathbf{a} \in V$ и $x \in P$ им е придружен еднозначно елементот $x\mathbf{a} \in V$. Ако, притоа, се исполнети следниве услови:

I. $V(+)$ е комутативна група;

II. за кои било $x, y \in P$ и $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in V$ се точни равенствата

(i) $x(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = x\mathbf{a} + x\mathbf{c}$; (ii) $(x + y)\mathbf{a} = x\mathbf{a} + y\mathbf{a}$;

(iii) $(xy)\mathbf{a} = x(y\mathbf{a})$; (iv) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$,

каде што 1 е неутралниот елемент во однос на множењето во P, тогаш за V велиме дека е *векторски* или *линеарен простор над полето P* и, обично, пишуваме $V(P)$. Ако P е полето од реалните броеви, тогаш за V велиме дека е *реален векторски простор*.

За дадениот случај ќе покажеме дека $V(+)$ е комутативна група (види **3.3**). Од дефиницијата (2) е јасно дека $V(+)$ е групоид, а поради асоцијативноста и комутативноста на операцијата собирање во полето P добиваме дека и операцијата $+$ во V е асоцијативна и комутативна. Значи, $V(+)$ е комутативна полугрупа. Елементот $(0, \ldots, 0) = \mathbf{o} \in V$ каде што 0 е неутралниот елемент во $P(+)$, ја има особината $\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$, за секој $\mathbf{a} \in V$, т.е. $\mathbf{o}$ е неутрален елемент во $V(+)$. Потоа, ако е $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ кој било елемент од V, тогаш елементот $-\mathbf{a} = (-a_1, \ldots, -a_k)$ ја има особината $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, т.е. тој е спротивен за $\mathbf{a}$. Од сето тоа следува дека $V(+)$ е комутативна група.

Користејќи ги дефинициите (1) и (2), ќе покажеме дека се исполнети равенствата (i)–(iv). Нека $x, y \in P$ и $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in V$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)$. Имаме:

$x[(a_1,\dots,a_k)+(c_1,\dots,c_k)=x(a_1+c_1,\dots,a_k+c_k)=\big(x(a_1+c_1),\dots,x(a_k+c_k)\big)=$
$=(xa_1+xc_1,\dots,xa_k+xc_k)=(xa_1,\dots,xa_k)+(xc_1,\dots,xc_k)=x(a_1,\dots,a_k)+x(c_1,\dots,c_k)$,
што значи равенството (i) е исполнето. (Притоа, на едно место во доказот го користевме фактот што множењето во P е дистрибутивно спрема собирањето.)

На сличен начин, користеќи ги (1) и (2), асоцијативноста на множењето во P, како и неговата дистрибутивност спрема собирањето, се докажуваат и равенствата (ii) и (iii), а (iv) следува од (2) и равенството $1\cdot a_j=a_j$, $a_j\in P$.

Од сето тоа следува дека V, во однос на операциите дефинирани со (1) и (2), е векторски простор над полето P. Овој простор се означува со $V^k(P)$. Ако е P полето на реалните броеви, наместо $V^k(\mathbb{R})$ ние ќе пишуваме $\mathbb{R}^k$ и ќе го викаме *k–димензионален (реален) векторски простор.*

10.2. Да се покаже дека множеството $\mathcal{P}_k$ од сите полиноми со коефициенти реални броеви и со степен не поголем од k ($k\in\mathbb{N}$), заедно со нултиот полином, е векторски простор во однос на операциите собирање на полиноми и множење на полином со реален број:

$$(a_0+a_1x+\dots+a_kx^k)+(c_0+c_1x+\dots+c_kx^k)=\\=(a_0+c_0)+(a_1+c_1)x+\dots+(a_k+c_k)x^k, \tag{1}$$

$$c(a_0+a_1x+\dots+a_kx^k)=ca_0+ca_1x+\dots+ca_kx^k. \tag{2}$$

Решение. Според (1), збир на два полинома со степен не поголем од k е пак таков полином. Од асоцијативноста и комутативноста на операцијата собирање во $\mathbb{R}$ следува дека $+$ во $\mathcal{P}_k$ е асоцијативна и комутативна. Нултиот полином 0 е неутрален елемент на $\mathcal{P}_k(+)$, а за $a_0+a_1x+\dots+a_kx^k$, полиномот $(-a_0)+(-a_1)x+\dots+(-a_k)x^k$ е спротивен елемент. Значи, $\mathcal{P}_k(+)$ е комутативна група.

Користејќи ги дефинициите (1) и (2), асоцијативноста на множењето на реални броеви, како и дистрибутивноста на множењето спрема собирањето во $\mathbb{R}$, добиваме дека се исполнети равенствата (i)–(iv) од **10.1**. Според тоа, $\mathcal{P}_k$ во однос на операциите дефинирани со (1) и (2) е векторски простор над полето од реалните броеви.

10.3. Нека V е множеството од сите функции $f\colon X\to\mathbb{R}$, $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$. За кои било функции $f,g\in V$ и кој било реален број a, нека $f+g$ и af се функции од V дефинирани на следниов начин:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad \forall x\in X \tag{1}$$

$$(af)(x)=a\,f(x),\qquad \forall x\in X. \tag{2}$$

Да се покаже дека V е векторски простор над $\mathbb{R}$.

Решение. Да покажеме прво дека $V(+)$ е група. Бидејќи X е непразно, множеството V е исто така непразно. Од (1) следува дека $V(+)$ е групоид. Имајќи предвид дека $f(x)$ е реален број, а користејќи ја дефиницијата (1), како и асоцијативноста и комутативноста на собирањето реални броеви, за кои било $f,g,h\in V$ добиваме:

$$\big(f+(g+h)\big)(x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)=$$
$$=\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)=\big((f+g)+h\big)(x),$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x),$$

што значи дека $f+(g+h)=(f+g)+h$ и $f+g=g+f$, т.е. $V(+)$ е комутативна полугрупа.

Да ја означиме со θ нултата функција: $\theta(x)=0$, $\forall x\in X$ и нека f е произволна функција од V. Имаме:

$$(f+\theta)(x)=f(x)+\theta(x)=f(x)+0=f(x), \qquad \forall x\in X,$$

што значи $f+\theta=f$, т.е. θ е нултиот вектор во V.

Ако f е која било функција од V, тоагаш функцијата $-f$, дефинирана со $(-f)(x)=-f(x)$, ја има особината:

$$\big(f+(-f)\big)(x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)-f(x)=0=\theta(x) \quad \forall x\in X,$$

т.е. $f+(-f)=\theta$. Значи, $V(+)$ е комутативна група.

Да покажеме дека се исполнети (i)–(iv) од **10.1.** Затоа, нека a, c се реални броеви, а f, g кои било функции од V. Користејќи ги (1) и (2), асоцијативноста на множењето на реални броеви, како и дистрибутивноста на множењето спрема собирањето, добиваме:

$$\big(a(f+g)\big)(x)=a\big((f+g)(x)\big)=a\big(f(x)+g(x)\big)=af(x)+ag(x)=$$
$$=(af)(x)+(ag)(x)=(af+ag)(x), \qquad \forall x\in X$$

$$\big((a+c)f\big)(x)=(a+c)f(x)=af(x)+cf(x)=$$
$$=(af)(x)+(cf)(x)=(af+cf)(x), \qquad \forall x\in X,$$

$$\big((ac)f\big)(x)=(ac)f(x)=a\big(cf(x)\big)=a(cf)(x)=\big(a(cf)\big)(x), \qquad \forall x\in X,$$
$$(1f)(x)=1f(x)=f(x), \qquad \forall x\in X,$$

што значи: $a(f+g)=af+ag$, $(a+c)f=af+cf$, $(ac)f=a(cf)$ и $1\cdot f=f$. Според тоа, V е векторски простор над $\mathbb{R}$.

10.4. Да се покаже дека множеството S од сите дијагонални матрици од втор ред е потпростор од векторскиот простор $M(2;\mathbb{R})=\mathbb{M}$ на реални квадратни матрици од втор ред над $\mathbb{R}$.

Решение. За непразното множество S од векторскиот простор $V(P)$ велиме дека е *потпростор* од $V(P)$ ако е исполнет следниов услов:

$$x\in P \quad \text{и} \quad \mathbf{a},\mathbf{c}\in S \Rightarrow x\mathbf{a},\ \mathbf{a}+\mathbf{c}\in S. \tag{1}$$

Лесно се покажува дека множеството $M(m\times n;\ \mathbb{R})$ (реални) $m\times n$ матрици е група во однос на операцијата собирање матрици и дека за множењето на матрица со скалар се исполнети (i)–(iv) од **10.1**, па $M(m\times n;\ \mathbb{R})$ (и, специјално, $\mathbb{M}$) е векторски простор над $\mathbb{R}$.

Множеството S од сите дијагонални матрици од втор ред не е празно; на пример, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ му припаѓаат на S. Нека е x произволен реален број и A, C произволни елементи од S, т.е. $A=\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}c_1&0\\0&c_2\end{bmatrix}$ $a_j,c_j\in\mathbb{R}$. Имаме:

$$xA=\begin{bmatrix}xa_1&0\\0&xa_2\end{bmatrix}, \qquad A+C=\begin{bmatrix}a_1+c_1&0\\0&a_2+c_2\end{bmatrix}$$

т.е. xA и $A+C$ се, исто така, елементи од S. Значи, S е потпростор од $\mathbb{M}$.

10.5. Матрицата $H = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ да се претстави како линеарна комбинација од матриците

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ако $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ се вектори од $V(P)$, а $x_1, \ldots, x_k$ скалари, тогаш векторот

$$\mathbf{s} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_k\mathbf{a}_k$$

се вика ***линеарна комбинација*** од $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. За дадениот случај треба да најдеме реални броеви x, y и p, такви што:

$$H = xA + yB + pC.$$

Имаме:

$$xA + yB + pC = \begin{bmatrix} x - y & -3y + 2p \\ 2x + p & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix},$$

од каде што го добиваме системот равенки:

$$x - y = 6, \qquad -3y + 2p = 4, \qquad 2x + p = 7;$$

решението на овој систем е: $x = 4$, $y = -2$, $p = -1$. Значи:

$$H = 4A - 2B - C.$$

10.6. Дадени се подмножествата од $\mathbb{R}^3$;
$A = \{\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0), \ \mathbf{a}_2 = (-2, 1, 0)\}$ и $C = \{\mathbf{c}_1 = (2, 1, 0), \ c_2 = (-2, 3, 1)\}$.
Да се најде пресекот S на потпросторите генерирани од A и C, т.е. $L(A) \cap L(C) = S$ и да се покаже дека и S е потпростор од $\mathbb{R}^3$. Добиените резултати да се интерпретираат геометриски.

Решение. Ако A е непразно подмножество од векторскиот простор $V(P)$, тогаш множеството $L(A)$ од сите вектори со облик

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_j \in A, \ x_j \in P \tag{1}$$

е ***потпростор*** од V. Тој е „најмалиот“ потпростор од V што го содржи множеството A, па затоа за $L(A)$ велиме дека е ***потпростор генериран од*** A, т.е. дека е ***линеарна обвивка*** на множеството A, а A се вика ***генераторно множество*** за потпросторот $L(A)$. За дадениот случај имаме:

$$L(A) = \{x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2\} = \{(x - 2y \ 2x + y, \ 0)\}, \tag{2}$$

$$L(C) = \{u\mathbf{c}_1 + v\mathbf{c}_2\} = \{(2u - 2v, \ u + 3v, \ v\}, \tag{3}$$

каде што x, y, u, v се произволни броеви. Според реченото погоре (или со директна проверка) заклучуваме дека $L(A)$ и $L(C)$ се потпростори од $\mathbb{R}^3$. Пресекот S на тие потпростори се состои од сите тридимензионални вектори што им припаѓаат и на $L(A)$ и на $L(C)$. Според тоа, од (2) и (3) добиваме:

$$x - 2y = 2u - 2v, \qquad 2x + y = u + 3v, \qquad v = 0$$

т.е.

$$x - 2y = 2u, \qquad 2x + y = u$$

од каде што $x = \frac{4}{5}u$, $y = -\frac{3}{5}u$. Ставајќи $\frac{u}{5} = t$, добиваме $x = 4t$, $y = -3t$, па значи:

$$S = \{(4t, \ -3t, \ 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Ако $x \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in S$, т.е. $\mathbf{a} = (4a, -3a, 0)$, $\mathbf{c} = (4c, -3c, 0)$, тогаш $x\mathbf{a} = \big(4(xa), -3(xa), 0\big)$ и $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \big(4(a + c), -3(a + c), 0\big)$, т.е. $x\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{c} \in S$, а тоа значи дека S е потпростор од $\mathbb{R}^3$. (Види и **10.102**).

Потпросторот $L(A)$, геометриски, ја претставува рамнината, зададена со параметарските равенки $X = x-2y$, $Y = 2x+y$, $Z = 0$ (x и y – параметри), т.е. рамнината $Z = 0$, а $L(C)$ – рамнината со параметарски равенки $X = 2u-2v$, $Y = u+3v$, $Z = v$, т.е. (по елиминацијата на параметрите u и v) $X - 2Y + 8Z = 0$. Потпросторот S е пресекот на овие две рамнини, т.е. правата $X = 4t$, $Y = -3t$, $Z = 0$ т.е. $\frac{X}{4} = \frac{Y}{-3} = \frac{Z}{0}$.

10.7. Да се покаже дека редиците на матриците

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

генерираат исти потпростори од $\mathbb{R}^3$ и дека каноничните скалести матрици добиени од A и C имаат еднакви ненулти редици.

Решение. Ако $A = [a_{ij}]$ е произволна реална матрица од облик $m \times n$, тогаш нејзините редици

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \qquad R_m = (a_{m1}, a_{m2} \ldots, a_{mn}),$$

разгледувани како вектори во $\mathbb{R}^n$, генерираат потпростор од $\mathbb{R}^n$, наречен ***редичен простор*** на A. Значи: редичен простор на $A = L(R_1, R_2, \ldots, R_m)$. Аналогно, колоните на A, разгледувани како („транспонирани") вектори во $\mathbb{R}^m$, генерираат потпростор од $\mathbb{R}^m$ што се вика ***колоничен простор*** на A. Редиците на дадените матрици A и C можеме да ги сметаме за тридимензионални вектори. Така, A има две „вектор–редици": $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 5)$ и $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 9)$, а C има три: $\mathbf{c}_1 = (-1, 2, 7)$, $\mathbf{c}_2 = (-1, 1, 3)$ и $\mathbf{c}_3 = (0, 1, 4)$. Потпросторот генериран од редиците на A да го означиме со S, а на C – со T. За да покажеме дека $S = T$, доволно еда покажеме дека секој од векторите $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ е линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и, обратно, дека $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ се линеарни комбинации од $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Од

$$(-1, 2, 7) = \mathbf{c}_1 = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 = (x+y,\ x+2y,\ 5x+9y)$$

го добиваме системот: $x + y = -1$, $x + 2y = 2$, $5x + 9y = 7$, чие решение е $x = -4$, $y = 3$. Значи: $\mathbf{c}_1 = -4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$.
На сличен начин лесно добиваме:

$$\mathbf{c}_2 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{c}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2; \quad \mathbf{a}_1 = -\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3, \quad \mathbf{a}_2 = -\mathbf{c}_2 + 3\mathbf{c}_3.$$

Значи: $S = T$.
Да ги најдеме каноничните скалести матрици добиени од A и C (види **7.15**). Имаме:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

што значи дека каноничните скалести форми на A и C имаат еднакви ненулти редици.

Забелешка. Може да се докаже општо: а) редично еквивалентните матрици (в. **7.15**) имаат ист редичен простор; б) две редично редуцирани скалести матрици (в. **7.14**) имаат ист редичен простор ако и само ако тие имаат исти ненулти редици.

Важат аналогни тврдења, ако „редичен" се замени со „колоничен".

10.8. Нека V е векторски простор над полето P, а S и T се потпростори од V. Да се покаже дека множеството

$$S+T=\{\mathbf{s}+\mathbf{t}\mid \mathbf{s}\in S,\ \mathbf{t}\in T\}$$

е потпростор од V. (Тој потпростор се вика *линеарна сума* на S и T.) Потоа да се увиди дека

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}\quad \text{и}\quad T=\left\{\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}\middle| a,c\in\mathbb{R}\right\}$$

се потпростори од векторскиот простор $\mathbf{M}$ на сите квадратни матрици од втор ред над $\mathbb{R}$ и да се најде $S+T$.

Решение. Нека $x\in P$ и $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\in S+T$, т.е. $\mathbf{a}_1=\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{s}_2+\mathbf{t}_2$. Имаме:

$$x\mathbf{a}_1=x(\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1)=x\mathbf{s}_1+x\mathbf{t}_1\,,$$
$$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=(\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1)+(\mathbf{s}_2+\mathbf{t}_2)=(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2)+(\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2)\,,$$

т.е. $x\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\in S+T$, што значи дека $S+T$ е потпростор од V.
Во конкретниот случај е јасно дека $S+T$ се потпростори од $\mathbf{M}$, а елементите од $S+T$ имаат облик $\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$, т.е.

$$S+T=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}\middle| a,b,c\in R\right\}.$$

10.9. За векторскиот простор V велиме дека е претставен како *директна сума од своите простори* S и T и означуваме:

$$V=S\oplus T,$$

ако секој вектор $\mathbf{a}$ може да се напише на еден и само на еден начин како $\mathbf{a}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$, $\mathbf{s}\in S$, $\mathbf{t}\in T$.

Да се покаже дека векторскиот простор $\mathbb{R}^3$ е директна сума од потпросторите:

$$S=\{(x,y,z)\mid x=y=z,\ x\in\mathbb{R}\}\quad \text{и}\quad T=\{(0,y,z)\mid y,\ z\in\mathbb{R}\},$$

но дека не е директна сума од потпросторите:

$$S_1=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}\qquad \text{и}\qquad T_1=\{(0,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}.$$

Решение. Дека S и T се потпростори од $\mathbb{R}^3$ е јасно. Нека $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ е произволен вектор од $\mathbb{R}^3$. Тогаш $(a_1,a_1,a_1)\in S$, $(0,\,a_2-a_1,\,a_3-a_1)\in T$ и

$$(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_1,a_1)+(0,\ a_2-a_1,\ a_3-a_1),\qquad \text{т.е.}\qquad \mathbf{a}=\mathbf{s}+\mathbf{t}.$$

Нека $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)\in S\cap T$; тогаш $\mathbf{c}\in S$ и $\mathbf{c}\in T$, па $c_1=c_2=c_3$ и $c_1=0$, т.е. $\mathbf{c}=\mathbf{o}$. Значи: $S\cap T=\{\mathbf{o}\}$.
Ако векторот $\mathbf{a}$ има две претставувања, $\mathbf{a}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$ и $\mathbf{a}=\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1$, тогаш имаме $\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1$, т.е. $\mathbf{s}-\mathbf{s}_1=\mathbf{t}_1-\mathbf{t}$, а бидејќи $\mathbf{s}-\mathbf{s}_1\in S$, $\mathbf{t}_1-\mathbf{t}\in T$ и $S\cap T=\{\mathbf{o}\}$, добиваме дека $\mathbf{s}-\mathbf{s}_1=\mathbf{o}$, $\mathbf{t}_1-\mathbf{t}=\mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{s}_1=\mathbf{s}$, $\mathbf{t}_1=\mathbf{t}$. Значи, векторот $\mathbf{a}$ може да се претстави на еден и само на еден начин: $\mathbf{a}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$, па според тоа: $\mathbb{R}^3=S\oplus T$.
Дека $\mathbb{R}^3$ не е директна сума од S_1 и T_1 можеме да видиме од следниов пример:

$$(1,5,1)=(1,1,0)+(0,4,1)\qquad \text{и}\qquad (1,5,1)=(1,2,0)+(0,3,1),$$

т.е. претставувањето не е еднозначно.

Да забележиме дека $S_1+T_1=\mathbb{R}^3$ и $S_1\cap T_1\neq\{\mathbf{o}\}$.

10.10. Векторскиот простор V, е директна сума од своите потпростори S и T, т.е. $V = S \oplus T$, ако и само ако $V = S + T$ и $S \cap T = \{\mathbf{o}\}$.

Решение. Нека $V = S \oplus T$. Тогаш, кој било вектор $\mathbf{a} \in V$ има еднозначно претставување $\mathbf{a} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$, $\mathbf{s} \in S$, $\mathbf{t} \in T$, па значи $V = S + T$. Ако $\mathbf{a} \in S \cap T$, тогаш можеме да ставиме:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{o} \quad \text{при што} \quad \mathbf{a} \in S \quad \mathbf{o} \in T \quad \text{и} \tag{1}$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{o} + \mathbf{a}, \quad \text{при што} \quad \mathbf{o} \in S, \ \mathbf{a} \in T. \tag{2}$$

Бидејќи $\mathbf{a}$ се претставува на еднозначен начин како таква сума, од (1) и (2) следува дека $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, т.е. $S \cap T = \{\mathbf{o}\}$.
Обратно, да претпоставиме дека $S + T = V$ и дека $S \cap T = \{\mathbf{o}\}$. Од $S + T = V$ следува дека за кој било $\mathbf{a} \in V$ постои $\mathbf{s} \in S$ и $\mathbf{t} \in T$, така што $\mathbf{a} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$. Треба да покажеме дека ова претставување е единствено.
Нека $\mathbf{a} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1$. Тогаш $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1$, т.е. $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1 = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}$, па поради $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1 \in S$, $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t} \in T$ и $S \cap T = \{\mathbf{o}\}$, следува дека $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1 = \mathbf{o}$ и $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t} = \mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$ и $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1$. Значи, претставувањето на $\mathbf{a}$ како сума $\mathbf{a} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ е еднозначно и $V = S \oplus T$.

Задачи за вежбање

Во **10.11–10.22** да се провери дали даденото множество V е векторски простор над даденото поле P, во однос на вообичаените операции: множење со скалар и собирање вектори.

10.11. V е множеството од комплексните броеви, $P = \mathbb{R}$.

10.12. $V = \{x + y\sqrt[3]{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, $\quad P = \mathbb{Q}$.

10.13. $V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Q}, \ x + y = z + 1\}$, $\quad P = \mathbb{Q}$.

10.14. $V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Q}, \ 2x + y = 3z\}$, $\quad P = \mathbb{Q}$.

10.15. V е множеството од сите полиноми над $\mathbb{R}$ со степен 3, $P = \mathbb{R}$.

10.16. $V = \{a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, $\quad P = \mathbb{R}$.

10.17. V е множеството од сите функции непрекинати на сегментот $[0, 1]$, во однос на операциите од **10.3**, $P = \mathbb{R}$.

10.18. V е множеството од сите непрекинати функции $f(x)$ на $[0, 1]$ за кои $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$, $P = \mathbb{R}$.

10.19. V е множеството од сите функции $f(x)$, дефинирани во сегментот $[0, 1]$, за кои: а) $f(0) = 0$; б) $f(0) = f(1)$; в) $f(0) \neq 0$; г) $f(1 - x) = f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, $P = \mathbb{R}$.

10.20. V е множеството од сите скаларни реални матрици од n–ти ред, $P = \mathbb{R}$ (види **7.10**, решение).

10.21. Множеството од сите идемпотентни матрици од n–ти ред, $P = \mathbb{R}$.

10.22. Множеството од сите горно (долно) триаголни матрици од n–ти ред, $P = \mathbb{R}$.

Во задачите **10.23–10.30** да се провери дали множеството $V = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ е векторски простор над полето од реалните броеви, ако собирањето на вектори и множењето на скалар s со вектор се дефинирани како што е назначено.

10.23. $(x, y) + (a, c) = (x, y)$ и $s(x, y) = (sx, sy)$.

10.24. $(x, y) + (a, c) = (x + a, y + c)$ и $s(x, y) = (sx, 1)$.

10.25. $(x, y) + (a, c) = (x + a, y + c)$ и $s(x, y) = (sx, sy)$.

10.26. $(x, y) + (a, c) = (x + a, y + c)$ и $s(x, y) = (s^2x, s^2y)$.

10.27. $(x, y) + (a, c) = (x + c, y + a)$ и $s(x, y) = (sx, sy)$.

10.28. $(x, y) + (a, c) = (x + a, y + c)$ и $s(x, y) = \left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right)$ за $s \neq 0$, $0(x, y) = (0, 0)$.

10.29. $(x, y) + (a, c) = (ax, cy)$ и $s(x, y) = (sx, sy)$.

10.30. $(x, y) + (a, c) = (x + a, y + c)$ и $s(x, y) = (sx, 0)$.

10.31. Во множеството V од сите позитивни реални броеви под „собирање“ на „векторите“ x и y ќе го подразбираме обичниот производ xy на реални броеви, а под „множење“ на вектор x со скалар s ќе го подразбираме степенот x^s. Да се покаже дека V е векторски простор над $\mathbb{R}$. Кој е нултиот вектор?

10.32. Нека $V = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}^+\}$. Да се провери дали V е векторски простор над $\mathbb{R}$, ако операциите собирање на вектори и множење на скалар s со вектор се дефинирани со:

а) $(a, c) + (x, y) = (ax, cy)$ и $s(a, c) = (a^s, c^s)$;

б) $(a, c) + (x, y) = (a, cy)$ и $s(a, c) = (sa, sc)$.

Во задачите **10.33–10.38** да се провери кое од дадените подмножества S е потпростор од $\mathbb{R}^3$.

10.33. S е множеството од сите вектори чија втора компонента е нула.

10.34. S е множеството од сите вектори чија должина не е поголема од 1.

10.35. $S = \{(a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. **10.36.** $S = \{(a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

10.37. $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a \leq b \leq c\}$.

10.38. $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R},\ x + 2y + 3z = 0\}$.

10.39. Дали $\mathbb{R}^2$ е потпростор од $\mathbb{R}^3$?

10.40. Да се провери дали подмножеството S е потпростор од векторскиот простор на обичните вектори, ако S е множеството вектори чија почетна точка е во координатниот почеток, а последната е: а) на оската Ox; б) на правата $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$;
в) на правата $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$; г) на рамнината Oxz;
д) на рамнината $x - y + z = 1$; ѓ) на рамнината $x - y + z = 0$;
е) во првиот квадрант на рамнината Oxy; ж) во првиот октант.

Да се провери дали зададените множества се потпростори од V^4 ($\mathbb{Q}$) (**10.41–10.44**), односно од $\mathbb{R}^4$ (**10.45–10.47**).

10.41. $S = \{(a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}$. **10.42.** $S = \{(a, a+1,\ c, c+1) \mid a, c \in \mathbb{Q}\}$.

10.43. $S = \{(a, c, -c, a) \mid a, c \in \mathbb{Q}\}$. **10.44.** $S = \{(a, c, a+c, a-c) \mid a, c \in \mathbb{Q}\}$.

10.45. $S = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_j \in \mathbb{R},\ 5a_1 + a_4 = 6\}$.

10.46. $S = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_j \in \mathbb{R},\ 5a_1 + a_4 = 0\}$.

10.47. $S = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 + p_4a_4 = 0,\ p_j, a_j \in \mathbb{R}\}$.

Во задачите **10.48–10.54** да се провери дали е потпростор од векторскиот простор на сите реални квадратни матрици од n–ти ред, назначеното подмножество.

10.48. Подмножеството од сите дијагонални матрици.

10.49. Подмножеството од сите инволуторни матрици.

10.50. Подмножеството од сите матрици A, за кои $\det A = 0$.

10.51. Подмножеството од сите симетрични матрици.

10.52. Подмножеството од сите антисиметрични матрици.

10.53. Подмножеството од сите ортогонални матрици.

10.54. Подмножеството од сите матрици X, што комутираат со зададена матрица A, т.е. $S = \{X \mid AX = XA\}$.

Во задачите **10.55–10.60** V е векторски простор од сите реални функции дефинирани на $\mathbb{R}$ (види **10.3**). Да се провери дали е потпростор од V даденото подмножество од функции.

10.55. Подмножеството функции $f(x)$ што имаат иста вредност во точките 1 и 5, т.е $f(1) = f(5)$.

10.56. Подмножеството ненегативни функции $f(x)$, т.е. $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

10.57. Подмножеството ограничени функции, т.е. такви функции $f(x)$, за кои постои број M, така што $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

10.58. Подмножеството парни функции $f(x)$, т.е. $f(-x) = f(x)$.

10.59. Подмножеството непарни функции $f(x)$, т.е. $f(-x) = -f(x)$.

10.60. Подмножеството монотоно растечки функции $f(x)$, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

10.61. Даден е хомогениот систем линеарни равенки со k непознати $x_1, \ldots, x_k$ (над полето од реалните броеви):

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & = & 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kk}x_k & = & 0. \end{array}$$

Да се покаже дека множеството S од сите решенија на овој систем е потпростор од $\mathbf{R}^k$.

10.62. Векторите $\mathbf{a}_1 = (7, 5, -1)$ и $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$ од $\mathbf{R}^3$ да се изразат како линеарни комбинации од векторите:

$$\mathbf{c}_1 = (1, 1, -1), \qquad \mathbf{c}_2 = (2, 0, 4), \qquad \mathbf{c}_3 = (3, 1, 3).$$

10.63. Дадени се два вектора во $\mathbf{R}^4$; $\mathbf{a} = (1, -1, 1, -2)$ и $\mathbf{c} = (3, 1, -2, -3)$. а) Да се изразат како линеарни комбинации од $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ векторите $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2, 3)$ и $\mathbf{a}_2 = (-3, -5, 7, 0)$. б) Да се определат k, p, s, така што векторите $\mathbf{a}_3 = (6, k, 1, -9)$ и $\mathbf{a}_4 = (3, 5, p, s)$ да можат да се напишат како линеарни комбинации од $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$.

10.64. Да се покаже дека секоја квадратна матрица од втор ред може да се изрази како линеарна комбинација од матриците:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се генерализира.

10.65. Полиномот $p = x^2 + 4x - 3$ над $\mathbf{R}$ да се напише како линеарна комбинација од полиномите $p_1 = x^2 - 2x + 5$, $p_2 = 2x^2 - 3x$ и $p_3 = x + 3$.

10.66. Да се покаже дека векторите $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ и $(3, -1, 2)$ го генерираат $\mathbf{R}^3$, т.е. кој било вектор (a_1, a_2, a_3) е линеарна комбинација од дадените.

10.67. Да се покаже дека векторите:

а) $(1, 2, 0)$ и $(-1, 0, 0)$; б) $(2, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$ и $(1, 3, 0)$, ја генерираат рамнината Oxy (како потпростор од $\mathbb{R}^3$).

10.68. Да се покаже дека комплексните броеви $3+i$ и $-2+i$ го генерираат полето на комплексните броеви како векторски простор над полето на реалните броеви.

10.69. Да се покаже дека полиномите x^2+2x+1, $x+1$ и 1 го генерираат векторскиот простор на полиноми со степен не поголем од 2 (вклучувајќи го и нултиот полином).

Во задачите **10.70–10.74** да се најдат линеарни равенки што ја определуваат линеарната обвивка на дадените вектори.

10.70. $(3, 0, 1)$ и $(1, 0, 2)$. **10.71.** $(1, 0, 1)$, $2, 0, -1)$ и $(-1, 0, 3)$.

10.72. $(1, 2, 2)$, $(1, 0, 1)$ и $(3, 2, 4)$. **10.73.** $(-2, 1, -1)$ и $(4, -2, 2)$.

10.74. $(2, 3, 1)$, $(3, 1, -1)$, $(-1, 2, 2)$ и $(4, -1, -3)$.

10.75. Да се најдат два вектора што го генерираат потпросторот од сите вектори (x_1, x_2, x_3, x_4), коишто го задоволуваат условот:
а) $x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0$; б) $x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 - x_4 = 0$;
в) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$, $3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

Во задачите **10.76–10.78** да се најдат системи линеарни равенки што ги определуваат линеарните обвивки на дадените вектори.

10.76. $(1, 0, -1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$ и $(2, 1, 0, 1)$.

10.77. $(1, 1, 0, -1)$, $(-1, 1, 2, 1)$ и $(0, 1, 1, 0)$.

10.78. $(1, 1, -3, -7, 8)$, $(2, -1, 0, -2, 4)$, $(-1, 0, 1, 3, -4)$ и $(0, 1, -2, -4, 4)$.

Во задачите **10.79–10.85** да се најде потпросторот на $\mathbb{R}^k$ што е генериран од вектор–редиците на дадената матрица, интерпретирајќи го геометриски.

10.79. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **10.70.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ **10.81.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10.82. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. **10.83.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **10.84.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **10.85.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10.86. Да се покаже дека редиците на матрицата A го генерираат истиот потпростор како и редиците на матрицата C; притоа:

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $\qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Потоа да се покаже дека A и C се сведуваат на канонични скалести матрици коишто имаат еднакви ненулти редици.

10.87. Да се најде еден вектор што го генерира пресекот на потпросторите S и T од $\mathbb{R}^3$, ако:

а) S е рамнината $x-5y+4z=0$, $T=\{(a+c,\,a,\,c)\}$;

б) S е генериран од векторите $(1,-2,3)$ и $(-2,4,-6)$, а T е рамнината Oxy; в) S е генериран од векторите $(1,2,3)$, $(-1,1,3)$ и $(2,1,0)$, а T – од $(1,-1,2)$ и $(1,1,0$.

10.88. Да се најде $S\cap T$, ако S и T се следниве потпростори од векторскиот простор на сите $n\times n$–матрици:

а) S – на дијагоналните, $\quad T$ – на антисиметричните;

б) S – на дијагоналните, $\quad T$ – на симетричните;

в) S – на симетричните, $\quad T$ – на антисиметричните;

10.89. Во векторскиот простор $\mathbb{M}$ од сите квадратни матрици од втор ред (над $\mathbb{R}$) дадени се подмножествата:

а) $S=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\right\}$, $T\left\{\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$. б) $S=\left\{\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix}\right\}$, $T\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & d \end{bmatrix}\right\}$.

Да се покаже дека S и T се потпростори од $\mathbb{M}$ и да се најдат $S+T$ и $S\cap T$.

10.90. Да се најдат $S+T$ и $S\cap T$ ако S и T се следниве потпростори од $\mathbb{R}^3$: а) $S=\{(x,0,0)\}$, $T=\{(0,y,z)\}$;

б) $S=\{(x,y,0)\,|\,x=y\}$, $\quad T=\{(0,y,z)\}$;

в) $S=\{(x,y,0)\,|\,x=y\}$, $\quad T=\{(0,y,z)\,|\,y=z\}$;

г) $S=\{(x,y,0)\}$, $\quad T=\{(0,y,z)\}$;

д) S е линеарната обвивка на векторите $(1,2,0$ и $(3,1,1)$ а $T=\{(0,y,z)\}$. (Притоа, x, y, z се произволни реални броеви.) Дали $\mathbb{R}^3$ е директна сума од S и T?

10.91. Дали векторскиот простор $\mathbb{M}$ од сите матрици од втор ред е директна сума на своите потпростори:

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a & x \\ 0 & c \end{bmatrix}\middle|\, a,c,x\in\mathbb{R}\right\},\qquad T=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ y & c \end{bmatrix}\middle|\, a,c,y\in\mathbb{R}\right\}?$$

10.92. Да се покаже дека **M** е директна сума од своите потпростори S и T:

а) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}$, $\quad T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

б) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$, $\quad T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & c \end{bmatrix} \middle| x, y, c \in \mathbb{R} \right\}$.

10.93. Нека A, B и C се следниве потпростори од $\mathbb{R}^4$:
$A = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \,|\, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$,
$B = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \,|\, a_1 = a_2\}$,
$C = \{(a_1, 0, 0, 0)\}$; притоа, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.
Да се покаже дека:
а) $\mathbb{R}^4 = A + B$; б) $\mathbb{R}^4 = A + C$; в) $\mathbb{R}^4 = B + C$;
Во кој случај сумата е директна?

10.94. Нека е S множеството од сите симетрични, а T множеството од сите антисиметрични матрици од n–ти ред. Да се покаже дека: $V = S \oplus T$. (Види **10.51** и **10.52**).

10.95. Да се покаже дека векторскиот простор од сите функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е директна сума од потпросторот на парните и потпросторот на непарните функции (види **10.3**, **10.58** и **10.59**).

* * *

10.96. Нека е $V = \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \,|\, \mathbf{a}_1 \in V_1,\ \mathbf{a}_2 \in V_2\}$, каде што V_1 и V_2 се векторски простори над дадено поле P Да се покаже дека V е векторски простор над P во однос на операциите собирање и множење со скалар, дефинирани со:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{c}) \text{ и } s(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (s\mathbf{a}_1, s\mathbf{a}_2),$$

каде што $\mathbf{a}_1, \mathbf{c}_1 \in V_1$, $\mathbf{a}_2, \mathbf{c}_2 \in V_2$ и $s \in P$.

10.97. Да се покаже дека: а) условот за комутативност на векторското собирање во дефиницијата на векторски простор е излишен, т.е. е последица од другите услови; б) условот $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ не може да се изостави, т.е. тој не е последица од другите услови.

Решение. а) Развивајќи го $(1+1)(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ на два начина, со помош на (i), (ii) и (iv) од **10.1**, добиваме:

$$(1+1)(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (1+1)\mathbf{a} + (1+1)\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{b},$$
$$(1+1)(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 1(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + 1(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{b}$, па, применувајќи го законот за кратење (во група), добиваме: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.

б) Види **10.30**.

10.98. Да се докаже дека подмножеството S од векторскиот простор V е потпростор ако и само ако S е векторски простор во однос на операциите од V.

10.99. Нека A, B и C се векторски потпростори од еден векторски простор V. Да се покаже дека:

а) $S = (A \cap B) + (A \cap C)$ е потпростор од V;

б) $S \subseteq T$, каде што $T = A \cap (B + C)$;

да се најдат потпростори од $\mathbb{R}^2$ за кои не важи равенство;

в) ако $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$, $\mathbf{c} \in C$ го исполнуваат условот $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{o}$ и $\mathbf{a} \notin S$, тогаш $b \notin (A \cap B) + (B \cap C)$. г) $S = A \cap \big(B + (A \cap C)\big)$.

10.100. Ако $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$, каде што $x_1x_3 \neq 0$, тогаш $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ го генерираат истиот потпростор како и $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

10.101. Ако потпросторот S е генериран од $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, а T од $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, покажи дека $S + T$ е генериран од $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$. Да се обопшти овој резултат.

10.102. Ако S и T се потпростори од $V(P)$, докажи дека и $S \cap T$ е потпростор од $V(P)$.

10.103. Ако $\{A_j \,|\, j \in J\}$ е фамилија потпростори од векторскиот простор $V(P)$, тогаш со

$$S = \bigcap_{j \in J} \cdot A_j$$

го означуваме множеството од сите вектори од V што се заеднички за сите потпростори A_j, т.е. $\mathbf{a} \in S \Leftrightarrow \mathbf{a} \in A_j,\ \forall j \in J$. Да се покаже дека S е потпростор од V.

10.104. Да се покаже дека линеарната обвивка $L(M)$ (види **10.6**) е еднаква со пресекот на сите потпростори од V што го содржат множеството M.

10.105. Да се докаже дека линеарната сума $S+T$ на двата потпростора S и T од $V(P)$ е еднаква со пресекот на сите потпростори од $V(P)$ што ги содржат и S и T.

10.106. Да се покаже дека множеството V од сите матрици $M = x_0E + x_1A + \cdots + x_kA^k$, каде што k е природен број, $x_0, x_1, \ldots, x_k$ се реални броеви, E е единичната матрица од трет ред и $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ е векторски простор над полето од реалните броеви, во однос на собирањето матрици (види **7.122**).

11. БАЗА И ДИМЕНЗИЈА

Решени задачи

11.1. Да се провери дали векторите од $\mathbb{R}^4$

а) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 2, -1)$,

б) $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 7, 5, 1)$

се линеарно (не)зависни.

Решение. Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ се вектори од векторскиот простор V. Ако постојат скалари $x_1, x_2, \dots, x_k$, од кои барем еден не е нула, така што

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}, \tag{1}$$

тогаш велиме дека векторите $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ се *линеарно зависни* (или *системот вектори* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ е *линеарно зависен*). Во спротивен случај, т.е. ако

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o} \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0, \tag{2}$$

велиме дека векторите $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ се *линеарно независни* (или *системот е линеарно независен*). а) Нека $x\mathbf{a} + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$ каде што x, y, z се непознати скалари. Тогаш имаме:

$$(2x,\ x,\ x,\ 0) + (y,\ 2y,\ 0,\ y) + (z,\ 0,\ 2z,\ -z) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

т.е.

$$(2x + y + z,\ x + 2y,\ x + 2z,\ y - z) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

па, изедначувајќи ги соодветните компоненти, го добиваме системот:

$$2x + y + z = 0, \quad x + 2y = 0, \quad x + 2z = 0, \quad y - z = 0,$$

чие единствено решение е $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, па значи дадените вектори се линеарно независни. б) Работејќи како во а), го добиваме системот:

$$x + 2y - z = 0, \quad 3x + y + 7z = 0, \quad 3x + 2y + 5z = 0, \quad x + y + z = 0.$$

Заменувајќи го $z = -x - y$ од последната равенка во која било од претходните три, добиваме $2x + 3y = 0$. Така, ставајќи $x = 3t$, $t \in \mathbb{R}$, добиваме $y = -2t$, $z = -t$, што значи дека системот има безброј многу решенија. Земајќи, на пример, $t = 1$, добиваме $x = 3$, $y = -2$, $x = -1$ и

$$3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{o}.$$

Значи, дадените вектори се линеарно зависни.

11.2. Нека $\mathcal{P}_3$ е векторскиот простор на полиноми со степен ≤ 3 (види **10.2**). Да се испита дали се линеарно (не)зависни следниве полиноми:

$$p_1 = 1 + x - x^3, \quad p_2 = x - x^2 + x^3, \quad p_3 = 1 - x + x^2.$$

Решение. Линеарната комбинација од полиномите p_1, p_2, p_3 и непознатите скалари s_1, s_2, s_3 да ја изедначиме со нултиот полином, т.е. да ставиме $s_1p_1 + s_2p_2 + s_3p_3 = 0$. Значи:

$$s_1(1 + x - x^3) + s_2(x - x^2 + x^3) + s_3(1 - x + x^2) = 0,$$

т.е.

$$(s_1 + s_3)1 + (s_1 + s_2 - s_3)x + (-s_2 + s_3)x^2 + (-s_1 + s_2)x^3 = 0.$$

Изедначувајќи го со нула секој од коефициентите пред степените на x, го добиваме следниов систем равенки по s_1, s_2, s_3:

$$s_1 + s_3 = 0, \quad s_1 + s_2 - s_3 = 0, \quad -s_2 + s_3 = 0, \quad -s_1 + s_2 = 0.$$

Од последните две равенки добиваме $s_1 = s_2 = s_3$, а заменувајќи го тоа во која било од првите две, добиваме

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0 \ .$$

Значи, полиномите p_1, p_2 и p_3 се линеарно независни.

11.3. Да се испита линеарната (не)зависност на следниов систем матрици:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

б) A, B, C од а).

Решение. а) Нека $x_1A + x_2B + x_3C + x_4D = 0$, каде што x_1, x_2, x_3, x_4 се непознати скалари. Имаме:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 2x_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 & x_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_3 & x_3 \\ 2x_3 & 3x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_4 & 2x_4 \\ 2x_4 & x_4 \end{bmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

од каде што го добиваме системот равенки:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \qquad x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0.$$

Додавајќи ја првата на четвртата, а одземајќи ја третата од втората, ги добиваме равенките $x_1 + 3x_3 = 0$ и $x_2 + x_4 = 0$, па $x_1 = -3x_3$ и $x_2 = -x_4$. Заменувајќи го x_1 во третата равенка, добиваме $x_4 = 2x_3$, а потоа и $x_2 = -2x_3$. Така ставајќи $x_3 = -t$, добиваме дека $x_1 = 3t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = -t$, $x_4 = -2t$ е решение на системот за кој било реален број t.
Ако земеме, на пример, $t = 1$, добиваме дека $3A + 2B - C - 2D = 0$, што значи дека дадениот систем матрици е линеарно зависен.

б) Работејќи како во а), го добиваме системот од четири равенки со три непознати:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + 2x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + 3x_3 = 0.$$

Единственото решение на овој систем е $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, т.е.

$$x_1A + x_2B + x_3C = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

што значи дека системот матрици A, B, C е линеарно независен.

11.4. Нека V е векторскиот простор на сите функции од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$ (види **10.3**). Да се провери дали се линеарно (не)зависни функциите: $1, \cos x, \cos 2x$.

Решение. Линеарната комбинација на дадените функции и непознатите скалари s_1, s_2, s_3 да ја изедначиме со нулатата функција:

$$s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot \cos x + s_3 \cdot \cos 2x = 0\,.$$

Заменувајќи го x во (1) со: $0, \pi/2, \pi$, го добиваме следниов систем равенки:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad s_1 - s_3 = 0, \quad s_1 - s_2 + s_3 = 0.$$

Единственото решение на овој систем е $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, што значи дека дадените функции се линеарно независни.

11.5. Да се покаже дека, ако $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ се линеарно независни вектори во векторскиот простор $V(\mathbf{R})$, тогаш векторите $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$, $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ се линеарно независни.

Решение. Да претпоставиме дека

$$x(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) + y(2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + z(3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathbf{o},$$

каде што x, y и z се скалари. Тогаш имаме:

$$(x + 2y + 3z)\mathbf{a}_1 + (2x - y + 2z)\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}.$$

Од линеарната независност на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ следува:

$$x + 2y + 3z = 0, \quad 2x - y + 2z = 0, \quad z = 0.$$

Единственото решение на добиениот систем равенки е $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, а тоа значи дека векторите $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$, $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ се линеарно независни.

11.6. Следните тврдења за едно подмножество $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ од еден конечно димензионален векторски простор V се еквивалентни: а) A е база на V; б) A е минимално генераторно подмножество од V; в) A е максимално линеарно независно подмножество од V.

Решение. За подмножеството $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ од векторскиот простор V велиме дека е *база на* V ако секој вектор $\mathbf{c} \in V$ може да се претстави како линеарна комбинација на $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и некои скалари $x_1, \ldots, x_k$:

$$\mathbf{c} = x_1\mathbf{a} + \cdots + x_k\mathbf{a}_k \tag{1}$$

и тоа претставување е еднозначно.

За $A \subset V$ велиме дека е *максимално линеарно независно* ако, за кој било $\mathbf{c} \in V$, подмножеството $A \cup \{\mathbf{c}\}$ е линеарно зависно.

За генераторното подмножество A од V велиме дека е *минимално* ако не постои $\mathbf{a} \in A$, што $A \backslash \{\mathbf{a}\}$ да го генерира V.

а) $\Rightarrow$ б) Нека A е база на V. Тогаш кој било вектор $\mathbf{c}$ од V може да се напише како линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, што значи A го генерира V. Ако $\mathbf{a} \in A$, тогаш $A \backslash \{\mathbf{a}\}$ не го генерира V (на пример, $\mathbf{a}$ не е линеарна комбинација од векторите на $A \backslash \{\mathbf{a}\}$), па значи A е минимално подмножество што го генерира V.

б) $\Rightarrow$ в) Нека A е минимално генераторно подмножество на V. Ако $\mathbf{a} \in A$, тогаш $A \backslash \{\mathbf{a}\}$ не го генерира V, т.е. $\mathbf{a}$ не е линеарна комбинација од векторите на $A \backslash \{\mathbf{a}\}$, што значи A е линеарно независно. Бидејќи A го генерира V, кој било $\mathbf{c}$ од V е линеарна комбинација од векторите на

A, т.е. $A \cup \{\mathbf{c}\}$ е линеарно зависно. Значи, A е максимално линеарно независно подмножество.

в) $\Rightarrow$ а) Нека A е максимално линеарно независно подмножество во V. Тогаш, за кој било $\mathbf{c}$ од V, $A \cup \{\mathbf{c}\}$ е линеарно зависно, т.е. $\mathbf{c}$ може да се претстави во вид:

$$\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k\,. \tag{1}$$

Ако е и $\mathbf{c} = y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_k\mathbf{a}_k$, тогаш $(x_1 - y_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (x_k - y_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{o}$, а бидејќи $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k$ се линеарно независни, имаме $x_1 - y_1 = 0, \ldots, x_k - y_k = 0$, т.е. $x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k$, што значи претставувањето (1) на $\mathbf{c}$ е еднозначно. Според тоа, A е база на V.

11.7. Нека S е потпросторот од $\mathbb{R}^4$ генериран од векторите $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -4, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 3, 4)$ и $\mathbf{a}_3 = (1, -3, 7, 1)$.

а) Да се најде една база и димензијата на S.

б) Базата на S да се прошири до база на $\mathbb{R}^4$.

Решение. а) Работејќи како во **11.1**, утврдуваме дека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ се линеарно зависни (на пример $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$), а $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линеарно независни, т.е. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ е минимално генераторно множество на S. Значи, (една) база на S е системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, па димензијата на S е 2.

б) Која било база на $\mathbb{R}^4$ има четири елементи. Значи, треба да најдеме множество од четири линеарно независни вектори, од кои два се $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Векторите $(1, 2, -4, 3)$, $(2, -1, 3, 4)$, $(0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$ се линеарно независни (покажи!), па значи тие формираат база на $\mathbb{R}^4$.

11.8. Во векторскиот простор од сите квадратни матрици од трет ред даден е потпросторот T од сите антисиметрични матрици (види **10.52**). Да се најде една база и димензијата на T.

Решение. Потпросторот T се состои од матрици со облик:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & p \\ -a & 0 & c \\ -p & -c & 0 \end{bmatrix} = A\,. \tag{1}$$

Работејќи како во **11.3**, утврдивме дека матриците

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

се линеарно независни и, потоа, дека секоја антисиметрична матрица (1) може да се претстави како линеарна комбинација на матриците (2):

$$A = aA_1 + pA_2 + cA_3\,. \tag{3}$$

Бидејќи претставувањето (3) на A е еднозначно, заклучуваме дека системот матрици A_1, A_2, A_3 е база на T. Значи, димензијата на T е 3.

11.9. Нека V е векторскиот простор од сите реални матрици од втор ред. Да се најдат координатите на „векторот“

$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ во однос на базата:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Дадените матрици се претставени со помош на E–базата, т.е. со матриците:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Така, на пример, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = 2E_1 + 4E_2 - 7E_3 + 2E_4$.

Дека A_1, A_2, A_3, A_4 формираат база на V следува од тоа што тие се линеарно независни (покажи!), а V има димензија 4. Да ја напишеме C како нивна линеарна комбинација со помош на непознатите скалари x, y, p, s:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = xA_1 + yA_2 + pA_3 + sA_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3p & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4s & 2y \\ y+3p & x+p+s \end{bmatrix}$$

од каде што ги добиваме равенките: $x + 4s = 2$, $2y = 4$, $y + 3p = -7$, $x + p + s = 2$. Решението на овој систем е: $x = 6$, $y = 2$, $p = -3$, $s = -1$. Значи, бараните координати се $6, 2, -3, -1$, т.е. матрицата C во базата A_1, A_2, A_3, A_4 е $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$.

11.10. Нека векторскиот простор V има димензија k и нека $a\colon \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ е една база на V, да ја наречеме *стар координатен систем* а $a'\colon \mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_k$ нека е друга база – *нов координатен систем*. Потоа, нека $\mathbf{x}$ е произволен вектор од V со координати $x_1, \ldots, x_k$ во однос на стариот систем, т.е.

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)_a. \tag{1}$$

Да се најдат координатите на x во однос на новиот координатен систем.

Решение. Секој од векторите $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ има определени координати во однос на стариот систем:

$$\mathbf{a}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{kj})_a = a_{1j}\mathbf{a}_1 + \cdots + a_{kj}\mathbf{a}_k, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2}$$

Координатите на $\mathbf{x}$ во однос на новиот систем a' да ги означиме со $x'_1, \ldots, x'_k$, т.е. $\mathbf{x} = (x'_1, \ldots, x'_k)_{a'}$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} =&(x'_1, \ldots, x'_k)_{a'} = x'_1\mathbf{a}'_1 + \cdots + x'_k\mathbf{a}'_k = \\ =&x'_1(a_{11}\mathbf{a}_1 + \cdots + a_{k1}\mathbf{a}_k) + \cdots + x'_k(a_{1k}\mathbf{a}_1 + \cdots + a_{kk}\mathbf{a}_k) = \\ =&(a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1k}x'_k)\mathbf{a}_1 + \cdots + (a_{k1}x'_1 + \cdots + a_{kk}x'_k)\mathbf{a}_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Од друга страна имаме:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)_a = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k, \tag{4}$$

па од (3) и (4) го добиваме системот равенки:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_{11}x'_1 & + & \cdots & + & a_{1k}x'_k, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_k & = & a_{k1}x'_1 & + & \cdots & + & a_{kk}x'_k. \end{array} \tag{5}$$

Употребувајќи матрична ознака:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \qquad X'=\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{bmatrix},$$

од (5) добиваме:

$$X = AX'. \tag{6}$$

Бидејќи вектор–колоните на матрицата A се линеарно независни (како базни вектори), A е несингуларна (види и **11.62**), па од (6) добиваме:

$$X' = A^{-1}X. \tag{7}$$

11.11. Нека $\mathbf{x}$ е произволен вектор од k–димензионалниот векторски простор V, чии координати во однос на стандардната база e: $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ (од единични вектори) се $x_1, \dots, x_k$ и нека

$$a\colon \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \qquad \text{и} \qquad b\colon \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$$

се две други бази на V. Потоа, нека со

$$X_a=\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{bmatrix}_a, \qquad \text{и} \qquad X_b=\begin{bmatrix} x''_1 \\ \vdots \\ x''_k \end{bmatrix}_b, \tag{1}$$

се определени координатите на $\mathbf{x}$ во однос на базите a и b соодветно. Да се покаже дека врската меѓу координатите x'_j и x''_j е дадена со матричните равенства;

$$X_a = A^{-1}BX_b, \qquad \text{т.е.} \qquad X_b = B^{-1}AX_a, \tag{2}$$

каде што A и B се матрици, чии колони се векторите на базата a, односно b, со координати во однос на базата e.

Решение. Според (6) од **11.10** имаме $X = AX_a$ и $X = BX_b$, па значи $AX_a = BX_b$, од каде што ги добиваме равенствата (2).
(Матрицата $P = A^{-1}B$ се вика *матрица за премин од системот b во системот a*; аналогно за $B^{-1}A$.)

11.12. Дадени се системите вектори:

a: (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1), $\qquad b$: (3, 2, 1), (3, 2, 0), (3, 0, 0)

се коррдинати во стандардната база e.

а) Да се покаже дека a и b се бази на $\mathbb{R}^3$.

б) Да се најдат координатите на векторот $\mathbf{x} = (4, 6, 7)$ во однос на базата a.

в) Да се најде матрицата P за премин од системот b во системот a (види **11.11**).

Решение. а) Доволно е да покажеме дека секој од системите a и b е линеарно независен (види **11.67** в)), а тоа лесно се проверува работејќи како во **11.1** или користејќи ја **11.62**.

б) Според (7) од **11.10**, имаме:

$$X_a = A^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

в) Според **11.11** имаме:

$$P = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задачи за вежбање

11.13. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ се линеарно независни во $\mathbb{R}^2$. За кои вредности на x се линеарно независни векторите:

а) $(x+4)\mathbf{a}+\mathbf{c},\ 3\mathbf{c}$; б) $x\mathbf{a}+\mathbf{c},\ \mathbf{a}+x\mathbf{c}$?

11.14. Да се определи x така што дадените вектори во $\mathbb{R}^3$ да се линеарно зависни:

а) $(x,4,2),\ (1,x,-1)$. б) $(x,1,3),\ (x,-2,1),\ (1,-1,1)$.

11.15. Множеството $\mathbb{R}$ од сите реални броеви е векторски простор и над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните броеви и над полето $\mathbb{R}$ (во однос на операциите собирање и множење на реални броеви). Да се покаже дека „векторите“ $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$

а) се линеарно независни во $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$,

б) се линеарно зависни во $\mathbb{R}(\mathbb{R})$.

11.16. Системот вектори $\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c}$ во векторскиот простор V над $\mathbb{R}$ е линеарно независен. Да се испита линеарната зависност на следниов систем:

а) $\mathbf{a}-\mathbf{p},\ \mathbf{a}+\mathbf{c},\ \mathbf{a}+\mathbf{p}+\mathbf{c}$.

б) $\mathbf{a}-\mathbf{p}+\mathbf{c},\ \mathbf{a}+\mathbf{p}-\mathbf{c},\ \mathbf{a}+\mathbf{c}$.

в) $\mathbf{a}-\mathbf{p}+\mathbf{c},\ \mathbf{a}+\mathbf{p},\ 2\mathbf{a}+\mathbf{c}$.

11.17. Дадени се матриците:

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (i^2=-1)$$

(наречени *Паулиеви матрици*). Да се покаже дека:

а) секоја од дадените матрици антикомутира со другите две (т.е. $AX = -XA$);

б) S_x, S_y, S_z, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ е линеарно независно множество;

в) матрицата $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ да се напише како линеарна комбинација од S_x, S_y, S_z и E.

11.18. Да се испита линеарната зависност на функциите:

а) $x, \cos x, \cos^2 x$; б) $1, \cos^2 x, \sin^2 x$.

11.19. Да се провери дали е база на $\mathbb{R}^3$ следниов систем вектори:

а) $(1, -1, 2)$, $(2, 2, -4)$, $(2, 1, -2)$.

б) $(-2, 3, 5)$, $(-1, 3, 1)$, $(0, -1, 1)$.

в) $(2, -3, 1)$, $(5, -1, 2)$, $(-3, 2, 1)$.

11.20. Нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ се вектори од $\mathbb{R}^3$, такви што ниеден од системите $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{s}$ не е база на $\mathbb{R}^3$. Да се покаже дека и $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}+\mathbf{s}$ не е база на $\mathbb{R}^3$.

11.21. Во $V^4(\mathbb{Q})$ да се најде една база што ги содржи векторите:

а) $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2,)$ и $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 0, -1)$.

б) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 0, 2)$.

11.22. Даден е системот A вектори во $V^3(\mathbb{Q})$:

$$(1, 2, -1),\ (-3, -6, 3),\ (8, 7, 7).$$

Да се најде линеарно независен потсистем од A што го генерира истиот потпростор како A.

11.23. Да се најде димензијата на линеарната обвивка на следниве вектори од $V^3(\mathbb{Q})$:

а) $(6, -4, 2)$, $(-3, 2, -1)$.

б) $(1; 2, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(2, 1, 1)$.

в) $(2, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(1, -1, 1)$, $(3, 2, 2)$.

11.24. Во $V^4(\mathbb{Q})$ дадени се векторите:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 3, -1, 2), \quad \mathbf{a}_3 = (1, 1, 3, 0).$$

а) Да се изразат како нивни линеарни комбинации

$$\mathbf{c}_1 = (3, 3, 9, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{c}_2 = (0, 5, -10, 5).$$

б) Да се најде една база на потпросторот генериран од $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

11.25. Да се најде димензијата d_1 на редичниот простор и димензијата d_2 на колоничниот простор на матриците:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{в)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Да се најде една база и да се одреди димензијата на зададениот потпростор од $V^6(\mathbb{Q})$ (**11.26–11.29**).

11.26. Множеството вектори при кои втората и третата координата се еднакви.

11.27. Множеството вектори при кои се еднакви координатите на непарното место (прва, трета и петта).

11.28. Множеството вектори со облик (x, y, x, y, x, y).

11.29. Множеството вектори $(x_1, \ldots, x_6)$ за кои $x_1 + \cdots + x_6 = 0$.

11.30. Да се покаже дека $1, x, x^2, \ldots, x^k$ е база на векторскиот простор полиноми со степен $\leq k$.

11.31. Нека V е векторскиот простор од 2×2–матрици над $\mathbb{R}$ и S потпросторот генериран од матриците:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Да се најде една база и димензијата на S.

Во задачите **11.32–11.35** да се провери дали е база на назначениот векторски простор V дадениот систем матрици.

11.32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$

V: матриците од втор ред над $\mathbb{R}$.

11.33. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, V: симетричните матрици.

11.34. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, V: дијагоналните матрици.

11.35. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, V: антисиметричните матрици.

11.36. Да се најде една база и димензијата на векторскиот простор S генериран од полиномите:

$x^3 + 2x^2 - 3x + 2, \quad 2x^3 + x^2 - 5x - 1, \quad x^3 + 5x^2 - 4x + 7.$

11.37. Да се најде една база и димензијата на векторскиот простор S од решенијата на системот линеарни равенки (види **10.61**):

а) $x - 2y + 2z = 0,\ x + 2y - z = 0,\ 3x - 2y + 3z = 0.$ б) $x - y = 0,\ x + y = 0,\ y - z = 0.$ в) $x + y - 2z = 0,\ x - y + 2p = 0,\ 2x + p - s = 0.$

11.38. Да се најдат димензијата и една база на векторскиот простор разгледан во задачата **10.31**.

11.39. Да се најде димензијата на секој од потпросторите во задачите **10.41**, **10.43**, **10.44**, **10.46** и **10.47**.

11.40. Да се најде по една база на сумата и пресекот од линеарните обвивки S_a и S_c на следниве вектори од $\mathbb{R}^4$:

S_a: $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 2, -3)$;

S_c: $\mathbf{c}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{c}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\mathbf{c}_3 = (1, 3, 0, -4)$.

11.41. Да се најде димензијата s на сумата и димензијата p на пресекот од линеарните обвивки S_a и S_b во $\mathbb{R}^4$, определени со векторите:

S_a: $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1)$;

S_b: $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 1, 3, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 2, 1, 2)$.

11.42. Нека S и T се следниве потпростори од $\mathbb{R}^4$:

$S = \{(x, y, a, c) | y - 2a + c = 0\}, \quad T = \{(x, y, a, c) | x = c,\ y = 2a\}.$

Да се најдат една база и димензијата на: а) S; б) T; в) $S \cap T$.

11.43. Нека S и T се потпросторите од $V^4(\mathbb{Q})$ што се генерирани од множествата A и B соодветно, каде што:

а) $A = \{(0,1,0,1),\ (0,0,1,0),\ (4,-1,5,2)\}$,
$B = \{(1,0,2,1),\ (2,-1,1,0)\}$.

б) $A = \{(1,0,2,0),\ (1,1,1,0),\ (0,-1,1,0)\}$,
$B = \{(0,-1,0,2),\ (0,2,0,-4),\ (0,3,0,-6)\}$.

Да се покаже дека:
$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

11.44. Нека S и T се потпростори од $\mathbb{R}^4$. Покажи дека:

а) ако S и T се тридимензионални, тогаш или се совпаѓаат $(3 = 3+3-3)$ или се сечат по рамнина $(4 = 3+3-2)$;

б) ако S е дводимензионален, а T тридимензионален, тогаш или се сечат по права $(4 = 2+3-1)$ или S се содржи во T $(3 = 2+3-2)$. (Види **11.71**)

11.45. Во векторскиот простор на сите матрици од трет ред даден е потпросоторот S од сите симетрични матрици и потпросторот T од сите дијагонални матрици. Да се најдат една база и димензијата на секој од потпросторите S и T. Какви димензии имаат потпросторите $S \cap T$ и $S+T$?

11.46. Да се покаже дека не е конечно димензионален

а) векторскиот простор на сите непрекинати функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$;

б) векторскиот простор на сите реални полиноми;

в) векторскиот простор на сите реални низи (a_j), каде што операциите собирање на низи и множење на низа со број x се дефинирани покомпонентно: $(a_j)+(c_j) = (a_j+c_j)$, $x(a_j) = (xa_j)$.

11.47. Да се најдат координатите на полиномот $p(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$ во базата $1,\ x-1,\ (x-1)^2,\ (x-1)^3$.

11.48. Нека е S векторскиот простор на симетрични квадратни матрици од втор ред на $\mathbb{R}$ (види **10.51**). Да се најдат координатите на матрицата $C = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{bmatrix}$ во однос на базата:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Во задачите **11.49–11.52**, да се најдат координатите на векторот $\mathbf{x}_i$ (со координати во стандардната база), во однос на новата база a.

11.49. a: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$; $\mathbf{x}_i = (1, 3, 1)$.

11.50. a: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$; $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (6, 9, 14)$.

11.51. a: $(3, -3, 1)$, $(-3, 5, -2)$, $(1, -2, 1)$;
$\mathbf{x}_1 = (2, -3, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (2, -2, 1)$.

11.52. a: $(4, 3, 2, 1)$, ,$(3, 3, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$;
$\mathbf{x}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{x}_2 = (2, 0, 1, 3)$.

11.53. Да се најдат координатите на векторот $\mathbf{x}_i$ во однос на стандардната база e во $\mathbb{R}^3$, ако се зададени неговите координати во базата:

a: $(2, 2, 1)$ $(3, 3, 2)$, $(2, 1, 0)$; $\quad \mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)_a$, $\mathbf{x} = (4, -3, 2)_a$.

Во задачите **1.54–11.57** да се најде матрицата P за премин од базата a во базата b.

11.54. a: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; $\quad b$: $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$.

11.55. a: $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$; $\quad b$: $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$.

11.56. a: $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$; $\quad b$: $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$.

11.57. a: $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$;
b: $(0, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 2, 3)$, $(2, 2, 2, 3)$, $(2, 3, 3, 3)$.

11.58. Како ќе се измени матрицата за премин од една во друга база ако: а) си ги разменат местата два вектора од првата база;

б) си ги разменат местата два вектора од втората база;

в) се напишат векторите на двете бази во обратен распоред?

* * *

11.59. Да се покаже дека: а) ако некој потсистем од даден систем вектори е линеарно зависен, тогаш и целиот систем е зависен; б) ако некој член од даден систем вектори е $\mathbf{o}$, тогаш системот е линеарно зависен; в) ако два члена од еден систем вектори се еднакви, тогаш системот е зависен.

11.60. Ако $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ е линеарно независен систем вектори од $\mathbb{R}^3$, тогаш системот $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ е линеарно независен. Дали е тоа точно во произволен векторски простор $V^k(P)$?

11.61. Три вектори чии координати се рационални броеви, се линеарно независни во $\mathbb{R}^3$ ако и само ако тие се линеарно независни во V^3 ($\mathbb{Q}$). Да се обопшти овој резултат на два начина.

11.62. Еден систем од k вектори во $\mathbb{R}^k$ е линеарно неазависен ако и само ако детерминантата, чии колони се дадените вектори, е различна од нула (т.е. ако и само ако матрицата, чии колони се дадени вектори, е несингуларна).

11.63. Ако векторите $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ се линеарно неазависни, покажи дека векторот $\mathbf{c}$ е нивна линеарна комбинација ако и само ако системот вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}$ е линеарно зависен.

11.64. Да се докаже дека ненултите вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ се линеарно зависни ако и само ако еден од нив, да речеме $\mathbf{a}_j$, е линеарна комбинација од претходните вектори: $\mathbf{a}_j = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_{j-1}\,\mathbf{a}_{j-1}$.

11.65. Нека векторите $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ генерираат векторски простор V. Да се докаже дека: а) ако $\mathbf{c} \in V$, тогаш $\mathbf{c}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ се линеарно зависни и го генерираат V; б) ако $\mathbf{a}_j$ е линеарна комбинација од претходните вектори, тогаш $\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$ го генерираат V.

11.66. Нека $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ го генерира векторскиот простор V. Ако $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k \in V$ се линеарно неазависни, тогаш $k \leq s$ и V е генериран со векторите $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k, \mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_{s-k}}$.

11.67. Нека V има димензија k. Тогаш: а) кое било множество од $k+1$ или повеќе вектори е линеарно зависно; б) кое било линеарно независно множество е дел од некоја база; в) кое било линеарно независно множество со k елементи е база на V; г) ако множеството B го генерира V, тогаш постои подмножество A од B што го генерира V.

11.68. Нека V е векторски простор, A линеарно независно подмножество од V и B е конечно подмножество од V што го генерира V. Да се покаже дека: а) A е конечно и $|A| \leq |B|$;

б) ако $|A| = |B|$, тогаш A и B се бази на V. (Со $|X|$ е означен бројот на елементите на множеството X.)

11.69. Да се покаже дека секој потпростор S од k-димензионален векторски простор V е векторски простор со димензија $\leq k$, $k \in \mathbb{N}$.

11.70. Ако два потпростора S и T од еден конечно димензионален векторски простор V имаат иста димензија, тогаш $S \subseteq T \Rightarrow S = T$. Специјално, $\dim S = \dim V \Rightarrow S = V$.

11.71. Нека S и T се потпростори од конечно димензионалниот простор V. Да се покаже дека:

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

11.72. Да се покаже дека, ако два потпростора S и T од конечно димензионалниот векторски простор V имаат нулти пресек, тогаш сумата на нивните димензии не е поголема од димензијата на V.

11.73. Да се докаже дека, ако димензијата на сума од два потпростора S и T за единица е поголема од димензијата на нивниот пресек, тогаш сумата се совпаѓа со едниот, а пресекот – со другиот потпростор.

11.74. Ако C е директна сума на потпосторите S и T од конечно димензионалниот векторски простор V, $C = S \oplus T$, тогаш, димензијата на C е еднаква со збирот од димензиите на S и T.

11.75. Нека V и W се векторски простори и нека A е база на V, а B база на W. Да се покаже дека $(A \times \{\mathbf{o}\}) \cup (\{\mathbf{o}\} \times B)$ е база за $V \times W$.

11.76. Да се најде една база на V од **10.106** (види и 7.121).

11.77. Нека R е редичен вектор (т.е. вектор–редица) и нека B е матрица за која производот RB е дефиниран. Да се докаже дека:

а) RB е линеарна комбинација од редиците на B;

б) ако A е матрица за која AB е дефинирана, тогаш редичниот простор на AB се содржи во редичниот простор на B.

11.78. Нека A и B се матрици за кои AB е определена. Да се покаже дека колоничниот простор на AB е содржан во колоничниот простор на A.

11.79. Да се покже дека матриците A и B имаат ист колоничен простор ако и само ако A^T и B^T имаат ист редичен простор.

12. РАНГ НА МАТРИЦИ

Решени задачи

12.1. Да се најде рангот на:

а) системот вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$:

$\mathbf{a}_1 = (2, 1, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, 3, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 4, -4, 3)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 2)$;

б) матрицата A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение. а) Максималниот број линеарно независни вектори од еден систем вектори се вика *ранг на тој систем.*

Бидејќи $x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 = \mathbf{o} \Rightarrow x = y = 0$, векторите $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ се линеарно независни. Работејќи како во **11.1**, добиваме дека $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ е линеарно зависен потсистем ($\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$), па значи и системот $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ е линеарно зависен. Но, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ се линеарно независни, па максималноиот број линеарно независни вектори е 3, т.е. рангот е 3.

б) Рангот на системот вектори формирани од редиците на една матрица A се вика *редичен ранг* на A. Аналогно, *колоничен ранг* на A е рангот на системот вектори формирани од колоните на A. Редичниот и колоничниот ранг на A се еднакви меѓу себе (в. **12.53**), па тој број се вика *ранг* на A (ознака: ранг A). Бидејќи редиците на матрицата A се точно векторите $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ од а), следува дека ранг $A = 3$.

12.2. За рангот на систем вектори, односно за рангот на една матрица, точни се следниве својства:

1^0. Елементарните операции над еден систем вектори не го менуваат неговиот ранг.

2^0. Рангот на дадена матрица A е еднаков со најголемиот природен број k, таков што во A постои ненулти минор со ред k.

3^0. Редично еквивалентните матрици (како и колонично еквивалентните матрици) имаат ист ранг.

Користејќи го тоа, да се најде рангот на системот:

$\mathbf{a}_1=(1, 1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2=(2, 3, -2, 1)$, $\mathbf{a}_3=(1, 2, -4, -1)$, $\mathbf{a}_4=(0, -1, 6, 3)$.

Решение. Ако $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k$ е даден систем вектори, тогаш за системите:

$$\begin{array}{llllll} (e_1)\ \mathbf{a}_1, & \ldots, & \mathbf{a}_j, & \ldots, & \mathbf{a}_i, & \ldots\ \mathbf{a}_k, \\ (e_2)\ \mathbf{a}_1, & \ldots, & x\mathbf{a}_i, & \ldots, & \mathbf{a}_j, & \ldots\ \mathbf{a}_k, \\ (e_3)\ \mathbf{a}_1, & \ldots, & \mathbf{a}_i, & \ldots, & x\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j, & \ldots\ \mathbf{a}_k \end{array}$$

велиме дека се добиени со извршување *елементарни операции со векторите* од дадениот систем. Сметајќи ги дадените вектори како редици на една матрица, гледаме дека (e_1), (e_2), (e_3) се елементарни операции со редици (види **7.15**). Така, можеме да работиме со матрицата формирана од дадените вектори и, сведувајќи ја на скалеста форма, да го најдеме рангот. Имаме:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па, значи, рангот на A, т.е. рангот на дадениот систем вектори е 2.

12.3. Со помош на теоремата на Кронекер–Капели, да се испита дали има решение следниов систем линеарни равенки:

$$\text{а)}\ \begin{aligned} x+2y+2z&=5, \\ x-y+z&=0, \\ x+2y+z&=3, \\ 2x+y+3z&=5. \end{aligned} \quad \text{б)}\ \begin{aligned} x-y+z-u&=\ \ 2, \\ -2x+2y-z+2u&=-2, \\ x-y+2z-u&=\ \ 4. \end{aligned} \quad \text{в)}\ \begin{aligned} x-y+z-u&=2, \\ 2x-y+z-u&=1, \\ 3x-2y+2z-2u&=0. \end{aligned}$$

Решение. Според *теоремата на Кронекер-Капели*, еден систем од m линеарни равенки со n непознати има решение ако и само ако матрицата на системот има ист ранг како и проширената матрица на тој систем. Во тој случај, ако p е рангот на тие матрици, за $n = p$ постои една и само една n–ка што е решение на системот, а за $p < n$ постојат безброј многу решенија.

а) Да го најдеме рангот на матрицата A на системот и на проширената матрица B:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&-1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2\\0&3&1\\0&0&1\\0&3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2\\0&3&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1&2&2&5\\1&-1&1&0\\1&2&1&3\\2&1&3&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&5\\0&3&1&5\\0&0&1&2\\0&3&1&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&5\\0&3&1&5\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

што значи дека A и B имаат ист ранг $p=3$. Според теоремата на Кронекер–Капели, системот има решение, и тоа само едно, бидејќи рангот на спомнатите матрици е еднаков со бројот на непознатите во системот. Лесно наоѓаме дека тоа решение е тројката $x=-1$, $y=1$, $z=2$.

б) Ќе го најдеме рангот на секоја од матриците A и B (матрицата на системот и проширената, соодветно):

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-2&2&-1&2\\1&-1&2&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\-2&2&-1&2&-2\\1&-1&2&-1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&0&1&0&2\\0&0&1&0&2\end{bmatrix},$$

т.е. ранг A =ранг $B=2$. Значи, системот има решенија, и тоа безброј многу, бидејќи рангот (2) е помал од бројот на непознатите (4). Ако од последната равенка ја одземеме првата, добиваме $z=2$, а потоа, избирајќи ги x и y произволно, од втората добиваме $u=x-y$. Значи, секоја четворка $(x, y, 2, x-y)$, каде што x и y се произволни реални броеви, е решение на системот.

в) Имаме:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\2&-1&1&-1\\3&-2&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\2&-1&1&-1&1\\3&-2&2&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\1&0&0&0&-1\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&-1&1&1&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}$$

што значи ранг $A=2\neq 3$ =ранг B, па системот нема решение.

12.4. Со помош на Гаусовиот метод, да се реши следниов систем линеарни равенки:

а) $\begin{aligned} x-2y+3z+2u&=3,\\ 2x-3y+2z+2u&=2,\\ x-2y+2z+u&=0,\\ -x+3y-z-2u&=-1.\end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x-2y+2z+u&=0,\\ x-y+z+u&=1,\\ -x+y-z+u&=3.\end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x+2y-2z&=3,\\ 2x-y+z&=2,\\ 3x+y-z&=1,\\ x-3y+3z&=-1.\end{aligned}$

Решение. За еден систем од m линеарни равенки со n непознати велиме дека има *правилна скалеста форма* ако има облик:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdot & + & a_{1m}x_m & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & c_1\,, \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2m}x_m & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & c_2, \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3m}x_m & + \cdots + & a_{3n}x_n & = & c_3\,, \\
 & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
 & & & & & & & & a_{mn}x_m & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & c_n\,,
\end{array}$$

каде што $m \leq n$ и $a_{jj} \neq 0$. Се покажува дека:

1) за $m = n$ постои само едно решение;

2) за $m < n$ постојат безброј многу решенија;

3) секој решлив систем линеарни равенки е еквивалентен со некој систем со правилна скалеста форма.

Гаусовиот метод се состои во тоа што даден решлив систем се сведува на систем со правилна скалеста форма. За сведување на таква форма, наместо со самиот систем, обично се работи со проширената матрица на системот; со тоа се избегнува непотребното пишување на непознатите.

а) Со помош на елементарни операции со редици, проширената матрица на системот ќе ја сведеме на скалеста матрица. Имаме:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 2 \end{bmatrix}$$

Значи, дадениот систем се сведува на следниов еквивалентен систем со скалеста форма:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & - & 2y & + & 3z & + & 2u & = & 3\,, \\
 & & y & - & 4z & - & 2u & = & -4\,, \\
 & & & & z & + & \frac{u}{3} & = & 1\,, \\
 & & & & & & \frac{2u}{3} & = & 2\,.
\end{array}$$

Така, имаме:

$$\tfrac{2u}{3} = 2 \Rightarrow u = 3; \;\; z + \tfrac{3}{3} = 1 \Rightarrow z = 0; \;\; y - 4\cdot 0 - 2\cdot 3 = -4 \Rightarrow y = 2;$$

$$x - 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 2\cdot 3 = 3 \Rightarrow x = 1\,,$$

што значи дека решение на системот е четворката (1, 2, 0, 3).

б) Работејќи како во а), добиваме:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

што значи, дадениот систем го добива следниов вид:

$$x - y + z + \frac{u}{2} = 0\,,$$
$$u = 2\,.$$

Од тоа добиваме дека решение на дадениот систем е секоја четворка $(x,\, y,\, y - x - 1,\, 2)$, каде што x и y се произволни реални броеви.

в) Имаме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Значи, во новодобиениот систем една равенка би имала вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 4$, а таа нема решение. Според тоа, и системот нема решение.

Задачи за вежбање

Во задачите **12.5–12.9** да се најде рангот на дадениот систем вектори.

12.5. $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(3, 3, 1)$, $(1, -1, 1)$.

12.6. $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 5)$.

12.7. $(2, 3, 2, 3)$, $(1, 2, -1, 3)$, $(3, 4, 5, 3)$, $(-1, -1, -3, 0)$.

12.8. $(3, 2, 1, 1)$, $(0, 0, 1, -1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 1)$.

12.9. $(0, 1, 2, 1, 3, 1)$, $(1, -1, 0, 2, 1, 0)$, $(2, -1, 2, 5, 5, 1)$, $(1, 0, 2, 3, 4, 1)$.

12.10. Да се најде рангот на следниов систем од 6 вектори во $\mathbb{R}^4$:
$(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$.
Потоа, да се најдат два (различни) максимални линеарно независни потсистема од овој систем вектори.

12.11. Толкувајќи ги матриците A, B, … како „вектори“ во векторскиот простор на 2×2, односно 3×3–матрици, да се најде рангот на следниов систем од такви „вектори“:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Потоа, да се најде еден максимален линеарно независен потсистем.

Во задачите **12.12–12.19** да се најде рангот на дадената матрица.

12.12. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ **12.13.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

12.14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **12.15.** $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

12.16. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ **12.17.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

12.18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 3 & -9 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ **12.19.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & 7 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Во задачите **12.20–12.22** да се најде рангот на дадената матрица и да се одреди (една) база на просторот генериран од: а) вектор–редиците; б) вектор–колоните на матрицата.

12.20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **12.21.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -6 \\ -3 & 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$ **12.22.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -5 \\ 6 & 3 & -1 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

12.23. Да се најде рангот на: A, B и $A+B$, ако:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$

Да се уочи дека ранг $(A+B) \leq$ ранг A + ранг B.

12.24. Да се најде рангот на матрицата $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, наоѓајќи го претходно рангот и на A и на B.

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

12.25. Да се најде рангот на: A, A^{T}, AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$, ако:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\quad$ б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Потоа, да се уочи дека:

$$\text{ранг } A = \text{ранг } A^{\mathrm{T}} = \text{ранг } (AA^{\mathrm{T}}) = \text{ранг } (A^{\mathrm{T}}A).$$

12.26. Да се најде рангот на A и $\operatorname{adj} A$ ако:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $\quad$ б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Потоа, да се уочи дека рангот на A е еднаков со редот на A.

12.27. Да се најде рангот на дадената матрица и на нејзината адјунгирана:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Потоа, да се уочи дека рангот A е помал од редот на A за 1, а рангот на B е помал од редот на B за повеќе од 1.

12.28. Дадени се матриците:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

б) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\1&2&3&4\\1&1&3&3\\1&1&2&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&0\\3&0&1&1\\1&2&-3&-1\end{bmatrix}$.

Да се најде рангот на: A, B, AB, BA. Да се увиди дека матрицата A е несингуларна.

12.29. Разликата меѓу редот на една квадратна матрица и нејзиниот ранг се вика *дефект* на матрицата.

Да се најде дефектот на матрицата:

а) $\begin{bmatrix}2&2&1\\3&3&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix}1&1&3\\1&3&5\\1&1&6\end{bmatrix}$ в) $\begin{bmatrix}1&2&2&5\\1&0&1&2\\0&2&1&3\\-1&2&0&1\end{bmatrix}$.

Со помош на Гаусовиот метод, да се решат следниве системи линеарни равенки (**12.30–12.35**):

12.30. $x+2y=2,\quad -x+2y=6.$

12.31. $2x-4y=1,\quad -x+2y=3.$

12.32. $2x-y-2z=-1,\quad x+y+z=2,\quad 3x-y+z=4.$

12.33. $2x-y-z+2u=1,\quad x+y+z+u=2,\quad 3x+y-z+u=4.$

12.34. $x-2y+2z+u=1,\quad 2x-y+z+u=3,\quad x+2y-2z-u=1,\quad 3x+y-4z-u=-1.$

12.35. $2x-z+v=1,\quad x-2y+z-2u=0,\quad 2x+3y+3u-5v=-5,\quad -x+y-z+u+v=1.$

Во задачите **12.36–12.41**, со помош на теоремата на Кронекер–Капели, да се провери дали дадените системи имаат решенија.

12.36. $3x-y=6\,,\quad 2x+y=5\,,\quad x-2y=1\,.$

12.37. $x-2y=2\,,\quad 2x-3y=5\,,\quad x+y=3\,.$

12.38. $x+2y-3z=2\,,\quad 2x-y+2z=3\,,\quad 3x+y-z=4\,.$

12.39. $x-y-2z+u=0\,,\quad 2x+y-z+u=1\,,\quad x-2y-3z+u=-1\,.$

12.40.
$$\begin{aligned} x+y+z-u&=0\,,\\ x+y-z-u&=2\,,\\ x-y+z+u&=6\,,\\ -x+y+z+u&=4\,. \end{aligned}$$

12.41.
$$\begin{aligned} x+2y-z-3u+4v&=1\,,\\ 2x-y+3z+2u-v&=2\,,\\ x+4y+2z-5u+3v&=3\,,\\ x+15y+6z-19u+9v&=1\,. \end{aligned}$$

Во задачите **12.42–12.45** да се испита дали дадениот истем има решение и, во потврден случај, системот да се реши.

12.42.
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\,,\\ x+y-6z&=-1\,,\\ 3x-4y+2z&=3\,,\\ x-3y+3z&=0\,. \end{aligned}$$

12.43.
$$\begin{aligned} x+2y+2z&=5\,,\\ 2x-y-z&=-1\,,\\ 3x-2y+z&=2\,,\\ x-y+2z&=3\,. \end{aligned}$$

12.44.
$$\begin{aligned} 3x+2y-z+2u&=1\,,\\ 2x+y+z+u&=3\,,\\ x-y+z-u&=5\,,\\ 2x+y-3z&=2\,. \end{aligned}$$

12.45.
$$\begin{aligned} x+3y-2z+5u-7v&=3\,,\\ 2x-y+7z-3u+5v&=2\,,\\ 3x+y-2z+u-v&=1\,,\\ 3x-2y+7z-5u+8v&=1\,. \end{aligned}$$

12.46. Да се определи a така што системот

а)
$$\begin{aligned} -x+3y-2z+3u&=1\,,\\ x+2y-z+4u&=2\,,\\ x+7y-4z+11u&=a\,; \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} x-2y+3z+u&=\phantom{a+{}}2\,,\\ x+y+4z-u&=\phantom{a+{}}3\,,\\ 2x+2y+8z-2u&=a+2\,; \end{aligned}$$

да има решение.

Во задачите **12.47–12.50** да се испитаат и да се решат за соодветните вредности на параметарот a дадените системи линеарни равенки.

12.47.
$$\begin{aligned} ax+2y&=1\,,\\ 2x+ay&=1\,. \end{aligned}$$

12.48.
$$\begin{aligned} x+y-2z&=2\,,\\ 2x-y+z&=3\,,\\ x+y+2z&=6\,,\\ -x-y-az&=a\,. \end{aligned}$$

12.49.
$$\begin{aligned} x+(1+a)y+z+u&=3\,,\\ ax+y+z+u&=1\,,\\ x+y+(1+a)z+u&=4\,,\\ x+y+z+u&=1\,. \end{aligned}$$

12.50.
$$\begin{aligned} 2x+3y-2z+7u&=a/2\,,\\ 2x+3y+az+u&=0\,,\\ 2x+3y+z+au&=1\,,\\ 2x+3y+7z-2u&=-1\,. \end{aligned}$$

* * *

12.51. Да се најде рангот на матрицата $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ ако се познати ранговите на A и B.

12.52. Да се покаже дека:

$$\text{ранг } (A+B) \leq \text{ ранг } A + \text{ ранг } B.$$

12.53. Нека A е $m \times n$–матрица. Да се докаже дека: а) редичниот ранг на A е еднаков со нејзиниот колоничен ранг, т.е. ранг $A =$ ранг A^{T}; б) ранг $(A^{\mathrm{T}}A) =$ ранг $(AA^{\mathrm{T}}) =$ ранг A.

12.54. Нека A е квадратна матрица од n–ти ред. Да се докаже дека A е инверзибилна ако и само ако ранг $A = n$.

12.55. Нека A е реална $m \times n$–матрица. Да се покаже дека: а) ако ранг $A = m$, тогаш ранг $(AA^{\mathrm{T}}) = m$ и матрицата AA^{T} е несингуларна; б) ако ранг $A < m$, тогаш AA^{T} е сингуларна; в) елементите од главната дијагонала на AA^{T} се ненегативни.

12.56. Да се покаже дека ако A е несингуларна матрица, тогаш матриците $\operatorname{adj} A$, $(\operatorname{adj} A)A$ и $A(\operatorname{adj} A)$ имаат ист ранг како A.

12.57. Ако A е $m \times k$ матрица, а B е $k \times n$–матрица, тогаш рангот на AB не е поголем ни од рангот на A ни од рангот на B, т.е.

$$\text{ранг } (AB) \leq \text{ ранг } A \quad \text{ и } \quad \text{ранг } (AB) \leq \text{ ранг } B.$$

12.58. Ако A е $m \times n$–матрица, B е $n \times m$–матрица и $n < m$, тогаш матрицата AB е сингуларна.

12.59. Ако матрицата A е несингуларна, а B има ист ред како A, тогаш матриците AB, BA и B имаат ист ранг.

12.60. Ако $B = P\,A\,S$, каде што P и S се несингуларни матрици, тогаш ранг $A =$ ранг B.

12.61. Ако $m \times k$–матрицата A има ранг p и ако $k \times n$–матрицата B е таква што $AB = 0$, тогаш ранг $B \leq k - p$.

12.62. Нека рангот на една $m \times n$–матрица A е p. Да се докаже дека рангот s на $\operatorname{adj} A$ е определен на следниов начин:

1) ако $p = n$, тогаш $s = n$;
2) ако $p = n - 1$, тогаш $s = 1$;
3) ако $p < n - 1$, тогаш $s = 0$.

13. ЛИНЕАРНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

Решени задачи

13.1. За пресликувањето f од векторскиот простор $V(P)$ во векторскиот простор $V'(P)$ велиме дека е *линеарно пресликување* ако се исполнети следниве услови:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{c}) \tag{1}$$

$$f(x\mathbf{a}) = x\, f(\mathbf{a})\,, \tag{2}$$

за кои било $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ од V и кој било x од P.

Да се провери дали е линеарно следново пресликување:

а) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\big((a_1, a_2, a_3)\big) = (a_1 + a_3,\ a_2 - a_3);$ (3)

б) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\big((a_1, a_2, a_3)\big) = (a_1 + a_3,\ a_2 + 1);$ (4)

Решение. а) На секој елемент (a_1, a_2, a_3) од $\mathbb{R}^3$ со f му е придружен еднозначно елементот $(a_1 + a_3, a_2 - a_3)$ од $\mathbb{R}^2$, па f навистина е пресликување од $\mathbb{R}^3$ во $\mathbb{R}^2$. Нека $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ се кои било елементи од $\mathbb{R}^3$. Користејќи ја дефиницијата за собирање во $\mathbb{R}^3$, како и дефиницијата (3) на f, добиваме:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{a}+\mathbf{c}) &= f\big((a_1, a_2, a_3) + (c_1, c_2, c_3)\big) = f\big((a_1+c_1, a_2+c_2, a_3+c_3)\big) = \\ &= (a_1+c_1+a_3+c_3, a_2+c_2-a_3-c_3) = (a_1+a_3+c_1+c_3, a_2-a_3+c_2-c_3) = \\ &= (a_1+a_3, a_2-a_3)+(c_1+c_3, c_2-c_3) = f\big((a_1, a_2, a_3)\big)+f\big((c_1, c_2, c_3)\big) = \\ &= f(\mathbf{a})+f(\mathbf{c}),\end{aligned}$$

што значи дека условот (1) е исполнет. Ако е x кој било скалар, тогаш, користејќи ја дефиницијата за множење на скалар со вектор во $\mathbb{R}^3$, како и (3), добиваме:

$$\begin{aligned}f(x\mathbf{a}) &= f\big(x(a_1, a_2, a_3)\big) = f(xa_1, xa_2, xa_3) = (xa_1 + xa_3, xa_2 - xa_3) = \\ &= x(a_1 + a_3, a_2 - a_3) = xf\big((a_1, a_2, a_3)\big) = xf(\mathbf{a})\,,\end{aligned}$$

т.е. и условот (2) е исполнет. Значи, пресликувањето f е линеарно.

б) Јасно е дека f, определено со (4), е пресликување. Нека x е произволен скалар и $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$. Имаме:

$$f(x\mathbf{a}) = f\big((x_1 a_1,\, x a_2,\, x a_3)\big) = (x a_1 + x a_3,\, x a_2 + 1) \neq$$
$$\neq x(a_1 + a_3,\, a_2 + 1) = x f(\mathbf{a}),$$

т.е. условот (2) не е исполнет. Значи, пресликувањето f не е линеарно. (Во овој случај не е исполнет ни условот (1).)

Забелешка. Понатаму често ќе пишуваме $f(x_1, \ldots, x_k)$ наместо $f\big((x_1, \ldots, x_k)\big)$.

13.2. Дадени се пресликувањата $f,\, g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1,\, x_2 + x_3), \tag{1}$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1,\, -x_3), \tag{2}$$
$$h(x_1, x_2) = (x_1,\, 0,\, x_1 - x_2,\, x_2). \tag{3}$$

Да се најдат (и да се покаже дека се линеарни) пресликувањата:

$$f + g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \quad \text{и} \quad hg\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4;$$

притоа:

$$(f+g)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x}), \tag{4}$$
$$(hg)(\mathrm{x}) = h\big(g(\mathrm{x})\big). \tag{5}$$

Да се најдат сликите на единичните вектори од $\mathbf{R}^3$ со $f+g$ и hg.

Решение. Да го најдеме $f+g$. Според (4), (1) и (2), имаме:

$$\begin{aligned}(f+g)(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_2, x_3) + g(x_1, x_2, x_3) = \\ &= (x_1,\, x_2 + x_3) + (x_1,\, -x_3) = (2x_1,\, x_2).\end{aligned} \tag{6}$$

Слично, според (5), (2) и (3), имаме:

$$\begin{aligned}(hg)(x_1, x_2, x_3) &= h\big(g(x_1, x_2, x_3)\big) = h(x_1, -x_3) = \\ &= (x_1,\, 0,\, x_1 + x_3,\, -x_3).\end{aligned} \tag{7}$$

Лесно се проверува дека за $f+g$ и hg се исполнети (1) и (2) од **13.1**, т.е. дека тие се линеарни. (Ако покажевме претходно дека пресликувањата f, g и h се линеарни, тогаш за $f+g$ и hg можевме да заклучиме дека се линеарни без проверка; види **13.57** и **13.60**.)

Според (6), односно (7), имаме:

$$f+g\colon (1,0,0) \mapsto (2,0),\ (0,1,0) \mapsto (0,1),\ (0,0,1) \mapsto (0,0);$$
$$hg\colon (1,0,0) \mapsto (1,0,1,0),\ (0,1,0) \mapsto (0,0,0,0),\ (0,0,1) \mapsto (0,0,1,-1).$$

13.3. Нека $f\colon V \to V'$ е линеарно пресликување. Множеството од сите елементи од V чија слика при f е нултиот вектор од V' се вика *јадро на* f и се означува со $\operatorname{Ker} f$, а множеството елементи од V' кои се слики (при f) на елементи од V се вика *множество слики* (*опсег*) на f и се означува со $\operatorname{Im} f$; накусо:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in V\,,\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}\,, \tag{1}$$
$$Im\, f = \{\mathbf{x}' | \mathbf{x}' \in V'\ \ (\exists \mathbf{x} \in V)\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\}\,. \tag{2}$$

Да се покаже дека а) Ker $f = K$ е потпростор од V; б) Im $f = I$ е потпростор од V'.

Решение. а) Треба да покажеме дека:

$$s \in P,\ \ \mathbf{a}, \mathbf{c} \in K\ \Rightarrow\ \mathbf{a} + \mathbf{c},\, s\mathbf{a} \in K\,. \tag{3}$$

Нека s е скалар и $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in K$. Имајќи предвид дека пресликувањето f е линеарно, добиваме:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{c}) = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o},$$
$$f(s\mathbf{a}) = sf(\mathbf{a}) = s \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}\,,$$

т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{c}$, $s\mathbf{a} \in K$. Значи, K е потпростор од V.

б) Нека s е скалар и $\mathbf{a}', \mathbf{c}' \in I$. Според (2), постојат елементи $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ од V, такви што $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$, $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$. Освен тоа,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{c}) = \mathbf{a}' + \mathbf{c}'\,,$$
$$f(s\mathbf{a}) = sf(\mathbf{a}) = s\mathbf{a}'\,,$$

т.е. $\mathbf{a}' + \mathbf{c}'$ и $s\mathbf{a}'$, исто така, се слики на елементи од V. Следствено, $\mathbf{a}' + \mathbf{c}'$ и $s\mathbf{a}'$ му припаѓаат на I, што значи I е потпростор од V'.

13.4. Нека V и V' се векторски простори над исто поле и нека $f\colon V \to V'$ е линеарно пресликување. Ако f е и биекција (види **2.10**), тогаш велиме дека f *е изоморфизам*, а за векторските простори V и V'велиме дека се (меѓусебно) *изоморфни*.
Да се покаже дека векторскиот простор $\mathcal{P}_2$ од сите полиноми над $\mathbb{R}$ со степен не поголем од 2 е изоморфен со $\mathbb{R}^3$.

Решение. За да покажеме дека $\mathcal{P}_2$ и $\mathbb{R}^3$ се изоморфни, треба да најдеме пресликување $f\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ кое е и биекција и линеарно.
Да го разгледаме пресликувањето f дефинирано со:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0,\, a_1,\, a_2)\,. \tag{1}$$

Јасно е дека секој елемент (a_0, a_1, a_2) од $\mathbb{R}^3$ е слика на некој елемент од $\mathcal{P}_2$, на пример, на $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, па значи f е сурјекција. Нека

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = f(c_0 + c_1 x + c_2 x^2), \quad \text{т.е.} \quad (a_0,\, a_1,\, a_2) = (c_0,\, c_1,\, c_2).$$

Тогаш $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, т.е. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, па значи f е инјекција. Според тоа, f е биекција.
Да провериме уште дали е f линеарно. Нека s е скалар и $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ се полиноми од $\mathcal{P}_2$. Имаме:

$$\begin{aligned} f(a_0+a_1x+a_2x^2+c_0+c_1x+c_2x^2) &= f\big((a_0+c_0)+(a_1+c_1)x+(a_2+c_2)x^2\big) = \\ &= (a_0+c_0,\, a_1+c_1,\, a_2+c_2) = \\ &= (a_0,\, a_1,\, a_2)+(c_0,\, c_1,\, c_2) = \\ &= f(a_0+a_1x+a_2x^2)+f(c_0+c_1x+c_2x^2), \end{aligned}$$

$$f\left(s(a_0+a_1x+a_2x^2)\right)=f(sa_0+sa_1x+sa_2x^2)=(sa_0,\,sa_1,\,sa_2)=$$
$$=s(a_0,\,a_1,\,a_2)=sf(a_0+a_1x+a_2x^2)\,,$$

т.е. условите (1) и (2) од **13.1** се исполнети.
Од сето тоа следува дека f е изоморфизам, т.е. $\mathcal{P}_2$ и $\mathbb{R}^3$ се изоморфни.

13.5. Секое линеарно пресликување f од векторскиот простор V во себе, т.е. $f\colon V\to V$ се вика *линеарен оператор* или *линеарна трансформација* на V.
За $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, дефинирана со

$$f(x,\,y,\,z)=(x,\,x+y,\,2z)\,, \tag{1}$$

да се најде инверзната трансформација, т.е. таква линеарна трансформација $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, за која $fg=gf=1_V$.

Решение. Една линеарна трансформација има инверзна ако и само ако е таа биекција (т.е. ако е изоморфизам). Лесно се проверува дека даденото пресликување е линеарно и биекција, па значи за f постои инверзна биекција g.
Ако $(p,\,s,\,t)$ е слика на $(x,\,y,\,z)$ со f, тогаш $(x,\,y,\,z)$ е слика на $(p,\,s,\,t)$ со g, т.е.

$$f(x,\,y,\,z)=(p,\,s,\,t)\,,\quad g(p,\,s,\,t)=(x,\,y,\,z)\,. \tag{2}$$

Од првото равенство во (2) и од (1) добиваме:

$$p=x\,,\quad s=x+y\,,\quad t=2z\,,\quad \text{т.е.}\quad x=p\,,\quad y=s-p\,,\quad z=\frac{t}{2}\,. \tag{3}$$

Според тоа, g е дадено со формуалта

$$g(p,\,s,\,t)=(p,\,s-p\,,t/2)\,.$$

13.6. Нека V и V' се векторски простори над исто поле P. Потоа, нека $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ е база на V и нека $\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_k$ се произволни вектори од V'. Да се покаже дека постои единствено линеарно пресликување $f\colon V\to V'$, такво што:

$$f(\mathbf{a}_1)=\mathbf{c},\ldots,f(\mathbf{a}_k)=\mathbf{c}_k\,. \tag{1}$$

Решение. Ако $\mathbf{x}$ е кој било вектор од V, тогаш постојат еднозначно определени скалари $x_1,\ldots,x_k$, такви што $\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_k\mathbf{a}_k$. Така, за $f\colon V\to V'$ можеме да ставиме:

$$f(\mathbf{x})=x_1\mathbf{c}_1+\cdots+x_k\mathbf{c}_k\,; \tag{2}$$

поради еднозначноста на x_j, $j=1,\ldots,k$, пресликувањето f е добро дефинирано. Лесно се проверува дека f, дефинирано со (2), е линеарно. Значи, постои барем едно линеарно пресликување со особината (1).
Нека $g\colon V\to V'$ е линеарно пресликување со истата особина (1), т.е. $g(\mathbf{a}_j)=\mathbf{c}_j$, $j=1,\ldots,k$. Ако $\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_k\mathbf{a}_k$, тогаш:

$$g(\mathbf{x})=g(x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_k\mathbf{a}_k)=x_1g(\mathbf{a}_1)+\cdots+x_kg(\mathbf{a}_k)=$$
$$=x_1\mathbf{c}_1+\cdots+x_k\mathbf{c}_k=f(\mathbf{x})\,,$$

т.е. $g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$ за секој $\mathbf{x}$ од V. Значи, $g=f$, т.е. f е единствено.

13.7. Да се најде линеарно пресликување $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ чие множество слики е генерирано од векторите $(1, 1, 0, 4)$ и $(1, -1, 3, 0)$.

Решение. Нека $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ е стандардната база на $\mathbb{R}^3$. Со

$$f(\mathbf{e}_1) = (1, 1, 0, 4), \ f(\mathbf{e}_2) = (1, -1, 3, 0), \ f(\mathbf{e}_3) = (0, 0, 0, 0),$$

според **13.6**, дефинирано е единствено линеарно пресликување, при што множеството вредности на f е ѓенерирано од векторите $f(\mathbf{e}_j)$. Значи, f е бараното пресликување.

Ако е (x, y, z) произволен вектор од $\mathbb{R}^3$, тогаш:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = xf(\mathbf{e}_1) + yf(\mathbf{e}_2) + zf(\mathbf{e}_3) = \\ &= x(1, 1, 0, 4) + y(1, -1, 3, 0) + z(0, 0, 0, 0) = \\ &= (x + y, \ x - y, \ 3y, \ 4x), \end{aligned}$$

што претставува „општа формула“ за f.

13.8. Да се најде матрицата на линеарното пресликување f од $\mathbb{R}^3$ во $\mathbb{R}^2$, дефинирано со:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, \ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3),$$

во однос на стандардните бази на $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Решение. Нека f е линеарно пресликување од n–димензионалниот векторски простор V во m–димензионалниот векторски простор V' (над исто поле) и нека $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ е база на V, а $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$ база на V'. Тогаш $f(\mathbf{e}_k)$, $k = 1, \ldots, n$, се вектори во V', на пример, $f(\mathbf{e}_k) = \mathbf{a}_k$, кои се линеарни комбинации од $\mathbf{e}'_k$, т.е.

$$f(\mathbf{e}_k) = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}) = a_{1k}\,\mathbf{e}'_1 + a_{2k}\,\mathbf{e}'_2 + \cdots + a_{mk}\,\mathbf{e}'_{m'}\,, \tag{1}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Матрицата A, формирана од координатите на $\mathbf{a}_k$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

се вика *матрица на f* во базите $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$. Ако векторот $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ од V' е слика на $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ од V, тогаш координатите на $\mathbf{y}$ се изразуваат со следниве m равенки:

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n\,, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

или, со матрична ознака,

$$Y = AX\,. \tag{4}$$

За конкретниот случај имаме:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 3) = \mathbf{e}'_1 + 3\mathbf{e}'_2\,, \\ f(\mathbf{e}_2) &= f(0, 1, 0) = (-2, 2) = -2\mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2\,, \\ f(\mathbf{e}_3) &= f(0, 0, 1) = (0, 4) = 4\mathbf{e}'_2\,, \end{aligned} \tag{1}$$

па

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

е бараната матрица.

13.9. Нека f е линеарен оператор на $\mathbb{R}^3$, дефиниран со:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3, \ 3x_1 - x_3, \ 4x_2)\,. \tag{1}$$

Да се најде матрицата на f во однос на базата $\mathbf{c}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{c}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{c}_3 = (0, 0, 1)$.

Решение. Прво треба да ги најдеме координатите на кој било вектор (a_1, a_2, a_3) од $\mathbb{R}^3$ во однос на базата $\mathbf{c}_j$. Ќе го напишеме (a_1, a_2, a_3) како ленеарна комбинација од $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ и непознатите скалари x_1, x_2, x_3 :

$$(a_1, a_2, a_3) = x_1(1, 1, 1) + x_2(0, 1, 1) + x_3(0, 0, 1) = \\ = (x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3),$$

па

$$x_1 = a_1, \quad x_1 + x_2 = a_2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = a_3,$$

од каде што $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 - a_1$, $x_3 = a_3 - a_2$. Значи:

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{c}_1 + (a_2 - a_1)\mathbf{c}_2 + (a_3 - a_2)\mathbf{c}_3. \tag{2}$$

Имајќи ги предвид (1) и (2), добиваме:

$$f(\mathbf{c}_1) = f(1, 1, 1) = (3, 2, 4) = 3\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3 = (3, -1, 2)_c,$$

$$f(\mathbf{c}_2) = f(0, 1, 1) = (3, -1, 4) = 3\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2 + 5\mathbf{c}_3 = (3, -4, 5)_c,$$

$$f(\mathbf{c}_3) = f(0, 0, 1) = (2, -1, 0) = 2\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 = (2, -3, 1)_c,$$

па бараната матрица е: $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}_c$.

13.10. Нека линеарното пресликување $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ е дефинирано со:

$$f(x, y) = (x - 2y,\ y - 3x,\ x + y) \tag{1}$$

во однос на стандардните бази $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1)$ во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$ во $\mathbb{R}^3$.
Избирајќи ги $\mathbf{a}'_1 = (3, 1)$ и $\mathbf{a}'_2 = (2, 1)$ за нова база во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbf{b}'_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b}'_2 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}'_3 = (1, 2, 4)$ во $\mathbb{R}^3$, да се најде матрицата на f во однос на новите бази.

Решение. Нека на линеарното пресликување $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ му одговара матрицата C во однос на базите $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ (во $\mathbb{R}^n$) и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ (во $\mathbb{R}^m$). Ако во $\mathbb{R}^n$ се избере нова база $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$, а во $\mathbb{R}^m$ – $\mathbf{b}'_1, \ldots \mathbf{b}'_m$, тогаш на f во однос на овие бази му одговара матрицата C', определена со:

$$C' = B^{-1}\,C\,A, \tag{2}$$

каде што A е матрицата за премин од базата $\mathbf{a}'_j$ во $\mathbf{a}_j$, а B е матрицата за премин од базата $\mathbf{b}_k$ во $\mathbf{b}'_k$ (види 11.10 и 11.11).

Специјално, ако имаме $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, тогаш матрицата C' на f во однос на новата база $\mathbf{a}'_j$ е определена со:

$$C' = A^{-1}\,C\,A. \tag{3}$$

За конкретниот случај имаме:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{па} \quad C' = B^{-1}CA = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -13 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}.$$

13.11. Да се запише фурмулата на линеарното пресликување $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, определено со матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(во однос на стандардните бази) и да се најдат сликите (со f) на векторите: $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ и $(3, 2, 0)$.

Решение. Според задачата **13.8**, на секое линеарно пресликување $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ му одговара еднозначно опредлена матрица A (често се означува со A_f) со форма $m \times n$ и обратно: на секоја $m \times n$–матрица A ѝ одговара еднозначно определено линеарно пресликување $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (се запишува и f_A наместо f). Тие се сврзани со равенството (4) од **13.8**:

$$f(\mathrm{x}) = Y = A\,X \tag{1}$$

(каде што X означува x^T, а Y е y^T).
За дадената матрица A имаме:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix},$$

па формулата на соодветното линеарно пресликување f е:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 - x_3). \tag{2}$$

Според (1), или според (2), имаме:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0),\ f(0, 0, 1) = (2, -1),\ f(3, 2, 0) = (1, 2).$$

13.12. Да се запишат формулите на линеарните пресликувања $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ и $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, определени соодветно со матриците:

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_g = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_h = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Потоа, да се најдат матриците A_{f+g} и A_{hg} на пресликувањата $f+g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ и $hf\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ соодветно и да се провери точноста на равенствата

$$A_{f+g} = A_f + A_g\,, \qquad A_{hf} = A_h\,A_f\,.$$

Решение. Работејќи како во **13.11** – со помош на (1), добиваме:

$$A_f\,X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix},$$

па

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_3); \tag{1}$$

$$A_g\,X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, x_1); \tag{2}$$

$$A_h X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix},$$

$$h(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2,\ 2x_2,\ x_1,\ -x_2). \tag{3}$$

Од (1) и (2) добиваме:

$$(f+g)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2,\ 2x_1 - x_3)$$

а бидејќи

$$f + g\colon (1, 0, 0) \mapsto (1, 2),\ (0, 1, 0) \mapsto (3, 0),\ (0, 0, 1) \mapsto (0, -1),$$

имаме

$$A_{f+g} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A_f + A_g.$$

Исто така, користејќи ги (1) и (3), добиваме:

$$(hf)(x_1, x_2, x_3) = h\big(f(x_1 x_2, x_3)\big) = h(x_1 + x_2,\ x_1 - x_3) =$$
$$= (-2x_1 + x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - 2x_3,\ x_1 + x_2,\ x_3 - x_1),$$

а бидејќи

$$hf\colon (1, 0, 0) \mapsto (-2, 2, 1, -1);\ (0, 1, 0) \mapsto (1, 0, 1, 0);\ (0, 0, 1) \mapsto (3, -2, 0, 1),$$

имаме

$$A_{hf} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A_h A_f.$$

13.13. Дадена е линеарната трансформација f на $\mathbb{R}^3$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_1 - x_2 + 2x_3).$$

Да се покаже дека множеството

$$S = \{(a+b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

е потпростор од $\mathbb{R}^3$, инваријантен под f. Дали и потпросторите

$$T = \{(t, t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 1, 1) | t \in \mathbb{R}\},$$
$$U = \{(0, u, u) | u \in R\} = \{u(0, 1, 1) | u \in \mathbb{R}\}$$

се инваријантни под f?

Решение. Нека $f\colon V \to V$ е линеарен оператор (трансформација) на V. За еден потпростор W од V се вели дека е *инваријантен под* f (или: f*–инваријантен*, f*–непроменливо*), ако f го пресликува W во себе:

$$f(W) \subseteq W \quad (\text{т.е. } \mathbf{v} \in W \Rightarrow f(\mathbf{v}) \in W). \tag{1}$$

(Во тој случај, ограничувањето на f над W определува линеарен оператор на W, т.е. f индуцира линеарен оператор $\widehat{f}\colon W \to W$, дефиниран со $\widehat{f}(\mathbf{v}) = f\mathbf{v}$, за секој $\mathbf{v} \in W$.)

Како во **10.4**, лесно се проверува дека даденото множество S е потпростор од $\mathbb{R}^3$: ако $\mathrm{x}_1 = a_1(1, 1, 0) + b_1(1, 0, 1)$ и $\mathrm{x}_2 = a_2(1, 1, 0) + b_2(1, 0, 1)$ се од S, а $c \in \mathbb{R}$, тогаш $\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2$ и $c\mathrm{x}_1$ се од S. Останува да покажеме дека S е f–инваријантен. Имено, за кој било $\mathrm{x} = (a+b,\ a,\ b)$ од S имаме:

$$f(\mathrm{x})=f(a+b,\ a,\ b)=(4a+4b-a-b,\ a+b+2a-b,\ a+b-a+2b)=$$
$$=3\cdot(a+b,\ a,\ b)\in S\,,$$

што значи дека S е f–инваријантен. И множествата T и U се потпростори од $\mathbb{R}^3$. За кој било $\mathrm{x} = (t,\ t,\ t)$ од T имаме:

$$f(\mathrm{x}) = f(t,\ t,\ t) = (4t-t-t,\ t+2t-t,\ t-t+2t) = 2(t,\ t,\ t) \in T\,,$$

што значи дека и T е инваријантен под f. За $\mathrm{x} = (o,\ u,\ u)$ од U имаме:

$$f(\mathrm{x}) = f(o,\ u,\ u) = (2u,\ u,\ u) \notin U,$$

што значи дека U не е f–инверијантен.

Задачи за вежбање

Во задачите **13.14–13.16** да се ւровери дали е линеарно даденото пресликување.

13.14. а) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,\ y,\ z) = x + 2y - 3z$.

б) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,\ y,\ z) = x\,y\,z$.

13.15. а) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\quad f(x,\ y) = (x,\ 0,\ 0,\ y^2)$.

б) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\quad f(x,\ y) = (x,\ 0,\ x+y,\ 0)$.

13.16. а) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,\ y,\ z) = (x,\ yz)$.

б) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,\ y) = (\cos x,\ y)$.

13.17. Нека f и g се линеарните оператори на $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,\ y) = (y,\ 0), \qquad g(x,\ y) = (0,\ y)\,.$$

Да се покаже дека $\ gf = 0,\ fg = f,\ f^2 = 0,\ g^2 = g$.

13.18. Пресликувањата $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ дефинирани се со:

$$f(x_1,\ x_2) = (3x_1 - 2x_2,\ 2x_1 - x_2,\ -x_1 + x_2)\,,$$
$$g(y_1,\ y_2,\ y_3) = (-2y_1 + 3y_2 - y_3,\ 3y_1 - 2y_2 + 5y_3)\,.$$

Да се покаже дека:

а) f и g се линеарни; б)$gf = 1_{\mathbb{R}^2}$, но $fg \neq 1_{\mathbb{R}^3}$.

13.19. Дадени се линеарните трансформации на $1_{\mathbb{R}^3}$:

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_3,\ -x_2,\ x_1),\ g(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1,\ x_2,\ x_3 - x_1).$$

Да се пресмета: $\ f+g,\ fg$ и gf.

13.20. Да се провери дали е изоморфизам следново пресликување $f\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, дефинирано со:

а) $f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0,\, a_2,\, a_1)$. б) $f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(0,\, a_1,\, a_2)$.

в) $f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0,\, a_1,\, a_2+1)$.

г) $f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0,\, a_1,\, a_2+a_0)$.

13.21. Да се најде еден изоморфизам меѓу векторскиот простор V и V' каде што: а) V: сите 2×2–матрици над $\mathbb{R}$, $V'=\mathbb{R}^4$; б) V: сите антисиметрични 3×3–матрици над $\mathbb{R}$ и $V'=\mathcal{P}_2$.

Во задачите **13.22–13.24** да се најде една база и димензијата на: а) множеството слики I, б) јадрото K на даденото линеарно пресликување f.

13.22. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,\, y,\, z)=(x-y,\; x+2y+3z,\; 2x-2y)$.

13.23. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,\, y,\, z)=(x-2y,\; x-2y)$.

13.24. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,\, y,\, z)=(x-2y,\; x-3y,\; x+y-z)$.

13.25. Нека f е линеарен оператор на $\mathbb{R}^3$ определен со:

$f\colon (1,1,0)\mapsto(2,3,5),\ (0,1,1)\mapsto(0,-1,2),\ (1,0,0)\mapsto(2,4,2)$.

Да се покаже дека f има инверзен f^{-1} и дека

$f^{-1}(p,\, s,\, t)=\left(\frac{1}{2}p,\; 2p-s,\; 7p-3s-t\right)$.

13.26. За пресликувањето $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, односно $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. дефинирано со:

$$f\colon \begin{cases} (1,0)\mapsto(1,1,0). \\ (0,1,)\mapsto(0,1,2); \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} (1,0,0)\mapsto(1,0,1,1), \\ (0,1,0)\mapsto(0,1,1,1), \\ (0,0,1)\mapsto(1,-1,0,0) \end{cases}$$

покажи дека:

а) $f(x,y)=(x,\; x+y,\; 2y)$; $g(x,y,z)=(x+z,\; y-z,\; x+y,\; x+y)$,

б) $(1,2,3)$ не е слика на ниеден вектор од $\mathbb{R}^2$ со f,

в) множеството слики и на f и на g има димензија 2,

г) $(gf)(1,2)=(5,-1,4,4)$, д) $\operatorname{Ker}(gf)=\{(0,0,0,0)\}$.

13.27. Да се напише формулата на линеарното пресликување $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ што ѝ одговара на матрицата:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

и да се најде сликата на векторот а) $(1,1,0,1)$; б) $(2,1,1,0)$.

13.28. Матрицата на линеарното пресликување $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ во однос на стандардната база е:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

а) Да се најдат сликите на векторите $(1, 2, 3)$ и $(0, 1, 1)$.

б) Дали векторите $(4, 4, 4, 9)$ и $(0, 0, 0, 7)$ се слики?

Во задачите **13.29–13.34** координатите на векторите се зададени во однос на стандардната база на $\mathbb{R}^n$, а f е линеарно пресликување, определено на укажаниот начин. Да се најдат:

а) матрицата A на f во однос на стандардната база;

б) формулата за f; в) $\operatorname{Ker} f$; г) ранг (AA^T).

13.29. $f\colon (2, 1) \mapsto (2, 1, 1)$, $(1, -1) \mapsto (1, -1, 2)$.

13.30. $f\colon (1, 1) \mapsto (0, 1, 2)$, $(-1, 1) \mapsto (2, 1, 0)$.

13.31. $f\colon (0, 1, 2) \mapsto (2, 1)$, $(2, 0, -1) \mapsto (1, 0)$, $(2, 1, -2) \mapsto (0, 1)$.

13.32. $f\colon (1, 1, 1) \mapsto (0, 3)$, $(1, -1, 0) \mapsto (1, -1)$, $(0, 2, -1) \mapsto (1, 0)$.

13.33. $f\colon (1, -2, 0) \mapsto (3, 3, 3)$, $(3, 2, 1) \mapsto (1, 1, 1)$, $(1, 1, 3) \mapsto (0, 0, 0)$.

13.34. $f\colon (1, 1, -1) \mapsto (0, -2, 5), (2, -1, 1) \mapsto (3, 5, -2), (-3, 1, 1) \mapsto (2, -2, -5)$.

13.35. При стандардната база, линеарната трансформација f ги трансформира векторите:

а) $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ и $(1, 1, 0)$, во векторите $(0, 0, 1)$, $(2, 0, 1)$ и $(0, 2, 2)$ соодветно.

б) $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ и $(1, 1, 1)$ во $(2, 3, 5)$, $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, -1)$ соодветно.

Да се најде матрицата A на f.

Да се покаже дека постои инверзна трансформација g на f и да се најде матрицата на g.

13.36. Линеарната трансформација f на $\mathbb{R}^2$ ги трансформира векторите $(2, 2\sqrt{3})$ и $(-2\sqrt{3}, 4)$ во $(0, 2)$ и $(-5, \sqrt{3})$ соодветно. Да се најде матрицата на f и да се покаже дека таа е ортогонална.

13.37. За линеарните трансформации на $\mathbb{R}^3$, разгледани во задачата **13.19**, да се најдат соодветните матрици A_f, A_g, A_{f+g}, A_{fg}, A_{gf} и да се проверат врските: $A_{f+g} = A_f + A_g$ и $A_{fg} = A_f A_g$. Дали $A_{gf} = A_f A_g$?

13.38. Дадени се линеарните пресликувања f, g и h соодветно со матриците
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$
во некоја база. Да се најде матрицата D на пресликувањето $(f+g)h$.

13.39. Дадени се линеарните пресликувања f и g соодветно со матриците
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
во некоја база. Да се најде, во истата база, матрицата на пресликувањето: а) $f+g$; б) $f-2g$; в) fg; г) gf.

13.40. Да се најде матрицата на трансформацијата на $\mathbb{R}^3$
$$f(x, y, z) = (x,\ x+y,\ x+y+z)$$
а) во однос на стандардната база $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;

б) во однос на базата $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$;

в) во однос на базата $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 0, 1)$

(како во **13.9** или со помош на (3) од **13.10**).

13.41. Линеарната трансформација f ги пресликува векторите $(1, 0, 2)$, $(2, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ во векторите $(0, 0, 3)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ соодветно. Да се најде матрицата на f во однос на:

а) стандардната база; б) базата $(1, 3, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 3, 2)$.

13.42. Пресликувањето $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ е определено со:
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3,\ 2x_2 - x_4).$$
Да се најде матрицата на f во однос на базите:

а) стандардните бази на $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$,

б) $(1, 2, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 2)$, $(0, 1, 0, 3)$, $(0, 1, 0, 4)$ и $(2, 1)$, $(1, 1)$.

13.43. Пресликувањето $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ е определено со:
$$f(x, y) = (x,\ x+y,\ 0,\ -y).$$
Да се најде матрицата на f во однос на базите:

а) стандардните бази на $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$;

б) $(2, 1)$, $(1, 1)$ и $(1, 2, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 2)$, $(0, 1, 0, 3)$, $(0, 1, 0, 4)$.

13.44. Нека V е векторскиот простор од 2×2 матрици над $\mathbb{R}$ и нека $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$. Потоа, нека $f\colon V\to V$ е пресликување дефинирано со: $f(X)=AX$ (X е произволна матрица од V). Да се покаже дека f е линеарно и да се најде една база и димензијата на:

а) $\operatorname{Ker} f$; б) $\operatorname{Im} f$.

13.45. Нека V е како во **13.44** и $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$. Да се покаже дека пресликувањето $f\colon V\to V$, дефинирано со

$$f(X)=XA-AX,$$

е линеарно и да се најде една база и димензијата на $\operatorname{Ker} f$.

13.46. Нека V е како во **13.44** и $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Дали пресликувањето $f\colon V\to V$, дефинирано со $f(X)=A-X$ е линеарно?

13.47. Нека V е како во **13.44**. Да се покаже дека трансформацијата $f\colon V\to V$, којашто се состои во множење на матриците од V

а) одлево со матрицата $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$;

б) оддесно со матрицата $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, е линеарна. Потоа, да се најде матрицата на трансформацијата, ако за координатен систем се земе:

а) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$;

б). $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Во задачите **13.48–13.50**, за дадената трансформација f на $\mathbb{R}^3$, да се испита дали се f–инваријантни дадените потпростори S и T.

13.48. $f(x_1, x_2, x_3)=(3x_1+x_2+x_3;\ x_1+3x_2+x_3,\ 2x_3)$.
$S=\{(a, b, -a-b)|a, b\in\mathbb{R}\}$, $T=\{(t, t, 0)|t\in\mathbb{R}\}$.

13.49. $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2,\ x_2,\ x_3)$;
$S=\{(a, 0, b)|a, b\in\mathbb{R}\}$, $T=\{(t, t, 0)|t\in\mathbb{R}\}$.

13.50. f е определена со матрицата A:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2\end{bmatrix}; \qquad S=\{(3s,\,0,\,5s)|s\in\mathbb{R}\}, T=\{(3a,\,0,\,5a+b)|a,\,b\in\mathbb{R}\}.$$

13.51. Со равенките:

$$(1)\quad \begin{cases} x' = kx\,, \\ y' = ky\,; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x' = x\,\cos\alpha - y\,\sin\alpha\,, \\ y' = x\,\sin\alpha + y\,\cos\alpha\,; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x' = x + ay\,, \\ y' = y\,; \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} x' = x\,, \\ y' = cx + y\,, \end{cases}$$

определени се трансформации на рамнината: *хомотетија* X_k, ротација P_α, *хоризонтално истегнување* H_a и *вертикално истегнување* V_c.

а) Да се напишат матриците на овие трансформации.

б) Со помош на множење на матрици да се пресметаат производите

1) X_kH_a; 2) H_aX_k; 3) $P_\alpha H_a$ за $\alpha = 45^0$;

4) $P_\alpha H_a X_k$ за $\alpha = 30^0$; 5) $X_k H_a H_k$,

и да се даде геометриско толкување.

в) Да се најдат матриците на инверзните трансформации (во случаите кога постојат).

г) Да се покаже дека секое истегнување го задоволува условот $A^2 + E = 2A$.

13.52. Да се опише геометриското дејствување на следниве трансформации: а) $x' = y,\ y' = x$; б) $x' = x,\ y' = x$; в) $x' = 0\ \ y' = x$; г) $x' = kx + kay,\ y' = ky$.

13.53. Трансформацијата f на рамнината во себе ја пресликува секоја точка M во M' на подолу опишаниот начин. Да се установи дали е таа линеарна и да се најдат нејзините равенки. а) M' е за две единици десно од M и една единица нагоре. б) M' лежи на зракот OM на растојание $\frac{1}{4}\overline{OM}$ од координатниот почеток O. в) M' е симетрична на M во однос на правата $x = 2$.

13.54. Во тридимензионалниот простор да ја означиме со A матрицата на операторот на ротација за 90^0 околу оската Ox (од Oy кон Oz), со B – матрицата на операторот на ротација за 90^0 околу оската Oy (од Oz кон Ox), со C – за 90^0 околу оската Oz (од Ox кон Oy).

Да се покаже дека: $A^4=B^4=C^4=E$, $AB \neq BA$, $A^2B^2=B^2A^2$. Дали е исполнето равенството $ABAB = A^2B^2$?

* * *

13.55. Нека $\mathcal{P}$ е векторскиот простор на сите полиноми од x над $\mathbb{R}$ со произволен степен. Дали е линеарна трансформацијата што се состои од множење на полиномите со: а) x^2+1; б) $\frac{1}{x}$?

13.56. Да се покаже дека пресликувањето $f\colon V \to V'$ е линеарно ако и само ако
$$f(x\mathbf{a}+y\mathbf{c}) = xf(\mathbf{a})+yf(\mathbf{c})$$
за кои било вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ од V и скалари x, y.

13.57. Да се докаже дека ако пресликувањата $f, g\colon V \to V'$ се линеарни, тогаш и $f+g$ е линеарно (види и (4) од **13.2**).

13.58. Да се докаже дека множеството $L(V, V')$ на сите линеарни пресликувања од V во V' е комутативна група во однос на операцијата собирање на пресликувања.

13.59. Да се докаже дека множеството $L(V, V')$ од сите линеарни пресликувања од V во V' е векторски простор.

13.60. Ако пресликувањата $f\colon V \to V'$ и $g\colon V \to V''$ се линеарни, тогаш и $gf\colon V \to V''$ е линеарно (види и (5) од **13.2**).

13.61. Да се докаже дека множеството $L(V, V)$ од сите линеарни трансформации на еден векторски простор V е прстен во однос на операциите собирање и множење на пресликувања.

13.62. Под *слика на потпросторот* S од V при линеарното пресликување $f\colon V \to V'$ се подразбира множеството $f(S)$ од сите вектори $f(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in S$.

Да се покаже дека $f(S)$ е потпростор од V'.

13.63. Да се докаже дека секој k–димензионален векторски простор е изоморфен со $\mathbb{R}^k$.

13.64. Под *автоморфизам на векторски простор* V се подразбира изоморфизам на V во себе. Да се покаже дека: а) пресликувањето $f\colon(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, -x_1, x_3)$ е автоморфизам на $\mathbb{R}^3$;

б) множеството од сите автоморфизми на V е група во однос на операцијата составување на пресликувања.

13.65. Нека f е линеарен оператор на векторскиот простор V за кој $f^2=f$ и нека $I=Imf$, $K=\operatorname{Ker} f$. Да се покаже дека:

а) ако $\mathbf{x} \in I$, тогаш $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, т.е. f е идентичното пресликување на I;

б) ако $f \neq 1_V$, тогаш постои вектор $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, таков што $f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$; в) $V = I \oplus K$.

13.66. Линеарното пресликување $f: V \to V'$ е инјективно ако и само ако $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$, т.е. ако и само ако f е несингуларно.

13.67. Нека $f: U \to V$ е инјективно линеарно пресликување, при што V е конечно димензионален. Да се покаже дека тогаш и U е конечно димензионален и $\dim U \leq \dim V$.

13.68. Нека $f: U \to V$ е инјективно линеарно пресликување, при што V е конечно димензионален векторски простор и нека $h: U \to W$ е, исто така, линеарно. Да се покаже дека постои линеарно пресликување $g: V \to W$, такво што $h = gf$.

13.69. Нека S и T се потпростори од векторскиот простор V, при што $V = S + T$ и нека $f: V \to V'$ е линеарна сурјекција со јадро S. Да се покаже дека пресликувањето $g: T \to V'$, такво што $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ за секој $\mathbf{x} \in T$, е сурјекција.

13.70. Нека $g: V \to W$ и $h: U \to W$ се линеарни пресликувања, при што U е конечно димензионален и g сурјекција.

Да се покаже дека постои линеарно пресликување $f: U \to V$, такво што $h = g f$.

13.71. Да се покаже дека едно линеарно пресликување $f: V \to V'$ е изоморфизам ако и само ако: $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$, $Im f = V'$.

13.72. Нека f е линеарна трансформација на векторскиот простор V. Да се покаже дека е f–инваријантен секој од следниве потпростори на V: а) $\{\mathbf{o}\}$; б) V; в) $\operatorname{Ker} f$; г) $Im f$.

13.73. Нека W_1 и W_2 се f–инваријантни потпростори од векторскиот простор V. Да се покаже дека потпросторот $W = W_1 \cap W_2$ е f–инваријантен. Резултатот да се обопшти за произволна фамилија $\{W_i\}$ f–инваријантни потпростори.

13.74. Нека f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е определена со:

$$f(x, y, z) = (x \cos\theta - y \sin\theta,\ x \sin\theta + y \cos\theta,\ z),$$

каде што θ е даден агол. Да се покаже дека f е линеарна трансформација на $\mathbb{R}^3$ којашто секој вектор го ротира околу оската Oz за агол θ и дека потпросторите $S = \{(a, b, 0) | a, b \in \mathbb{R}\}$, $T = \{(0, 0, t) | t \in \mathbb{R}\}$ се инваријантни под f. Потоа: рестрикцијата од f на S секој вектор го ротира околу координатниот почеток O, а рестрикцијата од f на T е идентичното пресликување на T.

14. СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ И СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ

Решени задачи

14.1. Дадени се матрицата $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ и полиномите $f(x)=x^2+3x-8$ и $g(x) = x^2 - 5x + 7$. Да се пресметаат матричните полиноми $f(A)$ и $g(A)$.

Решение. Имаме:

$$f(A) = A^2 + 3A - 5E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g(A) = A^2 - 5A + 7E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Поради својството $g(A) = O$ матрицата A се вика *матрична нула* или само *нула* на полиномот $g(x)$, а $g(x)$ се вика *анулаторен полином* на матрицата A.)

14.2. Дадена е матрицата: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Да се најдат: а) карактеристичната матрица на A; б) карактеристичниот полином $\Delta(\lambda)$ на A; в) $\Delta(A)$, каде што $\Delta(\lambda)$ е карактеристичниот полином на A.

Решение. Ако $A = [a_{ij}]$ е квадратна матрица од n–ти ред, тогаш матрицата

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

каде што λ е променлива, а E е единичната матрица од n–ти ред, се вика *карактеристична матрица* на матрицата A. Нејзината детерминанта

$$|\lambda E - A| = \det(\lambda E - A) \qquad (2)$$

е полином (по променливата λ) од n–ти степен; тој се вика *карактеристичен полином* на матрицата A и се означува со $\Delta_A(\lambda)$ или само со $\Delta(\lambda)$. Значи:

$$\Delta(\lambda) = d_n \lambda^n + d_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + d_1, \lambda + d_0 , \qquad (3)$$

при што:

$$d_n = 1 , \quad d_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) , \quad d_0 = (-1)^n \cdot \det A . \qquad (4)$$

Равенката $\Delta(\lambda) = 0$ се вика *карактеристична равенка* на матрицата A.

а) $\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$

б) $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+3) = \lambda^3 - 7\lambda + 6.$

в) $\Delta(A) = A^3 - 7A + 6E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^3 - 7\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + 6\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Delta(A) = O$. Значи, A е корен на својот карактеристичен полином, т.е. $\Delta(\lambda)$ е анулаторен полином на A.

14.3. Со помош на теоремата на Хамилтон–Кели, да се најде инверзната матрица на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ќе го најдеме, прво, карактеристичниот полином на A:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda-1)-3] = (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda-1) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Според *теоремата на Хамилтон–Кели*, секоја матрица е корен (т.е. нула) на својот карактеристичен полином, па за матрицата A имаме:

$$A^3 - 4A^2 + 2A + E = O . \qquad (1)$$

Множејќи го ова равенство со A^{-1}, добиваме:

$$A^{-1} = -A^2 + 4A - 2E ; \qquad (2)$$

$$A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -3 \\ -6 & -9 & 4 \end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

14.4. Да се најде детерминантата на матрицата A од зад. **14.3** користејќи го карактеристичниот полином на A.

Решение. Карактеристичниот полином на една матрица A, по дефиниција (зад. **14.2**), е: $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0$. Ставајќи $\lambda = 0$, добиваме: $\Delta(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$, како и $\Delta(0) = d_0$, од каде што

$$\det A = (-1)^n \Delta(0) = (-1)^n d_0 . \qquad (1)$$

За дадената матрица A, во зад. **14.3** најдовме:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 1 ;$$

оттука, за $\lambda = 0$, имаме $\Delta(0) = 1 = d_0$, па според (1):
$$\det A = (-1)^3 d_0 = -1.$$

14.5. Да се најде минималниот полином на матрицата
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ако $m_A(\lambda)$ или, пократко $m(\lambda)$, е полином со коефициент 1 пред највисокиот степен на λ и со најмал можен степен, така што $m(A) = O$, тогаш $m(\lambda)$ се вика ***минимален полином*** на матрицата A.

Минимален полином $m(\lambda)$ за секоја матрица A постои и е еднозначно определен. Полиномот $m(\lambda)$ е делител на секој анулаторен полином на A (т.е. на секој полином за кој A е корен).

Специјално, минималниот полином $m(\lambda)$ од A е делител на карактеристичниот полином $\Delta(\lambda)$ од A. Уште повеќе: $\Delta(\lambda)$ и $m(\lambda)$ имаат исти неразложливи делители.

Ќе го искористиме последниот резултат. За таа цел, ќе го најдеме, прво, $\Delta_A(\lambda)$. Имаме:
$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & -3 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda)-\lambda-3\lambda = \lambda^3-5\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-5).$$

Сите делители на полиномот $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2$ (со коефициент 1 пред највисокиот степен на λ) се следниве полиноми:
$$\lambda,\ \lambda-5,\ \lambda^2,\ \lambda^2-5\lambda,\ \lambda^3-5\lambda^2;$$

од нив, λ и $\lambda - 5$ се неразложливи – тие се делители и на $m(\lambda)$. Значи, $m(\lambda)$ ќе биде точно еден од следниве полиноми:
$$f(\lambda) = \lambda(\lambda-5) = \lambda^2 - 5\lambda \quad \text{или} \quad g(\lambda) = \lambda^2(\lambda-5) = \lambda^3 - 5\lambda^2.$$

Имаме:
$$f(A) = A \cdot (A - 5E) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = O.$$

Јасно е дека и $g(A) = \Delta(A) = O$ (според теоремата на Хамилтон–Кели). Но, степенот на $f(\lambda)$ е помал од степенот на $g(\lambda)$, па затоа $f(\lambda)$, а не $g(\lambda)$, е минималниот полином на A: $m(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$.

14.6. Минималниот полином, $m(\lambda)$, на една матрица A може да се најде и со следнава (релативно едноставна) постапка:

1) ако $A = a_0 E$, тогаш $m(\lambda) = \lambda - a_0$;

2) ако $A \neq aE$ за секој a, но $A^2 = a_1 A + a_0 E$, тогаш $m(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$;

3) ако $A^2 \neq aA + cE$ за кои било a и c, но $A^3 = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 E$, тогаш $m(x) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$; итн.

Со помош на оваа постапка, да се најде минималниот полином на матрицата:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. За дадената матрица е јасно дека $A = a_0 E$ е невозможно. Да ставиме:

$$A^2 = a_1 A + a_1 E, \quad \text{т.е.} \quad \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Земајќи ги елементите од првата редица и првите две колони, добиваме:

$$6 = 2a_1 + a_0, \quad 5 = a_1, \quad \text{па} \quad a_1 = 4, \ a_0 = -4;$$

бидејќи

$$5A - 4E = 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A^2,$$

според 2), заклучуваме дека минималниот полином на A е $m(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$.

14.7. Да се реши хомогениот систем линеарни равенки:

$$\begin{aligned} x + 4y - 3z &= 0, \\ 2x - y + z &= 0, \\ 5x + 2y - z &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Решение. Ако еден линеарен систем од n равенки со n непознати е *хомоген* (т.е. слободниот член на секоја од равенките е нула),

$$\begin{array}{ccccccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \quad (\text{кратко: } Ax{=}0) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0, \end{array} \tag{1}$$

тогаш тој систем има решение $x_1 = x_2 = x_n = 0$, наречено *тривијално* или *нулто решение*. За хомогените линеарни системи од интерес се нетривијалните решенија.

Системот (1) има нетривијални решенија ако и само ако неговата детерминанта, $\det[a_{ij}]$, е нула.

За дадениот хомоген систем (а) имаме:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -9 & 7 \\ 0 & -18 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-9 \cdot 14 + 18 \cdot 7) = 0,$$

што значи дека системот (а) има нетривијални решенија.

Ако од втората равенка на (а) го замениме $z = 2x + y$ во првата и третата, ќе го добиеме системот:

$$\begin{aligned} 7x + y &= 0, \\ 7x + y &= 0. \end{aligned}$$

Едната променлива можеме да ја избереме проиволно, на пример $x = t$ ($t \in \mathbf{R}$). Тогаш $y = -7t$ и $z = -9t$, па сите решенија на системот (а) се тројките $(t, -7t, -9t)$, $t \in \mathbf{R}$.

14.8. Да се најдат сопствените вредности на матриците:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix};\quad \text{б) } B=\begin{bmatrix}3&-1\\5&-1\end{bmatrix};\quad \text{в) } C=\begin{bmatrix}5&2+i\\2-i&1\end{bmatrix}.$$

Решение. Секое решение на карактеристичната равенка $\Delta_A(\lambda)=0$ на една матрица A од n–ти ред (в. зад. **14.2**) се вика *сопствена* (или *карактеристична*) *вредност* на таа матрица. Бидејќи карактеристичниот полином на A е од n–ти степен, тој има n корени $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$ (некои од нив може да се еднакви меѓу себе, некои комплексни). Системот сопствени вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ се вика *спектар на матрицата* A.

а) $\Delta_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4&-3\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+5;\quad \lambda^2-6\lambda+5=0;\ \lambda_1=5,\ \lambda_2=1$

б) $\Delta_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2;\quad \lambda^2-2\lambda+2=0;\ \lambda_1=1+i,\ \lambda_2=1-i.$

Значи, сопствените вредности на матрицата B се комплексни броеви.

в) $\Delta_C(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5&-2-i\\-2+i&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda;\ \lambda^2-6\lambda=0;\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=6.$

Сопствените вредности на оваа матрица се реални, иако е таа матрица со комплексни членови. (Да уочиме дека C е ермитска матрица; сопствените вредности на секоја ермитска матрица се реални.)

14.9. Да се најде спектарот, а потоа да се најдат сопствените вектори на матрицата:

$$A=\begin{bmatrix}4&2\\-1&1\end{bmatrix}.$$

Решение. Ако λ е сопствена вредност на дадена матрица $A=[a_{ij}]$ од n–ти ред, тогаш $|A-\lambda E|=0$, [1] па постои ненулти вектор $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$, таков што: [2]

$$(A-\lambda E)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{o},\quad \text{т.е.}\quad A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x},\tag{1}$$

а тоа значи дека хомогениот систем равенки

$$\begin{array}{ccccccccc}(a_{11}-\lambda)x_1&+&a_{12}x_2&+&\cdots&+&a_{1n}x_n&=&0,\\a_{21}x_2&+&(a_{22}-\lambda)x_2&+&\cdots&+&a_{2n}x_n&=&0,\\\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots\\a_{n1}x_1&+&a_{n2}x_2&+&\cdots&+&(a_{nn}-\lambda)x_n&=&0,\end{array}\tag{2}$$

има нетривијално решение $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

Секој ненулти вектор $\mathbf{x}$ што ја задоволува равенката (1):

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x},$$

[1] Натаму, кога ќе се работи за карактеристичната равенка на матрицата A, често ќе пишуваме $\det(A-\lambda E)=0$ (т.е. $|A-\lambda E|=0$) наместо $\det(\lambda E-A)=0$ (т.е. $|\lambda E-A|=0$).

[2] Овде и натаму, $\mathbf{x}$ означува вектор–колона: $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$.

т.е. системот (2), се вика *сопствен* (или *карактеристичен*) *вектор* на матрицата A, придружен на сопствената вредност λ.
За дадената матрица имаме:

$$\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-3)(\lambda-2); \quad \lambda_1=3, \ \lambda_2=2.$$

Значи, спектарот на матрицата A е: 3, 2.
Да ги најдеме карактеристичните вектори на матрицата A. Системот (1), т.е. (2) за дадената матрица A е:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} (4-\lambda)x_1+2x_2=0, \\ -x_1+(1-\lambda)x_2=0. \end{cases} \tag{3}$$

За $\lambda=3$, системот (3) се сведува на системот:

$$x_1+2x_2=0, \qquad -x_1-2x_2=0;$$

решението на овој хомоген систем е $x_2=-t$, $x_1=2t$ $(t\in\mathbb{R})$, т.е. векторите $\begin{bmatrix} 2t \\ -t \end{bmatrix}=(2t,\,-t)^{\mathrm{T}}$, $t\in\mathbb{R}$. Сите овие вектори што се добиваат кога t се менува во $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ се сопствени вектори на A, придружени на сопствената вредност $\lambda=3$. Но, бидејќи тие се колинеарни, *се зема еден* нивни претставник, на пример за $t=1$: $(2,\,-1)^{\mathrm{T}}$.
За $\lambda=2$, (3) се сведува на системот:

$$2x_1+2x_2=0, \qquad -x_1-x_2=0,$$

па, како погоре, добиваме дека $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=(1,\,-1)^{\mathrm{T}}$ е сопствен вектор на A, придружен на сопствената вредност $\lambda=2$.

14.10. Да се најдат сопствените вектори на матрицата:

а) $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=$

$$=(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1)-2-2+-4+2\lambda+8-2\lambda-1+\lambda=$$
$$=(\lambda-1)[(\lambda-4)(\lambda-2)+1]=(\lambda-1)(\lambda-3)^2,$$

$\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=3$. Значи, спектарот на B е 1, 3, 3.
Системот (2) од задачата **14.9** за матрицата B ќе биде:

$$\begin{aligned} (4-\lambda)x_1+x_2-x_3&=0, \\ -x_1+(2-\lambda)x_2+x_3&=0, \\ 2x_1+2x_2+(1-\lambda)x_3&=0. \end{aligned} \tag{*}$$

За $\lambda=1$, системот (*) се сведува на:

$$3x_1+x_2-x_3=0, \qquad -x_1+x_2+x_3=0, \qquad 2x_1+2x_2=0,$$

чие општо решение е: $x_1=t$, $x_2=-t$, $x_3=2t$, $t\in\mathbb{R}$, па $\mathbf{x}_1=(1,\,-1,\,2)^{\mathrm{T}}$ е сопствениот вектор на B што одговара на сопствената вредност $\lambda=1$.
За $\lambda=3$, од (*) го добиваме системот:

$$x_1+x_2-x_3=0, \qquad -x_1-x_2+x_3=0, \qquad 2x_1+2x_2-2x_3=0.$$

Тој е составен од три „исти“ равенки, па две променливи може да се земат произволно: $x_1=t$, $x_2=u$ $(t,u\in\mathbb{R})$ и, тогаш $x_3=t+u$. Така, општото решение на системот е $\mathbf{x} = (t,\ u,\ t+u)^{\mathrm{T}} = t(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}} + u(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $t, u \in \mathbb{R}$. Значи, матрицата B има два линеарно независни сопствение вектора, $\mathbf{x}_2 = (1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}_3 = (0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, што одговараат на сопствената вредност $\lambda = 3$.

б) $$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3; \qquad \lambda_{1,2,3} = 2.$$

Значи, спектарот на матрицата C е 2, 2, 2
Системот (2) од зад. **10.9** за матрицата C е:

$$(2-\lambda)x_1 + x_2 = 0. \qquad (2-\lambda)x_2 = 0. \qquad x_1 + (2-\lambda)x_3 = 0.$$

За $\lambda = 2$ тој се сведува на системот $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, па неговото општо решение е $\mathbf{x} = (0,\ 0,\ t)$, $t \in \mathbb{R}$. Значи, матрицата C има само еден (линеарно независен) сопствен вектор $\mathbf{x}_1 = (0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

Проверка. За да провериме дали добиениот вектор, на пример $\mathbf{x}_2 = (1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$, е сопствен вектор на матрицата B придружен на сопствената вредност $\lambda = 3$, треба да добиеме дека равенството

$$B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{**}$$

е исполнето за $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ и $\lambda = \lambda_2$; тоа навистина е исполнето:

$$B \cdot \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}_2.$$

За векторот пак $\mathbf{u} = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ и за $\lambda = 3$, равенството (**) не е исполнето: $B \cdot \mathbf{u} = (4,\ 2,\ 5)^{\mathrm{T}} \neq 3 \cdot \mathbf{u}$. Значи, $\mathbf{u}$ не е сопствен вектор на B придружен на $\lambda = 3$.

14.11. Дадена е матрицата $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(од зад. **14.10**).

Да се најде една база на карактеристичниот простор K на матрицата B, што одговара на сопствената вредност λ.

Решение. Ако λ е сопствена вредност на матрицата B, тогаш множеството од сите карактеристични вектори на B придружени на λ, заедно со нултиот вектор, образуваат простор од $\mathbb{R}^3$, наречен *карактеристичен* или *сопствен простор* што одговара на λ.

Во зад. **14.10** ги најдовме сопствените вредности и сопствените вектори на B:

– на $\lambda_1 = 1$ одговара сопствениот вектор $\mathbf{u} = (1,\ -1,\ 2)^{\mathrm{T}}$,

– на $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ одговараат $\mathbf{v} = (1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{w} = (0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

Карактеристичниот простор K_1 на $\lambda_1 = 1$ се состои од сите вектори $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_3$ што се колинеарни со $\mathbf{u}$, т.е.

$$K_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_3 | \mathbf{x} = t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}\ \};$$

една база на K_1 е векторот $\mathbf{u} = (1,\ -1,\ 2)^{\mathrm{T}}$.

Карактеристичниот простор K_2 на $\lambda_2 = 3$ се состои од сите вектори $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_3$, такви што:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v} + t_2\mathbf{w} \qquad (t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}),$$

каде што $\mathbf{v} = (1,\ 0,\ 1,\ )^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{w} = (0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ се линеарно неазависни, па $\dim K_2 = 2$ и една негова база е системот вектори $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.

14.12. Да се *дијагонализира* матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Решение. Да се дијагонализира дадена матрица A, значи да се најде несингуларна матрица M, таква што матрицата $M^{-1}AM$ да е дијагонална; секоја таква матрица M се вика *дијагонализирачка матрица.* Означувајќи ја $M^{-1}AM$ со Λ, имаме:

$$M^{-1}AM = \Lambda\,, \qquad \text{т.е.} \qquad A = M\Lambda M^{-1}\,. \tag{1}$$

$n \times n$–матрицата A може да се дијагонализира ако и само ако таа има n линеарно независни сопствени вектори $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$, што одговараат на сопствените вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Имено, ако тие вектори се земат за колони на матрицата M, тогаш M е несингуларна и $M^{-1}AM$ е дијагонална:

$$AM = A[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n] = [\lambda_1 \mathrm{x}_1, \lambda_2 \mathrm{x}_2, \dots, \lambda_n \mathrm{x}_n] =$$

$$= [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = M\Lambda\,.$$

Значи, $AM = M\Lambda$, па поради несингуларноста на M: $A = M\Lambda M^{-1}$. Матрицата M се вика *модална матрица,* а Λ – *спектрална матрица* на A. За дадената матрица A, да ги најдеме сопствените вредности и сопствените вектори:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2); \quad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2.$$

$$\lambda_1 = -1\!: \ (A + 1 \cdot E)\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{па} \quad \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -2\!: \ (A + 2 \cdot E)\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{па} \quad \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Сопствените вектори $\mathrm{x}_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ и $\mathrm{x}_2 = (3, 4)^{\mathrm{T}}$ се линеарно независни и модалната матрица M на A е несингуларна:

$$M = [\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{па} \ \ \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Така, матрицата A е дијагонилизирана: $A = M \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot M^{-1}$.

Забелешки. 1) Ако $n \times n$–матрицата A има само еднократни сопствени вредности, т.е. броевите $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ се различни, тогаш n–те соодветни сопствени вектори се линеарно независни, па во тој случај, матрицата A може да се дијагонализира.

2) Дијагонализирачката матрица M не е еднозначно определена. (Зошто?) Равенството $AM = M\Lambda$, каде што Λ е спектралната матрица на A, е исполнето само во тој случај, кога колоните на матрицата M се соодветни сосптвени вектори на A (т.е. равенството $AM = MA$ не важи ако матрицата A не е модална за A). (Други матрици M не ја даваат дијагоналната матрица Λ.)

3) Има $n \times n$–матрици што не може да се дијагонализираат (в. **14.85**).

Ако сите сопствени вредности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на реалната матрица A од n–ти ред се реални и дефектот (в. **12.29**) на матрицата $A - \lambda_i E$ е еднаков со кратноста на λ_i за секој $i = 1, \dots, n$, тогаш A е дијагонализирлива. Ако некој од горните услови не е исполнет, тогаш A не може да се дијагонализира (в. **14.91**).

14.13. Да се дијагонализира симетричната матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Секоја реална симетрична матрица од n–ти ред (т.е. матрица A, таква што $A = A^{\mathrm{T}}$) има n линеарно независни сопствени вектори (дури и кога некои сопствени вредности се повеќекратни), па според тоа може да се дијагонализира. (Да забележиме дека *секоја сопствена вредност на симетрична матрица е реален број.*)

За да ја дијагонилизираме дадената матрица A, ќе ги најдеме нејзините: а) сопствени вредности, б) сопствени вектори и в) модалната матрица – таа ќе биде дијагонализирачка за A.

а) $$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & -3 \\ 3 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+1) + 18 - 9\lambda + 18 - 9\lambda =$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda+1) - 18(\lambda-2) = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-20),$$

па секторот на A е: 2, 5, -4.

б) За секоја сопствена вредност λ_i го бараме соодветниот сопствен вектор $\mathbf{x}_i$:

$$\lambda_1 = 2:\ (A-2E)\mathbf{x}_1 = \mathbf{o};\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = 5:\ (A-5E)\mathbf{x}_2 = \mathbf{o};\quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 = -4:\ (A+4E)\mathbf{x}_3 = \mathbf{o};\quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

в) Да ја најдеме модалната матрица M:

$$M = [\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2\, \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};\qquad M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

M е дијагонализирачка за A: $M^{-1}AM = \mathrm{diag}\,(2, 5, -4)$.

Забелешка 1. Ако $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ се сопствени вектори на симетрична матрица, коишто одговараат на различни сопствени вредности λ и μ, тогаш тие се *ортогонални*, т.е. нивниот *скаларен производ*,

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

е нула: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{y} = 0$. Во горниот пример: $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}_3 = 0$.

Забелешка 2. *Должина* на векторот $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ се вика бројот $\|\mathbf{x}\|$, определен со:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Ако $\|\mathbf{x}\| \neq 0$, тогаш $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\cdot\mathbf{x}$ е единичен вектор (вектор со должина 1). На тој начин може да се земат единични сопствени вектори и така добиената модална матрица Q ќе биде оротгонална. Значи, секоја симетрична матрица може да се дијагонализира со ортогонална матрица Q.

14.14. Да се дијагонализира матрицата: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{bmatrix}$.

Решение. Една квадратна матрица, со комплексни членови, $A = [a_{ij}]$ се вика *ермитска*, ако $A = A^{\mathrm{H}}$, т.е. ако A се сопаѓа со својата конјунгирано транспонирана матрица $A^{\mathrm{H}} = \overline{A}^{\mathrm{T}}$ (в. и зад. **7.13**); тоа значи дека $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Да забележиме дека дијагоналните елементи на A мора да се реални, зашто тие не се менуваат при конјугирањето ($a_{ii} = \overline{a}_{ii}$ ако и само ако a_{ii} е реален). Ако сите a_{ij} се реални, тогаш $A^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{T}}$, па ермитска матрица – тоа е симетрична матрица. Дадената матрица A е ермитска.

а) Сопствените вредности на A:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2-2i \\ -2+2i & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda-5)(\lambda+1); \qquad \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1.$$

б) Сопствените вектори на A:

$$\lambda_1 = 5: \quad (A - 5E)\cdot \mathrm{x}_1 = \mathrm{o}; \quad \begin{bmatrix} -4 & 2+2i \\ 2-2i & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = -1: \quad (A + 1\cdot E)\cdot \mathrm{x}_2 = \mathrm{o}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

в) $M = [\mathrm{x}_1\, \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{bmatrix}.$

Така, $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Забелешка. За ермитските матрици важат аналогни својства како за симетричните (зад. **14.13**). Имено, ако A е ермитска, $A = A^{\mathrm{H}}$, тогаш:

1^0. секоја сопствена вредност на A е реален број;

2^0. сопствените вектори на A што одговараат на различни сопствени вредности се заемно ортогонални (притоа, наместо транспонирање x^{T} овде се зема ермитско (т.е. конјунгирано) транспонирање: $\mathrm{x}^{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{y} = 0$);

3^0. постои дијагонализирачка матрица U којашто е *унитарна*, т.е.

$$U\,U^{\mathrm{H}} = U^{\mathrm{H}}\,U = E, \qquad \text{т.е.} \qquad U^{-1} = U^{\mathrm{H}}.$$

14.15. Да се пресмета A^k (k е природен број) за $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Решение. Ако матрицата A е дијагонализирлива, $A = M\Lambda M^{-1}$, тогаш:

$$A^k = (M\Lambda M^{-1})^k = (M\Lambda M^{-1})(M\Lambda M^{-1}) \ldots (M\Lambda M^{-1}) = M\Lambda^k M^{-1},$$

па можеме да го искористиме фактот што за дијагонална матрица $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ важи: $\Lambda^k = [\lambda_{ij}^k]$. Затоа прво ќе ја дијагонализираме A (ако може).

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda-2; \quad \lambda_1=-1 \;\; \lambda_2=2; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_1=-1\colon \quad (A+1E)\cdot \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2=2\colon \quad (A-2E)\cdot \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$M = [\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}, \quad A = M\Lambda M^{-1}$$

$$A^k = M\cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \begin{bmatrix} -2(-1)^k+5\cdot 2^k & 5\cdot(-1)^k-5\cdot 2^k \\ -2(-1)^k+2\cdot 2^k & 5\cdot(-1)^k-2\cdot 2^k \end{bmatrix};$$

$$A^k = \frac{(-1)^k}{3}\cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \frac{2^k}{3}\cdot \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

14.16. Дадени се сопствените вредности $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$ и сопствените вектори $\mathbf{x}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. Да се најде матрицата A.

Решение. Според (1) од зад. **14.12** имаме $A=M\Lambda M^{-1}$, каде што:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A = (M\Lambda)M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

14.17. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Да се најдат нејзините сопствени вредности и да се установи врската со сопствените вредности на матриците: а) A^2; б) A^{T}; в) A^{-1}.

Решение. $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$; $\lambda_1=2$ $\lambda_2=3$ се сопствените вредности на A.

а) $A^2 = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{vmatrix}$; $|\mu E - A^2| = \begin{bmatrix} \mu+1 & -5 \\ 10 & \mu-14 \end{bmatrix} = \mu^2-13\mu+36$;
$\mu_1 = 4 = 2^2 = \lambda_1^2$, $\mu_2 = 9 = 3^2 = \lambda_2^2$.

б) $|\lambda E - A^{\mathrm{T}}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6.$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ – сопствените вредности на A^{T} се еднакви со тие од A.

в) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $|\nu E - A^{-1}| = \begin{vmatrix} \nu-4/6 & 1/6 \\ -2/6 & \nu-1/6 \end{vmatrix} = \nu^2 - \frac{5}{6}\nu + \frac{1}{6}$;
$\nu_1=\frac{1}{2}$, $\nu_2=\frac{1}{3}$.

Забележуваме: $\nu_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda_1}$, $\nu_2=\frac{1}{3}=\frac{1}{\lambda_2}$, т.е. сопствените вредности на A^{-1} се реципрочни вредности од сопствените вредности на A.

14.18. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Да се најдат две матрици, слични на A.

Решение. За една матрица B велиме дека е *слична* со дадена матрица A, ако

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S\,, \tag{1}$$

за некоја несингуларна матрица S. Преминот од A кон $S^{-1}AS$ се вика *трансформација на сличност*, а S се вика *матрица на сличноста*.
Значи, за да ја решиме задачата, треба да „земеме" две матрици од множеството матрици $S^{-1}AS$, каде што A е дадената, а S е произволна несингуларна матрица (од истиот ред како A). На пример:

а) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$B = (S^{-1}A)S = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

б) $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$$B = (S^{-1}A)S = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3/2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Матриците $\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3/2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ се слични со дадената матрица A.

14.19. Да се покаже дека слични матрици имаат:

а) ист карактеристичен полином,

б) исти сопствени вредности, в) еднакви детерминанти.

Решение. Нека A и B се слични матрици, т.е. постои матрица S, таква што:

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

а) Означувајќи ја детерминантата на матрицата X со $|X|$ и користејќи го очигледното равенство $\lambda E = S^{-1}\lambda E S$, равенството $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$ и $|S^{-1}| \cdot |S| = 1$, добиваме:

$$|\lambda E - B| = |S^{-1}\lambda ES - S^{-1}AS| = |S^{-1}(\lambda E - A)S| = |S^{-1}|\,|\lambda E - A|\,|S| =$$

$$= |S^{-1}|\,|S|\,|\lambda E - A| = |\lambda E - A|\,.$$

Значи, карактеристичните полиноми на B и A се еднакви.

б) и в). Бидејќи полиномите $\det(\lambda \mathrm{E} - \mathrm{B})$, $\det(\lambda E - A)$ се еднакви следува дека тие имаат исти корени, како и еднакви вредности при $\lambda = 0$, т.е. $\det B = \det A$ (види **4.4** и (4) во **1.2**).
Ако $\mathbf{x}$ е сопствен вектор што ѝ одговара на сопствената вредност λ на A, тогаш:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \qquad SBS^{-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \qquad B(S^{-1}\mathbf{x}) = \lambda(S^{-1}\mathbf{x}).$$

Со тоа повторно докажавме дека λ е сопствена вредност и на матрицата B, со сопствен вектор $S^{-1}\mathbf{x}$.

14.20. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Да се провери дали е слична со A матрицата:

1) $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$; 2) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; 3) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. 1) Бидејќи $\det D = 12 \neq 3 = \det A$, според зад **14.19.** в), следува дека матрицата D не е слична со A.

2) Карактеристичните полиноми на A и C се, соодветно:

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

$$|\lambda E - C| = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3;$$

бидејќи тие се различни, според зад. **14.19.** б), следува дека матриците A и C не се слични. Да забележиме дека:

3) $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = |\lambda E - A|;$

A и B имаат ист карактеристичен полином и исти сопствени предности: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Бидејќи двете сопствени вредности се различни, следува дека соодветните сопствени вектори се линеарно независни, па матриците A и B се дијагонализирливи. Нека M е дијагонализирачка матрица за A, а P – за B:

$$A = M\Lambda M^{-1}, \qquad B = P\Lambda P^{-1}.$$

Тогаш $M^{-1}AM = \Lambda = P^{-1}BP$, од каде што

$$B = PM^{-1}AMP^{-1} = (MP^{-1})^{-1}\,A(MP^{-1}),$$

т.е. $B = S^{-1}AS$, при што $S = MP^{-1}$. Значи, B е слична со A. Матрицата S на сличноста можеме и ефективно да ја пресметаме откако ќе ги најдеме модалните матрици M и P (на A и B соодветно).

$\lambda_1 = 1$: $(A - E) \cdot \mathrm{x}_1 = \mathrm{o}$, т.е. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, па $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 3$: $(A - 3E) \cdot \mathrm{x}_2 = \mathrm{o}$, т.е. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, па $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_1 = 1$: $(B - E) \cdot \mathrm{y}_1 = \mathrm{o}$, т.е. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{y}_1 = \mathrm{o}$, па $\mathrm{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 3$: $(B - 3E) \cdot \mathrm{y}_2 = \mathrm{o}$, т.е. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{y}_2 = \mathrm{o}$, па $\mathrm{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Така,

$$S = MP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = B.$$

Задачи за вежбање

14.21. Дадени се полиномите $f(t) = t^2+3t+1$ и $g(t) = 5t-2$ и матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Да се најдат полиномите $(f+g)(t)$, $(f \cdot g)(t)$ и $(c \cdot f)(t)$ (каде што c е даден реален број) и да се покаже дека:
а) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, б) $(f \cdot g)(A) = f(A) + g(A)$,
в) $(c \cdot f)(A) = c \cdot f(A)$.

14.22. Да се покаже дека матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ е нула на полиномот $p(t) = t^3 - 5t^2 - 2t$.

14.23. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и полиномите: $p_1(t) = t^2+t+1$, $p_2(t) = t^3-1$, $p_3(t) = t^3-3t^2+3t-1$. Да се најдат матриците $p_i(A)$, $p_i(B)$ $(i = 1, 2, 3)$. Дали некој од дадените полиноми е анулаторен за A или за B?

14.24. Дадена е матрицата $B = \begin{bmatrix} 8 & 36 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Да се најде матрица A, таква што $B = A^3$

14.25. Да се најде горнотриаголна матрица од втор ред (барем една), којашто е нула на полиномот:

а) $p(t) = t^2 - 4t - 5$; б) $p(t) = t^3 - 3t + 2$.

Во задачите **14.26–14.37**, за дадената матрица, да се најде: а) карактеристичниот, б) минималниот полином, в) детерминантата (со помош на карактеристичниот полином).

14.26. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **14.27.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **14.28.** $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$ **14.29.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **14.30.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14.31. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **14.32** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **14.33.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **14.34.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

14.35. $\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ **14.36.** $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ **14.37.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Во задачите **14.38–14.40**, да се најде полином, којшто е анулаторен за дадената матрица.

14.38. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **13.39.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **14.40** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Во задачите **14.41–14.46** да се најде инверзната на дадената матрица со помош на теоремата на Хамилтон–Кели.

14.41. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ **14.42.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **14.43.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14.44. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ **14.45.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **14.46.** $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Во задачите **14.47–14.49** да се реши дадената матрична равенка, користејќи ја притоа теоремата на Хамилтон–Кели за наоѓање на инверзната матрица.

14.47. $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

14.48. $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

14.49. $A^{-1}XA = B$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

14.50. Користејќи ја теоремата на Хамилтон–Кели, да се пресметаат A^3, A^4 и (ако постои) A^{-1}, ако A е матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

14.51. Користејќи ја теоремата на Хамилтон–Кели, да се пресмета $p(A)$, ако
$$p(\lambda) = \lambda^8 - 2\lambda^7 - \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda - 5$$
и ако A е матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14.52. Да се најде A^{200}, ако A е: а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Помош. Да се тргне од карактеристичната равенка на A и теоремата на Хамилтон–Кели, а потоа да се покаже дека, за секој $n \in \mathbb{N}$, важи
$$A^{2n} = nA^2 - (n-1)E.$$

14.53. Користејќи ја теоремата на Хамилтон–Кели, да се покаже дека секоја триаголна матрица, чии елементи на главната дијагонала се нули, е нилпотентна (в. и **7.11**).

14.54. Да се покаже дека за матрицата
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$
минималниот полином е еднаков со карактеристичниот полином $(\lambda - 1)^n$.

Во задачите **14.55–14.61** да се најдат спектарот и сопствените вектори на дадените матрици.

14.55. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

14.56. $\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ -5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{bmatrix}$. **14.57.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. **14.58.** $\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

14.59. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$. **14.60.** $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$. **14.61.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

14.62. Дадена е матрицата A и векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ (во некоја база). Да се утврди кои од дадените вектори се сопствени вектори на A.

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$; $\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

14.63. За матрицата A, познати се нејзините сопствени вектори:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Да се најдат сопствените вредности на A (без да се решава нејзината карактеристична равенка).

14.64. Да се најде матрицата A, ако се дадени нејзините сопствени вредности и соодветните сопствени вектори (в. **14.16**).

а) $2, 4$; $(1, -1)^{\mathrm{T}}, (1, 1)^{\mathrm{T}}$; б) $5, -1$; $(1, 1)^{\mathrm{T}}, (2, -1)^{\mathrm{T}}$;

в) $1, 4$; $(3, 1)^{\mathrm{T}}, (2, 1)^{\mathrm{T}}$; г) $2, 1, 3$; $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 2, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$;

д) $2, 5, -4$; $(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (1, -1, 2)^{\mathrm{T}}$.

14.65. Да се најде по една база на секој карактеристичен потпростор на дадената матрица.

а) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$; $\quad$ б) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\quad$ в) $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

14.66. Да се најдат сопствените вредности и сопствените вектори на линеарната трансформација $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, дефинирана со:

а) $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_3 - x_2)$;

б) $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4x_3,\ 3x_2,\ -2x_1 - x_3)$.

(Притоа: бројот λ се вика *сопствена вредност* на f, ако постои ненулти вектор $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$, таков што

$$f(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}) = \lambda \mathbf{x}^{\mathrm{T}}. \qquad (1)$$

Секој ненулти вектор $\mathbf{x}$ што го задоволува равенството (1) се вика *сопствен вектор* на f, соодветен на сопствената вредност λ. Ако A е матрицата на f при некоја база, тогаш (1) е еквивалентно со $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.)

14.67. Да се најдат сопствените вредности на матрицата

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека сопствените вредности на триаголна матрица од n–ти ред се совпаѓаат со нејзините дијагонални елементи.

14.68. Кои се сопствените вектори на: а) единичната матрица (од n–ти ред); б) нултата матрица (од n–ти ред)?

14.69. Да претпоставиме дека сите сопствени вредности на матрицата A се нули. Дали може од тоа да се заклучи дека $A = 0$?

14.70. Да се најде потребен и доволен услов за да бидат еднакви карактеристичните вредности на матрицата $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

14.71. а) Запиши матрица од трет ред при која збирот на елементите во секоја редица е 1 и покажи дека бројот $\lambda = 1$ е нејзина сопствена вредност. Кој е соодветниот сопствен вектор? б) Да се даде целосен доказ на тој резултат за матрица од втор ред.

14.72. а) Да се најдат сопствените вредности на матрицата $A^{\mathrm{T}}A$, ако $A = [a_1\ a_2\ a_3]$.

б) Да се покаже дека сопствените вредности на матрицата $A^{\mathrm{T}}A$, за $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$ се:

$$\lambda_1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

14.73. Да се најдат сопствените вредности на квадратната матрица A од n–ти ред:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

14.74. Ако $A = [a_{jk}]$ е квадратна матрица од n–ти ред, тогаш збирот на елементите од дијагоналата се вика *трага на* A и се означува со $\operatorname{tr} A$. Значи:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\,. \tag{1}$$

Да се најде $\operatorname{tr}(AB)$ и $\operatorname{tr}(BA)$ ако

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

б) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

14.75. Да се најдат сопствените вредности на дадената матрица A и да се покаже дека трагата е еднаква со збирот од сопствените вредности, а детерминантата – со нивниот производ.

а) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ г) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

14.76. Нека матрицата A има сопствени вредности 0 и 1, што одговараат на сопствените вектори $(1, 2)^{\mathrm{T}}$ и $(2, -1)^{\mathrm{T}}$. Да се најде: A, $\operatorname{tr} A$, $\det A$ и да се воочи дека модалната матрица на A (и самата A) е симетрична. Дали мора A да биде симетрична кога модалната матрица на A е симетрична?

14.77. Кои се сопствените вредности и сопствените вектори на матрицата A од зад. **14.76**? Како се сврзани A и A^2 ?

14.78. Да се најдат сопствените вредности и сопствените вектори на матриците A и B:

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ б) $B = A - 5E$,

и да се согледа некоја врска меѓу нив. (Види и **14.116.**)

14.79. Да се најдат сопствените вредности и сопствените вектори на матриците A и B:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

а потоа – на нивните квадрати A^2 и B^2. Каква врска постои меѓу нив?

14.80. Да се покаже дека се слични дадените матрици A и B со матрица на сличноста, P:

а) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 \\ -7 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14.81. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Да се провери дали е слична со Aследнава матрица B:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

14.82. Да се покаже дека една реална квадратна матрица A од втор ред е слична со матрицата $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ако и само ако $A^2 = -E$.

14.83. Да се покаже дека ако матрицата B е слична со A, тогаш B^k е слична со A^k, $k \in \mathbb{N}$. Од тоа да се заклучи дека, ако A е корен на полиномот $p(x)$, тогаш и B е корен на $p(x)$.

14.84. Да се најде дијагонална матрица Λ, слична на дадената матрица A:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, б) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Која е матрицата P на сличноста?

14.85. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Да се покаже дека не постои дијагонална матрица што е слична со A (т.е. A не може да се дијагонализира).

14.86. Да се установи дека дадената матрица A има една еднократна и една двократна сопствена вредност, но дека има три линеарно независни сопствени вектори, па тоа може да се дијагонализира. Да се запише дијагонална матрица Λ слична на A и (барем) две дијагонализирачки матрици P_1 и P_2.

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

14.87. Дадени се матриците: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$,

$$B=\begin{bmatrix}4&-2&0&0&0\\-2&4&0&0&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&-2&4&-2\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&-\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{3}&0&1&\sqrt{2}\\0&0&0&-2&\sqrt{2}\\0&-\sqrt{3}&0&1&\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека: а) $AB=BA$ и AB е симетрична;

б) P е ортогонална; в) сопствените вредности на A се $\frac{3}{4}$ (четирикратно) и $\frac{15}{4}$, а на B: 2, 2, 6, 6, 0;

г) $P^{-1}AP=\frac{1}{4}\operatorname{diag}(3,3,3,3,15)$; д) $P^{-1}BP=\operatorname{diag}(2,2,6,6,0)$.

(Да се воочи дека матрицата P на сличноста е ортогонална.)

14.88. Нека $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Да се покаже дека A и B имаат различни карактеристични полиноми (значи не се слични, види **14.19**), но имаат ист минимален полином. (Значи, неслични матрици можат да имаат ист минимален полином.)

14.89. Да се покаже (со пример) дека матрици со ист карактеристичен полином не мора да бидат слични.

14.90. Да се покаже дека матриците

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&2&-1\\-3&-2&3\end{bmatrix}$$

имаат ист спектар, но не се слични.

Во задачите **14.91–14.94** да се провери дали може да се дијагонализира (над полето $\mathbb{R}$ на реалните броеви) дадената матрица A, т.е. да се најде дијагонална матрица Λ, слична на A. Во потврден случај, да се запише Λ (со точност до распоредот на дијагоналните елементи). Во задачите **14.91–14.93** да се запише и една дијагонализирачка матрица P.

14.91. а) $\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4&-2\\1&2\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}3&1\\-1&1\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}$.

14.92. а) $\begin{bmatrix}3&3&4\\0&2&2\\0&0&-1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2&0&3\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

14.93. а) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 9 & 4 & 6\\ -8 & 0 & -3\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$.

14.94. а) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Во задачите **14.95–14.96**, да се дијагонализира над полето $\mathbb{C}$ од комплексните броеви дадената матрица A и да се запише една дијагонализирачка матрица P:

14.95. а) $\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}i & i\\ i & i\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.

14.96. а) $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & i\\ 0 & 0 & i & 1\end{bmatrix}$.

14.97. Нека $f{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е линеарна трансформација и нека S е сопствен простор, придружен на сопствената вредност λ од f. Да се докаже дека S е f–инваријантен.

14.98. За следните линеарни трансформации $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ да се најдат сопствените вредности и сопствените вектори, а потоа нетривијалните f–инваријантни потпростори (т.е. f–инваријантни што се различни од $\mathbb{R}^3$ и $\{\mathbf{o}\}$).

а) $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_2 + x_3,\ 2x_3)$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2,\ x_3 - 3x_1,\ x_1)$.

14.99. Да се најдат сите инваријантни потпростори на матрицата $A = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{bmatrix}$, разгледувана како линеарна трансформација на $\mathbb{R}^2$.

14.100. Да се најдат сите инваријантни потпростори на $A = \begin{bmatrix}2 & -4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$, разгледувана како линеарна трансформација на а) $\mathbb{R}^2$, б) $\mathbb{C}^2$.

14.101. Да се покаже дека секој потпростор од векторскиот простор V е инваријантен под: а) идентичната трансформација, б) нултата трансформација.

14.102. Нека потпросторот S е инваријантен под линеарните трансформации $f: V \to V$ и $g: V \to V$. Да се покаже дека S е исто така инваријантен под $f + g$ и fg.

14.103. Нека V е векторски простор со непарна димензија (поголема од 1) над полето $\mathbb{R}$. Да се покаже дека секоја линеарна трансформација на V има инваријантен потпростор, различен од V и $\{\mathbf{o}\}$.

14.104. Нека $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е линеарна трансформација и нека $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ е кој било полином. Да се покаже дека: а) $\operatorname{Ker} f^2$ – јадрото на $f^2(= ff)$, б) $\operatorname{Ker} P(f)$ – јадрото на $P(f) = a_0\varepsilon + a_1 f + \cdots + a_k f^k$, е f–инваријантен потпростор.

14.105. Нека S е инваријантен под ленеарната трансформација $f: V \to V$. Да се покаже дека S е инваријантен и под $P(f)$, за кој било полином $P(t)$.

* * *

Во задачите што следат се претпоставува дека матрицата A е квадратна, со ред n, ако не е поинаку назначено. Од технички причини, вектор–колоните $\mathbf{x}$ се запишувани со X.

14.106. Да се покаже дека сопствените вредности на а) дијагонална матрица, б) триаголна матрица, се точно елементите од главната дијагонала.

14.107. Да се покаже дека A и A^{T} имаат исти карактеристични полиноми, па значи и исти сопствени вредности.

14.108. Ако λ е сопствена вредност на матрицата A, а μ – на B, дали мора $\lambda\mu$ да е сопствена вредност на AB?
Некој расудувал вака: „Ако $AX = \lambda X$, $BX = \mu X$ (при што X е вектор–колона), тогаш $(AB)X = A(BX) = A(\mu X) = \mu(AX) = \mu(\lambda X) = (\lambda\mu)X$, што значи дека одговорот е потврден". Сепак, одговорот е – „не". Во што е грешката на горното расудување?

14.109. а) Да се состават матрици A, B од втор ред, такви што сопствените вредности на матрицата AB да не се еднакви со производите на сопствените вредности на A и B, а сопствените вредности на $A+B$ да не се еднакви со збировите на нивните сопствени вредности.

б) Да се провери притоа, сепак, дека збирот на сопствените вредности на $A+B$ е еднаков со збирот на сите сопствени вредности на матриците A и B, и дека аналогно тврдење важи и за производите. (Зошто е тоа така?)

14.110. Нека сопствените вредности на дадена матрица A од n–ти ред се $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Да се покаже дека:

а) $\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$;

б) $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n$; в) матрицата A е сингуларна ако и само ако некоја нејзина сопствена вредност е нула;

г) $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

14.111. Ако A и B се квадратни матрици од n–ти ред, а α и β се произволни броеви, тогаш

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot \operatorname{tr} A + \beta \cdot \operatorname{tr} B$$

(т.е. пресликувањето tr: $\mathbb{M}_n \to \mathbb{R}$ е линеарно). Докажи.

14.112. Да се докаже дека $\operatorname{tr}(AA^{\mathrm{T}}) \geq 0$.

14.113. Ако A е $m \times n$, а B е $n \times m$–матрица, тогаш AB и BA се квадратни матрици од m–ти и n–ти ред соодветно. Да се покаже дека $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

14.114. Нека λ е сопствена вредност на матрицата A. Да се докаже дека: а) λ^2 е сопствена вредност на A^2, б) λ^k е сопствена вредност на $A^k (k \in \mathbb{N})$, а сопствениот вектор на A, соодветен на λ, е сопствен вектор и на A^2 (односно A^k) што одговара на λ^2 (односно на λ^k).

14.115. Да се докаже дека сите сопствени вектори на матрицата A се сопствени вектори и на матрицата $p(A)$, каде што $p(t)$ е произволен полином. Притоа, ако $AX = \lambda X$, тогаш $p(A)X = p(\lambda)X$ (и тука: X е вектор–колона).

14.116. Нека λ е сопствена вредност на матрицата A и нека X е соодветниот сопствен вектор. а) Да се докаже дека X е сопствен вектор и на матрицата $B = A - \alpha \cdot E$ (α е даден број) и да се најде соодветната сопствена вредност μ на B (в. и **14.78**).

б) При претпоставките: $\lambda \neq 0$ и A е несингуларна, да се докаже дека X е сопствен вектор и на A^{-1} и да се најде соодветната сопствена вредност τ на A^{-1}.

14.117. За несингуларна матрица A, да се покаже дека:

$$\det(\lambda E - A^{-1}) = (\det A) \cdot \det\left(\tfrac{1}{\lambda} \cdot E - A\right),$$

па значи, ако сопствените вредности на A се $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, различни или не, тие од A^{-1} се $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n$, а сопствените вектори на A^{-1} се истите како на A.

14.118. Да се докаже дека: ако A е реална ортогонална матрица од трети ред, тогаш 1 или -1 е сопствена вредност на A, во зависност од тоа дали $\det A = 1$ или $\det A = -1$.

14.119. а) Ако $AB = BA$ и ако X е сопствен вектор што е придружен на еднократната сопствена вредност λ од A, тогаш X е сопствен вектор и на B. б) Ако A и B имаат иста модална матрица M (т.е. сопствените вектори на A се исти со сопствените вектори на B), тогаш $AB = BA$. в) Со конкретен пример да се поткрепат горните резултати, земајќи ја матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и наоѓајќи соодветна матрица B.

14.120. Со транспонирање на релацијата $M^{-1}AM = \Lambda$, да се најде матрица што ја дијагонализира A^{T} и да се запише дијагоналната матрица што се добива при тоа.

14.121. Да се покаже дека за секоја симетрична матрица S постои ортогонална матрица B, таква што $B^{\mathrm{T}}SB = D$, каде што D е дијагонална матрица. (Посебно да се разгледа случајот $S = O$.)

14.122. Да се покаже дека за секоја квадратна матрица A од n–ти ред постојат ортогонални матрици B и C, такви што $B^{\mathrm{T}}AC = D$, каде што D е дијагонална матрица со членови (по дијагоналата) $d_j > 0$, $j = 1, \ldots, r$, при што r е рангот на A.

14.123. Да се докаже дека релацијата сличност на матрици ($\approx$) е релација за еквивалентност (т.е. $\approx$ е: рефлексивна, симетрична и транзитивна).

14.124. Да се докаже дека, ако барем едната од две матрици A, B (од n–ти ред) е несингуларна, тогаш матриците AB и BA се слични. (Да се покаже дека тоа не важи, ако обете се сингуларни.)

14.125. Нека $B = P^{-1}AP$. Да се покаже дека матрицата Q го задоволува условот $Q^{-1}AQ = B$ ако и само ако $Q = RP$, каде што R е несингуларна матрица, комутативна со A.

14.126. Да се докаже дека: ако матриците A и B се слични (т.е. $B = P^{-1}AP$) и ако λ е сопствена вредност на A, тогаш λ е сопствена вредност на B и сопствените вектори X и Y на A и B соодветно, што одговараат на λ, се сврзани со равенството $Y = P^{-1}X$.

14.127. Дадена е комплексната матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

а) Да се запише $A^{\text{н}}$ и да се пресметаат $C = A^{\text{н}}A$ и $D = AA^{\text{н}}$. (Притоа: $A^{\text{н}}$ означува *ермитско транспонирање* на матрицата A, т.е. $A^{\text{н}} = \overline{A}^{\text{T}}$; в. и **7.111.**) Каква е врската меѓу C и $C^{\text{н}}$, односно меѓу D и $D^{\text{н}}$?

б) Дали матриците $C = A^{\text{н}}A$ и $D = AA^{\text{н}}$ се ермитски за која било матрица A (т.е. дали $C = C^{\text{н}}$, $D = D^{\text{н}}$)? (Види **7.112.**)

в) Да се дијагонализираат матриците C и D од а).

14.128. Нека A е *унитарна матрица* (т.е. за A важи: $A^{\text{н}}A = AA^{\text{н}} = E$ т.е. $A^{\text{н}} = A^{-1}$; в. **7.119**). Да се докаже дека:

а) секоја сопствена вредност λ на A има модул $|\lambda|$ еднаков со 1; б) $|\det A| = 1$, но самата детерминанта не мора да е 1.

14.129. Да се покаже дека кои било два од следните три услови го повлекува третиот: а) A е ермитска, б) A е унитарна. в) A е инволуторна. (Спореди со **7.108**).

14.130. Нека комплексната матрица A е ермитска. Да се докаже дека: а) за кој било комплексен вектор X, бројот $X^{\text{н}}AX$ (како и $X^{\text{T}}A\overline{X}$) е реален; б) бројот $X^{\text{н}}BX$ може да не биде реален, ако B не е ермитска, дури и кога B е реална (значи, само ермитските матрици го имаат својството а)); да се наведе пример; в) сите сопствени вредности на A се реални; г) ако λ и μ се две различни сопствени вредности на A, тогаш придружените сопствени вектори X и Y (на λ и μ соодветно) се ортогонални (т.е. $X^{\text{н}}Y = Y^{\text{н}}X = 0$); д) секоја симетрична реална матрица ги има својствата в) и г).

15. ЛИНЕАРНИ, БИЛИНЕАРНИ И КВАДРАТНИ ФОРМИ

Решени задачи

15.1. Да се покаже дека се линеарни функциоали приведените пресликувања. а) π_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, дефинирано со: $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ наречено *i–та проекција* на $\mathbb{R}^n$) б) $\varphi: V \to \mathbb{R}$, каде што $V = C[\alpha, \beta]$ е векторскиот простор од сите функции $x(t)$ непрекинати во сегментот $[\alpha, \beta]$, дефинирано со

$$\varphi\big(x(t)\big) = \int_\alpha^\beta x(t)\, dt.$$

Решение. Нека V е векторски простор над полето K. Едно пресликување $\varphi: V \to K$ се вика *линеарен функционал* (или *линеарна форма*) на V ако, за секои x, $\mathrm{y} \in V$ и секои a, $b \in K$.

$$\varphi(a\mathrm{x} + b\mathrm{y}) = a\varphi(\mathrm{x}) + b\varphi(\mathrm{y}).$$

Со други зборови, линеарен функционал на V е линеарно пресликување од V во K. (Во разгледувањата и задачите натаму, ќе сметаме обично дека K е полето $\mathbb{R}$.) а) Нека x, $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$. Тогаш:

$$\pi_i(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \pi_i(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = x_i + y_i = \pi_i(\mathrm{x}) + \pi_i(\mathrm{y}),$$
$$\pi_i(a\mathrm{x}) = \pi_i(ax_1, \ldots, ax_n) = ax_i = a\pi_i(\mathrm{x}),$$

што е еквивалентно со $\pi_i(a\mathrm{x} + b\mathrm{y}) = a\pi_i(\mathrm{x}) + b\pi_i(\mathrm{y})$.

б) Нека $x(t)$, $y(t) \in C[\alpha, \beta]$ и a, $b \in \mathbb{R}$. Имаме

$$\varphi\big(ax(t) + by(t)\big) = \int_\alpha^\beta [ax(t) + by(t)]dt = a\int_\alpha^\beta x(t)\, dt + b\int_\alpha^\beta y(t)\, dt = = a\varphi\big(x(t)\big) + b\varphi\big(y(t)\big).$$

15.2. Да се провери дали е линеарен функционал следново пресликување:

а) φ: $\mathbf{M}_n \to \mathbb{R}$, $\varphi(A) = \mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$; $A = [a_{ij}]$;

б) φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(\mathrm{x}) = (2, -3, 4) \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{T}} = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$;

в) φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(\mathrm{x}) = x_1x_2 - x_2x_3$; $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$;

г) $\varphi: C[a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi\big(x(t)\big) = x(t_0)$, t_0 е фиксиран број од $[a, b]$.

15.3. Нека со V^* е означено множеството од сите линеарни функционали, зададени на n–димензионалниот векторски простор V над полето $\mathbb{R}$. Во V^* се дефинираат операции собирање на линеарни функционали φ, ψ и множење на линеарен функционал со број a, со:

$$(\varphi + \psi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}), \qquad (a\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(a\mathbf{x}).$$

Да се покаже дека V^* е векторски простор над $\mathbb{R}$.

V^* се вика *дуален простор* на V или *спрегнат простор* со V.)

15.4. Нека φ и ψ се линеарни функционали на $\mathbb{R}^2$ (т.е. φ, ψ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), дефинирани со:

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2, \qquad \psi(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2.$$

Да се најдат: а) $\varphi + \psi$; б) 5φ; в) $2\varphi - 3\psi$.

15.5. Нека φ е линеарен функционал на $\mathbb{R}^n$ и нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ е база на $\mathbb{R}^n$. Да се покаже дека φ го има следново (*скаларно* односно *векторско*) *претставување*:

$$\varphi(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{T}}.$$

Решение. Нека $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ и да ставиме

$$\varphi(\mathbf{a}_i) = a_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

каде што a_i е даден реален број. Тогаш $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ и

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{a}_1 + x_n\,\mathbf{a}_n) = x_1\,\varphi(\mathbf{a}_1) + \cdots + z_n\varphi(\mathbf{a}_n) =$$
$$= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{T}}.$$

15.6. Нека $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ е база на векторскиот простор V над полето K и нека $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ се линеарни функционали дефинирани со:

$$\varphi_i(\mathbf{b}_j) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad i = j \\ 0 & \text{за} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Да се покаже дека $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ е база на векторскиот простор V^*. (Базата $\{\varphi_i\}$ се вика *дуална база* на $\{\mathbf{b}_i\}$.)

Решение. Доволно е да се докаже дека множеството $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$: го генерира V^* и е линеарно независно.

а) Да покажеме дека $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ го генерира V^*. Нека φ е произволен елемент од V^* и нека $\varphi(\mathbf{b}_1) = k_1, \ldots, \varphi(\mathbf{b}_n) = k_n$. Да ставиме $\psi = k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n$. Тогаш

$$\varphi(\mathbf{b}_1) = (k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n)(\mathbf{b}_1) = k_1\varphi_1(\mathbf{b}_1) + \cdots + k_n\varphi_n(\mathbf{b}_n) =$$
$$= k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_1$$

и слично за $i = 2, \ldots, n$: $\psi(\mathbf{b}_i) = k_i$. Значи $\varphi(\mathbf{b}_i) = \psi(\mathbf{b}_i)$ за $i = 1, \ldots, n$. Бидејќи φ и ψ се совпаѓаат на базните вектори, следува дека $\varphi = \psi = k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n$. Следствено, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ го генерира V^*.

б) Да покажеме дека $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ е линеарно независно.
Нека $a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n = 0$. Применувајќи ги двете страни од тоа равенство на $\mathbf{b}_1$, ќе добиеме:

$$0 = 0(\mathbf{b}_1) = (a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n)(\mathbf{b}_1) = a_1\varphi_1(\mathbf{b}_1) + \cdots + a_n\varphi_n(\mathbf{b}_1) = \\ = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = a_1 .$$

Слично за $i = 2, \ldots, n$: $0 = 0(\mathbf{b}_i) = (a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n)(\mathbf{b}_i) = a_i$. Значи: $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$, па според тоа, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ е линеарно независно.

15.7. Нека $\dim V = n$. Да се докаже дека и $\dim V^* = n$.

15.8. За база на $\mathbb{R}^2$ да се земе $\{\mathbf{b}_1 = (2, 1), \mathbf{b}_2 = (5, 2)\}$ и да се најде дуалната база $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Решение. Бараме линеарни функционали $\varphi_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, $\varphi_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2$, такви што

$$\varphi_1(\mathbf{b}_1) = 1, \quad \varphi_1(\mathbf{b}_2) = 0, \quad \varphi_2(\mathbf{b}_1) = 0, \quad \varphi_2(\mathbf{b}_2) = 1 .$$

Значи:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{b}_1) &= \varphi_1(2, 1) = 2a + b = 1 \\ \varphi_1(\mathbf{b}_2) &= \varphi_1(5, 2) = 5a + 2b = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad a = -2, \ b = 5$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(\mathbf{b}_1) &= \varphi_2(2, 1) = 2c + d = 0 \\ \varphi_2(\mathbf{b}_2) &= \varphi_2(5, 2) = 5c + 2d = 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad c = 1, \ d = -2 .$$

Според тоа, дуалната база е $\{\varphi_1(x_1, x_2) = -2x_1 + 5x_2, \ \varphi_2(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2\}$.

15.9. Да се најде дуалната база $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ за следнава база на $\mathbb{R}^2$: $\{(1, 3), (1, 2)\}$.

15.10. Да се најде дуалната база на секоја од следните бази на $\mathbb{R}^3$:
а) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$; б) $\{(1, 1, -1), (3, 1, -2), (7, 2, -4)\}$.

15.11. Нека V е векторскиот простор од полиноми над $\mathbb{R}$ со степен ≤ 1, т.е. $V = \{p(t) = a + bt \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$. Нека $\varphi_1, \varphi_2 \colon V \to \mathbb{R}$ се дефинирани со:

а) $\varphi_1\big((p)(t)\big) = \int\limits_0^1 p(t)\,dt$ и $\varphi_2\big(p(t)\big) = p(1)$;

б) $\varphi_1\big(p)(t)\big) = \int\limits_0^1 pt)\,dt$ и $\varphi_2\big(p(t)\big) = \int\limits_0^2 p(t)\,dt$.

(Да се воочи дека φ_1 и φ_2 се линеарни функционали, т.е. $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$.) Да се најде база $\{p_1, p_2\}$ на V, дуална на базата $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Решение. а) Нека $p_1 = a + bt$ и $p_2 = c + et$. Од дефиницијата за дуална база имаме:

$$\varphi_1(p_1) = 1, \quad \varphi_2(p_1) = 0, \quad \varphi_1(p_2) = 0, \quad \varphi_2(p_2) = 1,$$

па

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(p_1) &= \int_0^1 (a+bt)\,dt = a + \frac{1}{2}b = 1 \\ \varphi_2(p_1) &= p_1(1) = a + b = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad a = 2,\ b = -2\,.$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(p_2) &= \int_0^1 (c+et)\,dt = c + \frac{1}{2}e = 0 \\ \varphi_2(p_2) &= p_2(1) = c + e = 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad c = -1,\ e = -2\,.$$

Значи $\{p_1 = 2 - 2t,\ p_2 = -1 + 2t\}$ е базата на V што е дуална на $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

15.12. Нека V е векторскиот простор од полиноми над $\mathbb{R}$ со степен ≤ 2. Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ се линеарни функционали на V дефинирани со:

$$\varphi_1\big(p(t)\big) = \int_0^1 p(t)\,dt, \quad \varphi_2\big(p(t)\big) = p'(1), \quad \varphi_3\big(p(t)\big) = p(0).$$

Притоа, $p(t) = a + bt + ct^2$, а $p'(t)$ го означува изводот на $p(t)$. Да се најде базата $\{p_1(t),\ p_2(t),\ p_3(t)\}$ на V што е дуална на $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

15.13. Нека $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ е стандардната база на $\mathbb{R}^n$. Да се покаже дека дуалната база е $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$, каде што π_i е i–та проекција на $\mathbb{R}^n$: $\pi_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$.

15.14. Нека V е векторски простор над $\mathbb{R}$ и нека $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Нека $\psi\colon V \to \mathbb{R}$, дефинирано со: $\psi(\mathbf{v}) = \varphi_1(\mathbf{v}) \cdot \varphi_2(\mathbf{v})$, исто така е во V^*. Да се покаже дека $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_2 = 0$.

15.15. Нека $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ е база на V и нека $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ е дуалната база на V^*. Да се докаже дека, за секој вектор $\mathbf{x} \in V$, важи

$$\mathbf{x} = \varphi_1(\mathbf{x})\mathbf{b}_1 + \varphi_2(\mathbf{x})\mathbf{b}_2 + \cdots + \varphi_n(\mathbf{x})\mathbf{b}_n \tag{1}$$

и, за кој било линеарен функционал $\psi \in V^*$, важи:

$$\psi = \psi(\mathbf{b}_1)\varphi_1 + \psi(\mathbf{b}_2)\varphi_2 + \cdots + \psi(\mathbf{b}_n)\varphi_n\,. \tag{2}$$

Доказ. Да претпоставиме дека

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n\,. \tag{3}$$

Тогаш $\varphi_1(\mathbf{x}) = x_1\varphi_1(\mathbf{b}_1) + \cdots + x_n\varphi_1(\mathbf{b}_n) = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_n \cdot 0 = x_1$ и, слично за $i = 2, \ldots, n$: $\varphi_i(\mathbf{x}) = x_i$. Значи $\varphi_1(\mathbf{x}) = x_1, \ldots, \varphi_n(\mathbf{x}) = x_n$. По заменувањето на овие резултати во (3), ќе го добиеме (1).
Да го докажеме сега и (2). Ако го примениме линеарниот функционал ψ на двете страни од (1), ќе добиеме

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \varphi_1(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{b}_1) + \cdots + \varphi_n(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{b}_n) = \psi(\mathbf{b}_1)\,\varphi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \psi(\mathbf{b}_n)\,\varphi_n(\mathbf{x}) = \\ &= \big(\psi(\mathbf{b}_1)\varphi_1 + \cdots + \psi(\mathbf{b}_n)\varphi_n\big)(\mathbf{x}_n)\,.\end{aligned}$$

Бидејќи тоа важи за секој $\mathbf{x} \in V$, следува дека $\psi = \psi(\mathbf{b}_1)\varphi_1 + \cdots + \psi(\mathbf{b}_n)\varphi_n$, т.е. (2).

15.16. Нека W е подмножество (не мора потпростор) од векторскиот простор V. Еден линеарелн функционал φ се вика *анулатор* (или *анулаторен функционал*) на W ако

$$\varphi(\mathbf{w}) = 0 \text{ за секој } \mathbf{w} \in W, \text{ т.е. ако } \varphi(W) = \{0\}.$$

Да се покаже дека множеството од сите ануллатори не W (ознака: W^0) е потпростор од V^*.

(W^0 се вика исто така *анулатор* на W.)

15.17. Да се покаже дека, ако $\varphi \in V^*$ е анулатор на некое множество S од V, тогаш φ е анулатор и на линеарната обвивка $L(S)$ од S. Значи: $S^0 = \big(L(S)\big)^0$.

Решение. Нека $\mathbf{v}$ е произволен елемент од $L(S)$. Тогаш постојат $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r \in S$ такви што $\mathbf{v} = a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_r\mathbf{w}_r$, па

$$\varphi(\mathbf{v}) = a_1\varphi(\mathbf{w}_1) + \cdots + a_r\varphi(\mathbf{w}_r) = a_1 \cdot 0 + \cdots + a_r \cdot 0 = 0.$$

Следствено, поради произволноста на $\mathbf{v}$ од $L(S)$, φ го анулира $L(S)$.

15.18. Нека W е потпростор од $\mathbb{R}^4$ генериран од векторите $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -5, -1)$ и $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -2, 3)$. Да се најде една база на анулаторот W^0 на W.

Решение. Според **15.17**, доволно е да најдеме база на множеството линеарни функционали $\varphi(x, y, z, u) = ax + by + cz + du$, за кои $\varphi(\mathbf{v}_1) = 0$ и $\varphi(\mathbf{v}_2) = 0$:

$$\varphi(1, 2, -5, -1) = a + 2b - 5c - d = 0\,,$$
$$\varphi(0, 1, -2, 3) = b - 2c + 3d = 0\,.$$

Добиениот систем равенки по непознатите a, b, c, d е со скалеста форма, со слободни променливи c и d.

За $c = 1$ и $d = 0$ се добива решението: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 0$ и, според тоа, линеарниот функционал $\varphi_1(x, y, z, u) = x + 2y + z$.

За $c = 0$ и $d = 1$ се добива решението: $a = 7$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$, па значи – функционалот $\varphi_2(x, y, z, u) = 7x - 3y + u$.

Множеството линеарни функционали $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ е база на анулаторот W^0 на W.

15.19. Нека W е потпростор од $\mathbb{R}^4$ генериран од векторите

а) $(1, 1, -2, 3)$, $(0, 1, 2, -3)$, $(0, 0, 1, -2)$;

б) $(1, 2, -3, 4)$, $(1, 3, -2, 6)$, $(1, 4, -1, 8)$.

Да се најде една база на анулаторот W^0 од W.

15.20. Нека W е потпростор од $\mathbb{R}^3$ генериран од $(2, 1, 0)$ и $(0, 1, 2)$. Да се најде една база на анулаторот W^0 од W.

15.21. Нека U и V се векторски простори над полето K, нека $f\colon U \to V$ е линеарно пресликување и нека φ е линеарен функционал на V, т.е. $\varphi \in V^*$. Да се докаже дека: а) составот $\sigma = \varphi f$ е линеарно пресликување од U во K, т.е. $\sigma \in U^*$;

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\varphi f"'] & V \arrow[r, "\varphi"] & K \end{tikzcd}$$

б) пресликувањето $f^{\mathrm{T}}: V^* \to U^*$ дефинирано со:

$$f^{\mathrm{T}}(\varphi) = \varphi f$$

(т.е. $\big(f^{\mathrm{T}}(\varphi)\big)(\mathbf{u}) = \varphi\big(f(\mathbf{u})\big)$, за секој $\mathbf{u} \in U$) е линеарно.

Забелешка. f^{T} се вика *транспозиција* на f. Да се воочи добро дека: ако f е линеарно пресликување од U во V, тогаш f^{T} е линеарно пресликување од V^* во U^*:

$$U \xrightarrow{f} V, \qquad U^* \xleftarrow{f^{\mathrm{T}}} V^*.$$

15.22. Нека φ е линеарен функционал на $\mathbb{R}^2$ дефиниран со: $\varphi(x, y) = 3x - 2y$. За секое од следните линеарни пресликувања $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ да се најде $\big(f^{\mathrm{T}}(\varphi)\big)(x, y, z)$:

а) $f(x, y, z) = (x + y - z,\, x - 2y)$; б) $f(x, y, z) = (x + y,\, y + z)$.

15.23. Нека φ е линеарен функционал на $\mathbb{R}^2$ дефиниран со: $\varphi(x, y) = 2x + 3y$. За секоја од следните линеарни трансформации f на $\mathbb{R}^2$ да се најде $\big(f^{\mathrm{T}}(\varphi)\big)(x, y)$: а) $f(x, y) = (x, 0)$; б) $f(x, y) = (x + y, 2x)$; в) $f(x, y) = (5x - 2y,\, y - 3x)$.

15.24. Нека $f: U \to V$ е линеарно пресликување и нека $f^{\mathrm{T}}: V^* \to U^*$ е неговата транспозиција. Да се докаже дека јадрото од f^{T} е анулатор на сликата од f, т.е. $\operatorname{Ker} f^{\mathrm{T}} = (\operatorname{Im} f)^0$.

15.25. Нека $f: U \to V$ е линеарно пресликување и нека U има конечна димензија. Да се докаже дека $\operatorname{Im} f^{\mathrm{T}} = (\operatorname{Ker} f)^0$.

15.26. Нека $f: U \to V$ и $g: V \to W$ се линеарни пресликувањата. Да се докаже дека $(gf)^{\mathrm{T}} = f^{\mathrm{T}} g^{\mathrm{T}}$.

15.27. Нека φ и ψ се линеарни функционали на V и нека $f: V \times V \to \mathbb{R}$ е дефинирано со: $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x})$. Да се докаже дека f е билинеарна форма на V.

Решение. Нека V е реален векторски простор со конечна димензија. *Билинеарна форма* на V е пресликување $f: V \times V \to \mathbb{R}$, коешто ги исполнува условите:

(i) $f(a\mathbf{x} + b\mathbf{u}, \mathbf{y}) = af(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bf(\mathbf{u}, \mathbf{y})$,

(ii) $f(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bf(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, за кои било $a, b \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

(Условот (i) може да се искаже и вака: f е линеарно по првата променлива, а (ii): f е линеарно по втората променлива.)

Во конкретниот случај треба да покажеме само дека се исполнети за f условите (i) и (ii), имајќи предвид дека φ и ψ се линеарни функционали. За (i) имаме:

$$\begin{aligned} f(a\mathrm{x}+b\mathrm{u},\, \mathrm{y}) &= \varphi(a\mathrm{x}+b\mathrm{u})\,\psi(\mathrm{y}) = [a\varphi(\mathrm{x})+b\varphi(\mathrm{u})]\,\psi(\mathrm{y}) = \\ &= a\varphi(\mathrm{x})\,\psi(\mathrm{y})+b\varphi(\mathrm{u})\,\psi(\mathrm{y}) = af(\mathrm{x},\mathrm{y})+bf(\mathrm{u},\mathrm{y}). \end{aligned}$$

Аналогно за (ii): $f(\mathrm{x},\, a\mathrm{y}+b\mathrm{v}) = af(\mathrm{x},\mathrm{y})+bf(\mathrm{x},\mathrm{v})$.

15.28. Нека x и y се вектори од $\mathbb{R}^n$: $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. *Скаларен производ* на x и y (ознака: $\mathrm{x}\bullet\mathrm{y}$) се вика бројот добиен како збир од производот на соодветните компоненти:

$$\mathrm{x}\bullet\mathrm{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Да се покаже дека $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}\bullet\mathrm{y}$ е билинеарна форма на $\mathbb{R}^n$.

15.29. Нека $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$. Да се провери кои од следните пресликувања f се билинеарни форми на $\mathbb{R}^2$.

а) $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 5x_1y_2 + 3x_2y_1$; б) $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x_1 + y_1$;

б) $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x_1x_2 + y_1y_2$; г) $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2x_1y_2$;

д) $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$; ѓ) $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 1$.

15.30. Нека f е билинеарна форма на V и нека $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ е база на V (не мора да е тоа стандардната база). Да се покаже дека:

а) f е наполно определена со вредностите $f(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)$ (n^2 на број);

б) постои матрица $A = [a_{ij}]$, којашто ја претставува f во следнава смисла:

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (x_1, \ldots, x_n)\cdot A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = X^{\mathsf{T}}AY.$$

(Притоа, како и во §14, X е ознака за векторот x, запишан како вектор–колона.)

Решение. а) Нека $\mathrm{x},\mathrm{y}\in V$, $\mathrm{x} = x_1\mathrm{e}_1+\cdots+x_n\mathrm{e}_n$ и $\mathrm{y} = y_1\mathrm{e}_1+\cdots+y_n\mathrm{e}_n$. Тогаш

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x},\mathrm{y}) =& f(x_1\mathrm{e}_1+\cdots+x_n\mathrm{e}_n,\; y_1\mathrm{e}_1+\cdots+y_n\mathrm{e}_n) = \\ =& x_1y_1\,f(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_1)+x_1y_2\,f(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2)+\cdots+x_1y_n\,f(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_n)+ \\ &+x_2y_1\,f(\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_1)+x_2y_2\,f(\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_2)+\cdots+x_2y_n\,f(\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_n)+ \\ &+\cdots+x_ny_1\,f(\mathrm{e}_n,\mathrm{e}_1)+\cdots+x_ny_n\,f(\mathrm{e}_n,\mathrm{e}_n), \end{aligned}$$

или, употребувајќи краток запис за сумирање:

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\,f(\mathrm{e}_i,\mathrm{e}_j). \tag{1}$$

Според тоа, со броевите $f(\mathrm{e}_i,\mathrm{e}_j)$ (n^2 на број) f е наполно определна.

б) Ставајќи $f(\mathrm{e}_i,\mathrm{e}_j) = a_{ij}$ ($i, j = 1, \ldots, n$), каде што a_{ij} се дадени броеви (n^2 на број), равенството (1) го добива обликот

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j \tag{1'}$$

(наречен: *скаларно* или *координатно претставување* на f). Од броевите a_{ij} можеме да ја формираме матрицата $A = [a_{ij}]$ и равенството (1′) да го претставиме во обликот

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum a_{ij}\, x_i\, y_j = (x_1, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

т.е.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^{\mathrm{T}} A Y \tag{2'}$$

(наречен: *матрично претставување* на билинеарната форма f).

15.31. Нека f е билинеарна форма зададена координатно со:

а) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$;

б) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_2y_2$;

в) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_1 - 4x_2y_3 + 5x_3y_2 - x_3y_3$;

г) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 4x_2y_3 - x_3y_1 + 4x_3y_2$.

Да се претстави f со матричен запис.

Решение. г) Нека $A = [a_{ij}]$ е матрица при која a_{ij} е коефициентот на x_iy_j. Тогаш

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^{\mathrm{T}} A Y = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ 2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

15.32. Да се запише матрицата на следната билинеарна форма на $\mathbb{R}^3$

а) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 + 3x_3y_2$;

б) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 7x_3y_3 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1$.

15.33. Да се претстави скаларно (т.е. координатно) билинеарната форма f, ако нејзината матрица е:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

15.34. Нека A е реална матрица од n–ти ред. Да се покаже дека пресликувањето $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, дефинирано со

$$f(X, Y) = X^{\mathrm{T}} A Y$$

е билинеарна форма на $\mathbb{R}^n$.

15.35. Нека P е матрица за премин од базата $\{\mathbf{e}_i\}$ во друга база $\{\mathbf{e}'_i\}$. Да се покаже дека: ако A е матрицата на f во почетната база $\{\mathbf{e}_i\}$, тогаш

$$B = P^{\mathrm{T}} A P$$

е матрицата на f во новата база $\{\mathbf{e}'_i\}$.

(Значи, матриците (A и B) што претставуваат иста билинеарна форма се конгруентни.)

Решение. Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Бидејќи P е матрицата за премин од $\{\mathbf{e}_i\}$ во $\{\mathbf{e}'_i\}$, следува дека

$$PX_{e'} = X_e \quad \text{и} \quad PY_{e'} = Y_e, \quad \text{па} \quad X_e^{\mathrm{T}} = X_{e'}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}}.$$

(Притоа, со X_e е означен векторот $\mathbf{x}$, запишан како вектор–колона, во базата $\{\mathbf{e}_i\}$.) Значи:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_e^{\mathrm{T}} A Y_e = X_{e'}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} A P Y_{e'}.$$

Бидејќи $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се произволни елементи од V, следува дека $P^{\mathrm{T}}AP$ е матрицата на f во базата $\{\mathbf{e}'_i\}$.
(За една матрица B се вели дека е *конгруентна* со дадена матрица A, ако постои несингуларна матрица P таква што $B = P^{\mathrm{T}}AP$. Според горниот резултат, матриците што претставуваат иста билинеарна форма f (во разни бази на V) се конгруентни.)

15.36. Нека f е билинеарна форма на $\mathbb{R}^2$, дефинирана со:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2.$$

Да се најде матрицата
а) A на f во базата $\{\mathbf{u}_1 = (1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (0, 1)\}$;
б) B на f во базата $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2),\ \mathbf{v}_2 = (3, -1)\}$;
в) P за премин од базата $\{\mathbf{u}_i\}$ во базата $\{\mathbf{v}_i\}$ и да се провери дали $B = P^{\mathrm{T}}AP$ (т.е. дали B е конгруентна со A).

Решение. Да ставиме $A = [a_{ij}]$, каде што $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = f\big((1, 1), (1, 1)\big) = 3 - 1 + 2 = 4,\\
a_{12} &= f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = f\big((1, 1), (0, 1)\big) = 0 - 1 + 2 = 1,\\
a_{21} &= f(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) = f\big((0, 1), (1, 1)\big) = 0 - 0 + 2 = 2,\\
a_{22} &= f(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = f\big((0, 1), (0, 1)\big) = 0 - 0 + 2 = 2.
\end{aligned}$$

Значи: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ е матрицата на f во базата $\{\mathbf{u}_i\}$.

б) Да ставиме $B = [b_{ij}]$, каде што $b_{ij} = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = f\big((1, 2), (1, 2)\big) = 3 - 2 + 8 = 9,\\
b_{12} &= f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f\big((1, 2), (3, -1)\big) = 9 + 1 - 4 = 6,\\
b_{21} &= f(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = f\big((3, -1), (1, 2)\big) = 9 - 6 - 4 = -1,\\
b_{22} &= f(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = f\big((3, -1), (3, -1)\big) = 27 + 3 + 2 = 32.
\end{aligned}$$

Значи: $B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -1 & 32 \end{bmatrix}$ е матрицата на f во базата $\{\mathbf{v}_i\}$.

в) Треба да ги запишеме $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ со помош на $\mathbf{u}_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1, 2) = (1, 1) + (0, 1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2;\\
\mathbf{v}_2 &= (3, -1) = 3 \cdot (1, 1) - 4 \cdot (0, 1) = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2.
\end{aligned}$$

Тогаш:

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $\qquad P^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, па

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -1 & 32 \end{bmatrix} = B,$$

т.е. B е конгруентна со A.

15.37. Нека билинеарната форма f на $\mathbb{R}^2$ е дефинирана со:
$$f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2\,.$$
Да се најде матрицата:

а) A на f во базата $\{\mathbf{u}_1 = (1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (1, 2)\}$;

б) B на f во базата $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1),\ \mathbf{v}_2 = (3, 1)\}$;

в) P за премин од $\{\mathbf{u}_i\}$ во $\{\mathbf{v}_i\}$ и да се покаже дека $B = P^{\mathrm{T}}AP$;

г) Q за премин од базата $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ во базата $\{\mathbf{u}_i\}$, како и матрицата R за премин од $\{\mathbf{e}_i\}$ во $\{\mathbf{v}_i\}$, и да се покаже дека матрицата C на f во базата $\{\mathbf{e}_i\}$ е конгруентна со A и со B.

15.38. Да се покаже дека конгруентноста на матрици е релација за еквивалентност.

15.39. Нека V е векторскиот простор на реалните квадратни матрици од втор ред. Нека
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad f(A, B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}MB),$$
каде што A, $B \in V$ и „tr“ означува „трага“.

а) Да се покаже дека f е билинеарна форма.

б) Да се најде матрицата на f во базата
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

15.40. Нека со $B(V)$ е означено множеството од сите билинеарни форми на V и нека се дефинирани $f + g$ и kf со:
$$(f + g)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (kf)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = kf(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$
за кои било f, $g \in B(V)$ и $k \in K$. Да се покаже дека $B(V)$ е векторски простор над полето K.

15.41. Нека V е векторски простор со димензија n над полето K и нека $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ е база на дуалниот простор V^*. Да се покаже дека: а) $\{f_{ij} \,|\, i, j = 1, \ldots, n\}$ е база на $B(V)$, каде што f_{ij} се дефинирани со: $f_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_i(\mathbf{x})\,\varphi_i(\mathbf{y})$; б) $\dim B(V) = n^2$.

15.42. За една билинеарна форма f на V се вели дека е *симетрична*, ако $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, за кои било $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. а) Да се покаже дека f е симетрична ако и само ако матрицата A на f е симетрична. б) Кои од билинеарните форми во задачите **15.31** и **15.32** се симетрични?

Решение. а) Ако A е матричното претставување на f, тогаш (в. **15.30**)
$$F(X, Y) = X^{\mathrm{T}}AY = (X^{\mathrm{T}}AY)^{\mathrm{T}} = Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}X \qquad (1)$$

(притоа го користевме фактот што $X^{\mathrm{T}}AT$ е скалар, па тој е еднаков на својата транспозиција).
Нека f е симетрична; тогаш земајќи го и (1):

$$Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}X = f(X, Y) = f(Y, X) = Y^{\mathrm{T}}AX\,, \tag{2}$$

па бидејќи тоа важи за сите вектори X, Y, следува дека $A = A^{\mathrm{T}}$, т.е. A е симетрична. Обратно, ако A е симетрична, тогаш

$$f(X, Y) = X^{\mathrm{T}}AY = Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}X = Y^{\mathrm{T}}AX = f(Y, X)\,,$$

т.е. f е симетрична.

15.43. Едно пресликување $q: V \to \mathbb{R}$ се вика *квадратна форма*, ако

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

за некоја симетрична билинеарна форма f на V. (За q се вели дека е *придружена* на f.) Да се покаже дека:

а) f е еднозначно определена од q според формулата

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}[q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})]$$

(наречена *поларна форма* на f);

б) ако $A = [a_{ij}]$ е матрицата на f, тогаш q е претставена со:

$$\begin{aligned} q(X) = X^{\mathrm{T}}AX &= \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

(горниот израз се вика *квадратен полином* што одговара на симетричната матрица A);

в) ако матрицата A на f е дијагонална, тогаш q има *дијагонално претставување*:

$$q(X) = X^{\mathrm{T}}AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

15.44. Да се најде симетричната матрица, соодветна на секој од следните квадратни полиноми:

а) $q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$; б) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2$;

в) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$;

г) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2x_3$; д) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$.

15.45. Да се најде рангот на секоја од дадените квадратни форми. (Притоа, *ранг на квадратната форма* q е рангот на матрицата A на q.)

а) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$; б) $q(x_1, x_2) = 3x_1^2$;

в) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$;

в) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2x_3$;

г) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

15.46. Да се запише матрицата на секоја од следните квадратни форми:

а) $(x_1, x_2)\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$; б) $(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 3\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$.

15.47. Нека f е скаларниот производ на $\mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x \bullet \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Да се покаже дека f е симетрична, позитивно определена билинеарна форма.

Решение. За една реална симетрична билинеарна форма велиме дека е *позитивно определена*, ако $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ за секој $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, а *негативно определена*, ако $q(\mathbf{x}) < 0$ за секој $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. За f се вели дека е *знаковно определена* („определена по знак"), ако е или позитивно или негативно определена.

Според **15.28**, скаларниот производ f е билинеарна форма на $\mathbb{R}^n$. Бидејќи

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x} = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

следува дека f е симетрична. Натаму, f е позитивна, зашто $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

15.48. Со помош на критериумот на Силвестер, да се испита знаковната определеност на следната квадратна форма: а), б), в), ѓ) – на $\mathbb{R}^3$, а г) и д) – на $\mathbb{R}^2$.

а) $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_3 + 8x_2x_3$;

в) $-x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

г) $2x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2$; д) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$;

ѓ) $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Решение. *Критериумот на Силвестер* гласи:

1^0. Една квадратна форма е позитивно определена ако и само ако главните минори на матрицата од таа форма се позитивни.

2^0. Една квадратна форма е негативно определена ако и само ако главните минори од парен ред на нејзината матрица се позитивни, а од непарен ред – се негативни. (Притоа, *главни минори* на квадратната матрица $A = [a_{ij}]$ се викаат минорите:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}; \ldots; \quad \Delta_n = |A|.$$

а) Матрицата на дадената квадратна форма е $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$.

Нејзините главни минори се:

$$\Delta_1 = 1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 2 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix} = 1 > 0.$$

– сите позитивни. Според тоа, дадената квадратна форма е позитивно определена.

15.49. Да се испита за кои вредности на параметарот c е знаковно определена секоја од следниве квадратни форми:

а) $cx_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2$; б) $2x_1^2 + cx_2^2 + 8x_1x_2$;

в) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2cx_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_3$.

15.50. За една реална симетрична матрица A од n–ти ред се вели дека е *позитивно определена* ако

$$X^{\mathrm{T}}AX > 0 \qquad (1)$$

за секој колоничен n димензионален вектор $X \neq 0$ а *негативно определена* ако $X^{\mathrm{T}}AX < 0$ за секој $X \neq 0$. Ако A е позитивно или негативно определена, тогаш таа се вика *знаковно определена* матрица (A е позитивна полуопределена ако $X^{\mathrm{T}}AX \geq 0$ а е негативно полуопределена ако $X^{\mathrm{T}}AX \leq 0$.)

Да се покаже дека симетричната матрица A е позитивно определена ако и само ако сите нејзини сопствени вредности се позитивни.

15.51. Да се провери дали е позитивно определена секоја од следниве матрици:

а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$; ѓ) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Решение. а) $X^{\mathrm{T}}AX = (x_1,\, x_2)\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 =$
$= 2(x_1+x_2)^2 + x_1^2 + 4x_2^2 > 0$ за секој $X^{\mathrm{T}} \neq 0$, па A е позитивно определена. (Заклучокот се добива исто така лесно со помош на критериумите од **15.48** и **15.50**.)

15.52. Да се покаже дека матрицата $A^{\mathrm{T}}A$ е симетрична и позитивно определена, ако A е:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Потоа, да се покаже дека тоа важи и општо:

в) ако A е која било реална несингуларна матрица од n–ти ред, тогаш $A^{\mathrm{T}}A$ е симетрична и позитивно определена.

Решение. а) $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ е симетрична. Како во **15.48**, или пак директно, добиваме:

$$X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)X = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = 2(x_1+x_2)^2 + 3x_1^2 + 2x_2^2 > 0$$

за секој вектор $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$.

б) $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ е симетрична и, за секој $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ од $\mathbb{R}^3$,

$$X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)X = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 =$$
$$= 2(x_1+x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + 2x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 > 0\,.$$

в) Општо, ако A е несингуларна матрица од n–ти ред, тогаш $AX \neq 0$ за кој било ненулти вектор X од $\mathbb{R}^n$, па скаларниот производ $(AX)\cdot(AX) = (AX)^{\mathrm{T}}(AX)$ е позитивен. Значи,

$$X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)X = (X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(AX) = (AX)^{\mathrm{T}}(AX) = (AX)(AX) > 0.$$

15.53. Симетричната билинеарна форма f на $\mathbb{R}^3$ е претставена со симетричната матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Да се најде дијагоналното претставување на f (в. зад. **15.43**) и нејзината сигнатура. Да се запише, скаларно, придружената квадратна форма q на f.

Решение. За секоја симетрична билинеарна форма f на V над $\mathbb{R}$ постои база $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ на V во која f може да се претстави со дијагонална матрица, т.е. $f(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0$ за $i \neq j$.

Со други зборови, ако A е реална симетрична матрица, тогаш постои несингуларна матрица P, таква што матрицата $P^{\mathrm{T}}AP$ е дијагонална (т.е. A е конгруентна со дијагонална матрица; в. **15.35**).

Дијагоналната форма $P^{\mathrm{T}}AP$ може да се добие со извршување на една низа елементарни редични операции и со истата низа елементарни колонични операции (а тоа произлегува од фактот дека една несингуларна матрица P е производ на елементарни матрици; в. зад. **9.4–9.8**). Тие елементарни редични операции на единичната матрица E водат до матрицата P^{T}.

Овој метод ќе го употребиме за конкретниот случај, а за тоа A и E ќе ги запишеме како блочна матрица $(A;\ E)$:

$$(A;\ E) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Прво ќе ги извршиме редичните операции $R_2 \to 2R_1 + R_2$ и $R_3 \to -3R_1 + R_3$, а потоа соодветните колонични операции: $K_2 \to 2K_1 + K_2$ и $K_3 \to -3K_1 + K_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \text{а потоа} \quad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Натаму: $R_3 \to 2R_2 + R_3$ и соодветно: $K_3 \to 2K_2 + K_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Со тоа. A е дијагонализирана:

$$P=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-7\end{bmatrix}.$$

Сигнатура (C) на една симетрична билинеарна форма f е разликата меѓу бројот (Π) на позитивните и бројот (H) од негативните членови од дијагоналното претставување на f, т.е. $C=\Pi-H$.
Во конкретниов случај: $C=2-1=1$, т.е. сигнатурата на f е 1.
Скаларното претставување на придружената квадратна форма на f е:

$$q(\mathrm{x})=x_1^2+5x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-16x_2x_3,$$

а нејзиното дијагонално претставување е:

$$q(\mathrm{y})=y_1^2+y_2^2-7y_3^2.$$

Во задачите **15.54–15.57**, симетричната билинеарна форма f е претставена со зададената симетрична матрица. Да се најде дијагоналното претставување на f и нејзината сигнатура, а да се запише, скаларно, придружената квадратна форма q на f.

15.54. $\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&5&-4\\-3&-4&7\end{bmatrix}.$ **15.55.** $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-2&2\\1&2&-1\end{bmatrix}.$

15.56. $\begin{bmatrix}1&-3&4\\-3&0&6\\4&6&10\end{bmatrix}.$ **15.57.** $\begin{bmatrix}1&-4&-8\\-4&7&-4\\-8&-4&1\end{bmatrix}.$

Резултатот од последната задача спореди го со одговорот на зад. **14.86** б). На што се должи несовпаѓањето?

15.58. За квадратната форма

а) $q(x,y)=5x^2-y^2+8xy$; б) $q(x,y)=66x^2-24xy+59y^2$;

в) $q(x,y,z)=x^2-2y^2-2z^2-4xy+4xz+8yz$;

г) $q(x,y,z)=3x^2+3y^2-2xy+4xz+4yz$, соодветната матрица A е:

а) $\begin{bmatrix}5&4\\4&-1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}66&-12\\-12&59\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$; ѓ) $\begin{bmatrix}3&-1&2\\-1&3&2\\2&2&0\end{bmatrix}$.

Да се најде ортогонална матрица P, така што $P^{-1}AP$ да биде спектралната матрица на A (т.е. дијагонална матрица чии членови по дијагоналата се сопствените вредности на A). Потоа да се запише q како збир од квадрати (т.е. во дијагонална форма).

Решение. а) $\begin{vmatrix}5-\lambda&4\\4&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-21=0;\quad \lambda_1=7,\ \lambda_2=-3.$

Соодветните сопствени вектори се: $X_1=t\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $X_2=t\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, $t\neq0$. Ако ги ортономираме овие вектори, т.е. ако ги избереме нивните ортови (а еден вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \neq \mathbf{o}$ може да се *ортонормира* ако се подели со својата должина $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$), ќе добиеме $X_1^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Матрицата P составена од нив, т.е. $P = [X_1^* \quad X_2^*]$ е ортогонална и $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Така, записот на $q(x, y)$ како збир од квадрати ќе биде $q(x', y') = 7x'^2 - 3y'^2$.

15.59. Да се сведе во каноничен облик следнава равенка:

$$6x^2 + 4xy + 9y^2 + 10\sqrt{5}\,y - 5 = 0 \qquad (a_1)$$

и да се конструира фигурата определена со неа.

Решение. Дадената равенка е еден пример од општата полиномна равенка од втор степен со две променливи

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + c_1y + d = 0\,, \qquad (1)$$

каде што a_{ij}, a_1, c_1, d се дадени реални броеви, од кои барем еден од a_{ij} не е нула. Со равенката (1) е определена некоја фигура (обично некоја крива) наречена *крива од втор ред*: кружница, елипса, хипербола или парабола, а во „дегенериран случај" – пар прави (може и совпаднати), точка или празното множество.

За практични цели, згодно е на равенката (1) да ѝ се даде што е можно попрост вид. На пример, наједноставен или *каноничен вид* на равенка на елипса, хипербола, парабола (по тој редослед) е:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad y^2 = 2px \quad (x^2 = 2py),$$

а тоа, геометриски, значи дека координатниот систем е избран така што оските на елипсата (односно на хиперболата, параболата) лежат на координатните оски.

За таа цел се разгледува збирот од првите три члена на (1)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \qquad (2)$$

– тој е квадратна форма по x, y. Нејзината матрица има вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Во зависност од знакот на детерминантата $\Delta = \det A$, (1) определува фигура од: елиптичен, хиперболичен или параболичен тип:

1^0 $\Delta > 0$ – од елиптичен тип (елипса; точка; празно множество – по тој редослед):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0\,; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1\,;$$

2^0 $\Delta < 0$ – од хиперболичен тип (хипербола или пар прави):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1\,, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\,;$$

3^0 $\Delta = 0$ – од параболичен тип (парабола, пар прави, пар совпаднати прави, празното множество – по тој редослед):

$y^2 = 2px$ $(x^2 = 2py)$; $y^2 = a^2$ $(x^2 = a^2)$; $y^2 = 0$ $(x^2 = 0)$; $y^2 = -a^2$ $(x^2 = -a^2)$.

Задачата се сведува на наоѓање ортогонална матрица P, таква што $P^{\mathsf{T}}AP$ да е дијагонална (чии елементи по дијагоналата се сопствените вредности на A). Притоа, ако X^*, Y^*:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}, \qquad Y^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix},$$

се вектор–колоните на P, тогаш равенките

$$\begin{cases} x = x_1^* x' + y_1^* y' \\ y = x_2^* x' + y_2^* y' \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{4}$$

ја реализираат бараната (ортогонална) трансформација.
Квадратната форма

$$q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 9y^2 , \tag{a$_2$}$$

којашто одговара на дадената равенка има матрица

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Корените на нејзината карактеристична равенка $\det(\lambda E - A) = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$ се $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$. Соодветните сопствени вектори се $X = s(2, -1)^{\mathrm{T}}$, $Y = t(1, 2)^{\mathrm{T}}$, $s, t \neq 0$, а по нивното ортонормирање (в. 15.58), добиваме

$$X^* = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad Y^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Според тоа, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $P = [X^* Y^*]$, а равенките на оваа ортогонална трансформација се

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' , \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' . \tag{a$_4$}$$

Заменувајќи ги (a$_4$) во (a$_2$) и (a$_1$), добиваме, по ред:

$q(x', y') = 5x'^2 + 10y'^2$,

$5x'^2 + 10y'^2 + 10(-x' + 2y') - 5 = 0$.

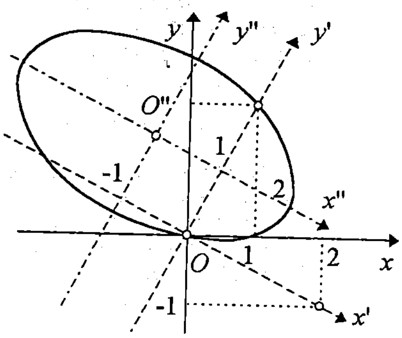
По средувањето, последната равенка добива облик

$5(x'^2 - 2x') + 10(y'^2 + 2y') - 5 = 0$,

$5(x' - 1)^2 + 10(y' + 1)^2 - 20 = 0$,

$\frac{(x'-1)^2}{4} + \frac{(y'+1)^2}{2} = 1$.

Со транслацијата $x'' = x' - 1$, $y'' = y' + 1$, ја добиваме равенката



Црт. 1

$$\frac{x''}{4} + \frac{y''}{2} = 1 . \tag{a$_5$}$$

Значи, дадената равенка (a$_1$) е трансформирана во каноничен облик, (a$_5$). Равенката (a$_5$), а тоа значи и (a$_1$), претставува равенка на елипса со полуоски $a = 2$ и $b = \sqrt{2}$. Елипсата е претставена на црт. 1.

Во задачите **15.60–15.65**, дадените равенки да се сведат на каноничен облик и да се именува фигурата што е претставена со таа равенка.

15.60. $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 5$. **15.61.** $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 13$.

15.62. $66x^2 - 24xy + 59y^2 = 25$. **15.63.** $17x^2 + 12x^2 + 8y^2 + 20\sqrt{5}\,x = -20$.

15.64. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0.$

15.65. $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}\,x + 4\sqrt{13}\,y + 13 = 0.$

15.66. Да се сведе на канoничен облик равенката (на површина од втор ред):

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0.$$

Решение. Општата равенка на површина од втор ред е

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_1x + b_1y + c_1z + d = 0\,, \qquad (1)$$

при што барем еден од коефициентите a_{ij} $(i,\, j = 1,\, 2,\, 3;\ i \le j)$ е различен од нула. Збирот од првите шест членови на (1)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (2)$$

е квадратна форма на $\mathbb{R}^3$, од променливите x, y, z, со матрица $A = [a_{ij}]$ од трети ред. Таа е симетрична, па за неа постои ортогонална матрица P, таква што $P^{-1}AP$ е дијагонална (т.е. постои ортогонална трансформација што ја трансформира (2) во канoничен облик).

Претставувањето на равенката (1) како збир од квадрати (и конструкцијата на фигурата определена со неа) се врши на аналоген начин, изнесен во **15.59**.

Прво ги наоѓаме корените на карактеристичната равенка на A, $\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 27\lambda - 54 = (\lambda+3)^2(\lambda-6) = 0$, а тоа се: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$. Значи, спектралната матрица на A е $\operatorname{diag}(-3, -3, 6)$, па можеме сега да го запишеме канoничниот вид на дадената равенка:

$$-3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2 + 6 = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{1} = 1.$$

Забелешка. Ако во дадената равенка имаше и линеарни членови (делот $a_1x + b_1y + c_1z$ во (1), тогаш ќе требаше да ја најдеме дијаголизирачката ортогонална матрица P, чии колони ќе беа (колоничните) ортонормирани сопствени вектори на A: $X^* = (x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*)^{\mathrm{T}}$, $Y^* = (y_1^*,\, y_2^*,\, y_3^*)^{\mathrm{T}}$, $Z^* = (z_1^*,\, z_2^*,\, z_3^*)^{\mathrm{T}}$, по што ќе ги добиевме трансформационите равенки:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* & z_1^* \\ x_2^* & y_2^* & z_2^* \\ x_3^* & y_3^* & z_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}; \qquad \begin{aligned} x &= x_1^*x' + y_1^*y' + z_1^*z'\,, \\ y &= x_2^*x' + y_2^*y' + z_2^*z'\,, \\ z &= x_3^*x' + y_3^*y' + z_3^*z'\,. \end{aligned}$$

15.67. Да се сведат на канoничен облик следниве равенки на површини од втор ред:

а) $3y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz - 2yz - 4 = 0;$

б) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0;$

в) $9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}\,y + 4\sqrt{2}\,z + 4 = 0$

и да се именува површината што ја претставува таа равенка.

15.68. Нека V е комплексен векторски простор (т.е. векторски простор над полето $\mathbb{C}$ од комплексните броеви). Едно пресликување $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$ се вика *билинеарна форма* на V ако за кои било $a,\, b \in \mathbb{C}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \in V$

(i) $f(a\mathbf{u}+b\mathbf{w},\,\mathbf{v}) = af(\mathbf{u},\,\mathbf{v})+bf(\mathbf{w},\,\mathbf{v})$,

(ii) $f(\mathbf{u},\,a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = \overline{a}f(\mathbf{u},\,\mathbf{v})+\overline{b}f(\mathbf{u},\,\mathbf{w})$

(т.е. f е линеарно по првата променлива и конјугирано–линеарно по втората). Билинеарната форма f се вика *ермитска*, ако е исполнет условот

(iii) $f(\mathbf{u},\,\mathbf{v}) = \overline{f(\mathbf{v},\,\mathbf{u})}$.

(Притоа, $\overline{z}$ го означува конјугираниот број од z.) Да се покаже дека за која било ермитска билинеарна форма f важи:

а) условот (ii) е последица од (i) и (iii).

б) $f(\mathbf{u},\,\mathbf{u})$ е реален број за секој $\mathbf{u}\in V$;

в) матрицата A на f е ермитска.

Решение. а) Користејќи го (iii), а потоа (i), добиваме:

$$f(\mathbf{u},\,a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = \overline{f(a\mathbf{v}+b\mathbf{w},\,\mathbf{u})} = \overline{af(\mathbf{v},\,\mathbf{u})+bf(\mathbf{w},\,\mathbf{u})} =$$
$$= \overline{a}\,\overline{f(\mathbf{v},\,\mathbf{u})}+\overline{b}\,\overline{f(\mathbf{w},\,\mathbf{u})} = \overline{a}f(\mathbf{u},\,\mathbf{v})+\overline{b}f(\mathbf{u},\,\mathbf{w}).$$

б) Во (iii), ставајќи $\mathbf{u}$ наместо $\mathbf{v}$, добиваме $f(\mathbf{u},\,\mathbf{u})$, па користејќи го фактот дека бројот z е реален ако и само ако $z=\overline{z}$, го добиваме заклучокот на тврдењето.

в) Нека f е ермитска. Тогаш нејзините вредности на парот базни вектори $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_k$ се сврзани со релацијата

$$f(\mathbf{e}_j,\,\mathbf{e}_k) = \overline{f(\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_j)},$$

од каде што, ставајќи $f(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = a_{jk}$ $(i,\,j = 1,\ldots,n)$, добиваме $a_{jk} = \overline{a}_{kj} = \overline{a}^{\mathrm{T}}_{jk} = a^{\mathrm{H}}_{jk}$. Значи, матрицата A на f го задоволува условот $A = A^{\mathrm{H}}$, т.е. таа е ермитска.

15.69. Нека $V = \mathbb{C}^n$ и нека A е ермитска матрица од n–ти ред. Да се покаже дека $f\colon V\times V\to\mathbb{C}$, дефинирано со:

$$f(\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = \mathbf{x}A\mathbf{y}^{\mathrm{H}} \quad (\text{т.е.}\quad f(X,\,Y) = X^{\mathrm{T}}A\overline{Y}),$$

е ермитска билинеарна форма.

Решение. а) Според б) од **15.68**, доволно е да ги провериме условите (i) и (iii). Нека $\mathbf{x},\,\mathbf{z},\,\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$ и $a,\,b\in\mathbb{C}$. Имаме:

$$f(a\mathbf{x}+b\mathbf{z},\,\mathbf{y}) = (a\mathbf{x}+b\mathbf{z})A\mathbf{y}^{\mathrm{H}} = a(\mathbf{x}A\mathbf{y}^{\mathrm{H}})+b(\mathbf{z}A\mathbf{y}^{\mathrm{H}}) = af(\mathbf{x},\,\mathbf{y})+bf(\mathbf{z},\,\mathbf{y}),$$

т.е. важи (i).

$$\overline{f(\mathbf{x},\,\mathbf{y})} = \overline{\mathbf{x}A\mathbf{y}^{\mathrm{H}}} = \overline{(\mathbf{x}A\mathbf{y}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{y}}^{TT}A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{y}}}\;\overline{A}\;\overline{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{y}A\mathbf{x}^{\mathrm{H}},$$

па важи и (iii). Значи, f е ермитска билинеарна форма.

(Да забележиме дека, при проверката на (iii), по второто равенство, го искористивме фактот дека $\mathbf{x}A\mathbf{y}^{\mathrm{H}}$ е скалар, па затоа тој е еднаков со својата транспозиција, а при последното равенство – дека A е ермитска.)

15.70. Нека $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ се вектори од $\mathbb{C}^n$: $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. *Скаларен производ* на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (ознака: $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$) се дефинира со равенството

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = u_1\overline{v} + u_2\overline{v}_2 + \cdots + u_n\overline{v}_n \tag{1}$$

(спореди со **15.28** за скаларен производ во $\mathbb{R}^n$). Да се покаже дека за кои било $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ и $a \in \mathbb{C}^n$ се точни равенствата:

а) $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}}$; б) $(a\mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$;

в) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \circ \mathbf{z} = \mathbf{x} \circ \mathbf{z} + \mathbf{y} \circ \mathbf{z}$; г) $\mathbf{x} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{x} \circ \mathbf{x} > 0$.

Потоа, да се покаже дека: д) пресликувањето $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, определено со $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, е ермитска билинеарна форма.

Решение. а) $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n = \overline{\overline{x}_1 y_1} + \cdots + \overline{\overline{x}_n y_n} =$
$= \overline{y_1\overline{x}_1 + \cdots + y_n\overline{x}_n} = \overline{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}}$.

б) – в) Со непосредна примена на (1).

г) $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = x_1\overline{x}_1 + \cdots + x_n\overline{x}_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

д) Со помош на равенствата б), в) и а) лесно се проверува дека се исполнети условите (i) и (iii) од **15.68**, што значи дека скаларниот производ $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ е ермитска билинеарна форма.

15.71. Ако $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ е ермитска билинеарна форма на V, тогаш пресликувањето $q\colon V \to \mathbb{C}$, определено со $q(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, се вика *ермитска квадратна форма.* За q се вели дека е *позитивно определена* ако $q(\mathbf{v}) > 0$ (а *негативно определена* ако $q(\mathbf{v}) < 0$) за секој $\mathbf{v} \neq 0$.

Да се покаже дека скаларниот производ $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \circ \mathbf{v}$ е позитивно определена ермитска квадратна форма.

15.72. Една комплексна матрица A се вика *позитивно определена* ако бројот $\mathbf{x}A\mathbf{x}^{\mathrm{H}} > 0$ (односно *негативно определена* ако бројот $\mathbf{x}A\mathbf{x}^{\mathrm{H}} < 0$) за секој ненулти вектор $\mathbf{x}$ од $\mathbb{C}^n$. (Критериумот на Силвестер од **15.48** за реални квадратни форми и матрици дословно се пренесува на случајот ермитски форми и матрици.)

Да се испита дали е позитивно определена следнава ермитска матрица:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & 1-i \\ 0 & 1+i & 5 \end{bmatrix}$.

15.73. Да се покаже дека матрицата $A^{\mathrm{H}}A$ е ермитска и е позитивно определена, ако A е:

а) $A = \begin{bmatrix} 3+i & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ 2i & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -i \end{bmatrix}$.

Потоа, да се покаже дека тоа важи општо:

в) ако A е која било комплексна несингуларна матрица од n–ти ред, тогаш $A^{\mathrm{H}}A$ е ермитска позитивно определена матрица.

15.74. Нека f е ермитска форма на V. Нека A е матрицата на f во некоја база $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ од V. Да се покаже дека:

а) $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_e^{\mathrm{T}} A\overline{[\mathbf{v}]}_e$ за сите $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (притоа: $[\mathbf{u}]_e$ го означува векторот $\mathbf{u}$ запишан колонично, во базата $\{\mathbf{e}_i\}$);

б) ако P е матрицата на премин од $\{\mathbf{e}_i\}$ во нова база $\{\mathbf{e}_i'\}$ на V, тогаш $B = P^{\mathrm{T}}A\overline{P}$ (или: $B = Q^{\mathrm{H}}AQ$, каде што $Q = \overline{P}$) е матрицата на f во новата база $\{\mathbf{e}_i'\}$.

(Воочи дека б) е комплексен аналог на тврдењето во **15.35**.)

Решение. Ако $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ е база на V, тогаш матрицата $A = [a_{ij}]$, каде што $a_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, се вика ***матрично претставување*** на f (или *матрица на* f) во базата $\{\mathbf{e}_i\}$. Според (iii) од **15.68**, $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \overline{f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)}$, па A е ермитска и, специјално, дијагоналните елементи на A се реални. Значи, кое било дијагонално претставување, содржи само реални членови.

а) Нека $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ и да претпоставиме дека

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + u_n \mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n.$$

Тогаш

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(u_1\mathbf{e}_1 + \cdots u_n\mathbf{e}_n,\ v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n) =$$

$$= \sum_{i,j} u_i\overline{v}_i f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (u_1, \ldots, u_n)A \begin{bmatrix} \overline{v}_1 \\ \vdots \\ \overline{v}_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_e^{\mathrm{T}} A\overline{[\mathbf{v}]}_e$$

како што се тврдеше.

б) Ако P е матрицата за премин од базата $\{\mathbf{e}_i\}$ во базата $\{\mathbf{e}_i'\}$, тогаш

$$P[\mathbf{u}]_{e'} = [\mathbf{u}]_e, \quad P[\mathbf{v}]_{e'} = [\mathbf{v}]_e, \quad \text{па} \quad [\mathbf{u}]_e^{\mathrm{T}} = [\mathbf{u}]_{e'}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}}, \quad \overline{[\mathbf{v}]}_e = \overline{P}\,\overline{[\mathbf{v}]}_{e'}.$$

Според а), $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_e^{\mathrm{T}} A\overline{[\mathbf{v}]}_e = [\mathbf{u}]_{e'}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}}A\,\overline{P}\,\overline{[\mathbf{v}]}_{e'}$. Бидејќи $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ се произволни елементи од V, следува дека $P^{\mathrm{T}}A\overline{P}$ е матрицата на f во базата $\{\mathbf{e}_i'\}$. Ставајќи $Q = \overline{P}$, добиваме дека $Q^{\mathrm{H}}AQ$ е матрицата на f во $\{\mathbf{e}_i'\}$.

15.75. Дадена е ермитската матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & 1-2i \\ 2-i & 4 & i \\ 1+2i & -i & 5 \end{bmatrix}$$

Да се најде несингуларна матрица P, таква што $P^{\mathrm{T}}A\overline{P}$ да биде дијагонална.

Решение. Постапката е иста како во реалниот случај (**15.53**). Ја формираме блочната матрица $(A;\ E)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2+i & 1-2i & 1 & 0 & 0 \\ 2-i & 4 & i & 0 & 1 & 0 \\ 1+2i & -i & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Прво ги применуваме редичните операции

$$R_2 \to (-2+i)R_1 + R_2\,, \qquad R_3 \to (-1-2i)R_1 + R_3,$$

а потоа – соодветните „ермитски колонични операции"

$$K_2 \to (-2-i)K_1 + K_2\,, \qquad K_3 \to (-1+2i)K_1 + K_3.$$

Општо, за редичните операции (кај реални матрици):

1^0 $R_i \leftrightarrow R_j$; 2^0 $R_i \to cR_i$, $c \neq 0$; 3^0 $R_i \to cR_j + R_i$, $c \neq 0$ (в. 7.15), соодветните *колонични операции* се:

$1'$ $K_i \leftrightarrow K_j$, $2'$ $K_i \to cK_i$, $c \neq 0$; $3'$ $K_i \to cK_j + K_i$, $c \neq 0$.

Ако K е полето $\mathbb{C}$ на комплексните броеви, тогаш соодветните *ермитски колонични операции* се:

$1''$ $K_i \leftrightarrow K_j$; $2''$ $K_i \to \overline{c}K_i$, $\overline{c} \neq 0$; $3''$ $K_i \to \overline{c}K_j + K_i$, $\overline{c} \neq 0$.

Значи, по назначените операции над $(A;\, E)$ ќе имаме:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2+i & 1-2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6i & -2+i & 1 & 0 \\ 0 & -6i & 0 & -1-2i & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6i & -2+i & 1 & 0 \\ 0 & -6i & 3 & -1-i & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Потоа ја применуваме редичната операција $R_3 \to -6iR_2 + R_3$ и, по неа, соодветната ермитска колонична операција $K_3 \to 6iK_2 + K_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6i & -2+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 5+10i & -6i & 1 \end{array}\right] \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 5+10i & -6i & 1 \end{array}\right].$$

Десниот блок од последната (блочна) матрица ја претставува бараната матрица P^{T}, па ставајќи

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2+i & 5+10i \\ 0 & 1 & -6i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{добиваме} \quad P^{\mathrm{T}}A\overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}.$$

(Ако се земе: $Q = \overline{P}$, а $Q^{\mathrm{H}} = \overline{Q}^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}$, тогаш дијагонализацијата на A можеме да ја запишеме и вака: $Q^{\mathrm{H}}AQ = \operatorname{diag}(1,\, -1,\, 36)$.)

15.76. За секоја од следните ермитски матрици A да се најде несингуларна матрица P, таква што $P^{\mathrm{T}}A\overline{P}$ да е диагонална.

а) $\begin{bmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 4 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & -1 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 1 & i & 2+i \\ -i & 2 & 1-i \\ 2-i & 1+i & 2 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 4 & 2-3i \\ -2i & 2+3i & 7 \end{bmatrix}$.

16. ДОДАТОК

Под *норма на матрицата* $A = [a_{ij}]$ се подразбира реален ненегативен број $\|A\|$, така што се исполнети следниве услови:

1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O$;

2) $\|xA\| = |x|\,\|A\|$ за кој било број x;

3) $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$, каде што A и B се произволни матрици што можат да се собираат;

4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, каде што A и B се произволни матрици што можат да се множат.

Нека

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$$

Да се покаже дека со секој од следниве изрази е определена норма на матрицата A (**16.1–16.3**):

16.1. $\|A\|_1 = \max\limits_j |a_j|$. **16.2.** $\|A\|_2 = \sum_j |a_j|$,

16.3. $\|A\|_3 = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_k|^2}$ (*евклидска норма*).

16.4. Да се најдат $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ и евклидската норма $\|A\|_3$ на следниве матрици (вектор–колони):

а) $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{k\times 1}$; г) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{k\times 1}$

Нека $A = [a_{ij}]$ е $m \times n$–матрица. Да се покаже дека со секој од следните изрази е дефинирана норма на матрицата A (**16.5–16.7**):

16.5. $\|A\|_1 = \max\limits_i \sum_j |a_{ij}|$. **16.6.** $\|A\|_2 = \max\limits_j \sum_i |a_{ij}|$.

16.7. $\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ (*евклидска норма*).

16.8. Да се најде $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ и $\|A\|_3$ за следнава матрица A:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

16.9. Да се докаже дека $\|A^k\| \le \|A\|^k$, каде што $\|A\|$ е норма на матрицата A, а k е произволен природен број.

16.10. Да се докаже дека, за кои било матрици A и B со форма $m \times n$ важи неравенството

а) $\|A - B\| \le \|A\| + \|B\|$; б) $\big|\|A\| - \|B\|\big| \le \|A - B\|$.

16.11. Нека $\|\mathbf{x}\|$ е норма на векторот $\mathbf{x}$. Да се покаже дека со равенството

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|A\mathbf{x}\|$$

е определена норма $\|A\|$ на матрицата A. (Притоа се претпоставува дека A и вектор–колоната $\mathbf{x}$ можат да се множат.)

Критериумот на Силвестер (за утврдување на знаковната определеност на дадена квадратна форма; в. **15.48**) може да се примени за *испитување екстреми на функции* од повеќе променливи.

Нека функцијата $z = f(x, y)$ има непрекинати први и втори парцијални изводи и нека $M_0(x_0, y_0)$ е нејзина стационарна точка. За да се испита таа стационарна точка, треба да се одреди знакот на Δz во таа точка. Според Тејлоровата формула, имаме

$$\Delta z = \tfrac{dz}{1!} + \tfrac{d^2z}{2!} + R_2.$$

Во стационарната точка $dz = 0$, па

$$\Delta z = \tfrac{d^2z}{2!} + R_2.$$

Ако $d^2z \ne 0$ во M_0, тогаш знакот на Δz е ист со знакот на Δz. Диференцијалот од втор ред

$$d^2z = a(\Delta x)^2 + 2b\,\Delta x\,\Delta y + c(\Delta y)^2$$

каде што $a = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $b = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $c = f''_{yy}(x_0, y_0)$, е квадратна форма по променливите Δx и Δy со матрица

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Според критериумот на Силвестер, имаме

1^0. Ако $a > 0$ и $\det A > 0$, тогаш $\Delta z > 0$, па M_0 е точка на минимум.

2^0. Ако $a < 0$ и $\det A > 0$, тогаш $\Delta z < 0$, па M_0 е точка на максимум.

3^0. Ако $\det A < 0$, тогаш Δz во околината на M_0 го менува знакот, па во точката M_0 нема екстрем.

Да забележиме дека, ако $\det A = 0$, тогаш овој метод за испитување на стационарната точка M_0 не е применлив.

Аналогно се спроведува испитувањето на стационарна точка за функција $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n > 2)$. Во тој случај d^2z е квадратна форма од n променливи.

16.12. Да се испита за екстреми функцијата $\quad z = 6xy - x^2y - xy^2$.

Решение. Бидејќи $z'_x = 6y - 2xy - y^2$, $z'_y = 6x - x^2 - 2xy$, стационарните точки ќе ги најдеме со решавањето на системот равенки

$$y(6 - 2x - y) = 0, \quad x(6 - x - 2y) = 0.$$

Стационарните точки се: $M_1(0, 0)$, $M_2(2, 2)$, $M_3(0, 6)$ и $M_4(6, 0)$.

Ги наоѓаме изводите од втор ред:

$$z''_{xx} = -2y; \qquad z''_{xy} = 6 - 2x - 2y; \qquad z''_{yy} = -2x.$$

Ќе ја испитуваме секоја стационарна точка посебно.

Во точката $M_1(0, 0)$:

$$a_1(z''_{xx})_{M_1} = 0; \quad b_1 = (z''_{xy})_{M_1} = 6; \quad c_1 = (z''_{yy}) = 0.$$

Според тоа, $d^2z = 12\,\Delta x\,\Delta y$. Матрицата на таа квадратна форма е

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи главните минори на A_1 се 0 и -36, следува дека A_1 не е знаковно определена, па во точката M_1, функцијата нема екстрем.

Во точката $M_2(2, 2)$:

$$d^2z = -4\,\Delta x^2 - 2\,\Delta x\,\Delta y - 6\,\Delta y^2$$

и матрицата на таа квадратна форма е

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Нејзините главни минори се -2 и 15, што значи дека квадратната форма d^2z е негативно определена, па M_2 е точка на максимум; $z_{\max} = 8$.

Лесно се проверува дека во точките M_3 и M_4, функцијата нема екстреми.

Во задачите **16.13–16.23**, да се испитаат за екстреми дадените функции.

16.13. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

16.14. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

16.15. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8.$

16.16. $z = 2xy - 4x - 2y.$

16.17. $z = 2x^3 - 3y^3 - 6x + 36y.$

16.18. $z = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}.$

16.19. $z = x^3 + xy^2 - 6xy.$

16.20. $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz.$

16.21. $u = x^2 + y^2 + z^2 + (4 - x - y - z)^2.$

16.22. $u = x^2y + yz - z.$

16.23. $u = 2x^2 + y^2 + 11z^2 - 2xy + 4xz - 6yz - 2y + 8z.$

Матрица чии елементи се функции се вика *функционална матрица.* Таа има облик

$$\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(t) & f_{m2}(t) & \dots & f_{mn}(t) \end{bmatrix},$$

каде што $f_{ij}(t)$ се дадени функции, дефинирани на некој интервал (a, b); покусо се означува со

$$F(t) = [f_{ij}(t)], \qquad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Операциите: собирање матрици, множење матрица со број, множење матрици, транспортирање, наоѓање инверзна матрица – за функционални матрици се дефинираат исто како за „бројните“ матрици.

За функционалните матрици може да се дефинираат и: извод, неопределен интеграл, определен интеграл. Нека функциите $f_{ij}(t)$ се диференцијабилни во интервалот (a, b). *Извод на функционална матрица* $F(t)$ се вика матрицата чии елементи се изводите на соодветните елементи на $F(t)$. Ознака: $F'(t)$ или $\frac{dF}{dt}$. Значи:

$$F'(t) = [f_{ij}(t)]' = [f'_{ij}(t)].$$

Аналогно (т.е. „поелементно“) се дефинираат *неопредлен*, односно *определен интеграл*:

$$\int [f_{ij}(t)]\, dt = \left[\int f_{ij}(t)\right]; \qquad \int_{\alpha}^{\beta} [f_{ij}(t)\, dt] = \left[\int_{\alpha}^{\beta} f_{ij}(t)\, dt\right].$$

Неопределениот и определениот интеграл на матрици имаат аналогни својства како неопределен и определен интеграл од („обични“) функции.

16.24. Дадена е функционалната матрица $F(t) = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ 3t^2 & 4 \end{bmatrix}$.

Да се пресметаат: а) $F'(t)$; б) $\int F(t)\,dt$; в) $\int\limits_0^2 F(t)\,dt$.

Решение. а) $F'(t) = \begin{bmatrix} (2t)' & (e^t)' \\ (3t^2)' & (4)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & e^t \\ 6t & 0 \end{bmatrix}$.

б) $\int F(t)dt = \begin{bmatrix} \int 2t\,dt & \int e^t\,dt \\ \int 3t^2\,dt & \int 4\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & e^t \\ t^3 & 4t \end{bmatrix} + C, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$

(C е „неопределена“, константна матрица).

в) $\int\limits_0^2 F(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int\limits_0^2 2t\,dt & \int\limits_0^2 e^t\,dt \\ \int\limits_0^2 3t^2 dt & \int\limits_0^2 4\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2\big|_0^2 & e^t\big|_0^2 \\ t^3\big|_0^2 & 4t\big|_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & e^2-1 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$.

Во задачите **16.25–16.28** да се најдат: а) изводите, б) неопределените интеграли, на дадените функционални матрици.

16.25. $\begin{bmatrix} t & 2t \\ 1 & 1/t \end{bmatrix}$. **16.26.** $\begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{bmatrix}$.

16.27. $\begin{bmatrix} e^{-t} & 3t^2 & 2t \\ \cos 2t & 1 & -2t \end{bmatrix}$. **16.28.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

16.29. Нека $F = F(t)$ и $G = G(t)$ се функционални матрици, а C е бројна (т.е. „константна“) матрица. Да се покаже дека се точни следниве својства (за изводи):

а) $\frac{dC}{dt} = 0$; б) $(F+G)' = F' + G'$; в) $(CF)' = CF'$;

г) $(FC)' = F'C$; д) $(F \cdot G)' = F'G + F \cdot G'$; ѓ) ако $F^{-1} = F^{-1}(t)$ е матрицата што е инверзна на $F = F(t)$, тогаш

$$(F^{-1})' = -F^{-1} \cdot F \cdot F^{-1}.$$

Забелешка. Се претпоставува дека во б): F и G имаат иста форма, а во в), г) и д): наведените производи се „возможни“. За $F(t)$ инверзната матрица постои при оние вредности на t за кои $\det F \neq 0$.

16.30. Да се најде F^{-1}, а потоа $(F^{-1})'$, за секоја од функционалните матрици:

а) $F = \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{bmatrix}$; б) $F = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 1/t^2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$.

Добиениот резултат да се провери со равенството во ѓ) од **16.29**.

16.31. Да се покаже дека, ако $F = F(t)$ е функционална матрица, а A и B се бројни (т.е. „константни") матрици, тогаш:

а) $\int AF\,dt = A\int F\,dt$; б) $\int FB\,dt = (\int F\,dt)B$. (Притоа се претпоставува дека производите AF, FB се „возможни".)

16.32. Да се пресмета:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} \sin t & 2+\cos t \\ 2\cos t & -4\sin 2t \end{bmatrix} dt$; б) $\displaystyle\int_0^{1} \begin{bmatrix} 1 & 2t & e^t \\ 2 & 3 & 1-2t \\ 3t^2 & e^{-t} & \ln(1+t) \end{bmatrix} dt$.

16.33. Да се пресмета $(FA)' - (AF)'$, ако:

$$F = \begin{bmatrix} 5 & -t \\ 3t & t \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

16.34. Да се пресмета $\displaystyle\int_0^{\pi/2} F\cdot A\,dt - \int_0^{\pi/2} A\cdot F\,dt$, ако

$$F = \begin{bmatrix} \cos 2t & 3\sin 2t \\ 2\cos t & 2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

16.35. Дадени се матриците A и X:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad X = \begin{bmatrix} t^2+t+1 \\ t^2-t+2 \\ 2t^2+1 \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека X ја задоволува равенката $X' = AX$.

16.36. Дадени се матриците A и $B = B(t)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4t-3t^2 \\ 3 & 6t \end{bmatrix}.$$

Да се најде матрица $Y = Y(t)$, таква што $AY' - B = 0$.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

1. МНОЖЕСТВА

1.19. а) $\{1, 2, 3, 4\}$. б) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. в) $\{-1, -2\}$. г) $\{1, 3\}$. д) $\emptyset$. ѓ) $\{$ м, а, т, е, и, к$\}$. е) $\{a, c, 2, 3, +, -, =\}$.

1.20. а) $\{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 \leq 100\}$. б) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ \sin x = 1\}$.
в) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 = 0,\ 3x = 9\}$. г) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 = 0$ или $3x = 9\}$.
д) $\{x \mid x \in \mathbb{N},\ x$ е парен $\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

1.22 а) $\big\{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{4\}, \{1, \{2, 3\}\}, \{1, 4\}, \{\{2, 3\}, 4\}, A\big\}$.
б) $\big\{1, \{2, 3\}, 4, \emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{4\}, \{1, \{2, 3\}\}, \{1, 4\}, \{\{2, 3\}, 4\}, A\big\}$.
в) $\{(1, 1), (1, \{2, 3\}), (1, 4), (\{2, 3\}, 1), (\{2, 3\}, \{2, 3\}), (\{2, 3\}, 4), (4, 1), (4, \{2, 3\}), (4, 4)\}$.
г) $\{(1, 1), (\{2, 3\}, \{2, 3\}), (4, 4)\}$.

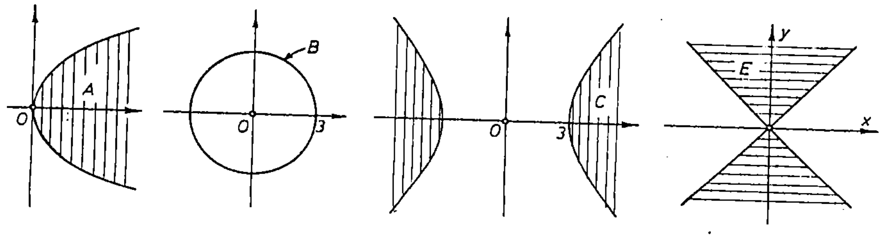
1.23. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}^- = \emptyset$, $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}, \ldots$

1.32. $A = \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\}$,
$B = \{x \mid x = 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \ldots\}$,
$C = \{x \mid x = (4k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi, -3\pi, 5\pi, -7\pi, 9\pi, \ldots\}$.
а) $A \cap B = B$. б) $B \cap C = \emptyset$. в) $C \cap B'_A = C$.

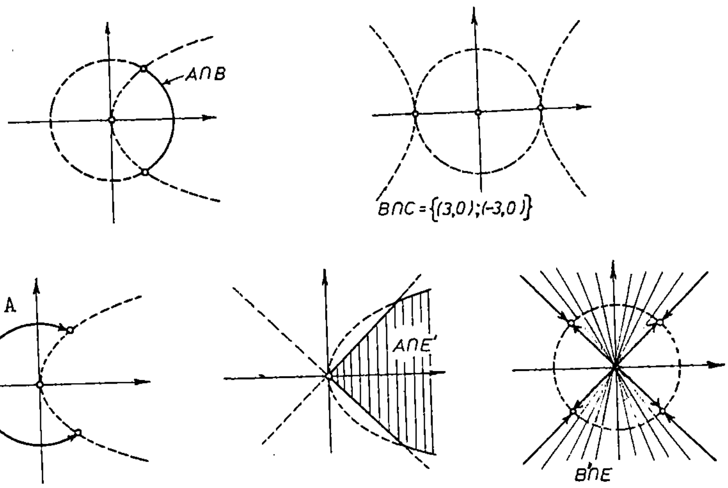
1.33. а) $A' = C$; $B' = \{1, 2, 3, 7, 8, \ldots\}$; $C' = A$; $E' = \{2, 4, 6, \ldots\}$.
б) $A'' = A$. в) $B' \cap C' = A = (B \cup C)'$. г) $\{2\}$. д) $\{1, 3\}$.

1.34. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$; б) $(-\infty, -1] = C \cup \{-1\}$; в) $(-1, 0)$; г) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$.

1.35.



B е множеството точки од кружницата $x^2 + y^2 = 9$, а A, C, E – исшрафираните делови од рамнината.



1.41. A. **1.42.** $A' \cap B$. **1.43.** $A \backslash B$. **1.44.** $A \cup B$.

1.45. A. **1.46.** $A \cup B' \cup C$. **1.47.** $A' \cup B = M$.

1.48. Не. Меѓутоа, секогаш десната страна е подмножество од левата.

1.49. Еднакви се. Да се искористи равенството $X \backslash Y = X \cap Y'$ и дистрибутивноста на $\cap$ спрема $\cup$.

1.50. $(A \backslash A) \backslash A = \emptyset \subset A = A \backslash (A \backslash A)$. **1.51.** Еднакви. **1.52.** Неспоредливи.

1.53. Првото е подмножество од второто.

1.54. Второто е подмножество од првото. **1.56.** $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

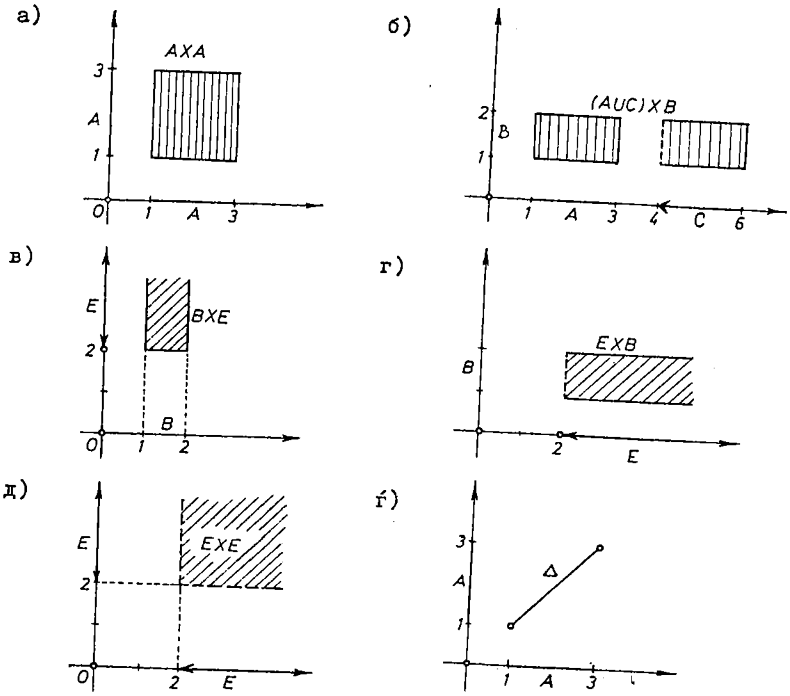
1.57. а) $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 3, 4), (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (a, 2, 3), (a, 2, 4), (a, 3, 3), (a, 3, 4)\}$.

б) $\{(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 2), (3, 3, 3)\}$.

в) $\{(1, 1), (1, 2), (1, a), (2, 1), (2, 2), (2, a), (a, 1), (a, 2), (a, a)\}$.

г) $\{(1, 1), (2, 2), (a, a)\}$.

1.58.

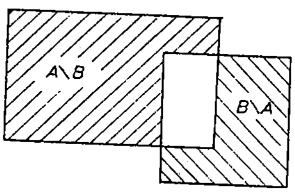


1.66. а) $L \subseteq D$. б) $D \subseteq L$

1.68. $C = A \times B$, каде што A е отсечка со должина H, а B е круг со радиус a.

1.69. Ако A е зададена кружница, а B зададен круг, тогаш, поставувајќи го кругот B нормално на рамнината во која лежи A, така што B да го допира A однадвор, и движејќи го B на тој начин по A, добиваме торус $T = A \times B$.

1.72. а)



$A \Delta B$ е осенчениот дел.

б) $\{1, 4, 5\}$.

1.76. Користејќи ги **1.10**, **1.28** и **1.30** б), добиваме:

$$(A\cup B)\backslash(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']=$$
$$=(B\cap A')\cup(A\cap B')=(A\cap B')\cup(B\cap A')=$$
$$=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=A\Delta B.$$

1.77. Да се искористи **1.76**.

1.78. Нека $A\Delta B=C$. Според **1.76**, имаме:

$$A\Delta C = A\cup C)\backslash(A\cap C)=[A\cup(A\Delta B)]\backslash[A\cap(A\Delta B)]=$$
$$=[A\cup(A\cap B')\cup(B\cap A')]\backslash[A\cap\big((A\cap B')\cup(B\cap A')\big)]=$$
$$=[A\cup(B\cap A')]\backslash\{[A\cap(A\cap B')]\cup[A\cap(B\cap A')]\}=[A\cup B]\backslash[A\cap B']=$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cap B')'=(A\cup B)\cap(A'\cup B)=[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B)]=$$
$$=(A\cap A')\cup(A\cap B)\cup(B\cap A')\cup(B\cap B)=B.$$

Слично, од $A\Delta C=B$ се добива $A\Delta B=C$.

1.81. α е симетрична и транзитивна; β е антисиметрична и транзитивна; γ е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

1.82. а) Да; $1^\alpha=\{1, 3, 5, \ldots\}$, $2^\alpha=\{2, 4, 6, \ldots\}$. б) Да. в) Да. г) Не. д) Не. ѓ) Не; α е релација за подредување.

2. ПРЕСЛИКУВАЊА

2.21. а) Непарните природни броеви. б) Непарните цели броеви. в) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. г) Q^*. д) $\mathbb{N}\backslash\{1, 2\}$.

2.22. а), б), в) $\{-3, 0, 3\}$. г) $\{1\}\cup\{-2, -4, -6, \ldots\}$. Пресликувањето во а) е еднакво со пресликувањето во б), но не е еднакво со пресликувањето во в).

2.23. Во **2.2**, пресликувањето дефинирано со Д.3 е инјекција, а сурјекции нема. Во **2.3**, пресликувањата f_2-f_7 (значи, сите освен f_1 и f_8) се сурјекции, а инјекции нема.

2.24. $1_M=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$,

$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$.

2.26. б), в), ѓ). **2.27.** а) Да. б) Не.

2.28. а) Да. б) Инјекција, но не и сурјекција, зашто 1 не е слика.

2.29. а) Да. б) Биекција.

2.30. Не е пресликување. На пример, на $x=4$ му се придружуваат броевите 1, 2 и 4.

2.31. Не е пресликување, зашто една мајка x може да има повеќе деца $f(x)$.

2.32. а) Да б) Сурјекција. **2.33.** а) Да. б) Не е ни инјекција ни сурјекција.

2.34. а) Да. б) Сурјекција.

2.35. Не е пресликување, зашто со прописот не се еднозначно определени сликите на некои точки од симетралите на аглите.

2.36. Не е пресликување, зашто прописот не му определува на центарот од кругот слика на еднозначен начин.

2.37. а) Ако B се состои само од еден елемент.

б) Ако A се состои само од еден елемент.

в) Ако A и B имаат само по еден елемент.

2.38. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Меѓу овие пресликувања нема ни сурјекции ни инјекции. Еднакви се $(hg)f$ и $h(gf)$.

2.39. а) $uf: A \to A$. б) Не е дефинирано. в) Не е дефинирано. г) $gf: A \to C$. д) $vg: B \to A$. ѓ) $hu: B \to C$. е) Не е дефинирано. ж) $gfv: C \to C$.

2.40. а) 10. б) 15. в) 65. г) 624. д) $(x^2+1)^2 - 2|x^2+1| = x^4 - 1$. ѓ) $(x^2 - 2|x|)^2 + 1$.

2.41. а) $gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = fg$,

па, значи, дадените пресликувања не комутираат. Овој пример ни покажува дека составот на две пресликувања, во општ случај, не е комутативен. б) Комутираат.

2.42. $f(x) = x^3$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 0$. **2.43.** $gf: a \mapsto s,\ e \to k,\ u \mapsto c,\ o \mapsto k,\ y \mapsto c$.

2.45. $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & c & x & y \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(f^{-1})^{-1} = f$. **2.46.** $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

2.47. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1+x}$. **2.48.** $f^{-1}(x) = \sqrt{(1/x) - 1}$. **2.49.** $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

2.50. а) Не може. Имено, според дефиницијата за график на пресликување, за секој $x \in A$ постои пар $(x, y) \in f^*$, а во случајот за $c \in A$ не постои пар.

б) Не може, зашто секој $x \in A$ се појавува како прв елемент само во еден пар од f^*, а во овој овој случај s се појавува двапати.

2.51. (1, 1), (2, 9). **2.52.** а) Не. б) Не. в) Да. г) Не.

2.53. $\Gamma = f^*$ ако се исполнети следниве услови:

$$\Gamma \subseteq A \times B, \quad A = \{a, c, e, k\} \quad \{1, 2, 3\} \subseteq B.$$

2.54. а) $f^* = \{(а, 1), (е, 2), (и, 3), (о, 4), (у, 5)\}$.

б) $(f^{-1})^* = \{(1, а), (2, е), (3, и), (4, о), (5, у)\}$.

Да забележиме дека графикот на f^{-1} се добива од графикот на f ако во секој пар елементите си ги разменат местата: првиот постанува втор, а вториот – прв.

2.55. а) $V_1 = \{1, 2, 3, 5\}$, $V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$.

б) $(fg)^* = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 5), (5, 3)\}$;

$(gf)^* = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 4), (5, 1)\}$; $fg \neq gf$.

2.56. $f(x) = x + 1$ е биекција од A на B

2.57. $f(x) = \frac{x+1}{2}$ е биекција од A на B. **2.58.** $f(x) = 3^x$.

2.59. Ортогоналното проектирање на точките од полукружницата врз дијаметарот остварува биекција.

2.60. Можеме да сметаме дека отсечките се сегментите $[a, b]$, $[c, d]$. Пресликувањето $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + b$ е биекција (види и **2.25**).

2.61. Види **2.17**. **2.62.** Види **2.25**. **2.63.** Види **2.10** в). **2.64.** $f(x) = 2^x$.

2.66. а) Не е точно. На пример, при $A = \{a, c, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 4\}$, $f(a) = 1$, $f(c) = 2$, $f(e) = 3$, $g(1) = a$, $g(2) = c$, $g(3) = e$, $g(4) = g(5) = e$ имаме $(gf)(x) = x$ за секој x од A, но $g \neq f^{-1}$ (f не е биекција, па нема инверзна).

б) Не е точно. Види го примерот погоре, во а).

в) Точно е. г) Точно е. д) Не е точно.

2.69. Бидејќи двата елемента од C се слики на елементите од A, gf е сурјекција. Бидејќи $f(a) = 1$, $(gf)(a) = s$ и $f(e) = 2$, $(gf)(e) = c$, мора да биде $g(1) = s$ и $g(2) = c$. Како и да е дефинирано $g(3)$, g е сурјекција.

2.70. Јасно е дека gf е инјекција. Бидејќи $(gf)(a) = s$, а $g(1) = s$ мора да е $f(a) = 1$; потоа, од $(gf)(e) = c$ и $g(2) = g(3) = c$ мора да биде или $f(e) = 2$, или $f(e) = 3$, но во секој случај f е инјекција.

2.71. Обратното не важи. На пример, нека $A = \{a, e\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $C = \{c, s\}$, $f\colon a \mapsto 1,\ e \mapsto 2$; $g\colon 1 \mapsto c,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto s$.

Пресликувањето $g\colon B \to C$ е сурјекција, но составот $gf\colon A \to C$, $gf\colon a \mapsto c,\ e \mapsto c$ не е.

2.72. Не важи. Да се види примерот во **2.71**.

2.73. а) $f(S_1) = \{2, 3, 5\}$, $f(S_2) = \{2, 5\}$, $f(S_3) = \{3\}$, $f(A) = \{2, 3, 5\}$.

б) $f^-(T_1) = \{u, y, p\}$, $f^-(T_2) = \{a, e, o\}$, $f^-(T_3) = \emptyset$, $f^-(B) = A$.

2.76. а) Кога f е сурјекција. б) Никогаш. в) Секогаш.

3. ОПЕРАЦИИ

3.12. Асоцијативна; некомутативна. **3.14.** а) Комутативна, асоцијативна; неутрален елемент е a; инверзни: $a^{-1} = a$, $c^{-1} = p$, $e^{-1} = e$, $p^{-1} = c$. б) Не е ни комутативна ни асоцијативна; нема неутрален елемент.

3.15. Комутативна; асоцијативна; неутрален елемент е 0; ако $a \neq 1/2$, тогаш a има инверзен: $a^{-1} = -\frac{a}{1+2a}$.

3.16. Не е комутативна; асоцијативна; парот $(1, 0)$ е неутрален елемент; ако $a \neq 0$, парот (a, c) има инверзен: $(a, c)^{-1} = (1/a, -c/a)$.

3.17. а) Да. б) Не. в) Да. г) Да. д) Не. ѓ) Да.

3.18. Да; комутативен; полугрупа со неутрален елемент 1.

3.19. Да; не е комутативен; не е полугрупа; без неутрален елемент. **3.20.** Не.

3.21. Не. **3.22** Да; не е комутативен; не е полугрупа; без неутрален елемент.

3.23. Не. **3.24.** Да; комутативен; полугрупа; со неутрален елемент 0.

3.25. Да; комутативен; не е полугрупа; нема неутрален елемент.

3.26. Да; комутативен; не е полугрупа; без неутрален елемент.

3.27. Да; комутативен; полугрупа без неутрален елемент.

3.28. Да; не е комутативен; не е полугрупа; без неутрален елемент. **3.29.** Не.

3.30. а) Комутативна полугрупа со неутрален елемент $(0, 0)$; за (x, y) инверзен е $(-x, -y)$. б) Комутативна полугрупа со неутрален елемент $(1, 1)$; ако $(x, y) \neq (0, 0)$, тогаш $(x, y)^{-1} = (1/x, 1/y)$.
в) Некомутативен, неасоцијативен групоид, без неутрален елемент.

3.31. а) Некомутативна група; неутрален елемент е $(0, 0)$; $(a, c)^{-1} = (-a, (-1)^{1-a}c)$.
б) $G(\circ)$ не е полугрупа, не е комутативен и нема неутрален елемент.

3.32. Не; комутативна полугрупа со единица, но ниеден $x \neq 1$ нема инверзен.

3.33. Да; неутрален елемент е 0; за x инверзен е $-x$.

3.34. Не; комутативна полугрупа без неутрален елемент.

3.35. Да. **3.36.** Да; неутрален елемент е $a^0 = 1$; за a^k инверзен е a^{-k}.

3.37. Да; неутрален елемент е $3^0 5^0 = 1$; за $3^p 5^s$ инверзен е $3^{-p} 5^{-s}$.

3.38. Да; неутрален елемент е 0; за $c/10^k$ инверзен е $-c/10^k$.

3.39. Да; неутрален елемент е $0 + 0\sqrt{2} = 0$; за $x + y\sqrt{2}$ инверзен е $-x - y\sqrt{2}$.

3.40. Не; елементот $0 + 0\sqrt{2} = 0$ нема инверзен.

3.41. Да; неутрален елемент е $1 + 0\sqrt{2} = 1$; $(x + y\sqrt{2})^{-1} = \frac{x}{x^2-2y^2} - \frac{y\sqrt{2}}{x^2-2y^2}$.

3.42. Не; комутативна полугрупа со неутрален елемент 1, но за ниеден елемент $(\neq 1)$ не постои инверзен.

3.43. Да; неутрален елемент е 1; $(-1)^{-1} = -1$, $i^{-1} = -i$.

3.44. Да; неутрален елемент е $1 + i \cdot 0$; $(x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$.

3.45. а) Да; неутрален елемент е $(0,\ 0)$; $(k,\ x)^{-1} = (-k,\ -3^{-k}y)$; некомутативна.
б) Не; не важи асоцијативниот закон.

3.47.

	ε	ρ_1	ρ_2
ε	ε	ρ_1	ρ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ε
ρ_2	ρ_2	ε	ρ_1

G е комутативна. (Да се види и зад. **3.4.**)

3.48. $G_1 = \{\varepsilon, \tau\}$, каде што $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а 1 и 2 се темињата на основата;

$G_2 = \{\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2, \gamma\}$, $G_3 = \{\varepsilon,\ \alpha,\ \beta, \gamma\}$, $G_4 = \{\varepsilon, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$,

каде што: $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Табелите се:

	ε	τ
ε	ε	τ
τ	τ	ε

	ε	σ_1	σ_2	γ
ε	ε	σ_1	σ_2	γ
σ_1	σ_1	ε	γ	σ_2
σ_2	σ_2	γ	ε	σ_1
γ	γ	σ_2	σ_1	ε

	ε	α	β	γ
ε	ε	α	β	γ
α	α	ε	γ	β
β	β	γ	ε	α
γ	γ	β	α	ε

	ε	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ε	ε	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ε	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ε	ρ_1	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3
ρ_3	ρ_3	ε	ρ_1	ρ_2	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	σ_4	ε	ρ_2	ρ_1	ρ_3
σ_2	σ_2	σ_4	σ_1	σ_3	ρ_2	ε	ρ_3	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_4	σ_1	ρ_3	ρ_1	ε	ρ_2
σ_4	σ_4	σ_1	σ_3	σ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ε

G_1, G_2 и G_3 се комутативни, а G_4 не е комутативна.

3.49. $\mathbf{Z}_n^*(\odot)$ не мора да биде група, зашто на пример, $\mathbf{Z}_6^*(\odot)$ (види **3.5**) не е група. Ако n е прост број, тогаш $\mathbf{Z}_n^*(\odot)$ е група, каде што $\mathbf{Z}_n^* = \mathbf{Z}\setminus\{0\}$.

3.50. Да. **3.51.** Да.

3.52. Не е, зашто на пример, $5 \odot 7 = 2$ не е елемент од даденото множество.

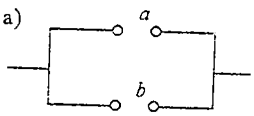
3.53. Да. **3.54.** Да.

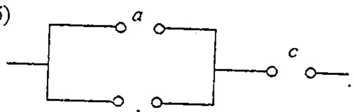
3.55. а) Комутативен прстен без единица. б) Не е прстен; $S(+)$ не е групоид.

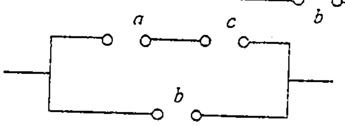
3.56. а) Да. б) Не е; на пример, $(0+\sqrt[3]{2})(0+\sqrt[3]{2}) = 0+\sqrt[3]{4} \notin P$, па во однос на множењето P не е групоид. **3.57.** а) Да. б) Не. **3.61.** Не мора да е поле, зашто $\mathbf{Z}_n^*(\odot)$ не мора да биде група (**3.49**). Но, ако n е прост број, тогаш $\mathbf{Z}_n(\oplus, \odot)$ е поле. **3.63.** $B = \{0,\ a,\ c,\ 1\}$, каде што $0 = \emptyset$, $a = \{x\}$, $c = \{y\}$, $1 = \{x,\ y\}$; таблиците се истите како во **3.7**.

3.64. а) 1. б) y. в) $x \vee y'$. г) $x' \wedge y'$.

3.65.

а) 

б) 

в) 

3.68. За асоцијативноста да се разгледаат три случаи:

1) $A \cap B = \emptyset$ и $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = \emptyset$;

2) $A \cap B = \emptyset$ и $(A \cup B) \cap C \neq \emptyset$; 3) $A \cap B \neq \emptyset$.

3.70. Од (1) следува дека a^2 е неутрален елемент, т.е. $a^2 = 1$, а од тоа, бидејќи a е произволен, следува дека секој елемент е инверзен сам на себе. Значи, $S(\cdot)$ е група. Од $(xy)^2 = 1$ и $(xy)^2 = xyxy$ следува $xy = yx$, т.е. дека групата е комутативна.

3.71. Види **1.72**, **1.80**, **1.75** и **1.74**.

3.72. а) Да. б) Не. **3.74.** 25. **3.75.** Види: **3.71**; **1.25** и **1.26**; **1.79**.

3.77. Од $(xy+yx)^2 = 0$ добиваме $xy+yx = 0$ т.е. $xy = -yx$.

3.78. а) и б) Да. в) Не; на пример $2 \vee 3 = 6$, не е елемент од даденото множество. г) Не; на пример, за елементот 4 не постои комплемент.

3.82. а) Да. б) Не. в) Не. г) Да.

4. ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД

4.8. 10. **4.9.** 0. **4.10.** $ac(c-a)$. **4.11.** a^2-c^2. **4.12.** $\sin^2 x$ **4.13.** $x = 2$.

4.14. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. **4.15.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -4$.

4.16. $x_1 = 0$, $x_2 = -1+3i$, $x_3 = -1-3i$. **4.17.** Нема решение.

4.18. $\cos 8x \cos 5x + \sin 8x \sin 5x = \cos(8x-5x)$; $x = \pi(2k+1)/6$, k – цел број.

4.19. а) $x > 3$. б) $-2 < x < 8$. **4.20.** $x = 4$, $y = 1$.

4.21. Детерминантата на системот е нула, па системот не може да се реши со детерминанти.

4.22. $x = (ac+bc)/(a^2+b^2)$, $y = (bc-ac)/(a^2+b^2)$. **4.23.** $x = -c/a$, $y = -c/b$.

4.28. а) 100. б) $2abc$. в) $1+a^2+b^2+c^2$.

4.29. а) 30. б) $1+ab+ac+bc+abc$. в) $\sin 2x$. **4.30.** 21.

4.31. $(a-4)(a+2)^2$. **4.32.** $a^2+p^2+c^2+1$. **4.33.** $2x^2y^2c^2$.

4.34. $x_{1,2} = 0$. $x_3 = -3a$. **4.35.** $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -3$.

4.36. $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. **4.37.** $x^4+2a^2x^2+a^4+1 = 0$ нема решение.

4.43. $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$. **4.44.** $x = y = z = 2$.

4.45. $x = (2a^2-a+3)(a^3+1)^{-1}$, $y = (3a^2-2a+1)(a^3+1)^{-1}$, $z = (a^2-3a+2)(a^3+1)^{-1}$.

4.46. $x = bc$, $y = ac$, $z = ab$.

4.48. а) $a^3+b^3+c^3-3abc = 0$. б) $a^2+b^2+c^2+1 = 0$. **4.50.** $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$.

5. ВЕКТОРИ

5.28. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

5.29. $3\overrightarrow{AD}$. **5.31.** 3:5 и 1:5.

5.33. $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1+k(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}_5 = \frac{1}{1+k}(\mathbf{r}_1+k\mathbf{r}_3)$, $\mathbf{r}_6 = \frac{1}{1-k}(\mathbf{r}_1-k\mathbf{r}_2)$.

5.34. $x = 3$, $y = 2$. **5.35.** $\mathbf{s} = 2\mathbf{a}_1+5\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3$.

5.36. Линеарно зависни: $\mathbf{a} = 5\mathbf{p}-2\mathbf{r}$.

5.38. а) Линеарно независни. б) Линеарно зависни: $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$. в) Линеарно зависни; $\mathbf{c}$ не може да се изрази како линеарна комбинација од $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ зашто $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни меѓусебно, а $\mathbf{c}$ не е колинеарен со нив. г) Линеарно зависни; $\mathbf{c} = 3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$. д) Линеарно независни.

5.39. $(3/7, 6/7, -2/7)$. **5.40.** $x = -2$, $y = 1$, $z = -3$. **5.42.** 0.

5.43. 120^0. **5.44.** а) $6\sqrt{3}$. б) $\left(\sqrt{3}/6\right)\mathbf{a}+\left(\sqrt{3}/9\right)\mathbf{c}$. в) 90^0.

5.45. Ако аголот меѓу векторите со должини 7 и 24 е 90^0.

5.46. а) $\cos\alpha = 5/7$. б) 90^0. **5.47.** $\cos\alpha = 6/11$, $\cos\beta = -2/11$, $\cos\gamma = 9/11$.

5.50. а) 3/2, 15/2 и 4. б) $1/2\sqrt{3}$, $5/2\sqrt{3}$ и $2/\sqrt{13}$. в) 1/2, 5/2 и 2.

5.51. а) 19/9. б) 8/3. в) $13/\sqrt{19}$.

5.52. а) $x = 2$ и $x = -1$. б) Не постои x за кој векторите би биле паралелни.

5.53. $\mathbf{x} = (2, 3, 4)$. **5.57.** а) $-\sqrt{3}\,k^2$. б) k^2. **5.58.** a^2c^2 **5.59.** $(\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{c}-\mathbf{a})$.

5.60. а) $(1, -16, -10)$ и $(-4, 64, 40)$. б) $(5, 1, 7)$ и $(20, 4, 28)$. в) $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 0)$.

5.61. а) $(10, 3, 11)$. б) $(-10, -3, -11)$. в) $\sqrt{230}$. г) $(-20, -6, -22)$.

5.62. а) $\sqrt{195}$. б) $(-25, 35, -55)$. в) $2\sqrt{195}$. **5.63.** а) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$. б) $\frac{33\sqrt{2}}{8}$.

5.64. а) $\overrightarrow{AC} = (4, -3, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (3, 2, -6)$, $\overrightarrow{AB} = (1, -5, 7)$, $\angle C = 90^0$, $\cos B = -\frac{7}{5\sqrt{3}}$, $\cos A = \frac{26}{5\sqrt{78}}$; $P = \frac{1}{2}\sqrt{1274}$.

5.65. а) $6\sqrt{5}$. б) $5\sqrt{3}$. **5.66.** $5\sqrt{3}$. **5.67.** $\pm 2/\sqrt{7}$.

5.69. а) Некомпланарни. б) Компланарни. в) Компланарни. г) Некомпланарни. д) Компланарни.

5.70. а) Не. б) Да. в) Да. **5.71.** $2[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

5.72. а) $23/\sqrt{158}$. б) $39/\sqrt{182}$. **5.73.** а) $V = 4/3$; $\overline{SE} = \sqrt{2}/2$. б) 11.

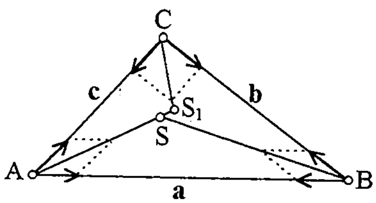
5.74. а) $(-1, -1, 3)$ и $(2, 4, 2)$. б) $(-46, 29, -12)$ и $(-7, 7, 7)$.

5.75. а), б), в) -20. г) $5\sqrt{26}$. д) $3\sqrt{10}$. ѓ) $(-40, -20, 20)$.

5.76. Да. *Упатство.* Ако еден вектор $\overrightarrow{OA}$ се заврти околу O за агол $\alpha \neq 2k\pi$, се добива вектор $\overrightarrow{OA}'$; $\overrightarrow{OA}' = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \mathbf{o}$.

5.77. $\mathbf{c}_0 = (b\mathbf{a} + a\mathbf{b})/|b\mathbf{a} + a\mathbf{b}|$, $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$. **5.78.** $\overrightarrow{BM} = (c\mathbf{a} + a\mathbf{c})/(a + c)$.

5.79. *Решение.* Да ставиме како на црт. 5.10:



Црт. 5.10

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{CA} = \mathbf{c}$; тогаш:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

Имаме: $$\overrightarrow{AS} = x\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right), \tag{2}$$

и, исто така, $$\overrightarrow{AS} = \mathbf{a} + \overrightarrow{BS}; \tag{3}$$

$\overrightarrow{BS} = y\left(\frac{\mathbf{b}}{b} - \frac{\mathbf{a}}{a}\right)$, па $\overrightarrow{AS} = \mathbf{a} + y\left(\frac{\mathbf{b}}{b} - \frac{\mathbf{a}}{a}\right)$.

Значи,
$x\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right) = \mathbf{a} + y\left(\frac{\mathbf{b}}{b} - \frac{\mathbf{a}}{a}\right)$.

Ставајќи, според (1), $\mathbf{c} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$, а потоа средувајќи, добиваме:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \quad \text{и} \quad x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = 1 - \frac{y}{a}. \tag{4}$$

Од системот (4) ги определуваме x и y:

$$x = \frac{ac}{a+b+c}, \qquad y = \frac{ab}{a+b+c}.$$

Значи,

$$\overrightarrow{AS} = \frac{ac}{a+b+c}\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right). \tag{5}$$

На сличен начин, од $\overrightarrow{AS_1} = u\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right)$ и $\overrightarrow{AS_1} = \overrightarrow{CS_1} - \mathbf{c} = t\left(\frac{\mathbf{c}}{c} - \frac{\mathbf{b}}{b}\right) - \mathbf{c}$, добиваме и:

$$u = \frac{ac}{a+b+c}$$

т.е.

$$\overrightarrow{AS_1} = \frac{ac}{a+b+c}\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right). \tag{6}$$

Од (5) и (6) следува дека $\overrightarrow{AS_1} = \overrightarrow{AS}$, па значи S и S_1 се совпаѓаат.

5.82. *Решение.* Нека точките A, B, C лежат на иста права (црт. 5.11). (Јасно е дека тие се различни.) Тогаш имаме:

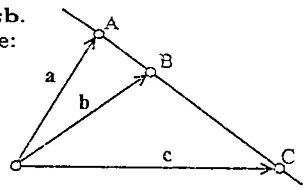
$\mathbf{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + k(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, т.е. $\mathbf{c} = (1-k)\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.
Заменувајќи го $\mathbf{c}$ во равенството (1), добиваме:

$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + (z - kz)\mathbf{a} + kz\mathbf{b} = \mathbf{o}$,
т.е. $\quad (x + z - kz)\mathbf{a} + (y + kz)\mathbf{b} = \mathbf{o}$,

па поради неколинеарноста на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$x + z - kz = 0, \quad y + kz = 0.$

Собирајќи ги овие равенства добиваме:



Црт. 5.11

$$x + y + z = 0.$$

Обратно, ако за скаларите x, y, z од равенството (1) важи равенството (2), да докажеме дека A, B, C лежат на иста права. Кога точката C не би лежела на иста права со точките A, B, тогаш векторите $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ не би биле колинеарни, т.е. $\mathbf{a} - \mathbf{c} \neq \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{c})$, за секој $\lambda \in \mathbb{R}$, кое, ако се стави $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$, може да се напише во вид:

$$\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \neq \mathbf{o},$$

спротивно на фактот

$$x(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + y(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{o},$$

добиен кога од (2) $z = -x - y$ ќе се замени во (1). Од тоа следува дека C лежи на иста права со A, B.

5.83. Имаме: $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AS}$, т.е. $\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AS} = x\overrightarrow{AT}$, т.е. $1 \cdot \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AS} - x\,\overrightarrow{AT} = \mathbf{o}$, па, според **5.82**, добиваме: $1 + k - x = 0$, т.е. $x = k + 1$.

5.87. $\mathbf{x} = \frac{1}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}\{s(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + k(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + p(\mathbf{c} \times \mathbf{a})\}$.

5.88. а) $\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}}{a^2 + 1}$. *Помош.* Равенката да се помножи прво скаларно со $\mathbf{a}$, а потоа векторски (одлево) со $\mathbf{a}$. б) $\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(k\mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a})$.

5.89. Да се земе помошниот вектор $\mathbf{p} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ и да се формира скаларниот производ $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$, каде што $\mathbf{s}$ е произволен ненулти вектор. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned}\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} &= \mathbf{s} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}] = \\ &= \mathbf{s} \cdot [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})] - \mathbf{s} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{s} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \\ &= (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \\ &= (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{o},\end{aligned}$$

па, бидејќи $\mathbf{s}$ е ненулти вектор, тој не мора да е нормален на $\mathbf{p}$, но тогаш од условот $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = 0$, следува дека $\mathbf{p} = \mathbf{o}$, т.е. следува равенството (1).

5.91. Од $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{c} + \mathbf{d})$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mu(\mathbf{c}+\mathbf{d})$ добиваме $\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \frac{\lambda-\mu}{2}\,\mathbf{d}\times\mathbf{c} = \mathbf{d}\times\mathbf{b}$, а слично за другите два.

5.93. $x = [\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]/[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\qquad y = [\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}]/[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\qquad z = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]/[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

5.95.
$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AA_1} \times \overrightarrow{C_1C}| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{k+s}(s\mathbf{a} + k\mathbf{b}) \times \left(\frac{-k}{k+s}\mathbf{a} + \mathbf{b}\right)\right| = \\ &= \frac{k^2 + ks + s^2}{(k+s)^2} \cdot \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{k^2 + ks + s^2}{(k+s)^2} \cdot P_0 .\end{aligned}$$

5.96. Множејќи го векторски равенството $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$ последователно со $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, добиваме: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, па $ab\sin C=bc\sin A=ca\sin B$, т.е. $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$.

5.100. Стави $\mathbf{c}\times\mathbf{d}=\mathbf{p}$; $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{p}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{p})=\mathbf{a}\cdot\big(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big)$ и пресметај го двојниот векторски производ (**5.23**).

6. АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР

6.33. M_1 и M_3. **6.34.** а) $x+2y-2z=6$. б) $x+2y-2z=15$.

6.35. а) $4x-y+3z=15$. б) $6x+3y+2z=24$. в) $5x+11y-3z=23$. г) $x-2y+2z+12=0$ д) $5x+11y-3z=23$.

6.36. 4. **6.37.** а) $x-1=0$. б) $z-3=0$. в) $\sqrt{3}x+z=3+\sqrt{3}$.

6.38. $p=8$; $\cos\alpha=3/7$, $\cos\beta=-6/7$, $\cos\gamma=2/7$.

6.39. а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1$. б) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-\frac{4}{3}=0$. в) (На пример:) $x=u$, $y=4-2u+2v$, $z=v$. **6.40.** а) Паралелна со рамнината Oxy (т.е. нормална на оската Oz). б) Паралелна со Oyz. в) Минува низ координатниот почеток. г) Паралелна е со оската Oz. д) Паралелна е со оската Oz и минува низ координатниот почеток.

6.41. а) $(1,1,1)$. б) Не постои точка што лежи на сите три рамнини истовремено. в) Сите три рамнини се паралелни, па немаат заедничка точка. г) $(1,2,3)$. д) Рамнините имаат безброј многу заеднички точки: $\left(x,-\frac{2}{3},-x-\frac{1}{3}\right)$, x – кој било реален број.

6.42. а) $\alpha=\pi/4$. б) $2x-y+2z-11=0$. в) $4x+6y-z-4=0$. г) $2x+2y-z-2=0$.

6.43. $x+2y+3z-6=0$. **6.44.** а) $x=3+t$, $y=1-2t$, $z=2+t$; $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$. б) $\frac{x-3}{-4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-2}$. в) $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{5}$. г) $T(5/3,1,4/3)$.

6.45. а) $\sin\alpha=\sqrt{6}/3$. б) $\alpha=\pi/2$. в) $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{2}$. г) $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{1}$. д) $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

6.46. $x-2=y-3=z-4$. **6.47.** а) -2. б) 2. в) 5. г) $2\sqrt{2}$. д) 1. ѓ) $3/\sqrt{13}$.

6.48. -2. **6.49.** Отклонот на M_1 е -2, а на M_2 е $+3$; значи, M_1 и M_2 лежат на различни страни од рамнината.

6.50. а) $M'(0,5,0)$. б) $S(-2,7,-4)$. в) $M''(7,4,1)$. г) $T(12,5,-2)$.

6.51. Ги сече страните AC и BC, а не ја сече AB. *Помош*: Да се најде отклонот на A, B, C од дадената рамнина.

6.52. $2x+2y-z-26=0$. **6.53.** а) $125/216$. б) 8. **6.54.** Минува низ M_1 и M_4.

6.55. $16x-27y+14z-159=0$. **6.56.** $\frac{x-1}{2}=y-2=z-2$.

6.57. а) $\sqrt{21}/42$. б) $4/21$. в) $\sqrt{21}/6$. г) 0. **6.58.** 90^0.

6.59. $3/13$, $4/13$, $12/13$ со Ox, Oy, Oz соодветно.

6.60. 60^0. **6.61.** а) $(-5/2,\ -1,\ -1/2)$. б) $(2,\ 3,\ 1)$.

6.62. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4}$; $(3,\ 2,\ -1)$. **6.64.** а) (Π_1) и (Π_3). б) (Π_3).

6.65. а) $5x - y - 7 = 0$. б) $x - 2y - 1 = 0$. в) $8x + 2y - 9z + 12 = 0$.

6.66. а) $2x + 18y + 10z + 14 = 0$. б) $2x + 3y + 4z + 5 = 0$. в) $x - y + z + 1 = 0$. г) Не постои таква рамнина.

6.67. $x + 3y = 0$ и $3x - y = 0$.

6.68. $a = -\sqrt{2}$; $(P){:}\, y - z\sqrt{2} = 0$ и $a = \sqrt{2}$; $(P){:}\, y\sqrt{2} + 2z = 0$.

6.69. а) Да; $S(1,\ 2,\ 3)$. б) Се сечат во точката $(-3,\ 5,\ -5)$ и лежат во рамнината $9x + 10y - 7z - 58 = 0$. в) Се разминуваат. г) Паралелни се; лежат во рамнината $4x + 3y = 0$.

6.70. $a = 3$; $S(1,\ -2,\ 5)$. **6.71.** $a = -\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-7}$.

6.72. $a = 3$; $x + 2y - 5z = 0$; $S(-1,\ 3,\ 1)$; $\cos\alpha = \sqrt{6/11}$.

6.73. а) $M'(3,\ 0,\ 2)$. б) $M'(3,\ -1,\ 1)$. в) $M'(11/7,\ -2/7,\ -1/7)$.

6.74. $A'B'{:}\, A'(1,\ 1/2,\ 1/2)$, $B'(1,\ 3/2,\ 3/2)$.

6.75. а) $\{3x + 2y + z - 4 = 0,\ x - 2y + z - 2 = 0\}$. б) $\frac{x-2}{24} = \frac{y+3}{-13} = \frac{z-1}{9}$.

6.76. а) Правата $\{2x - 3y - 2z + 1 = 0,\ 5x + 2y + 2z - 7 = 0\}$. б) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$. в) Точката $(0,\ 0,\ 4)$. г) $\{2x + 2y + z + 15 = 0,\ 4x - 9y + 10z - 9 = 0\}$.

6.77. а) $x + 2y - 2z - 1 = 0$; 3. б) $19x - 14y + z + 23 = 0$; $\sqrt{558/29}$.

в) $4x + 13y - z - 5 = 0$; $\sqrt{186/26}$.

6.78. а) $\sqrt{101}$. б) $\sqrt{12/7}$. в) $\sqrt{27/14}$.

6.79. а) $\sqrt{965}$. б) 7. в) $\sqrt{2}$. г) $5/\sqrt{6}$. д) $8/13$.

ѓ) $(5a - 10)$ е) $(5a - 10)/\sqrt{5a^2 - 16a + 17}$.

6.80. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{15} = \frac{z+3}{19}$.

6.81. а) $24/\sqrt{91}$; $\frac{x-5}{-3} = \frac{y-1}{9} = \frac{z+4}{1}$. б) $1/\sqrt{322}$; $\frac{x-3}{12} = \frac{y-3}{-13} = \frac{z-3}{3}$.

6.82. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$. **6.83.** а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{6}$. б) $P(4,\ -2,\ 6)$. в) 7. г) 2.

6.84. 3. **6.85.** а) $S(1,\ 2,\ -3)$ б) $S(5,\ 2,\ -1)$.

6.86. а) На иста. б) На различни.

6.87. а) $P(1,\ 5,\ 0)$. б) $P(3,\ 2,\ 1)$. в) $P(3,\ 2,\ 3)$. г) $P(2,\ 0,\ 7)$.

Помош. а) и в). Точките A и B лежат на различни страни од дадената рамнина, па збирот $\overline{PA}+\overline{PB}$ ќе биде најмал кога точките A, P, B ќе бидат колинеарни; значи, точката P е пробод на рамнината Σ со правата AB. б) и д). Точките A и B лежат на иста страна од рамнината Σ, па збирот $\overline{PA} + \overline{PB}$ ќе биде најмал кога точките A', P, B ќе бидат колинеарни, при што A' е симетричната точка на A во однос на Σ.

6.88. а) $P(2,\,1,\,1)$. *Помош.* Точките A и B лежат на иста страна од Σ, па $|\overline{PA}-\overline{PB}|$ ќе биде најголема кога A, B, P ќе бидат колинеарни.

б) $P(-1,\,3,\,-2)$. *Помош.* Точките A и B лежат на различни страни од Σ, па $|\overline{PA}-\overline{PB}|$ ќе биде најголема кога A', P, B ќе бидат колинеарни, при што A' е симетричната точка на A во однос на Σ. в) $P(1,\,2,\,3)$.

6.89. $S(-5/3,\,-2/3,\,5/3)$. б) $S(4,\,3,\,10)$. в) $(2,\,-5,\,7)$.

6.90. а) $x+\frac{5}{4}=-\frac{1}{2}\left(y-\frac{5}{6}\right)=z+\frac{25}{12}$. б) $x=y=z$.

6.91. а) $2x+2y-z-3=0$. б) $x=2t+7/3,\ y=2+2t,\ z=-t-7/3$.

6.92. а) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. б) $(x-3)^2+(y+2)^2+z^2=16$.

6.93. а) $C(1,\,-1,\,-2),\ r=3$. б) $C(-4,\,0,\,1),\ r=1$. в) $C(0,\,-2,\,3),\ r=2$.

6.94. а) $x^2+y^2+z^2+4x-6z+9=0$. б) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-5=0$.

6.95. а) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$. б) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=9$.

6.96. а) $x+2y-2z+3=0$. б) $2x-2y+z-4=0$.

6.97. а) $x+z-\sqrt{2}=0,\ y-z+\sqrt{2}=0;\ 120^0$. б) $x+2y+2z-28=0$ (само една).
в) $x+y\sqrt{7}+z-6=0,\ x-y\sqrt{7}+z-6=0;\ \cos\alpha=-5/9$.

6.98. Цилиндрични. а) Елиптичен цилиндар. б) Параболичен цилиндар.
в) Хиперболичен цилиндар. г) Пар рамнини: $y-z=0,\ y+z=0$.

6.99. а) $z=(x+y-2)^2+3y-5$. б) $3x-(y-2x)^2-z=0$.
в) $(3x-z+1)^2+2(x+2y-z+1)^2-12x+4z-4=0$.

6.100. $9x^2+4(y-2)^2=(z-4)^2$. б) $(x+3y-z^2)+(4x-z-3)^2=(x-z+3)^2$.

6.101. $(x-5)^2=24(y^2+z^2)$.

6.102. а) $y^2+z^2=4x^2$. б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{9}=1;\ \frac{x^2+z^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.
в) $(y-2)^2+\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}-2\right)^2=1$. г) $z=x^2+y^2+1;\ x^2+z^2=(y^2+1)^2$.

6.103. а) Еднокрилен хиперболоид. б) Двокрилен хиперболоид.
в) Параболичен цилиндар. г) Кружен конус. д) Кружен параболоид.
ѓ) $\emptyset$. е) Еднокрилен хиперболоид. ж) Хиперболичен параболоид.

6.104. а) $P_1(-1,\,-1,\,3),\ P_2(-4/3,\,-1/3,\,2)$. б) Немаат заеднички точки.
в) $P_1(3,\,0,\,3),\ P_2(7,\,-4,\,11)$.

6.107. $-x+3=y-2=z-1$. **6.108.** $(-17/53,\,63/53,\,0)$.

6.109. $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\frac{a-\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\cdot\mathbf{n},\ \mathbf{r}_0=\mathbf{r}_0(M)$. **6.110.** $d=c\sin\alpha,\ \alpha=\angle(\mathbf{a},\,\mathbf{c})$.

6.111. $\left(\sqrt{7},\,-\sqrt{7},\,3\right)$ и $\left(-\sqrt{7},\,\sqrt{7},\,3\right)$. **6.112.** $M_0(-2,\,-2,\,7)$; 3.

6.113. $(A^2+B^2+C^2)r^2=D^2$. **6.114.** $x^2+y^2+z^2+3x=0$ (сфера).

6.115. а) $x-y=15$. б) $x^2+y^2+z^2-3x-y-6z=16$.
в) $5(x^2+y^2+z^2)-16x-2y-30z+25=0$.

6.116. $2x+2y+z-5=0$; $\frac{1}{3}\sqrt{35}$. **6.117.** $x^2+y^2+z^2\pm 6z=4$.

6.118. а) $x^2+2y^2=a^2$, $z=0$. б) $x^2+2z^2=a^2$, $y=0$. **6.119.** $x^2+2y^2+8x-16=0$, $z=0$.

6.120. $(8x-2y+2z)^2+(5y-2x+4z)^2+(2x+4y+5z)^2=2916$.

6.121. $\frac{x'^2}{6}+\frac{y'^2}{3}+\frac{z'^2}{2}=1$. **6.122.** $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{1}=1$.

6.124. *Помош.* Равенката (2) може да се напише во вид

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right), \qquad (3)$$

па ако се помножат левите односно десните страни на (1) се добива (3).

7. МАТРИЦИ

7.16. а) $x=1$, $y=2$, $a=0$, $c=-1$. б) $x=2$, $y=4$, $a=1$, $c=3$.

7.17. $S=\begin{bmatrix}1&3&2\\1&0&1\\3&0&4\end{bmatrix}$. **7.18.** а) $\begin{bmatrix}12&1\\8&4\end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$. в) $[-1\quad 1\quad 9]$.

7.19. 0. **7.20.** $\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$. **7.21.** $\begin{bmatrix}6&25&-10&17\\-1&70&-51&30\\-4&-45&20&7\\26&27&-2&71\end{bmatrix}$.

7.22. $\begin{bmatrix}-1&5&2\\3&7&-2\\7&4&6\end{bmatrix}=BA^{\mathrm{T}}$. *Помош.* $B=B^{\mathrm{T}}$. **7.23.** $\begin{bmatrix}-5&3&5\\-9&8&-4\\-4&1&11\end{bmatrix}$.
Помош. $B=-B^{\mathrm{T}}$.

7.24. $AB=\begin{bmatrix}6&10\\14&15\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}-2&-4\\-1&23\end{bmatrix}$. **7.25.** $AB=\begin{bmatrix}-7&-6\\6&-4\end{bmatrix}=BA$.

7.26. $AB=\begin{bmatrix}ax-cy&ay+cx\\-ay-cx&ax-cy\end{bmatrix}=BA$. **7.27.** $AB=0$, $BA=\begin{bmatrix}0&0&10\\0&0&5\\0&0&0\end{bmatrix}$.

7.28. $AB=BA=0$. **7.29.** $AB=\begin{bmatrix}-6&-4&-2\\12&8&4\\-3&-2&-1\end{bmatrix}$, $BA=[1]$.

7.30. $AB=0$, $BA=\begin{bmatrix}-6&8&-12\\-9&12&-18\\-3&4&6\end{bmatrix}$. **7.31.** а) 0. б) $\begin{bmatrix}-18&-5&2\\-5&8&1\\8&18&10\end{bmatrix}$. в) 0.

7.32. а) $(AB)C=A(BC)=\begin{bmatrix}28&14&21&7\\-10&-2&-21&-7\\30&14&27&9\end{bmatrix}$ б) $(AB)C=A(BC)=\begin{bmatrix}1&9&15\\1&5&9\\6&26&32\end{bmatrix}$.

7.34. а) E. б) E. в) $\begin{bmatrix}17&16&22\\16&39&19\\44&38&14\end{bmatrix}$. г) $\begin{bmatrix}0&-c&-p\\c&0&-a\\p&a&0\end{bmatrix}$. д) $\begin{bmatrix}1&-5&10&-10\\0&1&-5&10\\0&0&1&-5\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

7.35. а) $AB=BA=0$; $AC=A$, $CA=C$. **7.40.** $\begin{bmatrix}1 & ka\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

7.41. $\begin{bmatrix}1 & 1+a+\cdots+a^{k-1}\\ 0 & a^k\end{bmatrix}$. **7.42.** k парен: E; k непарен: $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

7.43. $\begin{bmatrix}1-2k & 4k\\ -k & 1+2k\end{bmatrix}$. **7.44.** $\begin{bmatrix}a^k & ka^{k-1}\\ 0 & a^k\end{bmatrix}$ **7.45.** $\begin{bmatrix}\operatorname{ch} kx & \operatorname{sh} kx\\ \operatorname{sh} kx & \operatorname{ch} kx\end{bmatrix}$.

7.46. E, A, $-E$, $-A$ за $k=4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$ соодветно.

7.47. $\begin{bmatrix}2^k & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^k\end{bmatrix}$. **7.48.** $\begin{bmatrix}a^k & ka^{k-1} & \binom{k}{2}a^{k-2}\\ 0 & a^k & ka^{k-1}\\ 0 & 0 & a^k\end{bmatrix}$.

7.49. $A^k=[a_{ij}]$, $a_{ik+i}=1$, а другите нули за $k\le n-1$; $A^k=0$ за $k\ge n$.

7.50. $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$. **7.51.** $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 4 & 17\end{bmatrix}$. **7.52.** 0. **7.53.** $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & -8\\ 0 & 0 & 0 & -8 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

7.54. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **7.55.** $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E_4$. **7.56.** E_4. **7.57.** $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

7.59. а) $A=5E_2$; $A=4E_2$. б) $A=\pm 2E_2$. в) $A=\frac{3}{2}E_n$.

7.61. а) $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}10 & -1 & 12\\ -1 & 5 & -4\\ 12 & -4 & 16\end{bmatrix}$ б) $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=A^{\mathrm{T}}A$.

в) $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. **7.63.** Да. **7.64.** а) и б) Не. в) Да.

7.68. а) $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 12\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. б) $B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 6\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

7.70. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 9 & -26\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}1 & 0 & 7/9\\ 0 & 1 & -26/9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. **7.71.** $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 4/3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6\end{bmatrix}$.

7.72. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **7.73.** $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -13 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 35\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

7.74. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **7.75.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **7.76.** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, каде што a, b, c се кои било броеви, што го задоволуваат условот $a^2+bc=0$.

7.77. а) $X=\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix}$. б) $X=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$. в) $X=\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$. г) $X=\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$.

7.79. Не важи; види **7.39**. **7.82.** Да се искористи **7.79**.

7.86. Бидејќи
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{in}b_{nj} = b_{kj}, \qquad j = 1, 2, \ldots n,$$
добиваме дека i–тата редица на c е еднаква со k–тата редица на B.

7.87. а) i–тата и j–тата редица од производот си ги менуваат местата. б) Кон i–тата редица на производот се додава j–тата редица, помножена со c. в) i–тата и j–тата колона од производот си ги менуваат местата. г) Кон i–тата колона на производот се додава j–тата колона, помножена со c.

7.90. а) Да се искористи **7.88**. б) Да се искористи а) и **7.88**.

7.91. $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$; 2^n.

7.92. Во општ случај $AB \neq BA$; види **7.10** в).

7.95. а) Да. Навистина, од $ACA = A(CA) = AC = A$ и $ACA = (AC)A = AA = A^2$, следува $A^2 = A$. Слично за C. б) Не. На пример, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ се идемпотентни, но $AC \neq A$ и $CA \neq C$.

7.99. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **7.103.** а) $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ се симетрични, AB – не е.

7.107. Ако $AA^{\mathrm{T}} = B = [b_{ij}]$, $A^2 = C = [c_{ij}]$, тогаш $b_{ii} \geq 0$, $c_{ii} \leq 0$.

7.119. б) $\begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = 1$. в) Дијагоналата од A се состои само од $+1$ или -1; има 8 можности.

7.120. (e_1) Разменувајќи две редици двапати меѓусебно, се добива првобитната матрица. (e_2) Множејќи ја j–тата редица со $c(\neq 0)$, а потоа со c^{-1}, ја добиваме првобитната матрица, т.е. $P_j \to cP_j$ и $P_j \to c^{-1}P_j$ се инверзни операции. (e_3) Операцијата $P_i \to -cP_j + P_i$ е инверзна на $P_i \to cP_j + P_i$.

7.121. (k_1): $K_i \leftrightarrow K_j$; (k_2) : $K_j \to cK_j$, $c \neq 0$; (k_3): $K_i \to cK_j \to cK_j + K_i$.

7.123. *Решение.* Нека со $A^1, A^2, \ldots, A^m$ се означени колоните на A. Од дефиницијата на множењето на матрици, i–тата редица на BA е $(R_i \cdot A^1, R_i \cdot A^2, \ldots, R_i \cdot A^m)$. Но, од матричното множење имаме $R_iA = (R_i \cdot A^1, R_i \cdot A^2, \ldots, R_i \cdot A^m)$. Според тоа, i–та редица на BA е R_iA.

8. ДЕТЕРМИНАНТИ

8.11. Парна; 10. **8.12.** Непарна; 7. **8.13.** Непарна; 17. **8.14.** $\frac{k(k+1)}{2}$.

8.15. $\frac{3k(k-1)}{2}$ инверзии; парна за $k = 4j,\ 4j+1$, а непарна за $k = 4j+2,\ 4j+3$.

8.16. $\frac{k(3k+1)}{2}$ инверзии; парна за $k = 4j,\ 4j+1$, а непарна за $k = 4j+2,\ 4j+3$.

8.17. $3k(k-1)$ инверзии; парна за секој k.

8.18. $k(5k+1)$ инверзии. Пермутацијата е парна за секој k.

8.19. Со знак плус. **8.20.** Со знак плус. **8.21.** Не е член на детерминанта.

8.22. Не е член на детерминанта. **8.23.** Со знак минус.

8.24. Не е член на детерминанта. **8.25.** Со знак $(-1)^k$,

8.26. Со знак $(-1)^{k(k-1)/2}$. **8.27.** Со знак $(-1)^{k(k-1)/2}$. **8.28.** $j=6,\ k=3$.

8.29. $j=1,\ k=7$. **8.30.** 3; 2; 6. **8.31.** -26; -2; 52. **8.32.** -9; 3; -27.

8.33. 6; -5; -30. **8.34.** 16. **8.35.** 196. **8.36.** -16. **8.37.** 308.

8.38. $-3\cdot(a-1)^2$. **8.39.** $2a-x-c-y$. **8.40.** -1032. **8.41.** 118. **8.42.** 1.

8.43. $-2{\cdot}1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}\ldots{\cdot}(2k-5)$. Од првата редица да се изнесе 2 пред детерминантата, а потоа од секоја редица да се одземе првата помножена со 5.

8.44. $5^{k-1}(2k+5)$. Сите редици да ѝ се додадат на првата и да се изнесе заедничкиот множител $7+2(k-1)$ пред детерминантата.

8.45. $(-1)^{k-1}\,3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$. **8.46.** $2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2k-1}{k}\right)$. Од првата колона да се изнесе 2 пред детерминантата, од втората колона 4, од третата 6 итн.; потоа, првата колона се додава на втората, втората на третата итн.; на крајот детерминантата се разложува по последната колона. **8.47.** $k(-1)^{k-1}$.

8.48. $(-1)^{k-1}\,(k-1)2^{k-2}$. Првата колона да се додаде на последната и од секоја колона да се одземе претходната; потоа, последната колона да се додаде кон сите други.

8.49. $(k-1)^{k(k-1)/2}\,(x+a_1+\cdots+a_k)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$. Да се додадат сите колони на последната.

8.50. $-k!\left(a_1^2/1+\cdots+a_k^2/k\right)$. Рекурентна врска: $A_{k+1}=kA_k-(k-1)!a_k^2$.

8.51. $a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$. Рекурентна врска: $A_{k+1}=a_k+cA_k$.

8.52. За $k\geq3$, $A_k=c^{k-3}(c-1)^2$. Рекурентна врска: $A_k=xA_{k-1}$.

8.53. $(-1)^{k-1}(1+2!+3!\cdots+k!)$. **8.54.** $A_k = 1-a_1+a_1a_2-\cdots+(-1)^k a_1a_2\ldots a_k$. Да се разложи по последната редица; $A_k=(1-a_k)A_{k-1}+a_k A_{k-2}$.

8.55. $A_{2k}=(a_1a_{2k}-c_1c_{2k})(a_2a_{2k-1}-c_2c_{2k-1})\ldots(a_ka_{k+1}-c_kc_{k+1})$. Да се разложи по првата колона; рекурентна врска $A_{2k}=(a_1a_{2k}-c_1c_{2k})a_{2k-2}$.

8.56. $A_k=3^{k+1}-2^{k+1}$. **8.57.** $A_k=2^k(k+1)$. **8.58.** $A_k=\frac{1}{11}\left(8^{k+1}-(-3)^{k+1}\right)$.

8.59. $A_k=(-3)^k(k+1)$. **8.60.** $-2(x^2-4)(x^2-16)$. **8.61.** $14(x^2-4)(x^2-9)$.

8.62. 0. **8.63.** $7x(x-1)\ldots(x-k+1)$. **8.64.** $(x^4-1)(y^4-1)(1-x^2y^2)$; да се покаже дека детерминантата се дели со x^4-1 и y^4-1, а при $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x}$ има пропорционални колони (втората и четвртата), поради што детерминантата се дели со x^2y^2-1.

8.65. $(x+a_1+\cdots+a_k)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$. **8.66.** x^2y^2.

8.67. $\frac{k}{2}x^{k-1}(2x+k-1)$. **8.68.** $3^k+(-1)^{k-1}2^k$. **8.69.** $\cos kx$. **8.70.** $(x^2-y^2)^k$.

8.71. $(1-a^k)^{k-1}$. (При $k=3$, спореди со **8.64** за $x=y=a$.) **8.72.** 0.

8.73. $(k+1)a^{-k}$. **8.74.** *Помош.* Левата страна да се развие по некоја редица (или колона), а десната да се квадрира.

8.75. *Помош.* Кон втората колона да се додадат третата и четвртата колона.

8.76. *Помош.* Како за **8.74.** **8.77.** Од првата колона да се одземе втората колона, а од третата – да се одземе четвртата.

8.78. *Помош.* Во детерминантата од левата страна: ако втората колона се помножи со yz, третата колона – со xz и четвртата – со xy (а целата детерминанта се помножи со $1/x^2y^2z^2$), ќе се добие детерминантата од десната страна. Изразот D може да се добие на следниот начин. Ако кон првата колона се додадат преостанатите колони, ќе се види дека детерминантата има линеарен множител 1) $x+y+z$; слично се увидува дека за неа се линеарни множители: 2) $y+z-x$, 3) $x-y+z$, 4) $x+y-z$, коишто се добиваат кога (соодветно): 2) кон првата колона се додаде втората, а се одземе третата и четвртата; 3) кон првата колона се додаде третата, а се одземаат втората и четвртата; 4) кон првата колона се додаде четвртата, а се одземе втората и третата. Сметајќи ги x, y, z за независни непознати, се заклучува дека сите четири множители 1)–4) се заемно независни, па детерминантата е делива со нивниот производ, па $D=c(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)$; притоа, производот го содржи z^4 со коефициент -1, а самата детерминантата го содржи z^4 со коефициент $+1$, па според тоа, $c=-1$.

8.79. $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=0$. **8.80.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.

8.81. $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=-2$.

8.82. $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$, $x_5=0$.

8.83. $x_j=0$, $j=1,2,\ldots k$; детерминантата на системот е $A_k=4^{k+1}-3^{k+1}\neq 0$; за нејзиното пресметување да се искористи задачата 8.8.

8.84. $x_j=0$, $j=1,2,\ldots,k$; детерминантата на системот се сведува на триаголна форма и се добива $A_k=\frac{k}{2}(k+1)$.

8.85. $x = \frac{a-3}{A}$, $y = \frac{2a-1}{A} = z$, $A = (a+2)(a-1) \neq 0$. За $A = 0$ системот е противречен.

8.86. $x = (5-c)/a(c+1)$, $y = -2/(c+1)$, $z = 2(c-1)/(c+1)$, ако: $a \neq 0$, $c \neq -1$, $c \neq 1$. За $c = 1$, решение е: $(x,\, 1 - ax,\, 0)$, x – произволен. За $a = 0$ и $c = 5$, решение е $(x,\, -1/3,\, 4/3)$, x – произволен. За $a = 1$, $c \neq 1$ и $c \neq 5$, како и за $c = -1$, системот е противречен.
Помош. $D = a(c+1)(c-1)$, $D_x = (5-c)(c-1)$, $D_y = -2a(c-1)$, $D_z = 2a(c-1)^2$.

8.87. Ако $(a-1)(a+3) \neq 0$: $x = -(a^2+2a+2)/(a+3)$, $y = -(a^2+a-1)/(a+3)$, $z = (2a+1)/(a+3)$, $u = -(a^3+3a^2+2a+1)/(a+3)$. Ако $a = -3$, системот нема решение, а ако $a = 1$, системот има решенија што зависат од три параметри. **8.88.** За $a^2 \neq \pm(1-a)$ и $a^2 \neq \pm(1+a)$ системот има единствено решение $x = -y = z = -u = -1/(1-a+a^2)$.

8.89. Во пермутацијата $k\,k-1\,\ldots\,2\,1$. Бројот на инверзните е $\frac{k(k-1)}{2}$.

8.90. Детерминантата нема да се измени. **8.91.** Дадената трансформација може да се замени со две симетрии: во однос на хоризонталната и вертикалната средна линија и со симетрија во однос на главната дијагонала. **8.92.** Да се уочи, прво, дека за антисиметрична матрица е $a_{jj} = 0$, $j = 1, \ldots, 2k-1$. Потоа, од равенството $\det A = \det A^{\mathrm{T}} = (-1)^{2k-1}\det A = -\det A$, добиваме $\det A = 0$. **8.94.** Тврдењето следува од равенството $(\det A)(\det B) = \det(AB)$, A, B се матрици.

8.98. *Помош.* $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **8.100.** Резултатот е очигледно точен за детерминанти од втор и трет ред. Ако резултатот, по претпоставка, е точен за секоја детерминанта со ред помал од k, тогаш за детерминантата од k–ти ред, развивајќи ја по првата редица, добиваме:

$$A_k = a_{k-1} - a_2 a_{k-2} + a_3 a_{k-3} - \cdots (-1)^{k+1} a_k =$$
$$= \frac{1}{k!}\left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots (-1)^{k+1}\right] = \frac{1}{k!} = a_k\,.$$

8.101. Ја одземаме k–тата колона од првата, втората, ..., $(k-1)$–та колона и ги извлекуваме пред детерминантата заедничките фактори од редиците и колоните. Потоа, од добиената детерминанта ја одземаме k–тата редица од 1–та, 2–та, ..., $(k-1)$–та редица и пак ги извлекуваме заедничките фактори од редиците и колоните. Така, ја добиваме рекурентната формула:

$$A_k = \frac{[(k-1)\,!]^4}{(2k-1)!\,(2k-1)!}\,A_{k-1}\,,$$

од каде што

$$A_k = \frac{[1!\,2!\,3!\,\ldots\,(k-1)!]^4}{1!\,2!\,3!\,\ldots\,(2k-1)!}\,.$$

8.104. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = 1-a$, $x_k = (k-1)(a-1)+1$. **8.105.** $x_j = \frac{k(k+1)}{2(k-1)} - j$. Од првата равенка да се одземе втората, од втората третата итн.

8.106. $x_\nu = \frac{a\sum_{j=1}^{k} c_j - c_\nu[(k-1)a+p]}{(a-p)[(9k-1)a+p]}$. (Види и 8.49.)

9. ИНВЕРЗНИ МАТРИЦИ

9.14. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. **9.15.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **9.16.** $9E_3$. **9.17.** $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

9.18. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. **9.19.** $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **9.20.** $\begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

9.21. $\begin{bmatrix} 1 & -8 & -8 & 5 \\ -8 & -2 & -2 & 4 \\ -8 & -2 & -24 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. **9.24.** $\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$. **9.25.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

9.26. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. **9.27.** $\frac{1}{37}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & 16 & 13 \\ 6 & 13 & -1 \end{bmatrix}$. **9.28.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

9.29. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 13 & -4 & -32 \\ -5 & 1 & 15 \end{bmatrix}$. **9.30.** $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. **9.31.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

9.34. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. **9.35.** $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. **9.36.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. **9.37.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

9.38. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$. **9.39.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3/2 \\ -5/4 & -1/4 & -3/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$. **9.40.** $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

9.41. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **9.43.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.44. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.45.** $\begin{bmatrix} 2-k & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

9.46. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.47.** $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$.

9.48. $\frac{1}{40}\begin{bmatrix}8 & -32 & 10\\ 0 & 20 & -15\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$. **9.49.** $\begin{bmatrix}1 & -a & -c\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **9.50.** $\frac{1}{12}\begin{bmatrix}1 & -4 & 1 & -5\\ -4 & 16 & 8 & 20\\ 1 & 8 & 1 & 7\\ -5 & 20 & 7 & 37\end{bmatrix}$.

9.51. $\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$. **9.52.** $\frac{1}{225}\begin{bmatrix}75 & 0 & -75\\ -171 & 9 & 36\\ 75 & 0 & 0\end{bmatrix}$. **9.53.** $\begin{bmatrix}-8 & 7 & 7\\ 7 & -1 & -14\\ 7 & -14 & 6\end{bmatrix}$.

9.54. $\begin{bmatrix}1 & -ka & -kc\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **9.55.** $\begin{bmatrix}1 & k & \binom{k+1}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **9.56.** $X = -A^{-1}BA^{-1}$.

9.57. $\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{bmatrix}$.

9.58. а) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -6 & 10 & 3 & -1\\ 3 & -5 & -2 & 1\end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix}3 & -4 & 5 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$.

г) $\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 4 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$. **9.61.** $k\begin{bmatrix}9 & -3\\ 21 & -7\end{bmatrix}$. **9.62.** $a^{k-1}\begin{bmatrix}a-2k & 4k\\ -k & a+2k\end{bmatrix}$.

9.63. $\begin{bmatrix}2^k & 0 & 0\\ k2^{k-1} & 2^k & 0\\ \binom{k}{2}2^{k-1} & k2^{k-1} & 2^k\end{bmatrix}$. **9.64.** $\frac{1}{12}\begin{bmatrix}6(5^k+1) & 4(5^k-1) & 2(5^k-1)\\ 9(5^k-4^k) & 6(5^k+4^k) & 3(4^k-5^k)\\ 18 & -12 & 6\end{bmatrix}$.

9.65. $\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & k-9\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. **9.66.** $\begin{bmatrix}3 & -5 & 5/2\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. **9.67.** $\frac{1}{27}\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 24 & 9 & 0\\ 25 & 24 & 9\end{bmatrix}$.

9.69. $H_{23}^{-1} = H_{23}$; $[H_3(2)]^{-1} = H_3\left(\frac{1}{2}\right)$; $[H_{23}(2)]^{-1} = H_{23}(-2)$.

9.71. $X = \begin{bmatrix}-1\\ 5\end{bmatrix}$. **9.72.** $X = \begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}$. **9.73.** $X = \begin{bmatrix}2-2a & 3-2c\\ a & c\end{bmatrix}$.

9.74. Нема решение. **9.75.** $X = \begin{bmatrix}-4\\ 5\\ 6\end{bmatrix}$. **9.76.** $X = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

9.77. $X = \begin{bmatrix}-a\\ -a\\ 3a\end{bmatrix}$. **9.78.** $X = [1 \quad 1 \quad 2]$. **9.79.** $X = \begin{bmatrix}2 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

9.80. Кога A и B се несингуларни; $X = A^{-1}CB^{-1}$. **9.81.** $\begin{bmatrix}a & c\\ c & 0\end{bmatrix}$.

9.82. $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$. **9.83.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. **9.84.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

9.85. $x=-1,\ y=3$ **9.86.** $x=3,\ y=2$. **9.87.** $x=\cos\alpha,\quad y=\sin\alpha$.

9.88. $x=1,\ y=-\operatorname{tg}\alpha$. **9.89.** $x=2,\ y=1,\ z=0$. **9.90.** $x=1,\ y=-2,\ z=2$.

9.91. $x=3,\ y=2,\ z=-1,\ u=1$. **9.92.** $I_1=5,\ I_2=15,\ I_3=19$.

9.93. $I_1=20,\ I_2=10,\ I_3=30$. **9.94.** $I_1=150,\ I_2=50,\ I_3=-150,\ I_4=100$.

9.99. Се добива таблица иста со таблицата во **3.4**, ако се стави $\varepsilon \leftrightarrow E,\ \rho_i \leftrightarrow P_i,\ \sigma_j \leftrightarrow S_j,\ i=1,2,\ j=1,2,3$.

9.103. *Помош.* $0=\det(AB)=(\det A)(\det B) \Rightarrow \det A=0$ или $\det B=0$.

9.104. а) *Помош.* Во $\det(AB)=(\det A)(\det B)$ да се стави $B=A^{-1}$.

9.106. Ако $C=SP$, т.е. $P=S^{-1}C$, тогаш $B=(S^{-1}C)^{-1}AS^{-1}C=\cdots=C^{-1}AC$. Обратно, ако $B=C^{-1}AC$, т.е. $P^{-1}AP=C^{-1}AC$, тогаш $CP^{-1}AP=AC$ и $CP^{-1}A=ACP^{-1}$; $CP^{-1}=S$, т.е. $C=SP$.

9.107. Според **9.6**, $H_s\dots H_1A=B$, па $B=PA$, $P=H_s\dots H_1$ и $P^{-1}=H_1^{-1}\dots H_s^{-1}$.

9.115. *Помош.* $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$ бидејќи A е ортогонална.

9.116. *Помош.* Меѓу другото, се користи равенството $(E+A)^{-1}A=A(E+A)^{-1}$.

9.117. Имаме: $A=[a_{jk}]$, $a_{jk}=1$ за $j<k$, па $a_{jk}=-1$ за $j>k$ и $a_{jj}=0$. Ја формираме матрицата $C=AB$, каде што:

$B=[b_{jk}],\ b_{jk}=(-1)^{j+k}$ за $j<k,\ b_{jk}=(-1)^{j+k-1}$ за $j>k,\ b_{jj}=0$.

Тогаш, за $C=[c_{jk}]$ имаме: $c_{jk}=\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 1+\left(\frac{n}{2}-1\right)(-1)+2\cdot 0=0$ за $j\neq k$ и $c_{jj}=\frac{n}{2}\cdot 1+\left(\frac{n}{2}-1\right)(-1)+1\cdot 0$. Значи, $C=E$, т.е. $A^{-1}=B$. Види и **9.42**.

9.118. Ако $B, C\in K(A)$, тогаш $A(B+C)=AB+AC=BA+CA=(B+C)A$, т.е. $B+C\in K(A)$. Значи, $K(A)$ е групоид. Лесно се увидува дека е група.

10. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

10.11. Да. **10.12.** Да. **10.13.** Не. **10.14.** Да. **10.15.** Не. **10.16.** Да. **10.17.** Да.

10.18. Не. **10.19.** а) Да. б) Да. в) Не. г) Да. **10.20.** Да. **10.21.** Не.

10.22. Да. **10.23.** Не; не важи условот за комутативност. **10.24.** Не; не важи, на пример, (iv) од **10.1**. **10.25.** Да. **10.26.** Не; не важи (ii) од **10.1**.

10.27. Не; условот за комутативност не важи. **10.28.** Не; не важи (ii) од **10.1**.

10.29. Не; на пример, (0, 0) нема спротивен. **10.30.** Не; не важи (iv) од **10.1**.

10.31. Нултиот вектор е 1. **10.32.** а) Да. б) Не; не важи, на пример, (i) од **10.1**. **10.33.** Да. **10.34.** Не. **10.35.** Да. **10.36.** Не. **10.37.** Не. **10.38.** Да.

10.39. Не, бидејќи $\mathbb{R}^2$ не е подмножество од $\mathbb{R}^3$. Имено, $\mathbb{R}^2$ е множество подредени парови, а $\mathbb{R}^3$ множество подредени тројки реални броеви, па тие се дисјунктни.

10.40. а), б), г) и ѓ) Да. в), д), е) и ж) Не. **10.41.** Да. **10.42.** Не. **10.43.** Да.

10.44. Да. **10.45.** Не. **10.46.** Да. **10.47.** Да. **10.48.** Да. **10.49.** Не. **10.50.** Не.

10.51. Да. **10.52.** Да. **10.53.** Не. **10.54.** Да. **10.55.** Да. **10.56.** Не. **10.57.** Да.

10.58. Да. **10.59.** Да. **10.60.** Не. **10.62.** $\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$; за $\mathbf{a}_2$ не е можно.

10.63. а) За $\mathbf{a}_1$ не е можно; $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{c}$.
б) За $k = -2$: $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$; за $p = 7$ и $s = 0$: $\mathbf{a}_4 = -3\mathbf{a} + 2\mathbf{c} + 2\mathbf{c}$.

10.65. $p = -3p_1 + 2p_2 + 4p_3$. **10.70.** $y = 0$. **10.71.** $y = 0$.

10.72. $2x + y - 2z = 0$ **10.73.** $x + 2y = 0,\ x - 2z = 0$. **10.74.** $4x + y + z = 0$

10.75. а) (1, 1, 0, 0) и (0, 0, 1, 1). б) (1, 0, 1, 1) и (0, 1, 1, −1).
в) (1, 0, −2, −5) и (0, 1, −1, −5).

10.76. На пример, $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

10.77. На пример, $x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

10.78. На пример, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_4 - x_5 = 0$.

10.79. Оската Oy. **10.80.** Симетралата на вториот и четвртиот квадрант.

10.81. Оската Ox. **10.82.** Правата $x = \frac{y}{-2} = z$. **10.83.** Рамнината $2x+5y-4z=0$.

10.84. Рамнината $x + y - z = 0$. **10.85.** $\mathbb{R}^3$.

10.87. а) (9, 5, 4). б) (0, 0, 0). в) (3, 2, 1).

10.88. а) и в) $S \cap T = \{0\}$ (0 е нултата матрица). б) $S \cap T = S$.

10.89. а) $S + T = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$; $S \cap T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

б) $S + T = \mathbb{M}$; $S \cap T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\}$.

10.90. а) и б) $S+T=\mathbb{R}^3$, $S\cap T=\{\mathbf{o}\}$; да. в) $S+T=\{(x,\ x+y,\ y)\}$, $S\cap T=\{\mathbf{o}\}$; не.
г) $S+T=\mathbb{R}^3$, $S\cap T=\{(0, y, 0)\}$; не. д) $S+T=\mathbb{R}^3$, $S\cap T=\{(0,\ -2z,\ z)\}$; не.

10.91. Не; на пример: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, т.е. претставувањето не е еднозначно.

10.93. Во б) и в). **10.94.** Ако C е произволна $n \times n$–матрица, тогаш $C + C^{\mathrm{T}}$ е симетрична, а $C - C^{\mathrm{T}}$ антисиметрична матрица, па $C = \frac{1}{2}(C + C^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(C - C^{\mathrm{T}})$, т.е. $S+T = V$; потоа: $S \cap T = \{0\}$, па, според **10.10**, $V = S \oplus T$.

11. БАЗА И ДИМЕНЗИЈА

11.13. а) $x \neq -4$. б) $x \neq \pm 1$. **11.14.** а) -2. б) $7/5$.

11.15. б) $x \cdot 1 + y \cdot \sqrt{2} + z \cdot \sqrt{3} = 0$ е исполнето, на пр. за: $x = \sqrt{6}$, $y = -\sqrt{3}, z = 0$.

11.16. а) и б) Линеарно независен. в) Линеарно зависен.

11.17. в) $A = \frac{1}{2}[(a+d)E + (b+c)S_x + i(b-c)S_y + (a-d)S_z]$.

11.18. а) Линеарно независни. б) Линеарно зависни. **11.19.** а) и б) Не. в) Да.

11.21. а) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, (0, 0, 1, 0)$ $(0, 0, 0, 1)$. б) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, (0, 0, 0, 1)$.

11.22. $(1, 2, -1)$, $(2, 1, 3)$. **11.23.** а) 1. б), в) 2.

11.24. а) $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$. б) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

11.25. $d_1 = d_2$. а) 1. б) 3. в) 2. **11.26.** $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$; дим. е 5.

11.27. $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$; дим. е 4.

11.28. $(1, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$; дим. е 2.

11.29. $(1, 0, \ldots, -1)$, $(0, 1, 0, \ldots, -1)$, $(0, 0, 1, 0, 0, -1)$, $(0, 0, 0, 1, 0, -1)$ и $(0, 0, 0, 0, 1, -1)$; дим. е 5. **11.31.** $\dim S = 2$. **11.32.** Не. **11.33.** Не, зашто V има димензија 3. **11.34.** Да. **11.35.** Не; V има димензија 1.

11.36. $\dim S = 2$. **11.37.** а) База: $(2, -3, -4)$; $\dim S = 1$. б) $\dim S = 0$. в) База: $(1, 1, 1, 0, 2)$, $(-1, 1, 0, 1, -1)$; $\dim S = 2$.

11.38. Димензијата е 1; за база може да се земе кој било позитивен реален број $x \neq 1$.

11.39. 1; 2; 2; 3; 3. **11.40.** За $S_a + S_c$, на пример, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{c}_2$; за $S_a \cap S_c$, на пример, $\mathbf{c}_1 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ и $\mathbf{c}_3 = 5\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$. **11.41.** $s = 2$, $p = 2$.

11.42. а) $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 2, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$; 3. б) $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 2, 1, 0)$; 2. в) $(0, 2, 1, 0)$; 1. *Помош*: $S \cap T$ мора да ги задоволува сите три услови за x, y, a, c.

11.43. а) $4 = 3 + 2 - 1$ (по тој редослед). б) $3 = 2 + 1 - 0$ (по тој редослед).

11.45. $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, е база на T; E_1, E_2, E_3, $S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ е база на S. Димензијата на S е 6, на T е 3, на $S \cap T$ е 3, на $S + T$ е 6.

11.46. а) и б) на пример, $1, x, x^2, \ldots, x^k$ се линеарно неазвисни за кој било $k \in \mathbb{N}$. в) $(1, 0, 0, \ldots)$, $(0, 1, 0, \ldots)$, $(0, 0, 1, 0, \ldots)$ итн. се линеарно независни.

11.47. $p(x) = 5 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3$, па координатите се: 5, 3, 2, 1.

11.48. $(-2, 4, 1)$ – вектор во $\mathbb{R}^3$, бидејќи димензијата на S е 3. **11.49.** $(1, 2, -2)_a$.

11.50. $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0)_a$, $\mathbf{x}_2 = (1, 2, 3)_a$. **11.51.** $\mathbf{x}_1 = (0, -1, -1)_a$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 2)_a$.

11.52. $\mathbf{x}_1 = (-1, 0, 0, 5)_a$, $\mathbf{x}_2 = (2, -3, -1, 5)_a$. **11.53.** $\mathbf{x}_1 = (7, 6, 3)_e$, $\mathbf{x}_2 = (3, 1, -2)_e$.

11.54. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **11.55.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **11.56.** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. **11.57.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

11.58. а) Ги разменуваат местата две редици. б) Ги разменуваат местата две колони. в) Новата матрица ќе биде централно симетрична со првата.

11.60. Не. На пример, нека V е векторскиот простор од сите тројки елементи од полето $\mathbb{Z}_2$ (види **3.61**). Векторите $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)$ се линеарно независни, но $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ се линеарно зависни.

11.61. 1) Ако $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ имаат рационални координати, тогаш тие се линеарно независни во $\mathbb{R}^k$ ако и само ако се линеарно независни во $V^k(\mathbb{Q})$.

2) Ако F е потполе од полето P, а векторскиот простор $V(F)$ е „содржан“ во векторскиот простор $V(P)$, тогаш векторите $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ се линеарно независни во $V(P)$ ако и само ако тие се линеарно независни во $V(F)$.

11.62. Нека системот $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ е независен и $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{kj})$. Тогаш $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_k = 0$, па единственото решение на хомогениот систем линеарни равенки $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k = 0, \ldots, a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k = 0$ е $x_1 = \cdots = x_k = 0$, а тоа е исполнето ако и само ако $\det A \neq 0$.

11.69. Ако $S = \{\mathbf{o}\}$, тогаш S е 0–димензионален и сè е докажано. Ако S содржи ненулти вектор $\mathbf{a}_1$, тогаш нека S_1 е потпросторот генериран од $\mathbf{a}_1$. Ако $S = S_1$, тогаш S е 1–димензионален и сè е докажано. Ако $S \neq S_1$, тогаш нека $\mathbf{a}_2$ е вектор од S што не е во S_1 и S_2 нека е потпросторот генериран од $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$; итн. Процесот ќе се заврши за не повеќе од k постапки, зашто во V се линеарно зависни кои било $k+1$ вектори. **11.71.** *Помош.* Да се земе база на $S \cap T$, да се дополни како до база на S така и до база на T и да се докаже дека векторите од базата на $S \cap T$, заедно со векторите на двете спомнати дополненија, образуваат база на $S + T$. **11.72.** Следува од **11.69** и **11.71**.

11.73. Следува од **11.70** и **11.71**. **11.74.** Следува од **11.71**. **11.76.** E, A, A^2.

11.77. *Решение.* а) Нека $R = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $B = [b_{ij}]$. Ако со $B_1, B_2, \ldots, B_m$ се означени редиците на B, а со $B^1, B^2, \ldots, B^n$ – нејзините колони, тогаш:

$$\begin{aligned} RB &= (R \cdot B^1,\ R \cdot B^2, \ldots, R \cdot B^n) = \\ &= (a_1b_{11} + a_2b_{21} + \cdots + a_mb_{m1},\ a_1b_{12} + \cdots + a_mb_{m2}, \ldots, a_1b_{1m} + \cdots + a_mb_{mn}) = \\ &= a_1(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}) + a_2(b_{21}, \ldots, b_{2n}) + \cdots + a_m(b_{m1}, \ldots, b_{mn}) = \\ &= a_1B_1 + a_2B_2 + \cdots + a_mB_m\,. \end{aligned}$$

Значи, RB е линеарна комбинација на редиците од B.

б) Редиците на матрицата AB се R_iB, каде што R_i е i–та редица од A (види зад. **7.122**). Поради тоа, според а), секоја редица од AB се содржи во редичниот простор на B. Значи, редичниот простор на AB е содржан во редичниот простор на B.

12. РАНГ НА МАТРИЦИ

12.5. 2. **12.6.** 3. **12.7.** 2. **12.8.** 4. **12.9.** 2.

12.10. 3; (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0) и (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 0).

12.11. а) 3; на пр. A, B, C. б) 2; на пр. A, B. **12.12.** 3. **12.13.** 2.

12.14. 2. **12.15.** 3. **12.16.** 2. **12.17.** 2. **12.18.** 1. **12.19.** 3.

12.20. 2; а) на пр. (1, 1, 2), (0, 1, 2); б) на пр. (2, 0, 1), (1, 1, 1).

12.21. 1; а) на пр. (−1, 2, −1, 3); б) на пр. (1, −2, 3).

12.22. 2; а) на пр. (2, 1, 3, 2, −1), (0, 0, 5, 6, −5); б) на пр. (1, 2, 0, 3), (3, 1, 5, −1).

12.23. а) ранг $A = 2$, ранг $B = 1$, ранг $(A + B) = 3$. б) ранг $A =$ ранг $B = 2$, ранг $(A + B) = 1$.

12.24. а) ранг $A=1$, ранг $B=2$, ранг $C=3$. б) ранг $A=3$, ранг $B=1$, ранг $C=4$.

12.25. а) ранг $A = 2$. б) ранг $A = 3$.

12.26. а) ранг $A =$ ранг $(\operatorname{adj} A) = 3$. б) ранг $A =$ ранг $(\operatorname{adj} A) = 4$. Види **12.60**.

12.27. ранг $A=3$, ранг $(\operatorname{adj}A)=1$; ранг $B=2$, ранг $(\operatorname{adj} A)=0$. Да се види и **12.60**.

12.28. а) ранг $A = 3$. б) ранг $A = 4$. а) и б) ранг $B =$ ранг $(AB) =$ ранг $(BA) = 2$. Да се види и **12.57**. **12.29.** а) 1. б) 0. в) 2.

12.30. $x = -2$, $y = 2$. **12.31.** Нема решение. **12.32.** $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

12.33. Решение е секоја четворка $(a, 2 - a, a - 1, 1 - a)$, $a \in \mathbb{R}$. **12.34.** $x = 1 = z$, $y = 2 = u$. **12.35.** Решение е секоја петка $(0, a, 0, -a, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

12.36. Да; $x = 3$, $y = -1$. **12.37.** Нема решение. **12.38.** Нема решение.

12.39. Да; решение е секоја четворка $(-a, a, 1 - a, 2)$, $a \in \mathbb{R}$.

12.40. Да; $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $u = 3$. **12.41.** Нема решение.

12.42. $x=3$, $y=2$, $z=1$. **12.43.** Нема решение. **12.44.** $x=2$, $y=1=z$, $u=-3$.

12.45. Нема решение. **12.46.** а) $a = 5$. б) $a = 4$.

12.47. За $a \neq \pm 2$ системот има единствено решение $x = y = 1/(a + 2)$; за $a = -2$ системот нема решение; за $a = 2$ секој пар $(x, -x + 1/2)$ е решение.

12.48. За $a \neq -2$ системот нема решение; за $a = -2$; $x = y = 2$, $z = 1$.

12.49. За $a = 0$ системот нема решение. За $a = 1$: $x = -4 - c$, $y = 2$, $z = 3$, $u = c$, $c \in \mathbb{R}$. За $a \neq 0$ и $a \neq 1$ системот има единствено решение: $x = 0$, $y = 2/a$, $z = 3/a$, $u = (a - 5)/a$. **12.50.** За $a \neq 4$ системот нема решение. За $a = 4$: $x = \frac{1}{6}(4 - 9y - 15u)$, $z = (3u - 1)/3$, y и u произволни.

12.51. Ранг $C =$ ранг $A+$ ранг B. **12.52.** Ако $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ е база во *колоничниот простор* на A (т.е. во просторот генериран од колоните на матрицата A), а $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ е база во колоничниот простор на матрицата B, тогаш која било колона на $A + B$ е линеарна комбинација на векторите

$\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_j$; тие го генерираат колоничниот простор на $A+B$, па неговата димензија не може да биде поголема од $r+s$.

12.53. a) *Решение.* Нека $A=[a_{ij}]$ е произволна $m\times n$–матрица и нека со $R_1, R_2, \ldots, R_n$ се означени нејзините редици:

$$R_1=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \; R_m=(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}).$$

Да претпоставиме дека редичниот ранг на A е r и дека следните r вектори формираат база на редичниот простор:

$$S_1=(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}), \ldots, \; S_r=(b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn}).$$

Тогаш секој од редичните вектори $R_k (k=1, \ldots, m)$ е линеарна комбинација од векторите S_j:

$$R_1=\alpha_{11}S_1+\cdots+\alpha_{1r}S_r, \ldots, \; R_m=\alpha_{m1}S_1+\cdots+\alpha_{mr}S_r,$$

каде што α_{ij} се скалари. По изедначувањето на i–те компоненти во секоја од горните m векторски равенки ќе се добие следниов систем равенки:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1i} & = & \alpha_{11}b_{1i} & + & \alpha_{12}b_{2i} & + & \cdots & + & \alpha_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} & = & \alpha_{21}b_{1i} & + & \alpha_{22}b_{2i} & + & \cdots & + & \alpha_{2r}b_{ri} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{mi} & = & \alpha_{m1}b_{1i} & + & \alpha_{m2}b_{2i} & + & \cdots & + & \alpha_{rm}b_{ri} \end{array}$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$. Така, за $i=1, 2, \ldots, n$:

$$(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^{\mathrm{T}}=b_{1i}(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1})^{\mathrm{T}}+\cdots+b_{ri}(\alpha_{1r}, \alpha_{2r}, \ldots, \alpha_{mr})^{\mathrm{T}}.$$

Со други зборови, секоја од колоните на A е линеарна комбинација од векторите $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1})^{\mathrm{T}}$, $(\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{m2})^{\mathrm{T}}, \ldots, (\alpha_{1r}, \ldots, \alpha_{mr})^{\mathrm{T}}$. Значи, колоничниот простор на матрицата A има димензија најмногу r, т.е. колоничниот ранг ($\mathrm{kp}\,A$) не е поголем од r: $\mathrm{kp}\,A\le r$.

Слично (или земајќи ја транспонираната матрица A^{T}) се заклучува дека редичниот ранг на A, $\mathrm{pp}\,A\le \mathrm{kp}\,A$. Следствено, редичниот и колоничниот ранг на A се еднакви.

12.54. *Решение.* Редиците на единичната матрица E_n се линеарно независни (имено, E_n е во скалеста форма); според тоа ранг $(E_n)=n$. Ако A е инверзибилна, тогаш (според **9.108**; в. и **9.8**) A е редично еквивалентна на E_n; според тоа, ранг $A=n$. Но, ако A не би била инверзибилна, тогаш A би била еквивалентна на матрица со нулта редица, што значи дека ранг $A<n$. Според тоа, A е инверзибилна ако и само ако ранг $A=n$.

12.57. *Решение.* Според зад. **11.77**, редичниот простор на матрицата AB е содржан во редичниот простор на B; според тоа, ранг $(AB)\le$ ранг B. Натаму, според **11.78**, колоничниот простор на AB е содржан во колоничниот простор на A; следствено, ранг $(AB)\le$ранг A.

12.60. Следува од **12.59** и од: ранг $(PAS)=$ ранг $(PA)=$ ранг A.

12.62. 1) Следува од **12.59**. 2) Бидејќи рангот на A е $n-1$, постои барем еден ненулти алгебарски комплемент, па рангот на $\mathrm{adj}\,A$ е најмалку 1. Бидејќи $A(\mathrm{adj}\,A)=0$, според **12.56**, рангот на $\mathrm{adj}\,A$ е најмногу $n-(n-1)$. Значи, рангот е точно 1.

13. ЛИНЕАРНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

13.14 а) Да. б) Не. **13.15.** а) Не. б) Да **13.16.** а) Не. б) Не.

13.19. $(f+g)(x_1,\,x_2,\,x_3)=(x_1+x_3,\,0,\,x_3)$;
$(fg)(x_1,\,x_2,\,x_3)=(x_3-x_1,\,-x_2,\,x_1)$;
$(gf)(x_1,\,x_2,\,x_3)=(x_3,\,-x_2,\,x_1-x_3)$.

13.20. а) Да. б) Не; не е биекција. в) Не; не е линеарно. г) Да.

13.21. а) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a,\,b,\,c,\,d)$. б) $f\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}\right)=a+bx+cx^2$.

13.22. а) 2; $(1,\,1,\,2)$, $(0,\,1,\,0)$. б) 1; $(1,\,1,\,-1)$.

13.23. а) 1; $(1,1)$. б) 2; $(2,1,0),(0,0,1)$. **13.24.** а) 3; $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$; б) $\{\mathbf{o}\}$.

13.27. $f(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)=(x_1+3x_2-x_4,\,2x_1+4x_3)$; а) $(3,\,2)$; б) $(5,\,8)$.

13.28. а) $(5,\,0,\,0,\,7)$ и $(1,\,0,\,-1,\,3)$, б) $f(3,\,2.\,1)=(4,\,4,\,4,\,9)$; $(0,\,0,\,0,\,7)$ не е слика.

13.29. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. б) $f(x,y)=(x,\,y,\,x-y)$. в) $\{(0,\,0,\,0)\}$. г) 2.

13.30. а) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. б) $f(x,\,y)=(y-x,\,y,\,x+y)$. в) $\{(0,\,0,\,0)\}$. г) 2.

13.31. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. б) $f(x,\,y,\,z)=(x+z,\,y)$. в) $\{(x,\,0,\,-x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. г) 2.

13.32. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. б) $f(x,y,z)=(x-z,\,y+2z)$. в) $\{(x,\,-2x,\,x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. г) 2.

13.33. а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. б) $f(x,y,z)=(x-y,\,x-y,\,x-y)$. в) $\{(0,\,0,\,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}$. г) 1.

13.34. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. б) $f(x,y,z)=(x+2y+3z,x-y+2z,x+y-3z)$. в) $\{(0,0,0)\}$. г) 3.

13.35. а) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B-A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

б) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $B=A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

13.36. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$. **13.37.** $A_f=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_g=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$A_{f+g}=A_f+A_g$, $A_fA_g=A_{fg}\neq A_{gf}$. **13.38.** $D=(A+B)C=\begin{bmatrix} -4 & -36 \\ -4 & -18 \end{bmatrix}$.

13.39. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -1 \\ 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ в) $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \\ -15 & 3 & 17 \end{bmatrix}$ г) $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 17 \\ 0 & 3 & 11 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

13.40. а) и б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **13.41.** а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13.42. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. **13.43.** а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

13.44. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2. б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; 2.

13.45. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; 2. **13.46.** Не. **13.47.** а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

13.48. S и T: да. **13.49.** S да, T не. **13.50.** S да, T не.

13.51. а) $X_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$. $P_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$, $V_c = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

б) 1) и 2) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ ak & k \end{bmatrix}$. 3) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}$.

4) $\frac{k}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+a & 1 \\ a\sqrt{3}-1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$. 5) $k^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$. в) $X_k^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$;

$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; $H_a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$; $V_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13.52. а) Симетрија во однос на бисектрисата на првиот и третиот квадрант.

б) Сите точки од правата $x = x_0$ се пресликуваат во точката (x_0, x_0).

в) Сите точки од правата $x = x_0$ се пресликуваат во точката $(0, x_0)$.

г) Извршување хомотетија и хоризонтално истегнување.

13.53. а) $x' = x+2$, $y' = y+1$; не е. б) $x = 4x'$, $y = 4y'$; да. в) $x' = -x+4$, $y' = y$; не е.

13.54. Не. **13.55.** Да. б) Не. **13.68.** *Решение.* Нека A е база на U. Тогаш оваа може да се прошири до база $f(A) \cup B$ во V, при што $f(A) \cap B = \emptyset$. Сега, да го „однесеме" секој $\mathbf{a} \in A$ во $h(\mathbf{a}) \in W$ и секој $\mathbf{b} \in B$ во $\mathbf{o}$. Пресликувањето $g: V \to W$, дефинирано на базата $f(A) \cup B$ од V, со:

$$\big(\forall f(\mathbf{a}) \in f(A)\big)\, g\big(f(\mathbf{a})\big) = h(\mathbf{a}) \quad \text{и} \quad (\forall \mathbf{b} \in B)\, g(\mathbf{b}) = \mathbf{o}$$

е линеарно и го задоволува условот $h = gf$.

14. СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ И СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ

14.21. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; $f(A) = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$, $g(A) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

а) $\begin{bmatrix} 7 & -11 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} -18 & -68 \\ 68 & 50 \end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix} 4k & -6k \\ 6k & 10k \end{bmatrix}$.

14.23. $p_1(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $p_3(A) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$; $p_1(B) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$p_2(B) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $p_2(t)$ е анулаторен полином за A, а $p_3(t)$ – за B.

14.24. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Помош.* B е горно триаголна, па $A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

14.25. а) $\begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, b е произволен број. б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14.26. а), б) $\lambda^2 - 4\lambda + 3$. в) 3. **14.27.** а) $(\lambda - 3)^2$. б) $\lambda - 3$. в) 9.

14.28. а) $(\lambda - a)^2$. б) $(\lambda - a)^2$ за $c \neq 0$; $\lambda - a$ за $c = 0$. в) a^2.

14.29. а), б) $\lambda^3 - 1$. в) 1. **14.30.** а) λ^3. б) λ^2. в) 0.

14.31. а) $(\lambda-2)^3$. б) $\lambda^2-4\lambda+4$. в) -8. **14.32.** а) $(\lambda-2)(\lambda-1)^2$. б) $\lambda^2-3\lambda+2$. в) 2.

14.33. а), б) $\lambda^3 - 2\lambda^2$. в) 0. **14.34.** а) $(\lambda+1)^2(\lambda-5)$. б) $(\lambda+1)(\lambda-5)$. в) 5.

14.35. а) $(\lambda - a)^3$. б) $(\lambda - a)^3$ за $c \neq 0$; $\lambda - a$ за $c = 0$.

14.36. а), б) $(\lambda+1)^3$. в) -1. **14.37.** а) $\lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. б) $\lambda(\lambda^2-1)$. в) 0.

14.38. $\lambda^2 - 2\lambda - 5$ (но, може и: $\lambda^3 - 2\lambda - 5\lambda$, итн.). **14.39.** $\lambda^2 - 5\lambda - 2$.

14.40. $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 5$. **14.41.** $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. **14.42.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

14.43. $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. **14.44.** $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 4 & 0 \\ 3 & -8 & -8 & -2 \end{bmatrix}$. **14.45.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

14.46. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **14.47.** $X = [2 \quad 3 \quad -1]^{\mathrm{T}}$.

14.48. $X = [1 \quad -2 \quad 2 \quad 1]^{\mathrm{T}}$. **14.49.** $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

14.50. а) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Помош. Карактеристичната равенка на матрицата A е: $\lambda^3+\lambda^2+1=0$. Според теоремата на Хамилтон–Кели, важи: $A^3+A^2+E=0$, од каде што: $A^3=-A^2-E$; $A^4=A^3-A=-(-A^2-E)-A=A^2-A+E$; (слично: $A^5=-A^4-A^2=-(A^2-A+E)-A^2=-2A^2+A-E$ итн.); $A^{-1}=-A^2-A$.

б) $A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\-4&8&4\\0&0&0\end{bmatrix}$; $A^4=\begin{bmatrix}0&0&0\\-8&16&8\\0&0&0\end{bmatrix}$; A^{-1} не постои (A е сингуларна).

в) $\lambda^3-\lambda^2-18\lambda+1=0$; $A^2=\begin{bmatrix}9&-14&-1\\-7&9&3\\-8&-3&19\end{bmatrix}$; $A^3=\begin{bmatrix}26&4&-55\\-25&8&39\\-62&87&18\end{bmatrix}$; $A^4=19A^2+17A-E$; $A^4=19A^2+17A-E$; $A^{-1}=-A^2+A+18E$.

14.51. а) $p(A)=\begin{bmatrix}-4&0&1\\0&-3&2\\-1&0&-6\end{bmatrix}$. *Помош.* По делењето на полиномот $p(\lambda)$ со карактеристичниот полином $\Delta(\lambda)$ на матрицата A, ќе се добие количник $q(\lambda)$ и остаток $r(\lambda)$, т.е. $p(\lambda)=\Delta(\lambda)\cdot q(\lambda)+r(\lambda)$. Поради $\Delta(A)=0$, ќе се добие $p(A)=r(A)$. Конкретно: $p(\lambda)=(\lambda)=(\lambda^3-2\lambda^2)\cdot(\lambda^5-\lambda)+\lambda-5$, па $p(A)=A-5E$. б) $p(A)=-14A^2+25A-15$,

$$p(\lambda)=(\lambda-1)^3\cdot(\lambda^5+\lambda^4-2\lambda^2-6\lambda-10)-14\lambda^2+25\lambda-15;$$

$$p(A)=\begin{bmatrix}-24&-17&-14\\37&27&25\\-17&-14&-15\end{bmatrix}.$$

14.52. а) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\100&100&1\end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix}1&0&0\\500&1&0\\500&0&1\end{bmatrix}$. **14.53.** *Помош.* Ако A е од ред n, тогаш карактеристичниот полином е x^n, па според теоремата на Хамилтон–Кели, $A^n=0$.

14.54. *Помош.* $(E-A)^n=0$, но ниеден степен на $E-A$, помал од n, не е нула.

14.55. а) -1, 3; $(1,-1)^T$, $(1,1)^T$. б) 2, 2; $(1,1)^T$. в) 3, 3; $(1,0)^T$, $(0,1)^T$.

г) Како матрица над $\mathbb{R}$, нема спектар; како матрица над $\mathbb{C}$: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-i$; $(1,1-i)^T$, $(1,1+i)^T$.

14.56. -1, 1, 2; $(2,-1,3)^T$, $(1,-1,2)^T$, $(-2,1,-4)^T$.

14.57. 2, 4, -4; $(1,3,0)^T$, $(-3,3,2)^T$, $(1,-1,2)^T$.

14.58. 6, 6, 12; $(1,0,-1)^T$, $(1,1,1)^T$, $(1,-2,1)^T$.

14.59. -2 (двократно), 4; $(1,1,0)^T$, $(0,1,1)^T$.

14.60. -1 (трикратно), 6; $(6,7,0)^T$, $(-5,0,7)^T$.

14.61. 3, i, $-i$; $(1,0,0)^T$, $(0,5,2-i)^T$, $(0,5,2+i)^T$.

14.62. а) x_1, x_1. б) x_2. **14.63.** а) -1, 4. б) -1, 3, 4.

14.64. а) $\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix}-5&18\\-3&10\end{bmatrix}$. г) $\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&-1&3\end{bmatrix}$. д) $\begin{bmatrix}2&0&-3\\0&2&3\\-3&3&-1\end{bmatrix}$.

14.65. а) $\lambda_1=2$: $(1,1)^T$; $\lambda_2=-1$: $(1,4)^T$.

б) $\lambda=2$: $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$; $\lambda=3$: $(1,1,1)^T$.

в) $\lambda=-1$ (трикратен); $(6,7,0)^T$, $(-5,0,7)^T$.

14.66. а) 1, 3, -4; $(1,0,3)$, $(3,2,-1)$, $(-3,5,1)$.

б) 3, 3, -3; $(-2,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$.

14.68. Сите ненулти (n-димензионални) вектори. Имено, сите сопствени вредности на единичната матрица E се еден ист број: 1, па $E\mathrm{x}=\mathrm{x}$ за секој x. б) Сите ненулти (n–димензионални) вектори. **14.69.** Не.

14.70. $(a-d)^2+4bc=0$. **14.71.** а) $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$; земи на пример: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. б) *Помош.*

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $b=1-a$, $d=1-c$; $\lambda^2-(a-c+1)\lambda+a-c=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=a-c$.

14.73. $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. *Помош.* Ако во карактеристичниот полином $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$, првата редица се одземе од преостанатите, ќе се добие:

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -\lambda & \lambda & 0\dots & 0 & \\ -\lambda & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix};$$

потоа, на првата колона да ѝ се додадат сите други колони – ќе се добие горнотриаголна матрица.

Забелешка. Воочи дека оваа задача е специјален случај од **14.72** б).

14.74. а) $\mathrm{tr}\,(AB) = 11 = rmtr\,(BA)$. б) $rmtr\,(AB) = 17 = \mathrm{tr}\,(BA)$.

14.75. а) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$; $\mathrm{tr}\,A = 4 - 3 = 1 = 2 - 1 = \lambda_1 + \lambda_2$; $\det A = -2 = 2\cdot(-1)$; б) 2, 3; $\mathrm{tr}\,A = 5$, $\det A = 6$. в) 2, 0, −2; $\mathrm{tr}\,A = 0$, $\det A = 0$. г) 3, 1, 0; $\mathrm{tr}\,A = 4$, $\det A = 0$.

14.76. $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{tr}\,A = 1$, $\det A = 1$. Не мора; на пример: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\mathrm{x}_1 = (2,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{x}_2 = (1,\ 0)^{\mathrm{T}}$, па модалната матрица на A е симетрична, но $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ не е. **14.77.** Истите со тие од A; $A^2 = A$.

14.78. а) 6, 4; $(1,\ -3)^{\mathrm{T}}, (1,\ -1)^{\mathrm{T}}$. б) 1, −1; $(1,\ -3)^{\mathrm{T}}$, $(1,\ -1)^{\mathrm{T}}$. Сопствените вредности на B се помали за 5 од тие на A, а сопствените вектори им се исти.

14.79. а) A: 4, −1, $(2,\ 3)^{\mathrm{T}}$, $(1,\ -1)^{\mathrm{T}}$; A^2: 16, 1; $(2,\ 3)^{\mathrm{T}}$, $(1,\ -1)^{\mathrm{T}}$.
б) B: 0, 1, 3; $(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$, $(1,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$;
B^2: 0, 1, 9; $(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$, $(1,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$. Сопствените вредности на A^2 (односно на B^2) се квадрати на тие од A (односно од B), а сопствените вектори им се исти.

14.81. а) Не ($\det A = 3 \neq 1 = \det B$). б) Не ($\det A = \det B$, но $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \neq \lambda^2 - 5\lambda + 3 = |B - \lambda E|$). в) Да ($B = T^{-1}AT$, $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$).

14.84. а) $\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\,(1,\ -5)$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

б) $B = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(1,\ -1,\ -3)$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

14.85. *Решение* I. Бидејќи $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, спектралната матрица Λ е нултата. Кога би било $P^{-1}AP = 0$, тогаш множејќи одлево со P, а оддесно со P^{-1}, би се добило дека $A = 0$. Но, матрицата A не е нула. Оваа противречност докажува дека ниедна матрица P не дава $P^{-1}AP = \Lambda$.

Решение II. $= \lambda = 0$ е двократен корен на карактеристичната равенка на A, ранг $(A - 0 \cdot t) = 1$, а дефект $(A - 0 \cdot E) = 1 \neq 2 =$ кратноста на λ; следствено (в. **14.12** , заб.4)), A не е дијагонализирлива.

14.86. а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$; $(s,\, t,\, -s-t)^{\mathrm{T}} = s \cdot (1,\, 0,\, -1)^{\mathrm{T}} + t \cdot (0,\, 1,\, -1)^{\mathrm{T}}$, $(u,\, u,\, u)^{\mathrm{T}} = u \cdot (1,\, 1,\, 1)^{\mathrm{T}}$ $(s,\, t,\, u \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$;

$B = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0,0,3)$, $P = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & u \\ c_2 & c_4 & u \\ -c_1 - c_2 & -c_3 - c_4 & u \end{bmatrix}$, $c_i, u \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \neq 0$, $u \neq 0$;

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

б) $9, 9, -9$; $(s,\, -2s - 2t,\, t)^{\mathrm{T}} = s \cdot (1,\, -2,\, 0)^{\mathrm{T}}$, $u \cdot (2,\, 1,\, 2)^{\mathrm{T}}$ $(s,\, t,\, u \neq 0)$;

$B = \mathrm{diag}\,(9,\, 9,\, -9)$, $P = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 2u \\ -2c_1 - 2c_2 & -2c_3 - 2c_4 & u \\ c_2 & c_4 & 2u \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \neq 0$, $u \neq 0$; за P_1 (на пример): $c_1 = 1 = c_4$, $c_2 = 0 = c_3$, $u = 1$; за P_2 (на пример): $c_1 = 0 = c_4 = 1 = c_3$, $u = 1$.

14.89. На пример, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ имаат ист карактеристичен полином $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, но за која било несингуларна матрица P од втор ред важи: $P^{-1}EP = E \neq A$, па E и A не се слични.

14.90. $|\lambda E - A| = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = |\lambda E - B|$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = 5$; A е слична со дијагоналната матрица $\mathrm{diag}\,(1,\, 1,\, 5)$, а B не може да се дијагонализира.

14.91. а) $\Lambda = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(4,\, -1)$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. б) Не; $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ има комплексни корени. в) Не. *Помош.* $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ има двократен корен $\lambda = 2$; ранг $(A - 2E) = 1$, дефект $(A - 2E) = 1 \neq 22 =$кратноста на λ. г) Да. $A = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(5,\, 1)$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

14.92. а) Да; $\Lambda = \mathrm{diag}(3,\, 2,\, -1)$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. б) Да; $\Lambda = \mathrm{diag}(2,\, 2,\, 5)$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. в) Не; ранг $(A - 1 \cdot E) = 2$, дефект $(A - 1 \cdot E) = 1 \neq 2 =$ кратноста на $\lambda = 1$.

14.93. а) Не; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$; на двократната сопствена вредност 2 одговара само еден (линеарно независен) вектор.

б) Да; $\Lambda = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(1,\, -1,\, 3)$, $\qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

в) Да; $\Lambda = \mathrm{diag}\,(-2,\, -2,\, 4)$, $\qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

14.94. а) Не. б) Да; $\Lambda = \mathrm{diag}\,(-2,\, 2,\, 2,\, 2)$. в) Не.

14.95. а) $\Lambda = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(3+i,\, 3-i)$, $P = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

б) $\Lambda = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(0,\, 2i)$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. в) Не е можно.

14.96. а) $\Lambda = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(3,\, i,\, -i)$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2-i & 2+i \end{bmatrix}$. б) $\Lambda = P^{-1}AP =$ $\mathrm{diag}\,(4,\, 2i,\, -2i)$, $P = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -i & i \\ 0 & -2+i & -2-i \end{bmatrix}$. в) Не е можно; спектарот е: $1,\, 1,\, 1+i,\, 1-i$; за двократниот корен 1 има само еден линеарно независен сопствен вектор: $(2i,\, 1,\, -1-2i)^{\mathrm{T}}$.

14.97. *Доказ.* Нека S е сопствен простор на f што одговара на сопствената вредност λ и нека $\mathbf{x}_1 \ldots, \mathbf{x}_k$ се сопствените вектори придружени на λ (т.е. векторите што го генерираат S). За произволен $\mathbf{x} \in S$ имаме: $f(\mathbf{x}) = f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{x}_k) = \lambda\alpha_1\mathbf{x} + \cdots + \lambda\alpha_k\mathbf{x}_k = \lambda\mathbf{x} \in S$, т.е. $f(S) \subseteq S$. Значи, S е f–инваријантен.

14.98. а) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $S_1 = \{\alpha(1,1,0) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{\alpha_1(1,\,0,\,-1) + \alpha_2(0,\,1,\,-1) \,|\, \alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $S = \{\alpha(1,\,-2,\,1) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

14.99. $\mathbb{R}^2$ и $\{\mathbf{o}\}$ се единствените потпростори од $\mathbb{R}^2$, инваријантни под A. *Помош.* Ако има некој друг потпростор, инваријантен под A, тогаш тој мора да е еднодимензионален. Меѓутоа, карактеристичниот полином на A, λ^2+1, нема сопствени вредности во $\mathbb{R}$, па затоа – ни сопствени вектори. Но, 1–димензионалните инварijатни потпростори кореспондираат на сопствените вектори на A.

14.100. а) $\mathbb{R}^2$ и $\{\mathbf{o}\}$. б) $\mathbb{C}^2$, $\{\mathbf{o}\}$, $S_1 = \{\alpha\cdot(2,\,1-2i) | \alpha \in \mathbb{C}\}$, $S_2 = \{\alpha\cdot(2, 1+2i) | \alpha\ \mathbb{C}\}$.

14.104. б) *Доказ.* Нека $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}P(f)$, т.е. $P(f)(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$. Доволно е да се докаже дека и $f(\mathbf{v})$ му припаѓа на $\mathrm{Ker}P(f)$, т.е. $P(f)\big(f(\mathbf{v})\big) = \mathbf{o}$. Поради $P(x)\cdot x = x\cdot P(x)$, следува дека $P(f)f = fP(f)$. Значи, $P(f)f(\mathbf{v}) = fP(f)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, како што се бараше. **14.107.** *Помош.* $0 = |A^{\mathrm{T}} - \lambda E| = |(A-\lambda E)^{\mathrm{T}}|$.

14.108. Грешката е во претпоставката дека A и B имаат ист сопствен вектор X (што одговара на λ и μ). Но, во општ случај тоа не е така (в. **14.109**).

14.109. а) На пример: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1, = \lambda_2 = 2$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = 3$; $A+B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$, $\sigma_{1,2} = 2 \pm \sqrt{15}$; $AB = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $\tau_{1,2} = 5 \pm \sqrt{37}$.

б) $\sigma_1 + \sigma_2 = 2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2$, $\tau_1 \cdot \tau_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2$.

За $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} : |A - \lambda E| = \lambda^2 - (a_1 + a_4)\lambda + (a_1a_4 - a_2a_3) = 0$;

$\lambda_1 + \lambda_2 = a_1 + a_4$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_1a_4 - a_2a_3$; итн.

14.110. б) *Помош.* A е сингуларна ако и само ако $\det A = 0$; потоа, да се искористи б). **14.114.** а) Нека λ е сопствена вредност на A, т.е. $AX = \lambda X$. Тогаш $A^2X = A(AX) = A\cdot\lambda X = \lambda\cdot AX = \lambda^2X$. Значи, λ^2 е сопствена вредност на A^2, со истиот сопствен вектор X. б) Со индукција по k.

14.115. *Помош.* Да се искористи **14.114**. **14.116.** а) Од $AX = \lambda X$ следува: $BX = (A - \alpha E)X = AX - \alpha EX = \lambda X - \alpha X = (\lambda - \alpha)X$; $\mu = \lambda - \alpha$.

б) Од $AX = \lambda X$ се добива $A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X$, т.е. $EX = \lambda A^{-1}X$, $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$; $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

14.118. *Помош.* $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$; $1/\lambda = \lambda$, $\lambda^2 = 1$. **14.119.** *Доказ.* а) Поради еднократноста, на λ ѝ одговара еднодимензионален инваријантен потпростор, генериран од X. Од претпоставките $AX = \lambda X$ и $AB = BA$ следува дека: $A(BX) = B(AX) = B \cdot \lambda X = \lambda \cdot BX$, што значи дека BX е сопствен вектор на A, придружен на λ, т.е. BX му припаѓа на инваријантниот потпростор генериран од векторот X. Значи, мора да биде $BX = \mu X$, т.е. X е сопствен вектор и на B. б) Од $A = M^{-1}\Lambda_1 M$ и $B = M^{-1}\Lambda_2 M$ следува дека: $AB = (M^{-1}\Lambda_1 M)(M^{-1}\Lambda_2 M) = M^{-1}\Lambda_1\Lambda_2 M = M^{-1}\Lambda_2\Lambda_1 M = (M^{-1}\Lambda_2 M)(M^{-1}\Lambda_1 M) = BA$ (притоа: $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$ зашто Λ_1 и Λ_2 се дијагонални). в) $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$; итн.

14.120. $(M^{-1})^{\mathrm{T}}$; спектралната матрица е Λ – истата како за A.

14.121. *Помош.* Да се искористи фактот дека сите сопствени вредности на симетрична матрица од n–ти ред се реални и дека ним им одговараат n линеарно независни сопствени вектори $X_1, \ldots, X_n$, т.е. S може да се дијагонализира. За B да се земе матрицата чии колони се векторите $Y_k = X_k/|X_k|$, $k = 1, \ldots, n$, при што за векторот $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $|X|$ означува бројот $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. (Ако $S = 0$, тогаш за B може да се земе која било матрица од n–ти ред.)

14.124. *Помош.* Ако A е несингуларна: $AB = E(AB)E = AA^{-1}(AB)A^{-1}A = (A^{-1}A)^{-1}(AB)(A^{-1}A)$. (За сингуларни – да се разгледаат, на пример: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.)

14.125. *Доказ.* Ако $Q^{-1}AQ = P^{-1}AP$, тогаш $A = QP^{-1}APQ^{-1} = RAR^{-1}$ (каде што $R = QP^{-1}$), а равенството $A = RAR^{-1}$ е точно само ако $RA = AR$. Значи, $Q = RP$. Обратно, ако $Q = RP$ (при што R е несингуларна и комутира со A), тогаш $Q^{-1}AQ = (RP)^{-1}A(RP) = P^{-1}AP = B$.

14.127. а) $C = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix} = C^{\mathrm{H}}$; $D = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix} = D^{\mathrm{H}}$

б) Да; $C^{\mathrm{H}} = (A^{\mathrm{H}}A)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{HH}} = A^{\mathrm{H}}A = C$. в) $M^{-1}CN = \mathrm{diag}\,(0, 1, 3)$, $P^{-1}DP = \mathrm{diag}\,(1, 3)$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ i & 1 & i \\ -i & 1 & -i \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$.

14.128. а) *Помош.* $AX = \lambda X$, $A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X$, $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$.

б) $1 = \det E = \det (A^{\mathrm{H}}A) = ($
дет $A^{\mathrm{H}})(\det A) = (\det A)^2$.

14.130. а) Со пресметување на матрицата $(X^{\mathrm{H}}AX)^{\mathrm{H}}$, треба да добиеме матрица со форма 1×1 (значи број), спрегната со $X^{\mathrm{H}}AX$. Но, фактички го добиваме истиот број: $(X^{\mathrm{H}}AX)^{\mathrm{H}} = X^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}X^{\mathrm{HH}} = X^{\mathrm{H}}AX$« па според тоа, тој број мора да е реален.

б) На пример: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ i1 \end{bmatrix}$, $X^{F}AX = 3 + i$.

в) *Доказ.* Ако λ е која било сопствена вредност на A, доволно е да се докаже дека $\lambda = \overline{\lambda}$, каде што $\overline{\lambda}$ е бројот конјугиран на A. Имено, од $AX =$

λX, множејќи одлево со векторот X^{H}, се добива (1): $X^{\mathrm{H}}AX = \lambda X^{\mathrm{H}}X$. Од друга страна, $AX = \lambda X$ повлекува $\overline{X}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{\lambda}\overline{X}^{\mathrm{T}}$, т.е. $X^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}} = \overline{\lambda}X^{\mathrm{H}}$, а бидејќи A е ермитска ($A = A^{\mathrm{H}}$), последното равенство помножено оддесно со X, станува (2): $X^{\mathrm{H}}AX = \overline{\lambda}X^{\mathrm{H}}X$. Од (1) и (2): $(\lambda - \overline{\lambda})X^{\mathrm{H}}X = 0$, а бидејќи $X \neq 0$ и со тоа и $X^{\mathrm{H}}X \neq 0$, следува дека $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, т.е. $\lambda = \overline{\lambda}$.

г) *Доказ.* Ако $AX = \lambda X$ се помножи (одлево) со Y^{H}, а $AY = \mu Y$ со X^{H}, се добиваат (3): $Y^{\mathrm{H}}AX = \lambda Y^{\mathrm{H}}X$, $X^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Y = \mu X^{\mathrm{H}}Y$, а по транспонирањето се добиваат (4): $X^{\mathrm{H}}AY = \lambda X^{\mathrm{H}}Y$, $Y^{\mathrm{H}}AX = \mu Y^{\mathrm{H}}X$. Левата страна од првото равенство во (3) и левата страна од второто равенство во (4) се еднакви и – аналогно за втората од (3) и првата од (4). Значи: $\lambda Y^{\mathrm{H}}X = \mu Y^{\mathrm{H}}X$, $\lambda X^{\mathrm{H}}Y = \mu X^{\mathrm{H}}Y$, т.е. (5): $(\lambda - \mu)Y^{\mathrm{H}}X = 0 = (\lambda - \mu)X^{\mathrm{H}}Y$. Поради $\lambda \neq \mu$, се добива $Y^{\mathrm{H}}X = X^{\mathrm{H}}Y = 0$, што значи дека векторите X и Y се ортогонални.

д) *Помош.* Ако A е реална и симетрична, тогаш $\overline{A} = A$ и $A^{\mathrm{T}} = A$, па $A^{\mathrm{H}} = (\overline{A})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} = A$, т.е. A е ермитска.

15. ЛИНЕРАНИ, БИЛИНЕАРНИ И КВАДРАТНИ ФОРМИ

15.2. а) и б) Да. в) Не. г) и д) Да. **15.4.** а) $3x_1+2x_2$. б) $5x_1+15x_2$. в) $-4x_1+9x_2$.

15.7. Директна последица од **15.6**. **15.9.** $-2x_1 + x_2$, $3x_1 - x_2$.

15.10. а) x_1, x_2, x_3. б) $2x_2 + x_3$, $-2x_1 - 3x_2 - 5x_3$, $x_1 + x_2 + 2x_3$.

15.11. б) $\left\{2 - 2t,\ t - \frac{1}{2}\right\}$. **15.12.** $\left\{3t - \frac{3}{2}t^2,\ -\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}t^2,\ 1 - 3t - \frac{3}{2}t^2\right\}$.

15.19. а) $\{\varphi\}$, $\varphi(x, y, z, u) = 2x - y + 2z + u$.

б) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\varphi_1(x, y, z, u) = 5x - y + z$, $\varphi_2(x, y, z, u) = 2y - u$.

15.20. $\{\varphi(x, y, z) = x - 2y + z\}$.

15.21. *Решение.* а) $\sigma(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) = (\varphi f)(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) = \varphi\big(f(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2)\big) =$
$= \varphi\big(af(\mathbf{u}_1) + bf(\mathbf{u}_2)\big) = a(\varphi f)(\mathbf{u}_1) + b(\varphi f)(\mathbf{u}_2) = a\sigma(\mathbf{u}_1) + b\sigma(\mathbf{u}_2)$.

б) $f^{\mathrm{T}}(a\varphi+b\psi)=(a\varphi+b\psi)f=a(\varphi f)+b(\psi f)=af^{\mathrm{T}}(\varphi)+bf^{\mathrm{T}}(\psi)$.

15.22. а) $x + 7y - 3z$. *Решение.* Имаме:

$\big(f^{\mathrm{T}}(\varphi)\big)(x,y,z)=\varphi f(x,y,z)=\varphi(x+y-z,\ x-2y)=3x+3y-3z-2x+4y=x+7y-3z$.

б) $3x + y - 2z$.

15.23. а) $2x$. б) $8x + 2y$. в) $x - y$.

15.29. а) Да. б) Не. в) Не. г) Да. д) Да. ѓ) Не.

Решение. а) $f(a\mathbf{x}+b\mathbf{u}, \mathbf{y}) = 5(ax_1 + bu_1)y_2 + 3(ax_2 + bu_2)y_1 =$
$= a(5x_1y_2 + 3x_2y_1) + b(5u_1y_2 + 3u_2y_1) = af(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bf(\mathbf{u}, \mathbf{y})$; аналогно за другиот услов: $f(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bf(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

15.31. а) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^{\mathrm{T}}AY = (x_1, x_2)\cdot\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

б) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. в) $(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

15.32. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$.

15.33. а) $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$.
б) $x_1y_1 + 2x_1y_3 + 5x_2y_2 + 3x_2y_3 + 2x_3y_1 + 3x_3y_2$.
в) $8x_1y_1 + 5x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + 4x_3y_2 + 6x_3y_3$.

15.37. а) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. б) $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 32 \end{bmatrix}$. в) $P = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.
г) $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{\mathrm{T}}CQ = A$, $R^{\mathrm{T}}CR = B$.

15.39. б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **15.41.** *Доказ.* а) Нека $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ е базата на V што е дуална на $\{\varphi_i\}$. Да покажеме прво дека $\{f_{ij}\}$ го генерира $B(V)$. За таа цел, нека $f \in B(V)$ е произволен и да претпоставиме дека $f(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = a_{ij}$. Тврдиме дека $f = \sum a_{ij} f_{ij}$. За тоа е доволно да докажеме дека $f(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = \left(\sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}\right)(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t)$ за $s, t = 1, \ldots, n$. Имаме:

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}\right)(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = \sum a_{ij}\, \varphi_i(\mathrm{e}_s)\varphi_j(\mathrm{e}_t) =$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}\, \delta_{is}\, \delta_{jt} = a_{st} = f(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t).$$

(Притоа, δ_{ij} е т.н. *Кронекеров симбол*: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad i = j, \\ 0 & \text{за} \quad i \neq j. \end{cases}$)
Значи, $\{f_{ij}\}$ го генерира $B(V)$.
Останува да покажеме дека $\{f_{ij}\}$ е линеарно независно. Да претпоставиме дека $\sum_{i,j} a_{ij} f_{ij} = 0$. Тогаш, за $s, t = 1, \ldots, n$:

$$0 = 0(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = \left(\sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}\right)(\mathrm{e}_s, \mathrm{e}_t) = a_{st}$$

(последниот чекор се врши како погоре). Значи, $\{f_{ij}\}$ е линеарно независно. Следствено, $\{f_{ij}\}$ е база на $B(V)$.

15.42. б) Во **15.31**: г); во **15.32**: б). **15.44.** а) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$
в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ г) $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ д) $\mathrm{diag}\,(1, 2, -1)$.

15.45. а) 2. б) 1. в) 2. г) 3. д) 1. **15.46.** а) $\begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & -1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3/2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3/2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

15.48. б) Не е знаковно определена. в) Позитивно определена. г) Не е знаковно определена. д) Негативно определена. ѓ) Позитивно определенеа.

15.49. а) Негативно определена за $c < -1$; за ниедна вредност на c не е позитивно определена. б) Позитивно определена за $c > 8$; за ниедна вредност на c не е негативно определена. в) Не е знаковно определена за ниедна вредност на c.

15.50. *Доказ.* Нека A е позитивно определена и нека X_i^{T} е нормиран сопствен вектор на A (т.е. $X_i^{\mathrm{T}}X_I = 1$) што е соодветен на сопствената вредност λ_i. Тогаш $AX_i = \lambda_i X_i$ и $X_i^{\mathrm{T}}AX_i = X_i^{\mathrm{T}}\lambda_i X_i = \lambda_i$ (зашто $X_i^{\mathrm{T}}X_i = 1$). Според (1), $X^{\mathrm{T}}AX$ е позитивен број за секој $X \neq 0$, па и за $X = X_i$, што значи дека и бројот $X_i^{\mathrm{T}}AX_i = \lambda_i$ мора да е позитивен. Следствено, сопствените вредности на позитивно определена матрица се позитивни. Обратно, нека сите сопствени вредности λ_i $(i = 1, \ldots,], n)$ на A се позитивни. Бидејќи секоја симетрична матрица има комплетен систем од n ортонормирани сопствени вектори X_i (в. **14.121**), следува дека секој вектор X може да се претстави како линеарна комбинација $c_1X_1 + \cdots + c_nX_n$. Оттука имаме: $AX = c_1AX_1 + \cdots + c_nAX_n = c_1\lambda_1X_1 + \cdots + c_n\lambda_nX_n$, па поради ортонормираноста на системот вектори X_i добиваме
$X^{\mathrm{T}}AX = (c_1X_1^{\mathrm{T}} + \cdots + c_nX_n^{\mathrm{T}})(c_1\lambda_1X_1 + \cdots + c_n\lambda_nX_n) = c_1^2\lambda_1 + \cdots + c_n^2\lambda_n$.
Бидејќи секој λ_i е позитивен, следува дека $c_1^2\lambda_1 + \cdots + c_n^2\lambda_n > 0$, т.е. $X^{\mathrm{T}}AX > 0$. Значи, A е позитивно определена.

15.51. б) Не; неопределена. в) Не; позитивно полуопределена. г) Да. д) Не. ѓ) Не; негативно определена.

15.54. $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = 1;$

$$q(\mathrm{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3\,,$$

$$q(\mathrm{y}) = y_1^2 + y_2^2 - 6y_3^2\,.$$

15.55. $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$ **15.56.** $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix},$
$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ **15.57.** $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Трансформациите што се вршат во овие две задачи се од различна природа.

15.58. б) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 75 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad q(x', y') = 75x'^2 + 50y'^2.$

в) $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(2, 2, 7), \quad P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & -2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \end{bmatrix},$

$$q(x', y', z') = 2x' + 2y'^2 + 7z'^2.$$

г) $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-2, -2, 4), \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2\sqrt{/6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \end{bmatrix}.$

$$q(x', y'; z') = -2x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2.$$

15.60. $\frac{x'^2}{1/2} + y'^2 = 1$; елипса. **15.61.** $x'^2 - y'^2 = 1$; хипербола.

15.62. $\frac{x'^2}{1/3}+\frac{y'^2}{1/2}=1$; елипса. **15.63.** $(x'+1)^2+\frac{(y'-2)^2}{4}=1$; елипса; $\lambda_1=20$, $\lambda_2=5$; $x\sqrt{5}=2x'-y'$, $y\sqrt{5}=x'+2y'$.

15.64. $(y'-1)^2=x'-1$; парабола; $\lambda_1=0$, $\lambda_2=25$; $5x=3x'-4y'$, $5y=4x'+3y'$.

15.65. $(x'+1)^2-y'^2=0$, т.е. $x''^2-y''^2=0$; пар прави: $x''+y''=0$, $x''-y''=0$; ортогоналната трансформација: $x\sqrt{13}=3x'-2y'$, $y\sqrt{13}=2x'+3y'$.

15.67. а) $(-x'^2/6)+y'^2+z'^2=1$; еднокрилен хиперболоид.

б) $\frac{1}{6}x'^2+\frac{1}{5}y'^2+\frac{1}{3}z'^2=1$; елипсоид. в) $\frac{1}{3{,}6}(x'-2)^2+\frac{1}{0{,}81}(y'-0,1)^2=1$; елиптичен цилиндар.

Помош. $P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(9,\,40,\,0)$, а трансформационите равенки се: $x=x'$, $y\sqrt{2}=y'+z'$, $z\sqrt{2}=-y'+z'$.

15.71. Следува од **15.70** д) и г). **15.72.** а) Да. б) Не. в) Да.

15.73. в) $(A^{\mathrm{H}}A)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{HH}}=A^{\mathrm{H}}A$, па $A^{\mathrm{H}}A$ е ермитска. За „позитивноста" аналогно на **15.52**. Имено, $AX\neq 0$ и $\overline{A}\overline{X}\neq \underline{0}$ (поради несингуларноста на A), па скаларниот производ $(\overline{A}X)(\overline{\overline{A}X})$ е позитивен. Значи, $X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{H}}A)\overline{X}=(X^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}})(A\overline{X})=(\overline{A}X)^{\mathrm{T}}(\overline{\overline{A}X})>0$.

15.76. а) $P^{\mathrm{T}}A\overline{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-6\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&-3-i\\0&1\end{bmatrix}$.

б) $P^{\mathrm{T}}A\overline{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-14\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&-2+3i\\0&1\end{bmatrix}$. в) $P^{\mathrm{T}}A\overline{P}=\mathrm{diag}\,(1,\,1,\,-4)$.

г) $P^{\mathrm{T}}A\overline{P}=\mathrm{diag}(1,\,2,\,-38)$, $P=\begin{bmatrix}1&-1+i&5+9i\\0&1&-5i\\0&0&2\end{bmatrix}$.

16. ДОДАТОК

16.4. а) $\|A\|_1=5$, $\|A\|_2=10$, $\|A\|_3=6$. б) $\|A\|_1=6$, $\|A\|_2=11$, $\|A\|_3=53$.
в) $\|A\|_1=\|A\|_2=\|A\|_3=1$. г) $\|A\|_1$, $\|A\|_2=k$, $\|A\|_3=\sqrt{k}$.

16.7. *Помош.*

$$\|A+B\|_34=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}|^2}\leq\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2+\sum_{i,j}|b_{ij}|^2+2\cdot\sum_{i,j}|a_{ij}|\,|b_{ij}|}.$$

Применувајќи го неравенството на Коши–Буњаковски:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leq\sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^{n}|a_k|^2}\cdot\sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^{n}|b_k|^2}$$

во форма

$$\sum_{i,j}|a_{ij}|\,|b_{ij}|\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i,j}|b_{ij}|^2}$$

ќе се добие

$$\|A+B\|_3 \le \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} + \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}|^2} \le \|A\|_3 + \|B\|_3 \,.$$

И при докажувањето на неравенстрвото $\|AB\| \le \cdot\|B\|$ се користи неравенството на Коши Буњаковски.

16.8. а) 7, 6, $\sqrt{47}$ соодветно. б) 5, 5 $\sqrt{19}$ соодветно. в) 6, 6, 6.

16.11. *Помош.* $\|A\| = \|B+(A-B)\| \le \|B\| + \|A-B\|$, па $\|A\| - \|B\| \le \|A-B\|$; аналогно: $\|B\| - \|A\| \le \|B-A\| = \|A-B\|$.

16.13. $z_{\min} = 1$ во $(-4,\ 1)$. **16.14.** $z_{\max} = 12$ во $(4,\ 4)$. **16.15.** $z_{\min} = 0$ во $(2,\ 4)$.

16.16. Нема екстреми. **16.17.** $z_{\max} = 5$ во $(-1,\ 2)$; $z_{\min} = -52$ во $(1,\ -2)$.

16.18. $z_{\min} = 0$ во $(0,\ 0)$; $z_{\max} = 2/e$ во $(0,\ \pm 1)$; во $(\pm 1,\ 0)$ – нема екстрем.

16.19. $z_{\min} = -6\sqrt{3}$ во $(\sqrt{3},\ 3)$; $z_{\max} = 6\sqrt{3}$ во $(-\sqrt{3},\ 3)$.

16.20. $u_{\min} = 0$ во $(0,\ 0,\ 0)$; **16.21.** $u_{\min} = 4$ во $(1,\ 1,\ 1)$.

16.22. Стационарна точка е $(0,\ 1,\ 0)$ – не е точка на екстрем.

16.23. $u_{\min} = -2$ во $(1,\ 2,\ 0)$.

16.25. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1/t^2 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} t^2/2 & t^2 \\ t & \ln|t|\,t \end{bmatrix} + C$ (C е конст. матрица).

16.26. а) $\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} -\cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{bmatrix} + C$.

16.27. а) $\begin{bmatrix} -e^{-t} & 6t & 2 \\ -2\sin 2t & 0 & -2 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} -e^{-t} & t^3 & t^2 \\ \frac{1}{2}\sin 2t & t & -t^2 \end{bmatrix} + C$.

16.28. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} 2t & -3t \\ 4t & 5t \end{bmatrix} + C$.

16.29. д) Ако $F = [f_{ij}$ е $m\times$, $G = [g_{ij}]$ е $m \times p$ матрица и $F \cdot G = H = [h_{ij}]$, тогаш:

$$(h'_{ij} = (f_{i1}g_{1j} + \cdots + f_{in}g_{nj})' = (f'_{i1}g_{1j} +_{i1} g'_{1j}) + \cdots + (f'_{in}g_{nj} + f_{in}g'_{nj}) =$$
$$= (f'_{i1}g_{1j} + \cdots + f'_{in}g_{nj}) + (f_{i1}g'_{1j} + \cdots + f_{in}g'_{nj}),$$

што значи дека $H' = F'G + FG'$.

ѓ) Диференцирајќи ги двете страни на равенствата $F \cdot F^{-1} = E$ (E – единичната матрица), добиваме

$F'F^{-1} + F \cdot (F^{-1})' = 0$; $F \cdot (F{-}1)' = -F' \cdot F^{-1}$; $(F^{-1})' = -F^{-1} \cdot F \cdot F^{-1}$.

16.30. а) $F^{-1} = \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$, $(F^{-1})' = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

б) $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1/t & -t \\ 0 & t^2 \end{bmatrix}$, $(F^{-1})' = \begin{bmatrix} -1/t^2 & -1 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$.

16.32. а) $\begin{bmatrix} 1 & \pi+1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & e \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1/e & 0 \end{bmatrix}$.

16.33. $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **16.34.** $\begin{bmatrix} 111 & \pi-9 \\ 3\pi+6 & -11 \end{bmatrix}$ **16.36.** $Y = \begin{bmatrix} 3t & 3t^2 \\ 0 & 3t^3 \end{bmatrix} + C$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Апатенок, Р. Ф. и др.: *Сборник задач по линейной алгебре*; Минск 1980

[2] Беллман, Р.: *Введение в теорию матриц*; Москва 1969 (превод од англиски: Mc Graw–Hill, 1960)

[3] Ганмтмахер, Ф.Р.: *Теория матриц*; Москва 1988

[4] Гельфанд, И. М.: *Лекции по линейной* алгебре; Москва 1966

[5] Gere, M. J., Weaver, W.: *Matrix Algebra for Engineers*; Van Nostrand Co 1965

[6] Головина, Л. И.: *Линейная алгебра и некоторые её применения*; Москва 1975

[7] Икрамов, Х. Д.: *Задачник по линейной алгебре*; Москва 1975

[8] Клетеник, Д. Б.: *Сборник задач по аналитической геометрии; Москва 1969*

[9] Ланкастер, П.: *Теория матриц*; Москва 1982 (превод од англиски: Academic Press, 1969)

[10] Lipschutz, S.: *Theory and Problems of Linear Algebra*; McGraw–Hill Book Company, 1968

[11] Мальцев, А. И.: *Основы линейной алгебры*; Москва 1970

[12] Проскуряков, И. В.: *Сборник задач по линейной алгебре*; Москва 1970

[13] Рублев, А.Х.: *Линейная алгебра*; Москва 1968

[14] Самарџиски, А., Целакоски Н.: *Решени задачи по алгебра* I; Скопје 1985

[15] Самарџиски, А, Целакоски, Н.: *Збирка задачи по алгебра. Множества*; Скопје 1987

[16] Самарџиски, А.: *Векторска алгебра низ задачи*; Скопје 1991

[17] Stojaković, Z.: *Zbirka zadataka iz linearne algebre*; Novi Sad 1972

[18] Стренг, Г.: *Линейная алгебра и её применения*; Москва 1980 (превод од англиски: Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*; MIT, Academic Press 1976).

[19] Трпеновски, Б., Целакоски, Н., Чупона Ѓ.: *Виша математика* кн. I–IV, Скопје 1993–1995

[20] Hohn Franz E.: *Elementary matrix algebra*, 2–nd ed; Macmillan 1964

[21] Целакоски, Н.: *Линеарна алгебра* – предавања на постдипломските студии при ИЗИИС, 1979–1984, Скопје 1979

[22] Цубербиллер, О.Н.: *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*; Москва 1966

ОЗНАКИ

Симбол	Употреба	Значење
$\in$	$a \in A$	a е елемент од множеството A; a му припаѓа на A
$\notin$	$c \notin A$	c не е елемент од A; c не му припаѓа на A
$\subseteq$	$A \subseteq M$	А е подмножество од M
$\subset$	$A \subset M$	A е вистинско подмножество од M
	$\mathbb{P}(M)$	партитивното множество на M (множеството од сите подмножества на M)
$\emptyset$	$\emptyset$	празното множество
$\{\ \mid\ \}$	$\{x \mid x \in A,\ P(x)\}$	множеството на сите елементи од A што го имаат својството P
$\cup$	$A \cup B$	унија на множествата A и B
$\cap$	$A \cap B$	пресек на множествата A и B
$\backslash$	$A \backslash B$	разлика на A со B
$'$	A'_M, A'	комплементот на A во M
$\triangle$	$A \triangle B$	симетрична разлика на A и B
$\times$	$A \times B$	директен производ на множествата A, B
$(\ ,\ )$	(a, b)	1) подреден пар елементи 2) интервал од реални броеви
$\sim$	$A \sim B$	множествата A и B се еквивалентни (т.е. биективни)
	1_A	идентичното пресликување на множеството A
$\forall$	$(\forall a \in A)$	за секој елемент a од множеството A

$\exists$	$(\exists a \in A)$	за некој (т.е. постои) елемент a од множеството A
$\exists!$	$(\exists! a \in A)$	постои еднозначно определен елемент a од множеството A
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	од p следува q
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	p е еквивалентно со q
	$\mathbb{N}$	множеството природни броеви
	$\mathbb{N}^0$	множеството природни броеви и нулата
	$\mathbb{Z}$	множеството цели броеви
	$\mathbb{Q}$	множеството рационални броеви
	$\mathbb{R}$	множеството реални броеви
	$\mathbb{R}^*$	множеството ненулти реални броеви; аналогно: $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$
	$\mathbb{R}^+$	множеството позитивни реални броеви; аналогно : $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$
	$\mathbb{R}^-$	множеството негативни реални броеви; аналогно: $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^-$
$\times$	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	векторски производ од векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$
$[\ ,\ ,\ ]$	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$	мешан производ од векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$
т	$A^{\text{т}}$	транспонираната матрица од матрицата A
$-$	$\overline{A}$	конјугирана матрица од матрицата A
н	$A^{\text{н}}$	ермитски транспонирана матрица од A $(A^{\text{н}} = \overline{A}^{\text{т}})$.
adj	$\operatorname{adj} A$	адјунгираната матрица од матрицата A
-1	A^{-1}	инверзната матрица од несингуларната матрица A
	$V(P)$	векторски простор над полето P
	$V^n(P)$	векторскиот простор од сите подредени n–ки елементи од полето P
	$\mathcal{P}_k$	векторскиот простор од сите полиноми со коефициенти во $\mathbb{R}$ и со степен не поголем од k
	$\mathbb{R}^n$	векторскиот простор од сите подредени n–ки реални броеви

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ И ИМИЊА

---

*) **13.64** значи: шеесет и четвртата задача од тринаесеттиот параграф

ОП за издавање на учебници и наставни средства „Просветно дело“ – Скопје, ул. „Вељко Влаховиќ“ бр. 15, Градски ѕид, блок 4.

*

За издавачот: директор
М-р **Павле Петров**

*

д-р **Наум Целакоски**

ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

*

Лектура
Оливера Павловска

*

Илиустрации
Авторот

*

Технички уредник
Блаже Танчевски

*

Корица
Илија Богоевски

*

Коректор
Емилија Целакоска

Ракописот е предаден во печат во јануари 1996 година. Печатењето е завршено во март 1996 година. Обем: 312 стр. Формат: 17 x 24 см. Тираж: 1200 примероци. Книгата е отпечатена во печатницата А.Д. ГИТ „Гоце Делчев“ Скопје.

301,00

Графичката подготовка на книгава беше потпомогната со средства од Министерството за обрзование и физичка култура на Република Македонија.

Според мислењето на Министерството за култура бр. 08-95/440-440 од 26. 02. 1996 година, за учебникот се плаќа повластена даночна стапка.

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
„Климент Охридски", Скопје

512.64 (076) (075.8)

ЦЕЛАКОСКИ, Наум
Задачи по линеарна алгебра / Наум Целакоски: [учебно помагало]. - 4. изд. - Скопје: Просветно дело, 1996. - 306 стр.; 24 см

1. изд. 1972. - Библиографија: стр. 299.
а) Линеарна алгебра - Вежби