ЈБМО 2011

1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)\geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

Решение. Ќе го искористиме равенството

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^3+1)(x^2+x+x),$$

за $x\in\{a, b, c\}$.

Со примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме

$$a^3+1\geq 2\sqrt{a^3\cdot 1}=2\sqrt{a^3}$$
$$b^3+1\geq 2\sqrt{b^3\cdot 1}=2\sqrt{b^3}$$
$$c^3+1\geq 2\sqrt{c^3\cdot 1}=2\sqrt{c^3}$$

Ако последните три неравенства ги помножиме добиваме

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geq 8\sqrt{a^3b^3c^3}$$
$$=8\sqrt{(abc)^3}=8.$$

Сега е јасно дека

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)=$$
$$=(a^3+1)(a^2+a+1)(b^3+1)(b^2+b+1)(c^3+1)(c^2+c+1)$$
$$=(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Равенство важи ако и само ако $a^3=b^3=c^3=1$, односно $a=b=c=1$.

2. Определи ги сите прости броеви p, за кои равенката

$$x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p.$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+y)(xy-p)=5p.$$

Можни се повеќе случаи.

Случај 1. Нека $x+y=1$ и $xy=6p$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-x+6p=0$ нема целобројни решенија.

Случај 2. Нека $x+y=5$ и $xy=2p$. За прости броеви $p\geq 2$ равенката $x^2-5x+2p=0$ има дискриминанта $\Delta=25-8p$. Од неравенството $25-8p\geq 0$ добиваме $p\in\{2,3\}$. За $p=2$ ги добиваме решенијата $(1,4)$ и $(4,1)$. За $p=3$ ги добиваме решенијата $(2,3)$ и $(3,2)$.

Случај 3. Нека $x+y=p$ и $xy=p+5$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-px+p+5=0$ има дискриминанта $\Delta=p^2-4p-20$. Од неравенството $p^2-4p-20\geq 0$ добиваме $p\geq 7$.

Нека $p^2-4p-20=q^2$, каде $1\leq q<p$. Ја добиваме равенката

$$(p-2)^2-q^2=24$$

која е еквивалентна со

$$(p+q-2)(p-q-2)=24.$$

Јасно е дека броевите $p+q-2$ и $p-q-2$ се парни. Притоа имаме два подслучаи:

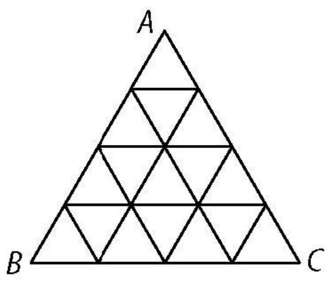
а) $p+q-2=12$ и $p-q-2=2$. Непосредно се добива $p=9$ кој не е прост број.

б) $p+q-2=6$ и $p-q-2=4$. Непосредно се добива $p=7$ и $q=1$. Равенката има решенија $(3,4)$ и $(4,3)$.

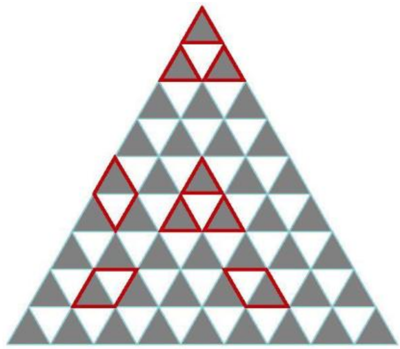
Случај 4. Нека $x+y=5p$ и $xy=p+1$. Во овој случај не постои $p\in\mathbb{N}$ такво што за x,y се добиваат решенија што се природни броеви.

Конечно, равенката има решенија во множеството природни броеви само за $p\in\{2,3,7\}$.

3. Нека $n>3$ е природен број. Рамностраниот триаголник ABC е поделен на n^2 идентични рамнострани триаголници со прави паралелни на неговите страни. Таква поделба е илустрирана на цртежот за $n=4$. Нека m е бројот на ромбови составени од 2 мали триаголници, а d е бројот на ромбови составени од 8 мали триаголници. Изрази ја разликата $m-d$ преку n.

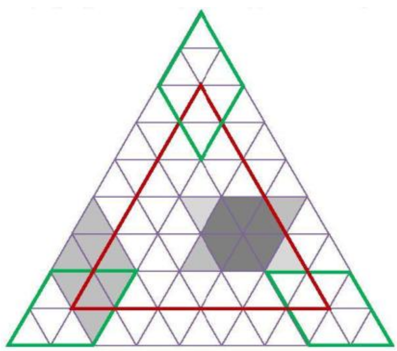


Решение. Да ги обоиме триаголниците црно-бело како на цртежот. Секој ромб кој се состои од два мали триаголника се состои од еден бел и еден црн триаголник. Секој бел триаголник може да формира точно три ромба кои се состојат од 2 мали триаголника, па затоа m е еднаков на тројната вредност на бројот на белите полиња, т.а.



$$m=3(1+2+3+...+(n-2)+(n-1))=\frac{3n(n-1)}{2}.$$

Да забележиме дека пресеците на дијагоналите на ромбовите составени од 8 мали триаголници може да бидат само темињата на малите триаголници кои припаѓаат на централниот рамностран триаголник (на цртежот означен со црвена боја).



Темињата на црвениот триаголник се центри на еден ромб, преостанатите точки на неговите страни на по два, а точките кои се вои внатрешноста на триаголникот на по три. Затоа важи

$$d=3\cdot 1+2\cdot 3(n-4)+3(1+2+...+(n-5))=\frac{3(n-3)(n-2)}{2}$$

Сега не е тешко да се пресмета дека $m-d=3(2n-3)$.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Точките E и F припаѓаат на страните AB и CD соодветно, така што

$$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{CD}:\overline{DF}=n.$$

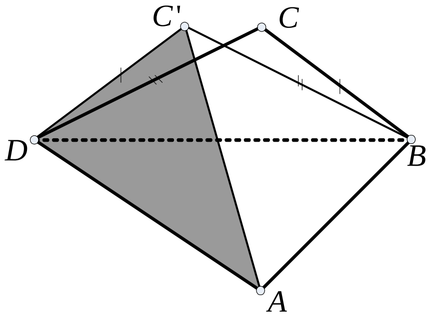
Ако S е плоштина на четириаголникот $AEFD$, докажи дека

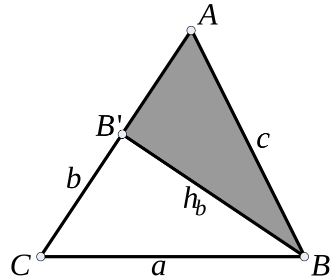
$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}^2+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$

Решение. На почеток ќе докажеме една лема.

Лема. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и S е неговата плоштина. Тогаш

$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}.$$





Доказ. Ќе конструираме точка C' така што $\overline{BC'}=\overline{CD}$ и $\overline{DC'}=\overline{BC}$. Јасно е дека триаголниците ΔBCD и $\Delta BC'D$ се складни, и плоштините на четириаголниците $ABCD$ и $ABC'D$ се еднакви. Плоштината на даден триаголник е помала или еднаква од половината од производот на негови две страни. Според тоа

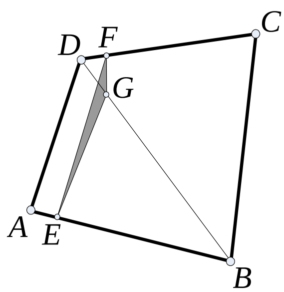
$$S=S_{\triangle ADC'}+S_{\triangle ABC'}\le\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DC'}}{2}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC'}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}. \blacksquare$$

Применувајќи ја лемата на четириаголникот $AEFD$ имаме:

$$S\le\frac{\overline{AE}\cdot\overline{DF}+\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2}.$$

Нека G е точка од дијагоналата BD така што $\overline{DB}:\overline{DG}=n$. Од Талесовата теорема имаме

$$\overline{GE}=\frac{n-1}{n}\overline{AD} \text{ и } \overline{GF}=\frac{1}{n}\overline{BC}.$$



Применувајќи го неравенството за триаголникот $\triangle EGF$, добиваме

$$\overline{EF}\le\overline{EG}+\overline{GF}=\frac{(n-1)\overline{AD}+\overline{BC}}{n}.$$

Конечно, имаме

$$S\le\frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2}\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$