Војислав Андрић (Ваљево)

БРОЈЕВНИ РЕБУСИ

Ако се у некој аритметичкој операцији са природним бројевима (сабирању, одузимању, множењу, дељењу) уместо неких цифара (може бити и свих) налазе звездице или слова (могу се и комбиновати), онда се говори о бројевном ребусу. Циљ сваког решаваоца бројевних ребуса је *да дати ребус дешифрује, тј. да уместо звездица и слова* напише одговарајуће цифре тако да дата рачунска операција буде тачна, при чему најчешће звездицама одговарају било које цифре, једнаким словима једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.

Сви бројеви Математичког *листа у овој школској години* на насловној страни су имали бројевни ребус као наградни задатак. Та чињеница је разлог да, у циљу заокруживања математичких знања наших младих читалаца у овој области, наредни текст посветимо методама решавања бројевних ребуса.

Основна идеја код решавања свих ребуса је да се број могућности које се појављују код сваког ребуса и који може бити веома велики логичким операцијама сведе на много мању меру.

Пример 1. $\overline{ABBB} - A = 1998$.

Дати ребус се лако решава такозваном **методом еквивалентне трансформације операција**, тј. превођењем ребуса у еквивалентно сабирање $A + 1998 = \overline{ABBB}$. Како је A прва цифра броја $\overline{ABBB}$, то $A \in \{1, 2, \dots, 9\}$, па је $1999 = 1 + 1998 \leq A + 1998 = \overline{ABBB} \leq 9 + 1998 = 2007$, тј. $1999 \leq \overline{ABBB} \leq 2007$. Дакле, A може бити само 1 или 2. Ако је $A = 1$, онда дата операција гласи $1999 - 1 = 1998$, а ако је $A = 2$, добијамо $2000 - 2 = 1998$.

Пример 2. $1998 : A = \overline{BBB}$.

Овај ребус се решава **методом дељивости**, јер је A очигледно једноцифрен садржалац броја 1998. Како 1998 није дељиво са 4, 5, 7 и 8, то A може бити само 1, 2, 3, 6 или 9. Како је $1998 : 1 = 1998$, то A није 1, па остају могућности $1998 : 2 = 999$, $1998 : 3 = 666$, $1998 : 6 = 333$ и $1998 : 9 = 222$. Дакле, B може бити 9, 6, 3 или 2.

Пример 3. $\overline{*******B} \cdot B = \overline{AAAAAAAAA}$.

На овом примеру илустроваћемо такозвани **метод разликовања случајева** јер ћемо у обзир узети све могуће случајеве за B:

1) Цифра B није 0, 1, 5 и 6, јер би тада и A било 0, 1, 5 и 6, а то је немогуће, јер су A и B различите цифре.

2) Цифра B није 2, 4 и 8, јер би у том случају A било редом 4, 6, 4 па би лева страна једнакости била дељива са 4, односно 8, а десна страна, тј. бројеви 444444444, односно 666666666 то нису.

3) Ако је $B = 3$, онда је $A = 9$. Тада је број $\overline{*******B} = 999999999 : 3 = 333333333$, што је немогуће, јер је 333333333 деветоцифрен број, а број $\overline{*******B}$ је осмоцифрен.

4) Ако је $B = 7$, онда је $A = 9$. Овај случај је немогућ, јер је лева страна једнакости $\overline{*******7} \cdot 7$ дељива са 7, а број 999999999 није дељив са 7.

5) Остаје могућност да је $B = 9$, а тада је $A = 1$ и $111111111 : 9 = 12345679$, тј. $12345679 \cdot 9 = 111111111$, што је решење ребуса.

Пример 4. Решити бројевни ребус $** + *** = ****$, ако се сваки број чита једнако и с лева у десно и с десна у лево.

Превођењем са језика звездица на језик слова, добија се ребус $\overline{AA} + \overline{BCB} = \overline{DEED}$. Како је $\overline{AA}$ највише 99, а $\overline{BCB}$ највише 999, то је $\overline{DEED}$ највише $99 + 999 = 1098$, па је $D = 1$ и $E = 0$. Ако је $B \leq 8$, онда је $\overline{AA} + \overline{BCB}$ највише $898 + 99 = 997$, што је немогуће, јер мора бити једнако $\overline{DEED} = 1001$. Значи, $B > 8$, тј. $B = 9$. Тада је очигледно $A = 2$ и $C = 7$, па се ради о сабирању $22 + 979 = 1001$. У решавању овог ребуса коришћен је **метод неједнакости**, јер су кључни подаци добијени закључивањем о највећој могућој вредности.

Пример 5. $\overline{1ABC} + \overline{CBA1} = \overline{BBDD}$

Ако дати ребус преведемо на језик непознатих, онда ребус решавамо **методом једначина**. Ради се о сабирању $1000 + 100\,A + 10\,B + C + 1000\,C + 100\,B + 10\,A + 1 = 1000\,B + 100\,B + 10\,D + D$. После сређивања добијамо следећу једнакост: $1001 + 110\,A + 110\,B + 1001\,C = 1100\,B + 11\,D$. Очигледно је и лева и десна страна једнакости дељива са 11, па се дељењем са 11 добија $91 + 10\,A + 10\,B + 91\,C = 100\,B + D$.

Даљим сређивањем добија се $90+10A+90C+C+1 = 90B+D$. Одавде је јасно да је $D = C+1$, па се дељењем са 10 добија $9+A+9C = 9B$. Одавде је очигледно, због дељивости са 9, A једнако 0 или 9.

Ако је $A = 0$, онда је $B = C+1 = D$, што је немогуће, јер су цифре B и D по услову задатка различите. Дакле, $A = 9$, па је $B = C+2$.

Како је $C \neq 0$, то добијамо следећа решења:

1) $C = 1$, $B = 3$, $D = 2$, $A = 9$ $(1931 + 1391 = 3322)$
2) $C = 2$, $B = 4$, $D = 3$, $A = 9$ $(1942 + 2491 = 4433)$
3) $C = 3$, $B = 5$, $D = 4$, $A = 9$ $(1953 + 3591 = 5544)$
4) $C = 4$, $B = 6$, $D = 5$, $A = 9$ $(1964 + 4691 = 6655)$
5) $C = 5$, $B = 7$, $D = 6$, $A = 9$ $(1975 + 5791 = 7766)$
6) $C = 6$, $B = 8$, $D = 7$, $A = 9$ $(1986 + 6891 = 8877)$

Наведени ребус може се решити и непосредним закључивањем. Посматрајући сабирање на месту хиљада закључује се да је $1+C < 10$. То значи да је на месту јединица $C+1 = D$. Даље, сабирањем на месту десетица добија се $A+B = 10+D$, сабирањем на месту стотина да је $A+B+1 = 10+B$ и сабирањем на месту хиљада да је $1+C+1 = B$. Из претпоследње једнакости је $A = 9$, $B = C+2$ и $D = C+1$, па смо добили релације као и методом једначина.

Пример 6. $*2* \cdot 45 = (**)^2$

Како је број $(**)^2$ потпун квадрат и како је дељив са 45, то је он дељив са 9 и са 5. Значи да број $*2*$ мора бити облика $5k^2$. Дакле, $120 \leq *2* = 5k^2 \leq 925$, па је $24 \leq k^2 \leq 185$. Значи да је $5 \leq k \leq 13$. Тада је $*2* = 5k^2 \in \{125, 180, 245, 320, 405, 500, 605, 720, 845\}$. Очигледно је да условима задатка одговарају само бројеви 125, 320 и 720. Решење је само $125 \cdot 45 = 75^2$, јер је $320 \cdot 45 = 120^2$ и $720 \cdot 45 = 180^2$ (бројеви 120 и 180 су троцифрени).

Овај задатак је пример за комбиновани метод решавања бројевних ребуса, јер су коришћени **метод дељивости, метод неједнакости и метод разликовања случајева**.

Наведени примери илуструју неке од метода решавања бројевних ребуса. Који ребус се којом методом решава није могуће препоручити. Осећај за то се стиче увежбавањем, при чему је најгори метод несистематично погађање, а најбољи сваки који број могућности своди на минималан. Најчешће се бројевни ребуси могу решити на више начина - применом разних метода. Најважније је да се ребус реши и да при том обухватимо сва решења (уколико има више решења).

Нашим младим читаоцима за увежбавање решавања бројевних ребуса препоручујемо самосталан рад на дешифровању следећих ребуса.

Задаци:

1. $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 1998.$
2. $\overline{ABC} + \overline{ACB} + \overline{BAC} + \overline{BCA} + \overline{CAB} + \overline{CBA} = 1998.$
3. $1 * \cdot * * = (2*)^2.$
4. Дешифруј сабирање $* * * * + * * * + * * = 1998$, ако се сви сабирци читају с лева у десно једнако као и с десна у лево.
5. Цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 распоредити уместо звездица тако да се свака од цифара употреби само једном и да су тачне једнакости: $* + * = * - * = * \cdot * = ** : *.$
6. $\overline{\text{ЈАБУКЕ}} + \overline{\text{КРУШКЕ}} = \overline{\text{ПРОБАЈ}}.$

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија во бројот XXXII 6