Проф. СТЈЕПАН МИНТАКОВИЌ

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ОД АЛГЕБРА

СО УПАТСТВА И РЕЗУЛТАТИ

III ДЕЛ

ВТОРО НЕИЗМЕНЕТО ИЗДАНИЕ

ИЗДАВАЧКО ПРЕТПРИЈАТИЕ
„ПРОСВЕТНО ДЕЛО"
СКОПЈЕ, 1969

Наслов на оригиналот:
Prof. S. Mintaković
ZBIRKA ZADATAKA IZ ALGEBRE
sa uputama i rezultatima

III dio

Zavod za izdavanje udžbenika
Sarajevo, 1967

Рецензенти:
Др Махмут Бајрактаревиќ, професор на Природно-математичкиот факултет во Сараево

Мустафа Дрљевиќ, професор на Вишата педагошка школа во Сараево
Радомир Живковиќ, предавач на Природно-математичкиот факултет во Сареаво

Ова издание го препорачаа:
Магдалена Пасху, проф. на Вишата педагошка академија во Скопје
Горица Илиева, професор на средно училиште

Со решение на Републичкиот секретаријат за образование, наука и култура број 06-3417 од 5. III. 1969 година се одобрува употребата на оваа книга

ПРЕДГОВОР КОН I ИЗДАНИЕ НА МАКЕДОНСКИ ЈАЗИК

Оваа збирка задачи од алгебра е превод на Збирката што е досега излезена во четири изданија за српскохрватското јазично подрачје во издание на Заводот за издавање уџебници во Сараево.

Збирката содржи материјали од алгебра за трети и четврти клас гимназија и другите училишта од втор степен.

Задачите се распоредени во одделни параграфи методски правилно, така што во почетокот се наоѓаат поедноставни задачи од кои постепено се преминува кон сè потешки и посложени, со тоа што на крајот од параграфот се наоѓаат задачи што им се наменети на оние ученици кои ја изучуваат математиката подлабоко и посолидно.

Речиси за сите задачи на крајот од книгата се дадени резултатите, а за посложените и упатства. Не ги дадовме резултатите само на незначителен број задачи. Тоа се оние чие решение може да се најде без тешкотии, користејќи ги резултатите и упатствата за слични задачи.

Пожелно е оваа збирка да придонесе за наставата по алгебра на македонското јазично подрачје онолку колку што придонесува и на српскохрватското јазично подрачје, за кое сведочат нејзините четири досегашни изданија. Се надеваме дека сесрдно ќе ја прифатат наставниците и учениците во СР Македонија, така што таа да даде свој придонес за натамошното усовршување на наставата по математика во оваа Република.

Авторот

ЗАДАЧИ

§ I. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Реши ги равенкиве:

1. а) $2^x = 8$ б) $5^x = 25$ в) $\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

г) $(-3)^x + 27 = 0$ д) $2^{-x} = 16$ ѓ) $2^{-x} = \frac{1}{16}$

е) $(-2)^{-x} = \frac{1}{4}$

2. а) $3^x = 1$ б) $4^{-x} = 1$

в) $1 = \left(\frac{7}{8}\right)^x$ г) $a^x = 1$

3. а) $2^{-x} = 4$ б) $10^{-x} = 1\,000$

в) $8 = \frac{1}{2^x}$ г) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

4. а) $2^{x+3} = 16$ б) $3^{1-2x} = 27$

в) $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2x}$ г) $5^{\frac{x+1}{3}} = 25$

5. а) $8^x = 32$ б) $9^{3x} = 27$

в) $25^{x+3} = 125$ г) $\left(\frac{9}{16}\right)^{5-2x} = \frac{27}{64}$

6. а) $2^{x-1} = \frac{1}{8}$ б) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$

в) $1{,}5^{3x} = \frac{16}{81}$ г) $3^{3x-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{7-6x}$

7. а) $0{,}25^x = 4^{3x-2}$ б) $8^{2x+1} = 0{,}125^{4-3x}$

в) $0{,}7^{\frac{x}{5}} = 0{,}2401$ г) $2^{\frac{x+1}{2}} = 0{,}5^{\frac{1-4x}{7}}$

8. а) $4 \cdot 2^x = 16$ б) $100 \cdot 10^{2x-1} = 1\,000^{\frac{3}{4}}$

в) $4^{3x+2} = 64 \cdot 2^{2x-4}$ г) $0{,}25^5 = 4^{\frac{5x-3}{3}} \cdot 0{,}125^{6x}$

9. а) $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$ б) $19^{\frac{5}{x-3}} = \sqrt[x-6]{19^2}$

в) $\sqrt{2^{x+1}} = \sqrt[7]{0{,}5^{1-4x}}$ г) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5x+1}{7}}$

10. а) $\left[\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^3}\right]^x = \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^{2x-3}}$

б) $\sqrt[x-7]{32^{x+5}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

в) $\sqrt{5^{5x+7}} \cdot \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{3x+10} = 25\sqrt{5^{5x}}$

г) $\sqrt{3^{3-4x}} \cdot \sqrt[5]{3^{6-3x}} = 3^{-4,5}$

11. а) $a^x \cdot a^{x+6} = 1$ б) $(a^{2x+6})^{6x} = (a^{3x-1})^{4x+17}$

в) $(a^{3x+1})^2 \cdot a^{2x+3} = (a^{7x-1})^2 \cdot a^{3x-10}$

г) $a^{2x-3} : a^{x+7} = 1$

12. а) $\sqrt[3]{a^x} = \sqrt{a^{x-2}}$ б) $\sqrt[x]{a^3} = \sqrt[x-1]{a^2}$

в) $\sqrt[3]{a^{4x}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ г) $\sqrt[9]{a^{4x+5}} = \sqrt[5]{a^{9-4x}}$

13. а) $\sqrt{a^{x+1}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+2}} \cdot \sqrt[4]{a^{2x-1}} = 1$

б) $\sqrt{a^{3-4x}} : \sqrt[5]{a^{6-7x}} = a^{-4,5}$

в) $a^{1-x} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[5]{a^{1-3x}} = 1$

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 6$

14. а) $8^x = 7^{x-1} + 7^x$ б) $7^{x+1} - 2^{x-1} = 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^{x+}$

в) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$

г) $3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 202{,}5 \cdot 2^x$

15. а) $9 \cdot 5^x + 8 \cdot 5^{x+1} = 1\,225$

б) $a^{2x-1} + a^{2x+1} = a^3(1 + a^2)$

в) $5^{3x+1} - 9 \cdot 5^{3x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$

г) $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} - 4 = 0$

16. а) $4^{x+3} + 2^{x+2} = 36 \cdot 2^x$

б) $3 \cdot 4^x - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$

в) $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$

г) $9^{2x-3} - 9^{2x-2} = 3^{3x-1} - 3^{3x+1}$

§ 2. ЛОГАРИТМИРАЊЕ

Да земеме дека во релацијата $a^b = c$ која поврзува три величини — a, b и c — по две се познати, па потоа да ги напишеме со помошта на математичките симболи сметковните операции што ни ја даваат третата непозната величина и да ја определиме таа величина во овие случаи:

17. а) $a=2,\ b=3$ б) $b=3,\ c=8$ в) $a=2,\ c=8$

г) $a=4,\ b=2$ д) $b=2,\ c=16$ ѓ) $a=4,\ c=16$

18. а) $a=\frac{1}{2},\ b=4$ б) $b=4,\ c=\frac{1}{16}$ в) $a=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{16}$

Пресметај:

19. а) $\log_3 81$ б) $\log_5 25$ в) $\log_6 216$

20. а) $\log_2 \frac{1}{2}$ б) $\log_3 \frac{1}{9}$ в) $\log_5 \frac{1}{125}$

21. а) $\log_2 \sqrt{2}$ б) $\log_2 \sqrt{8}$ в) $\log_{10} \sqrt{1\,000}$

22. а) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ б) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ в) $\log_{\frac{1}{4}} 64$

23. а) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ б) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$ в) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

24. а) $\log_4 8$ б) $\log_{16} 32$ в) $\log_{27} 81$

25. а) $\log_{\frac{8}{27}} \frac{4}{9}$ б) $\log_{\frac{9}{4}} \frac{8}{27}$ в) $\log_9 \frac{1}{\sqrt{27}}$

26. а) $\log_{\frac{3}{5}}\frac{25}{9}$ б) $\log_{\frac{6}{11}}\frac{121}{36}$ в) $\log_{\frac{5}{4}}\frac{16}{25}$

27. а) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$ б) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{4}$ в) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{27}$

28. а) $\log_3 3$ б) $\log_7 7$ в) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}$ г) $\log_a a$

29. Најди ги логаритмите при основа 2 на броевите: 2, 4, 8, 64, 128.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \frac{1}{512}, \sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{64}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 1.$$

30. Најди гн логаритмите при основа 3 на броевите: 3, 9, 81, 64 3^7, 1,

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \frac{1}{243}, \sqrt{3}, \sqrt{27}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{81}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

31. Најди ги логаритмите при основа $\frac{1}{2}$ на броевите: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}$,

$$4, 16, 64, \sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{16}}, 1.$$

32. Најди ги логаритмите при основа $\frac{1}{3}$ на броевите: 3, 27, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{81}$.

$$\sqrt{3}, \sqrt[5]{3}, \sqrt{81}, \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{3^8}}.$$

33. Најди ги логаритмите при основа $\frac{5}{3}$ на броевите: $\frac{3}{5}$, $2\frac{7}{9}$, 1, $\frac{27}{125}$.

34. Најди ги логаритмите при основа 0,2 на броевите: 0,2; 0,04; 5; 125; $\sqrt{5}$.

35. а) $\log_5 5^3$ б) $\log_7 7^4$ в) $\log_8 8^{12}$ г) $\log^7 7^a$

36. а) $\log_a a^n$ б) $\log_a a^{m+n}$ в) $\log_a a^{m-n}$ г) $\log_a a^{\frac{1}{n}}$

37. а) $\log_5 1$ б) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ в) $\log_{\frac{3}{7}} 1$ г) $\log_a 1$

Најди го x во задачиве:

38. а) $\log_x 8=3$ б) $\log_x \frac{1}{9} = 2$

в) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ г) $\log_x \frac{1}{64} = -3$

39. а) $\log_x \frac{8}{27} = 3$ б) $\log_x \frac{25}{9} = -2$

в) $\log_x 3 = 1$ г) $\log_x \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}$

40. а) $\log_3 x = 4$ б) $\log_2 x = -1$

в) $\log_2 x = \frac{3}{2}$ г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$

41. а) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ б) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$

в) $\log_{\frac{3}{5}} x = -2$ г) $\log_3 x = 1$

42. Докажи дека за два позитивни броја M и N важи:

а) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ б) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

в) $\log_a M^p = p \log_a M$ г) $\log_a \sqrt[r]{M} = \frac{1}{r} \log_a M$

Примени ги формулите од претходната задача при логаритамска основа 10 на овие изрази:

43. а) $5ab$ б) $3x^2$ в) $2a(a+b)$ г) $a^2 - b^2$

44. а) $5a - 10b$ б) $5ax + 5ab$ в) $a^3 - ab^2$ г) $7x^2 - 28y^2$

45. а) $\frac{ab}{c}$ б) $\frac{a}{bc}$ в) $\frac{ab}{cd}$ г) $\frac{abc}{xyz}$

46. а) $\frac{5a}{x+y}$ б) $\frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2}$ в) $\frac{a + a^2}{b^3 - b}$ г) $\frac{1}{ab}$

47. а) a^3b^4 б) $\frac{15a^4}{7cd^3}$ в) $\frac{a(a+b)^2}{5c^3(x+y)^3}$ г) $\left(\frac{ab}{c^2}\right)^2$

48. а) $\frac{a}{b}\left(\frac{x}{y}\right)^2$ б) $\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{c}{d}\right)^3$ в) $\frac{1}{(ab)^2}$ г) $\frac{1}{(ab)^2(c^2d)^3}$

49. а) $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}$ б) $\frac{\sqrt{ab^3}}{b\sqrt[4]{d^3}}$ в) $5x\sqrt[3]{a^2(a-b)}$ г) $\frac{1}{a\sqrt[4]{b}}$

50. а) $\frac{8a}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^4}}$ б) $\frac{\sqrt{ab}\sqrt[3]{cd^4}}{\sqrt{a-b}}$

в) $\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$ г) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{5\sqrt[3]{6}}}$

51. а) $\sqrt{\frac{2a\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{c}}}$ б) $a\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{(a+b)\sqrt{c}}}$

в) $\sqrt{\frac{x\sqrt[3]{y}}{a\sqrt{bc}}}$ г) $\sqrt{\frac{ab^3\sqrt{x^3}}{(a+b)^3}}$

52. а) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{V}}{2\pi b}}$ б) $\sqrt{\frac{2\pi\sqrt{P}}{3a^2\sqrt[3]{b}}}$

в) $\frac{0{,}8^{0{,}5}\sqrt[3]{a+b}}{1{,}47^3\pi}$ г) $\frac{4\cdot 0{,}00875^3\pi}{5a^2b\sqrt[3]{cd}}$

Најди го изразот чиј логаритам може да се напише во облик:

53. а) $\log a+\log b-\log c$ б) $\log x-\log y-\log z$

в) $\log 8+\log a-(\log 7+\log b)$ г) $\log a-(\log b+\log c)$

54. а) $\log a+2\log b-\log\pi$ б) $3\log x-2\log y-\log z$

в) $\log(a+b)+\log(a-b)-(\log a+\log b)$

г) $\log a+2\log b-3\log c-\log d$

55. а) $3\log a-2\log(a+b)-[\log b+4\log(a-b)]$

б) $\log a+3\log b-[\log(a+b)+\log(a-b)]$

в) $2\log 5{,}3+\log a-\log 2-\log\pi-3\log(a+2)$

г) $\log 45{,}3+\log a-(\log 17-\log\pi)$

56. а) $\log a+\frac{1}{2}\log b-\frac{1}{3}\log c$ б) $-2\log a-\frac{1}{3}\log b$

в) $-\frac{1}{2}\log(a+b)-\frac{2}{3}\log x$

г) $\frac{1}{2}\log a+\frac{2}{3}\log b-5\log c-\frac{1}{4}\log d$

57. а) $\frac{1}{2}\log a-\left(2\log b+\frac{1}{3}\log c\right)$ б) $\frac{3}{5}\log a-\left(\log b+\frac{1}{3}\log c\right)$

в) $\frac{2}{3}\log(a+b)-\frac{1}{2}(\log a+\log b)$

г) $-2(\log x+\log y)-\frac{2}{3}(\log a+\log b)$

58. а) $\frac{\log a}{3}+\frac{3}{5}(\log b+7\log c)$ б) $\frac{3\log(a+b)}{4}-\frac{5\log(a-b)}{3}$

в) $\log(a+b)-\frac{2}{3}\left(2\log a+\frac{3}{4}\log b\right)$

г) $n\log a+\frac{1}{m}\log b-\frac{r}{s}\log(a+b)$

59. а) $\frac{1}{3}[\log a-5\log(a+b)]-\frac{1}{2}[\log(a+b)+3\log b]$

б) $-\left(\log a+\log b+\frac{1}{3}\log c\right)$

в) $-\left[\frac{2}{3}\log a+\frac{1}{2}\log(a+b)+5\log c\right]$

г) $\log(a+b)-\log(a-b)+\frac{1}{n}\left(\frac{r}{s}\log c-m\log d\right)$

60. Изрази го:

а) log 6 со помош на log 2 и log 3

б) log 21 со помошта на log 7 и log 3 в) $\log\frac{5}{3}$ со помошта на log 5 и log 3

Помеѓу кои цели броеви лежат логаритмите при основа 10 на броевите:

61. а) 7 б) 15 в) 77,8 г) 3,185

62. а) 156,1 б) 553,17 в) 10,517 г) 1918

63. а) 3778,9 б) 507918 в) $3 \cdot 10^8$ г) $14 \cdot 10^{23}$

64. а) 0,8 б) 0,309 в) 0,033 г) 0,0919

65. а) 0,001 б) 0,007 в) 0,004005 г) $3 \cdot 10^{-8}$

Со помошта на логаритамска таблица најди ги логаритмите на броевите

66. а) 58 б) 713

67. а) 1013 б) 2817

68. а) 37000 б) 48200

69. а) 414000 б) 5370000

70. а) 56783 б) 40887

71. а) 41345 б) 330550

72. а) 43,5 б) 58,77

73. а) 7,919 б) 2,0058

74. а) 0,19 б) 0,717

75. а) 0,0508 б) 0,00308

Најди ги броевите чии логаритми се:

76. а) 3,62014 б) 3,66229

77. а) 4,85150 б) 4,92002

78. а) 2,74060 б) 2,71725

79. а) 1,58092 б) 1,27370

80. а) 0,85449—1 б) 0,88133—2 в) 0,37051—2 г) 0,18099—4

81. а) 3,17519 б) 4,09518

82. а) 0,05618 б) 0,50077

83. а) 0,55611—1 б) 0,77088—2 в) 0,13000—2 г) 0,57—3

84. а) —0,73911 б) —1,05617 в) —2,30117 г) —1,50571

Пресметај со помошта на логаритми:

85. а) $1058 \cdot 731$ б) $73{,}5 \cdot 288{,}09$ в) $666{,}5 \cdot 34{,}177 \cdot 5{,}17$

86. а) $519{,}3 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}05593$ б) $56{,}7 \cdot 7{,}3051 \cdot 0{,}0004059$

87. а) $\frac{573}{419}$ б) $4713 : 60785$ в) $\frac{378 \cdot 4809}{10777}$

88. а) $\frac{0{,}917 \cdot 37{,}5}{4051}$ б) $\frac{4051}{0{,}917 \cdot 37{,}5}$

89. а) $\frac{28{,}5 \cdot 0{,}0193}{0{,}457 \cdot 3{,}507}$ б) $\frac{1}{0{,}49571 \cdot 33{,}171}$ в) $\frac{0{,}74931 \cdot 56{,}78}{73{,}19 \cdot 0{,}09773}$

90. а) $2{,}375^5$ б) $0{,}4871^4$ в) $5{,}37 \cdot 2085^4$

91. а) $\sqrt[4]{7853{,}7}$ б) $\sqrt[5]{5{,}61}$ б) $\sqrt[4]{0{,}0178}$

92. а) $4{,}5618^2 \cdot \sqrt[4]{1{,}583}$ б) $\sqrt[5]{78{,}08 \cdot 0{,}0369}$

в) $\dfrac{0{,}0587}{\sqrt[4]{48{,}175}}$ г) $\dfrac{15{,}178\sqrt{3{,}058}}{4{,}008^3}$

93. а) $\sqrt[5]{78{,}81^2}$ б) $\sqrt{\left(\dfrac{0{,}88}{73}\right)^3}$ **94.** а) $\sqrt[4]{7{,}859}$ б) $\sqrt[4]{7{,}859^3}$

95. а) $\dfrac{1{,}562^3\sqrt[5]{631}\ \sqrt[7]{56}}{6{,}65^5 \cdot 0{,}087}$ б) $(3{,}56\sqrt[5]{9})^3$ в) $\sqrt[5]{4{,}108\sqrt{17}}$

96. а) $\sqrt[7]{\dfrac{3{,}19^3}{0{,}894^2\sqrt[3]{0{,}0357}}\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}}$ б) $\sqrt[5]{\dfrac{1{,}5087 \cdot 0{,}08314^3}{\sqrt{0{,}496^3}}}$

97. а) $\sqrt[3]{\dfrac{73{,}271^2}{15{,}8\sqrt{88 \cdot 0{,}47^3}}}$ б) $\dfrac{\sqrt{4\sqrt[3]{0{,}108}}}{0{,}1938^3\ \sqrt{56{,}18}}$ в) $\dfrac{1}{0{,}3178^3\ \sqrt{0{,}56078^2}}$

98. За кои вредности на x постојат: а) $\log(x+5)$ б) $\log(3-5x)$ б) $\log(x^2-x-6)$ г) $\log(x-2x^2)^2$?

99. За кои вредности на x е:

а) $\log(x+3) \geqslant 0$ б) $\log(2x-5) \leqslant 0$

в) $\log(x^2-5x+7) \geqslant 0$ г) $\log(x^2-4x+4) < 0$?

100. За кои вредности на x е: а) $\log_2 x \lesseqgtr \log_3 x$

б) $\log_3(x-3) < \log_7(x-3)$ в) $\log_a(x^2-1) < \log_b(x^2-1)$

$1 < a < b$ д) $\log_a(x^2-8x+13) \gtreqless \log_b(x^2-8x+13)$

$1 < a < b$?

101. Набљудувај ги логаритмите на броевите:

а) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 2^7, 2^{10}, 2^{100},.. при основа 2

б) 1, 10, 100, 1000, 10^5, 10^6, 10^9, 10^{12},... при основа 10.

Врз основа на овие два примера заклучи што станува со $\log_a N$ ако е $a > 1$, а $N \to \infty$ (N се стреми кон безконечност).

102. Набљудувај ги логаритмите на броевите:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^{10}}, \frac{1}{2^{100}}, \ldots$ при основа 2.

б) $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10^4}, \frac{1}{10^6}, \frac{1}{10^{10}}, \frac{1}{10^{100}}, \ldots$ при основа 10.

Врз основа на овие два примера заклучи што станува со $\log_a N$ ако е $a > 1$, а $N \to 0$.

103. Може ли да се земе 1 како основа на логаритам?

104. Зошто не зборуваме за логаритми на негативните броеви?

105. Побарај ги логаритмите на броевите:

а) $1, 2, 4, 2^3, 2^5, 2^{10}, 2^{100}, \ldots$ при основа $\frac{1}{2}$,

б) $1, 10, 100, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{100}, \ldots$ при основа $\frac{1}{10}$.

Врз основа на овие и слични примери заклучи што станува со $\log_a N$ ако е $0 < a < 1$ и $N \to \infty$.

106. Побарај ги логаритмите на броевите:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^{10}}, \frac{1}{2^{100}}, \ldots$ при основа $\frac{1}{2}$ и

б) $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^6}, \frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^{100}}, \ldots$ при основа $\frac{1}{10}$.

Врз основа на овие и слични примери заклучи што станува со $\log_a N$ ако е $0 < a < 1$ и $N \to 0$.

107. Логаритмите на кои прости броеви треба да ги познаваме за да можеме да определиме:

а) $\log 12$ б) $\log \frac{25}{8}$ в) $\log 38$ г) $\log \sqrt[3]{\frac{7}{25}}$?

108. Дадени се $\log 2 = 0{,}30103$, $\log 3 = 0{,}47712$ и $\log 5 = 0{,}69897$. Најди:

а) $\log 6$ б) $\log 10$ в) $\log 15$ г) $\log 18$

д) $\log 24$ ѓ) $\log 60$ е) $\log 0{,}6$ ж) $\log \sqrt{0{,}3}$

з) $\log \frac{2}{15}$ ѕ) $\log 0{,}003$

109. Дадени се log 2 и log 7=0,84510. Најди:

а) log 14 б) log 28 в) log 49 г) $\log \sqrt{\frac{7}{2}}$

110. Кога знаеме дека е log 2=0,30103, најди ги логаритмите на броевите:

а) 20 б) 200 в) 0,2 г) 0,002

111. Кога знаеме дека е log 3=0,47712, најди ги логаритмите на броевите

а) 30 б) 30 000 в) 0,3 г) 0,00003

112. Кога ги знаеме log 2 и log 3, најди ги логаритмите на броевите:

а) 600 б) 0,06 в) 0,012

113. Кога знаеме дека е log 312=2,49415, најди ги непосредно логаритмите на броевите:

а) 3 120 б) $312 \cdot 10^4$ в) 3,12 г) 0,312

114. Знаејќи дека е log 7 458=3,87262, најди ги непосредно логаритмите на брревите:

а) 74,58 б) 7,458 в) 745,8 г) $7\,458^2$

д) 0,7458 ѓ) 0,07458 е) 0,0007458

115. Даден е log 15 560=4,19201 и log 15 570=4,19229. Пресметај ги логаритмите на броевите:

а) 15 561 б) 15 562 в) 15 565 г) 15 568 д) 15 569

ако се претпостави дека промените на логаритмите се правопропорционални на промените на самиот број.

116. Ако е log 5 106=3,70808 и log 5 107=3,70817, колкави ќе бидат логаритмите на броевите:

а) 5 106,1 б) 5 106,3 в) 5 106,7 г) 5 106,9?

117. Ако е log 6,027=0,78010, а log 6,028=0,78017, најди ги логаритмите на броевите:

а) 6,0271 б) 6,0274 в) 6,0277 г) 6,0279

118. Најди ја вредноста на изразите: а) $\frac{4r^3\pi}{3}$ за $r=0{,}519$

б) $a^2 \sqrt[3]{\frac{b}{c^2}}$ за $a=0{,}109$ $b=73{,}15$ $c=4{,}0584$

119. а) $\sqrt[3]{9-\sqrt[5]{8}}$ б) $\sqrt[6]{7{,}982+\sqrt{5817}}$

в) $1{,}293^6+\sqrt[8]{8{,}133}$ г) $\sqrt[3]{11{,}17^2-\sqrt[3]{27{,}19}}$

120. а) $\sqrt[5]{\dfrac{43-5\sqrt[3]{170{,}8}}{\sqrt{173}}}$ б) $\sqrt[4]{\dfrac{12+7\sqrt[5]{0{,}193}}{\sqrt[3]{15}}}$

121. Во правоаголен триаголник дадена е хипотенуза c и едната катета a; пресметај ја другата катета b ако е:

а) $c=53{,}17$ cm, $a=30{,}8$ cm б) $a=0{,}918$ cm, $c=1{,}017$ cm.

122. Страната на рамностран триаголник е a. Најди ја неговата површина P ако е:

а) $a=5{,}09$ m б) $a=0{,}568$ m.

123. Најди ја страната на рамностраниот триаголник чија површина P изнесува 517 m^2.

124. Најди ја површината P на рамнокракиот триаголник чија основа е a и крак b, ако е: $a=19{,}6$ m, $b=17{,}3$ m.

125. Најди ја површината P на триаголникот со страни a, b и c, ако е: $a=5{,}8$ cm, $b=4{,}9$ cm $c=3{,}7$ cm.

126. Пресметај го радиусот на кругот чија површина P е рамна на: 106,78 cm^2.

127. Определи ги површината и зафатнината на топката ако радиусот е: 5,18 m.

128. Пресметај го радиусот на топката ако нејзината зафатнина е: 582,2 cm^3.

129. Колкава е тежината на валјакот чиј полупречник на базата е r, висината h, а специфичната тежината на материјалот s, ако е: $h=8{,}7$ cm, $r=3{,}2$ cm, $s=0{,}75$ (дрво)?

130. Тежината на една коцка изнесува Q грама, а специфичната тежина на материјата од која е градена е s. Најди го работ на коцката, ако е:

$Q=231{,}95$ g, $s=2{,}74$.

131. Тежината на кружен валјак е Q, висината му е h, а специфичната тежина на материјата од која е граден е s. Најди го полупречникот на основата на валјакот ако е: $Q=209{,}91$ g, $h=8{,}7$ cm, $s=0{,}75$.

132. а) Колку е тежок бакарен електричен проводник долг 1,75 km, ако неговиот полупречник има напречен пресек $r=2{,}7$ mm, а специфичната тежина му е 9?

б) Прав конус има изводница $s=4{,}93$ m, а радиус на базата $r=$ $=1{,}55$ m; колкав е неговиот волумен?

133. Волуменот на рамностран конус изнесува 25,074 dm^3. Пресметај го радиусот на базата.

134. а) $\log_n m \cdot \log_m n = 1$, каде m и n се позитивни броеви и различни од 1. Докажи!

б) $\log_c b \cdot \log_a c \cdot \log_b a = 1$, каде се a, b и c позитивни броеви различни од 1. Докажи!

в) Од $y=10^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$ следува $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$, ако се логаритмите декадни. Докажи!

г) Ако е $a=bc$, тогаш е $\frac{1}{\log_a k}=\frac{1}{\log_b k}+\frac{1}{\log_c k}$. Докажи!

д) Во правоаголен триаголник висината v ја дели хипотенузата c на отсечки p и q. Докажи дека е $\frac{1}{\log_p v}+\frac{1}{\log_q v}=2$!

§ 3. ГРАФИЧКО ПРЕСТАВУВАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ a^x и $\log_a x$

135. Графички претстави ги функциите:

а) $y=2^x$ б) $y=3^x$ в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

136. Претстави ги во ист координатен систем функциите а) и в) од претходните задачи и спореди ги.

137. Претстави ги во ист кординатен систем:

$$y=10^x \text{ и } y=\frac{1}{10^x}.$$

138. Претстави ја графички функцијата $y=\log_2 x$.

139. Претстави ги во ист координатен систем функциите:

$$y=2^x \text{ и } y=\log_2 x.$$

Како лежат обата графикона во однос на правата $y=x$?

140. Прет тави ги во ист координатен систем функциите:

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x \text{ и } y=\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

141. Претстави ги во ист координатен систем функциите:

$$y=\log_2 x \text{ и } y=\log_3 x,$$

потоа спореди ги вредностите на логаритмите при основа 2 и основа 3 кога е:

а) $x>1$ б) $0<x<1$.

142. Претстави ги во ист координатен систем функциите:

$$y=\log x \text{ и } y=10^x.$$

Како лежат овие графикони во однос на правата $y=x$?

143. Претстави ги функциите:

$$y=\log x \text{ и } y=\log_{\frac{1}{10}} x$$

во ист координатен систем и изврши споредување како во задачата 141.

144. За кои вредности на x постојат: а) 3^{x-5}

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3+2x}$ в) $10^{\sqrt{x}}$?

145. За кои вредности на x е: а) $2^x \gtreqless 3^x$

б) $4^{x+3} > 7^{x+3}$ в) $a^{2x-4} \gtreqless b^{2x-4}$, $1 < a < b$?

§ 4. ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

Реши ги равенките:

146. а) $\log x = 2$ б) $\log x = \frac{1}{3}$ в) $\log x = -3$ г) $\log x = 0$

д) $\log_3 x = 2$ ѓ) $\log_3 x = -2$ е) $\log_4 \log_3 x = 0$

ж) $\log_2 \log_3 x = 1$ з) $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$ ѕ) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 1$

147. а) $\log (5x) + \log (2x + 3) = 1 + 2 \log (3 - x)$

б) $\log (x + 2) - \log (x - 2) = 2 - \log 4$

в) $\log (x + 2) - \log (x - 2) = 0{,}47712$

г) $\log (3 - x) - \log (x + 2) = 1{,}30103$

148. а) $\log x + \log (x + 1) = 2 \log (1 - x)$ б) $7 \log x^2 - 4 \log x^3 = \log 25$

в) $\log (16x) - \log (2x) + \log (3x) = \log 9 + \log 4 - \log 6$

г) $\log (x + 7) - \log(x - 5) = 0{,}47712$

д) $\log (3x) + \log (4x - 7) = \log (11x) + 0{,}95424$

ѓ) $\log (6x) - \log 15 = \log (19x + 7) - 2$

е) $\log \sqrt{x + 3} + \log \sqrt{4x - 3} = \log 5$

ж) $\log \sqrt{x + 3} + \log \sqrt{2x + 23} = 1$

149. а) $5 \log x + \frac{2}{\log x} = 7$ б) $\frac{1}{2 + \log x} + \frac{2}{4 - \log x} = 1$

§ 5. СИСТЕМИ ОД КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Реши ги системите:

150. а) $y^2 = x, \ x = 2y + 3$ б) $y^2 = 4x, \ x - 2y + 3 = 0$

в) $y^2 = 12x, \ 2x - y = 0$ г) $y^2 = 2x, \ x - 2y + 2 = 0$

151. а) $y^2 = 3x, \ x = 3$ б) $y^2 - 16x = 0, \ x = 1$

в) $y^2 = \frac{1}{2}x, \ x = 0$ г) $2y^2 - 3x = 0, \ x - 6 = 0$

152. а) $6x - y^2 = 0, \ x - 2y + 6 = 0$

б) $8x - y^2 = 0, \ y - x - 2 = 0$

в) $4y^2 = 9x, \ 3x - 4y + 3 = 0$

г) $3y^2 - 16x = 0, \ 4x + 9y + 24 = 0$

153. а) $x^2 + y^2 = 2, \ x = 1$ б) $x^2 + y^2 = 25, \ x + 3 = 0$

в) $x^2 + y^2 = 16, \ y = 0$ г) $(x + 5)^2 + y^2 = 10, \ y = 1$

154. а) $x^2 + y^2 = 5, \ x = 3y - 5$

б) $x^2 + y^2 = 17, \ 3x + 5y - 17 = 0$

в) $(x + 5)^2 + y^2 - 25 = 0, \ x - y + 6 = 0$

г) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10, \ x + 2y = 0$

155. а) $x^2 + 4y^2 = 100, \ x - 8 = 0$

б) $5y - 9 = 0, \ 9x^2 + 25y^2 = 225$

в) $x^2 + 4y^2 = 36, \ x = 0$ г) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{12} = 1, \ y = 3.$

156. а) $x^2+2y^2=36,\ x+2y-6=0$

б) $x^2+9y^2=225,\ x+9y-45=0$

в) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1,\ x-6y+10=0$

г) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{4y^2}{25}=1,\ y=\dfrac{7}{4}\ x+\dfrac{25}{2}$

157. а) $x^2-4y^2=36,\ x=10$

б) $x^2-4y^2=36,\ x=6$

в) $x^2-4y^2=36,\ x=2$

г) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{2}=1,\ x-9=0$

д) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1,\ y-3=0$

158. а) $4x^2-y^2=36,\ y=x+3$

б) $x^2-3y^2=9,\ x+3y-3=0$

в) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\ y+3x=9$

г) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1,\ 4x-y-12=0$

159. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{64}=1,\ 2x-y-16=0$

160. а) $x^2+y^2-5=0,\ y+2x=5$

б) $x^2+y^2=26,\ 5x+y-26=0$

в) $(x-2)^2+y^2=20,\ x-2y+8=0$

г) $(x-3)^2+(y+1)^2-10=0,\ x+3y-10=0$

161. а) $5x^2+4y^2=180,\ x+y-10=0$

б) $x^2-y^2=9,\ 5x-4y-9=0$

в) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1,\ y-x+1=0$

г) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{3}=1,\ x+4y-8=0$

162. а) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,\ 3x - 4y - 2 = 0$

б) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \quad x - \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

в) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1, \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

г) $\frac{25}{4}x^2 + 25y^2 = \frac{25}{4}\cdot 25,\ 3x + 8y - 25 = 0$

163. а) $x + y = 7,\ x^2 - xy + y^2 = 19$

б) $x + y = 8,\ x^2 + xy + y^2 = 52$

в) $x - y = 1,\ x^2 + xy + y^2 = 61$

164. а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6},\ x + y = 5$

б) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12},\ y - x = 1$ в) $\frac{1}{xy} = 5,\ \frac{y}{x} = 20$

165. а) $(x-2)\,(y-1) = 1, \frac{x+5}{y} = 4$

б) $\frac{x-2}{y-3} = 1,\ (x-2)\,(y-3) = 1$

Реши ги системите од равенки:

166. а) $x^2 + y^2 = 2,\ y^2 = x$ б) $x^2 + y^2 = 20,\ y^2 = 8x$

в) $(x-2)^2 + y^2 = 4,\ y^2 = 2x$

г) $x^2 + y^2 + 10x - 75 = 0,\ y^2 = 12x$

167. а) $x^2+4y^2=100,\ y^2=\frac{8}{3}x$ б) $4x^2-3y^2=36,\ y^2=6x$

в) $\frac{x^2}{25}+\frac{4y^2}{25}=1,\ y^2=\frac{4}{3}x$

г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1,\ 10y^2-9x=0$

168. а) $x^2+y^2=8,\ (x-5)^2+y^2=13$

б) $x^2+y^2=10,\ (x-3)^2+(y-3)^2=16$

в) $x^2+y^2+8x-6y=0,\ x^2+y^2-12x+4y-10=0$

г) $(x+5)^2+(y+2)^2=10,\ (x-4)^2+(y-1)^2=40$

169. а) $x^2+y^2=25,\ 2x^2+9y^2=162$

б) $x^2+y^2=25,\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{12}=1$

в) $(x-9)^2+y^2=25,\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

170. а) $x^2+4y^2=100,\ x^2-2y^2=4$

б) $x^2+y^2-12x+11=0,\ \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$

в) $(x-3)^2+y^2=25,\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

г) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\ x^2-\frac{y^2}{3}=1$

---

171. Изрази го $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ како алгебарски збир од два корена.

($\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, каде се x и y позитивни рационални броеви).

Изрази ги на ист начин:

172. а) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$ б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

173. а) $\sqrt{9-\sqrt{56}}$ б) $\sqrt{9-\sqrt{80}}$ в) $\sqrt{6+\sqrt{11}}$

174. а) $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ б) $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ в) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$

г) $\sqrt{4a-2\sqrt{4a^2-9b^2}}$ д) $\sqrt{2a+3b+\sqrt{24ab}}$

175. Испитај под кој услов имаат двојно решение системите:

а) $y^2=2px,\ y=kx+n$ б) $x^2+y^2=r^2,\ y=kx+n$

в) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\quad y=kx+n$ г) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,\quad y=ky+n$

д) $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,\quad y=kx+n$

176. Определи го m под услов системот од равенки

$x^2-mx-y+m=0,\ 2x-y-2=0$

да има, а) реални различни решенија, б) двојно решение,

в) конјугирано комплексни решенија.

Резултатите објасни ги геометриски.

177. Определи го m под услов системот од равенки

$x^2+y^2=10,\ x-3y+m=0$ да има: а) реални различни решенија,

б) двојно решение, в) комплексни решенија.

178. Повтори ја претходната задача при системот од равенки:

$mx-3y-16=0,\ x^2-y^2-16=0.$

Реши ги системите:

179. а) $x+xy+y=11,\ x-xy+y=1$

б) $x+xy+y=11,\ 2x-xy+2y=4$

в) $2x+xy+2y=14,\ x+3xy+y=17$

г) $2x+3xy+2y=-20,\ 3x-xy+3y=3$

180. а) $x^2+xy=10,\ y^2+xy=15$ б) $x^2+xy=60,\ y^2+xy=40$

в) $x^2-xy=76,\ xy-y^2=60$ г) $x^2-xy=-8,\ y^2-xy=24$

181. а) $x^2+y^2=26,\ xy=5$ б) $x^2+y^2=962,\ xy=319$

в) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15}$, $x^2+y^2=34$ г) $x^2+y^2=20$, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$

182. а) $x^2+xy+y^2=13$, $x^2-xy+y^2=7$

б) $x^2+xy+y^2=49$, $x^2-xy+y^2=19$

в) $x^2+3xy+y^2=149$, $xy=28$

183. а) $x^2+y^2+x+y=8$, $xy=2$ б) $x^2+y^2-x-y=12$, $xy=9$

184. а) $x+y=7-xy$, $x+y=\frac{12}{xy}$ б) $x+xy+y=11$, $x^2y+xy^2=30$

185. $x+xy=4$, $x^2+x^2y^2=8$

186. а) $x+y=3$, $x^3+y^3=9$ б) $x+y=8$, $x^3+y^3=224$

в) $x-y=1$, $x^3-y^3=7$ г) $x-y=3$, $x^3-y^3=117$

Реши ги системите од две квадратни равенки од кои едната е хомогена:

187. а) $3x^2-7xy+4y^2=0$, $5x^2-3xy-y^2=35$

б) $x^2+xy-12y^2=0$, $2x^2+xy+y^2=352$

в) $x^2-5xy-24y^2=0$, $3x^2-5y^2=88$

188. а) $2x^2-2xy-y^2=39$, $x^2+2xy+4y^2=39$

б) $x^2+xy+y^2=3$, $2x^2+3xy+4y^2=12$

в) $x^2-xy+y^2=28$, $x^2-y^2=20$

189. а) $x(x-y)=75$, $y(x+y)=250$

б) $x^2-xy+y^2=19$, $3x^2+xy+3y^2=33$

в) $3x^2-7xy+4y^2=22$, $5x^2-8xy+5y^2=50$

190. а) $x+y=\frac{6}{x}$, $x-y=\frac{1}{y}$ б) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{9}{20}$, $x^2-y^2=9$

в) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{6}{5}$, $x^2+y^2=13$ г) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{26}{5}$, $x^2-y^2=24$

191. Напиши го комплексниот број $\sqrt{3+4i}$ во облик на $\sqrt{3+4i}=$ $=x+iy$, каде што се x и y реални броеви. Определи ги x и y.

На истиот начин изрази ги броевите:

192. а) $\sqrt{11-60i}$ б) $\sqrt{-16+30i}$ в) $\sqrt{3+2i\sqrt{10}}$ г) $\sqrt{17+4i\sqrt{15}}$

193. а) $\sqrt{-3-4i}$ б) $\sqrt{3-4i}$ в) $\sqrt{4+6i\sqrt{5}}$ г) $\sqrt{a+bi}$

Реши ги системите:

194. $x+y=1$, $y+z=2$, $xz=6$

195. $x(y+z)=36$, $y(z+x)=50$, $z(x+y)=56$

196. $x(x+y+z)=6$, $y(x+y+z)=12$, $z(x+y+z)=18$

197. $x^2+y^2+z^2=14$, $x+y+z=6$, $3xy=2z$

198. а) $x+y+z=12$, $yz+zx+xy=47$, $x^2+y^2=z^2$

б) $x^2+y^2+z^2=29$, $yz+zx+xy=-10$, $x+y=-1$

в) $x^2+y^2+z^2=49$, $xy+yz+zx=36$, $x+y=9$

г) $x^2+y^2+z^2=49$, $x(y+z)=45$, $x+y+z=14$

д) $y^2+yz+z^2=7$, $z^2+zx+x^2=13$, $x^2+xy+y^2=19$

199. а) $x:y=y:z$, $x+y+z=26$, $x^2+y^2+z^2=364$

б) $x+y+z=18$, $x^2+z^2=2(y^2+1)$, $xz=6y-1$

200. а) $x+y+z=6$, $x^2+y^2-z^2=8$, $x^3+y^3+z^3=90$

б) $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=36$

201. Вез да го решаваш системот:

$x+y+z=k,\quad x^2+y^2+z^2=l^2,\quad x^3+y^3+z^3=m^3,$

најди ги xyz!

202. а) $x:y=z:u$, $x+u=13$, $y+z=20$, $x^2+y^2+z^2+u^2=425$

б) $xu=yz=6$, $x+y+z+u=2$, $x^2+y^2+z^2+u^2=50$

203. $\log_{xy}\dfrac{x+y}{6}=-1$, $\log_{x+y}(5-xy)=1$

§ 6. ПРОБЛЕМИ ОД II СТЕПЕН СО ДВЕ И ПОВЕЌЕ НЕПОЗНАТИ

204. Најди два броја чиј производ е 252, а количникот 7,

205. Збирот од два броја е a (15), а производот b (56). Најди ги броевите. — Дискусија.

206. Разликата од два броја е d (3), а нивниот производ е p (108). Кои се тие броеви? — Дискусија.

207. Разликата од квадратите на двата броја изнесува 88. Ако првиот се зголеми за 2, а вториот за 3, тогаш разликата од квадратите е 81. Кои се тие броеви?

208. Збирот на квадратите на два броја изнесува 125. Ако првиот се зголеми за 2, а вториот за 4, тогаш збирот на квадратите е 245. Кои се тие броеви?

209. Бројот 18 растави го на два фактора чии квадрати се разликуваат за 27.

210. Најди два броја кои ги имаат овие својства: ако нивниот збир се одземе од збирот на нивните квадрати, се добива бројот 152, а нивниот производ изнесува 60.

211. Два броја го имаат својството нивниот збир, производот и разликата од квадратите да се еднакви. Кои се тие броеви?

212. Броителот и именителот на некоја дропка изнесува 17. Ако броителот се зголеми за 24, а именителот за 9, се добива вредноста на дропката помножена со 2. Која е таа дропка?

213. Збирот на броителот и именителот на некоја дропка е 8. Ако броителот се зголеми за 2, а именителот се намали за 1, новата дропка изнесува $\frac{25}{12}$ од бараната. Која е таа дропка?

214. Ако еден двоцифрен број се подели со производот на своите цифри, се добива 6. Ако цифрите ги изменат местата, добиениот број е за 9 поголем од броителот. Кој е тој број?

215. Збирот од цифрите на двоцифрен број изнесува 10. Ако овој број се помножи со бројот добиен со замена на цифрите, се добива 2 296. Најди го тој број.

216. Две тела се движат истовремено еднообразно по краковите на прав агол кон врвот со брзини 3m/*s* и 4m/*s*. Во почетокот нивното растојание е 20 m, а по 2 секунди само 10 m. Колку обете тела во почетокот биле оддалечени од врвот на аголот?

217. Во една пропорција збирот од надворешните членови изнесува 24, а од внатрешните 16. Збирот на квадратите на сите членови изнесува 580. Постави ја пропорцијата.

218. Во правоаголен триаголник хипотенузата е 41 cm, а збирот од катетите е 49 cm. Колкави се катетите?

219. Во правоаголен триаголник хипотенузата е 37 cm, а разликата од катетите изнесува 23 cm. Најди ги катетите.

220. Определи ги катетите на правоаголниот триаголник чија хипотенуза е 15 cm, а површината 54 cm.

221. Од обемот на правоаголен триаголник 56 cm и разликата од катетите 17 cm пресметај ги страните на триаголникот.

222. Колкави се страните на рамнокракиот триаголник чија висина е за 2 cm пократка од кракот, а обемот на триаголникот изнесува 50 cm?

223. Страните на два квадрата се однесуваат како $1:\frac{3}{4}$. Нивната површина изнесува вкупно 100 m². Колкави се страните на квадратот?

224. Разликата од дијагоналите на два квадрата изнесува $4\sqrt{2}$ cm, а збирот од површините 80 cm². Најди ги страните на квадратот.

225. Површината на правоаголник изнесува 32 cm², а страните му се однесуваат како 2 : 1. Најди ги страните на правоаголникот.

226. Колкави се страните на правоаголникот чија дијагонала е 17 cm, а обемот 46 cm?

227. Колкав е обемот на правоаголникот чија дијагонала е 25 cm, а површината 168 cm²?

228. Површината на правоаголникот изнесува 60 cm², а обемот се однесува спрема дијагоналата како 34 : 13. Најди ги страните на правоаголникот.

229. Дијагоналата на правоаголник е 13 cm. Ако должината на правоаголникот се зголеми за 4 cm, а ширината за 7 cm, дијагоналата ќе порасне за 7 cm. Најди ги страните на правоаголникот.

230. а) Дијагоналата на правоаголник е 26 cm. Ако секоја страна се продолжува за 6 cm, тогаш површината двојно ќе се зголеми. Најди ги страните на правоаголникот.

б) Едната дојагонала на ромбот е за 4 cm подолга од другата. Површината на ромбот изнесува 30 cm^2. Најди ги дијагоналите на ромбот.

231. Треба да се пресметаат дијагоналите на ромбот ако неговата страна е $a=65$ cm, и површината $P = 3\,696$ cm^2.

232. Дијагоналите на делтоид изнесуваат $d_1 = 25$ cm, (симетрала) и $d_2=24$ cm, а обемот му е 70 cm. Најди ги страните на делтоидот.

233. Рабовите на две коцки се разликуваат за 6 cm, а нивните зафатнини за 1 206 cm^3. Пресметај ги рабовите на коцките.

234. Правилна четиристрана пресечена пирамида има зафатнина 855 cm^3 и висина 15 cm. Колкави се нејзините основни рабови ако тие се однесуваат како $3:2$?

235. Исправен ваљак има површина 224π cm^2, а дијаметарот на базата се однесува спрема висината како $8:3$ Најди го радиусот на базата и висината на ваљакот.

236. Површината на исправен пресечен конус изнесува 64π cm^2, неговата изводница е 5 cm, а полупречниците на основите се разликуваат за 3 cm. Најди ја зафатнината на конусот.

237. Пресметај ги полупречниците на базите на исправен пресечен конус, ако неговата висина е 30 cm, изводницата 50 cm, а зафатнината изнесува $31\,000\pi$ cm^3.

238. Пресечен конус има зафатнина $2\,133\pi$ cm^3 и висина 9 cm. Збирот на полупречниците на обете бази изнесува 30 cm. Колкави се полупречниците?

239. Централното растојание на две топки кои се допираат однадвор изнесува 13 cm, а збирот на нивните површини изнесува 436π cm^2. Најди ги полупречниците на топките.

240. Збирот на полупречниците на две топки изнесува 6 cm, а збирот на зафатнините 96π cm^3. Најди ги површините на топките.

241. Централното растојание на две топки кои се допираат однатре, изнесува 3 cm, а разликата од нивните зафатнини е 516π cm^3. Колкави се полупречниците на топките?

242. Во топка со радиус 5 cm треба да се впише ваљак чија обвивка изнесува 48π cm^2. Колкав е радиусот на базата и висината на ваљакот?

243. Два броја ги имаат овие својства! квадратот од нивниот збир е за a^2 поголем од збирот на нивните квадрати, а кубот од нивниот збир е за $\left(\frac{3a}{2}\right)^3$ поголем од збирот на нивните кубови. Кои се тие броеви?

244. Ако еден двоцифрен број се помножи со бројот што се добива кога неговите цифри ќе ги заменат своите места, се добива 403. Ако пак бараниот број се подели со збирот од своите цифри, се добива количник 7 и остаток 3. Кој е тој број?

245. Ако еден двоцифрен број го поделиме со производот од неговите цифри, ќе добиеме количник 5 и остаток 2. Ако, пак, бројот го одземеме од 55, ќе добиеме број составен од исти цифри но напишани во обратен ред. Кој е тој број?

246. На еден патник му треба за пат од 520 km 3 дена повеќе отколку на друг, зашто вториот преминува дневно 12 km повеќе од првиот. Колку дена му е потребно на секој патник за ова патување и со кои брзини се движат?

247. Два патника истовремено одат едниот кон другиот во пресрет од две места A и B чид растојание е 45 km. Тие ќе се сретнат по 5 часа. Првиот патник ќе стигне $2\frac{1}{4}$ часа порано во B, отколку вториот во A. Каде се сретнале тие?

248. Еден човек од извесна сума пари вложени во банката добива годишно 120 дин. интерес, а од друга сума, која е за 6 000 дин. поголема и вложена со процент за 2 поголем од процентот со кој е вложена првата сума, добива годишно 540 дин. интерес. Колкави се сумите вложени в банка и со кој процент?

249. Капитал од 3 600 дин. донесува по извесно време 84 дин. интерес. Ако процентот се покачи за $\frac{1}{2}$, тогаш ќе го донесе истиот интерес за 1 месец порано отколку во првиот случај. Колку време капиталот бил в банка и со кој процент?

250. Низ две цевки поминува за 20 минуви 540 l вода; низ првата цевка ова количество вода протекува 9 минути подолго отколку низ втората цевка. Колку литри вода протекува низ секоја цевка во една минува?

251. Две цевки, ако се отворат истовремено, ќе го наполнат базенот за a (2,4) часа. За кое време секоја цевка сама ќе го наполни базенот ако втората го наполни за b (2) часа порано отколку првата?

252. Работникот A за извесен број денови работа примил 600 дин. а B, кој работел 5 дена помалку, примил 480 дин. Ако A отсуствувал 5 дена од работа, а B работи толку дена колку што стварно работел A, тогаш B ќе прими 190 дин. повеќе од A. Колку дена работел секој од нив и колкава им е надницата?

253. Пред леќа чија фокусна далечина $f = 30$ cm се наоѓа предмет. Ако предметот се оддалечи од леќата за 15 cm, неговата слика, од другата страна на леќата, ќе се приближи за 5 cm. Определи ја првобидната оддалеченост на предметот и сликата од леќата.

254. Задругата продава вкупно 100 m платно од два вида a и b и притоа прима за секој вид платно иста сума. Кога платното од видот a би го продала по цената на видот b, тогаш за него би примила 450 дин., а кога платното од видот b би го продала по цената од видот A, тогаш за него би добила 200 дин. Колку метра платно од секој вид продала задругата и по која цена?

255. Три броја претставуваат непрекината пропорција. Нивниот збир е 14, а збирот на нивните квадрати е 84. Која е таа пропорција?

256. Од три реални броја чиј збир е 126 може да се напише непрекината пропорција. Кои се тие броеви ако нивниот производ е 13 824?

257. Збирот од четирите члена на една пропорција е 56. Продуктот на внатрешните членови изнесува 84, а збирот на квадратите на сите членови е 1 250. Која е таа пропорција?

258. Збирот на хипотенузата и едната катета од правоаголен триаголник изнесува 50 cm, а збирот на хипотенузата и другата катета е 81. Пресметај ги страните на триаголникот?

259. Бројната вредност на обемот и на површината на правоаголен триаголник е дадена со ист број и изнесува 30. Колкави се страните на триаголникот?

260. Збирот на катетите на правоаголен триаголник изнесува 7 cm. а висината на хипотенузата е 2,4 cm. Определи ги страните на триаголникот.

261. Кај еден правоаголен триаголник збирот од катетите е за 10 cm поголем од хипотенузата. Најди ги страните на триаголникот ако висината на хипотенузата е 12 cm.

262. Едната катета од еден правоаголен триаголник е рамна на проекцијата на другата катета на хипотенузата. Колкави се катетите, ако е позната хипотенузата c?

263. Најди ги страните на правоаголниот триаголник чиј обем е 12 cm, а радиусот на впишаниот круг е 1 cm.

264. Површината на еден правоаголен триаголник изнесува 84 cm^2, а полупречникот на впишаниот круг 3 cm, Најди ги страните на триаголникот.

265. Обемот на еден правоаголен триаголник изнесува 24 cm, а збирот на полупречникот на впишаниот и полупречникот на опишаниот круг на тој триаголник е 7 cm. Најди ги страните на триаголникот.

266. Определи ги страните на правоаголниот триаголник чиј обем е 24 cm, ако отсечките на хипотенузата се однесуваат како $9:16$.

267. Површината на еден триаголник изнесува 84 cm^2, а обемот 42 cm. Едната страна е аритметичка средина на другите две. Колкави се страните?

268. Квадратот на страната a е заедничка основа на исправена призма и исправена пирамида. Обете тела треба да имаат исти волумени и исти површини. Колкави се нивните висини?

269. Пресечена правилна четиристрана пирамида има зафатнина 684 cm^3 и висина 18 cm. Колкави се нејзините основи ако се разликуваат за 30 cm^2?

270. Површината на исправен конус изнесува 24π cm^2, а висината е 4 cm. Најди го полупречникот на основата и изводницата на конусот.

271. Пресметај ја изводницата и обвивката на пресечен конус чија висина е 4 cm, површината 42π cm^2, а зафатнината 28π cm^3.

272. Имаме два валјака. Полупречникот на базата на првиот валјак е рамен на висината на вториот, а полупречникот на базата на вториот на висината на првиот. За колку се разликуваат нивните површини, а за колку нивните зафатнини, кога збирот на површините е 200π, а збирот на зафатнините 240π?

273. Висината на бочната страна на правилна четиристрана пирамида е подолга од висината на пирамидата за 1 cm, а од основниот раб за 3 cm. Најди ги тие три величини на пирамидата.

274. Правоаголен паралелопипед е даден со својата зафатнина 24 cm^3, со површината 52 cm^2 и обемот на базата 10 cm. Најди ги димензиите на паралелопипедот.

275. Дијагоналата на еден правоаголен паралелопипед изнесува 7 cm. Висината е хармониска средина помеѓу должината и ширината, а збирот на димензиите изнесува 11 cm. Најди ги димензиите.

276. Дијагоналата на правоаголен паралелопипед изнесува $\sqrt{741}$ cm. Збирот на должината, ширината и висината е 39 cm, а должината е геометриска средина помеѓу ширината и висината. Најди ги нејзината површина и зафатнина.

277. Рабовите a, b, c на правоаголниот паралелопипед чија површина е 1 022 cm^2 го имаат својството од нив да може да се сложи правоаголен триаголник со обем 40 cm. Определи ги рабовите на паралелопипедот.

278. Дијагоналата на правоаголен паралелопипед изнесува 14 m, површината 288 m^2, а должината е поголема од збирот на ширината и висината за 2 m. Определи ги рабовите на паралелопипедот.

279. Тристрана пирамида има основни рабови 7 cm, 8 cm и 9 cm, а бочните рабови се заемно нормални. Колкави се бочните рабови?

280. Во еден триаголник е позната страната, збирот на другите страни е $x+y=2_a$ и тежишната линија на познатата страна t. — Дискусија.

281. Во круг со полупречник r впиши рамнокрак триаголник кај кој збирот од основата и висината е d. — Дискусија.

282. Околу кругот со полупречник r опиши рамнокрак трапез со дадена површина P. — Дискусија.

283. Во круг со полупречник r впиши правоаголник кај кој разликата од страните е d. — Дискусија.

284. Ваљак и конус со еднакви висини h лежат со своите основи во иста рамнина. На која оддалеченост треба да се повлече рамнина паралелна со правата за да можат зафатнините омеѓени со овие рамнини да бидат еднакви? — Дискусија.

285. а) Во топка со полупречник r впишан е конус чија висина е $\frac{3r}{2}$. На кое растојание од врвот треба да се повлече рамнина паралелно со основата на конусот па разликата помеѓу површините на пресекот на топката и конусот да биде рамна на дадената величина $a^2\pi$? — Дискусија.

б) Во кругот со полупречник r впишан е рамнокрак триаголник чија висина е $\frac{3r}{2}$. На кое растојание од врвот на триаголникот треба да се повлече паралела со неговата основа, па разликата од квадратот на добиената тетива и квадратот на отсечката на тетивата помеѓу краковите на триаголникот да изнесува $4a^2$ — Дискусија.

§ 7. АРИТМЕТИЧКИ НИЗИ ИЛИ АРИТМЕТИЧКИ ПРОГРЕСИИ

286. Која низа од броеви ја нарекуваме аритметичка низа?

287. Кага аритметичката низа расте, а кога опаѓа?

288. Напиши неколку членови од аритметичката прогресија ако е даден првиот член a_1*) и диференцијата d:

а) $a_1 = 2,\ d = 3$ б) $a_1 = -8,\ d = 4$

в) $a_1 = 5,\ d = -\frac{1}{2}$ г) $a_1 = \alpha,\ d = \beta$

Напиши неколку членови од аритметичката прогресија ако се знаат нејзините први два члена a_1 и a_2:

289. а) $a_1 = 3,\ a_2 = 7$ б) $a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2}$

в) $a_1 = 2,\ a_2 = -0{,}5$ г) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{2}$

290. а) $a_1 = a,\ a_2 = b$ б) $a_1 = a + b,\ a_2 = a - b$

в) $a_1 = x,\ a_2 = y + z$ г) $a_1 = a + b,\ a_2 = c + d$

291. Ако е познат петтиот член на аритметичката прогресија (a_5) и диференцијата (d), напиши ги првите пет членови на прогресијата, така што членовите да се наоѓаат и пишуваат ретроградно ($a_5, a_4 \ldots$):

а) $a_5 = 7,\ d = 2$ б) $a_5 = 11,\ d = -1$

в) $a_5 = 8,\ d = b$ г) $a_5 = a,\ d = b$

292. Напиши ги ретроградно членовите на аритметичката прогресија почнувајќи од највисокиот даден член во овие случаи:

---

* Често првиот член a_1, поради едноставност, го пишуваме со a.

а) $a_5 = 8$, $a_4 = 6$ б) $a_6 = -3$, $a_5 = 2$

в) $a_4 = 7$, $a_5 = 6\frac{1}{2}$ г) $a_4 = \alpha$, $a_3 = \beta$

293. Кака три броја a, b, c, ќе претставуваат три последовни члена на една аритметичка прогресија?

294. Кога низата од броевите a, b, c, d, e, f ќе претставува аритметичка прогресија?

295. Најди го непосредно a_n ако се дадени a_1 и d во задачиве:

а) $a_1 = 5$, $d = 3$, $a_7 = ?$ б) $a_1 = -8$, $d = 5$, $a_{10} = ?$

в) $a_1 = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{6}$, $a_9 = ?$ г) $a_1 = a$, $d = b$, $a_{100} = ?$

296. Определи ја разликата d на аритметичката низа ако се дадени:

а) $a_1 = 5$, $a_8 = 26$ б) $a_1 = -5$, $a_{12} = 17$

297. Определи го првиот член a_1 од аритметичката прогресија ако се дадени:

а) $a_7 = -10$, $d = -3$ б) $a_{24} = 50$, $d = 2$

298. Изведи ја формулата за збирот (S_n) од првите n членови на аритметичката прогресија.

299. Најди го збирот на првите десет членови на аритметичката прогресија 1, 5, 9,...

300. Најди го збирот S_{25} на аритметичката прогресија 4, 1, —2...

301. Најди ги a_{12} и S_{12} на прогресијата —4, 1, 6, 11,...

302. Најди ги a_{20} и S_{20} на прогресијата 1, $1\frac{1}{2}$, 2,...

303. Најди го збирот:

а) на сите природни броеви од 1 до 100,

б) на сите позитивни парни броеви до вклучително 60,

в) на сите позитивни непарни броеви до вклучително 77.

г) на првите n природни броеви.

304. Колку броеви, деливи со 6, лежат помеѓу 0 и 100 и колкав е нивниот збир?

305. Колку броеви, кои се деливи со 8, лежат помеѓу 0 и 900?

306. Колку броеви деливи со 7 лежат помеѓу 100 и 200 и колкав е нивниет збир?

307. Колку има двоцифрени броеви кои на местото на единиците ја имаат цифрата 3 и колкав е нивниот збир?

308. Најди ги n и S_n ако се дадени:

а) $a_1 = 4$, $a_n = 49$, $d = 5$ б) $a_1 = 1$, $a_n = 22$, $d = 3$

в) $a_1 = -28$, $a_n = 28$, $d = 7$ г) a_1, a_n, d

309. Најди ги d и S_n ако се дадени:

а) $a_1 = 3$, $a_n = 63$, $n = 16$ б) $a_1 = 1$, $a_{17} = 81$

в) a_1, a_n, n

310. Најди ги d и n ако се дадени:

а) $a_1 = 4$, $a_n = 104$, $S_n = 1\,134$ б) $a_1 = 2$, $a_n = 87$, $S_n = 801$

в) a_1, a_n, S_n

311. Определи ги a_n и S_n ако се дадени:

а) $a_1 = 7$, $d = 4$, $n = 13$ б) $a_1 = -8$, $d = 3$, $n = 20$

в) a_1, n, d

312. Пресметај ги a_n и n ако се дадени:

а) $a_1 = 2$, $d = 5$, $S_n = 245$ б) $a_1 = 40$, $d = -4$, $S_n = 180$

в) $a_1 = 50$, $d = -7$, $S_n = -1\,545$ г) a_1, d, S_n

313. Пресметај ги a_n и d ако се дадени:

а) $a_1 = 10$, $n = 14$, $S_n = 1\,050$ б) $a_1 = -40$, $S_{20} = -40$

в) $a_1 = -45$, $S_{31} = 0$ г) a_1, n, S_n

314. Пресметај ги a_1 и S_n ако се дадени:

а) $a_n = 149$, $d = 7$, $n = 22$ б) $a_{12} = 65$, $d = 5$

в) $a_{40} = -22$, $d = -2$ г) a_n, d, n

315. Најди ги a_1 и n ако се дадени:

а) $a_n = 29,\ d = 3,\ S_n = 155$ б) $a_n = 10,\ d = 2,\ S_n = 18$

в) $a_n = -13,\ d = -8,\ S_n = -4$ г) $a_n,\ d,\ S_n$

316. Пресметај ги a_1 и d ако се дадени:

а) $a_n = 21,\ n = 7,\ S_n = 105$ б) $a_{11} = 92,\ S_{11} = 517$

в) $a_{33} = -143,\ S_{33} = -2\,079$ г) $a_n,\ n,\ S_n$

317. Определи ги a_1 и a_n ако се дадени:

а) $d = 6,\ n = 10,\ S_n = 340$ б) $d = -10,\ S_{200} = 1\,000$

в) $d,\ n,\ S_n$

318. Пресметај ги a_1 и d ако се дадени:

а) $a_3 = 25,\ a_{10} = -3$ б) $a_{11} = 50,\ a_{16} = 25$

319. Која аритметичка прогресија го има својството да е:

а) $a_7 = 10,\ a_{17} = 50$ б) $a_5 = 28,\ a_9 = 52$

320. а) Во аритметичката прогресија се дадени $a_4 = 10,\ a_7 = 19$. Колкав е збирот на првите 20 членови?

б) $a_5 = -8,\ a_{17} = 28$. Најди го S_{15}.

в) $a_4 = 9,\ a_9 = -6$. Колку членови треба да се соберат за да се добие 54?

321. а) Збирот на третиот и на седмиот член на аритметичката прогресија изнесува 4, а збирот на вториот и четиринаесетиот член е -8. Најди ја прогресијата.

б) $a_3 + a_7 = 38,\ a_2 + a_{12} = 50$.

322. а) Збирот на првитот, четвртиот и единаесеттиот член на аритметичката прогресија е 35, а збирот на третиот и шестиот член изнесува 20. Најди ја прогресијата.

б) $\left.\begin{aligned} a_2 + a_5 + a_8 &= 24 \\ a_3 + a_6 + a_7 &= 21 \end{aligned}\right\}$ најди ги a_1 и d.

323. а) Збирот на првите шест членови на аритметичката прогресија изнесува 42, а збирот на првите 10 членови е 110. Најди ја прогресијата.

б) $S_7 = -21,\ S_{12} = -96$. Најди ги a_1 и d.

324. а) Разликата од третиот и шестиот член на аритметичката прогресија е 9, а збирот на вториот и петтиот член изнесува 19. Која е таа прогресија?

б) $a_8 - a_3 = 20,\ a_2 + a_5 + a_7 = 53$. Најди ги a_1 и d.

325. Како гласи аритметичката прогресија кај која е:

а) $\frac{a_7}{a_2} = 4,\ a_4 + a_6 = 28$ б) $a_5 : a_7 = 9,\ a_2 - a_6 = 16$

в) $a_3 : a_8 = 3 : 8,\ a_1 + a_4 + a_8 = 26$

г) $a_9 : a_1 = 2,\ a_2 + a_3 - a_7 = 10$?

326. Најди ја аритметичката прогресија ако нејзините членови ги задоволуваат релациите:

а) $2a_2 + a_4 = 7{,}5a_5 - 6a_3 = 17$

б) $2a_2 + 3a_3 - a_7 = -14,\ 2a_4 + a_5 = 15$

327. Определи ја аритметичката прогресија кај која е:

а) $a_6^2 = a_1,\ a_3 + a_4 = 30$ б) $a_1^2 + a_6^2 = 37,\ a_4 + a_7 = 11$

в) $a_2 + a_4 = 16,\ a_1 \cdot a_5 = 28$ г) $2a_1 + 5a_6 = 4,\ a_7 \cdot a_8 = 12$

328. а) Кај која аритметичка прогресија збирот на првите десет членови изнесува 155, а збирот на третиот и седмиот член е 28?

б) $S_{14} = 112,\ a_2 + a_5 + a_{11} = 15$. Најди ги a_1 и d.

в) $S_{11} = 121,\ a_2 \cdot a_5 = 27$

329. Најди ја аритметичката прогресија кај која збирот на првите шест членови дава нула, а збирот на следните седум членови изнесува 91.

330. Збирот на првите седум членови на некоја аритметичка прогресија е 14, а збирот на следните девет членови изнесува 54. Која е таа прогресија?

331. Разликата на аритметичката прогресија е $d = 4$. Кој е првиот член ако збирот на првите пет членови е трипати помал од збирот на следните пет членови?

332. Кај која аритметичка прогресија збирот на првите три члена изнесува 15, а производот 80?

333. а) Секој член на аритметичката прогресија го има својството да е рамен на аритметичката средина на членовите помеѓу кои лежи.—Докажи.

б) Докажи дека во аритметичката прогресија е $a_{n-r} = a_n - rd$, $a_{n+r} = a_n + rd$.

334. Во аритметичката прогресија кој и да било член a_n е рамен на аритметичката средина на членовите a_{n-r} и a_{n+r}.—Докажи.

335. Ака се a, b, c три последовни члена на аритметичката прогресија, тогаш тие ја задоволуваат релацијата $(2b+c)^2 = a^2 + 8bc$. — Докажи.

336. Претстави ги на бројната линија аритметичките прогресии:

а) $2, 3, 4, 5, \ldots,$ б) $a_1 = -5$, $d = 3$

в) $a_1 = a$, $d = b$

Со кои точки е претставена аритметичката прогресија?

337. Најди го n-тиот непарен број и збирот на првите n непарни броеви.

338. Најди го бројот на n членовите на прогресијата:

а) $a,\ 2a-b,\ 3a-2b, \ldots$ б) $b,\ 2b-a,\ 3b-2a, \ldots$

339. Во равенките $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ и $S_n = \dfrac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$ доаѓаат пет величини a_1, a_n, d, n, S_n. Ако од овие пет величини се дадени три, другите две можат да се пресметаат од двете наведени равенки. Колку видови задачи можат да се комбинираат со оглед на тие три познати и на останатите две непознати величини?

340. Која аритметичка прогресија со реални членови го има својството:

а) $a_2 \cdot a_5 = 10$, $a_3 \cdot a_7 = 21$ б) $a_1 \cdot a_5 = -4$, $a_4 \cdot a_7 = 4$

в) $a_4 \cdot a_6 = 48$, $a_8 \cdot a_{12} = 80$?

г) Во аритметичка прогресија од осум членови производот од средните членови изнесува 15, а производот од третиот и последниот член е 11. Која е таа прогресија?

341. Во аритметичката прогресија од 15 членови средниот член е 7, а производот од првиот и последниот член изнесува минус — 147. Која е таа прогресија?

342. Најди ја аритметичката прогресија кај која збирот на првите три члена дава нула, а збирот на нивните квадрати изнесува 50. (Реши напамет).

343. Најди ја разликата на аритметичката прогресија кај која првиот член е 100, а збирот на првите шест членови е петпати поголем од збирот на следните шест членови.

344. Најди го првиот член и разликата на аритметичката прогресија со реални членови чии членови ги задоволуваат равенките:

а) $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, $a_1\ a_2\ a_3 = -120$

б) $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_1{}^3 + a_2{}^3 + a_3{}^3 = 27$

в) $a_1+a_2+a_3=3$, $a_1^4+a_2^4+a_3^4=273$

г) $a_1+a_2+a_3+a_4=16$, $a_1\ a_2\ a_3\ a_4=105$

д) $\left.\begin{array}{r} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5 \\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5=45 \end{array}\right\}$

345. Во аритметичка прогресија од осум членови збирот на последните четири члена е двапати поголем од збирот на првите четири члена. Продуктот од првиот и третиот член е за 10 поголем од петпати зголемениот седми член. Како гласи прогресијата?

346. Постави равенка од трет степен ако нејзините корени претставуваат аритметичка прогресија чиј збир е 15, а производот 105.

347. Во аритметичка прогресија производот од третиот и единаесеттиот член изнесува 132, а збирот на членовите што лежат помеѓу нив е 98. Која е таа прогресија?

348. а) Збирот на првите пет членови на аритметичката прогресија изнесува 15. Производот од петтиот член со збирот на претходните членови изнесува 14. Кој е првиот член и диференцијата на прогресијата?

б) Збирот на првите шест членови на аритметичка прогресија изнесува 42. Производот на шестиот член со збирот на претходните членови е 80. Која е таа прогресија?

349. Збирот на првите десет членови на аритметичка прогресија изнесува 15. Производот од збирот на првите пет членови со збирот на последните пет членови изнесува —100. Која е таа прогресија?

350. а) Бројот 18 растави го на три дела кои претставуваат аритметичка прогресија, така што квадратот на третиот дел да е за 40 поголем од производот на преостанатите делови. Кои се тие делови?

б) Бројот 27 растави го на три делови кои претставуваат аритметичка прогресија, така што квадратот на првиот дел да е за 99 поголем од збирот на квадратите на останатите делови.

351. Во аритметичка прогресија од деветнаесет членови средниот член е $-\frac{1}{2}$, а производот од збирот на членовите што лежат пред него со збирот на членовите што следат по него изнесува —486. Која е таа прогресија?

352. Збирот на четири броја кои даваат аритметичка прогресија е 8. Збирот на реципрочните вредности на крајните членови е за $\frac{32}{15}$ помал од збирот на реципрочните вредности на средните членови. Кои се тие броеви?

353. Цифрите на трицифрен број се членови на аритметичка прогресија. Ака овој број се подели со збирот на своите цифри, се добива количник 26. Ако на тој број му се даде 396, се добива број составен од исти цифри, но во обратен ред. Кој е тој број?

354. Во аритметичка прогресија со позитивни членови и со разлика $\frac{1}{2}$ збирот на првите n членови изнесува 81. Ако на овој збир му се додадат уште четири следни члена, се добива бројот 124. Колкави се n и a_1?

355. а) Во прогресијата 18, 15, 12,... нека се определи оној член што е рамен на петтиот дел од збирот на сите претходни членови.

б) Во прогресијата 50, 48, 46,... треба да се најде членот што е рамен на дваесетиседмиот дел од збирот на сите претходни членови.

356. Во низа од природни броеви деливи со 5 определи го со оној кој изнесува $\frac{1}{22}$ од збирот на сите претходни природни броеви.

357. а) Кој парен број изнесува $\frac{1}{10}$ од збирот на сите претходни парни броеви?

б) Кој непарен број е за 1 поголем од петтиот дел на збирот на сите претходни непарни броеви?

358. а) Во аритметичката прогресија е $a_1 = 3$, $a_{16} = 1$. Колку членови од оваа прогресија треба да се соберат за да се добие максимален збир, и колкав е тој збир?

б) Најди го минималниот збир што можеме да го добиеме од членовите на аритметичката прогресија во која $a_1 = -5$ и $a_4 = -3$.

359. Испитај дали броевите 79, 140, 395, и 500 се членови на аритметичката прогресија —1, 3, 7, 11,...

360. Кој член во прогресијата 28, 26, 24,... е рамен на својот ранг $(a_n = n)$?

361. Аритметичка прогресија со разлика 2 и збир 28 има почетен член рамен на бројот на членовите. Која е таа прогресија?

362. Како гласи аритметичката прогресија на која n-тиот член е рамен на нула, а збирот на n членовите изнесува $\frac{n-1}{2}$.

363. а) Докажи дека функцијата $f\ (x) = kx$ го има својството: ако независно менливата x ги прима вредностите на членовите на некоја аритметичка прогресија, тогаш соодветните вредности на самата функција $f\ (x)$ даваат исто така аритметичка прогресија.

б) Докажи го истото за $f\ (x) = kx + 1$.

364. Покажи дека кај функцијата $f\ (x) = x^2$ разликите $f\ (n+1) - f\ (n)$, $f\ (n+2) - f\ (n+1)$, $f\ (n+3) - f\ (n+2), \ldots$ претставуваат аритметичка прогресија.

365. Истото својство покажи го и кај функциите:

а) $f\ (x) = ax^2$ б) $f\ (x) = ax^2 + c$

в) $f\ (x) = ax^2 + bx$ г) $f\ (x) = ax^2 + bx + c$

366. Докажи дека равенката $ax^2 + 2bx + c = 0$ има едно решение -1, ако a, b, c, даваат аритметичка прогресија

367. а) Првиот член на аритметичката прогресија е 2, збирот од m првите нејзини членови се однесува спрема збирот од првите n членови како $m\ (m+1) : n\ (n+1)$. Која е таа прогресија?

б) Најди го збирот на првите $m+n$ членови на аритметичката прогресија на која m-тиот член е рамен на n, а n-тиот член изнесува m.

в) Најди го збирот на првите m-n членови на аритметичката прогресија во која збирот на m првите членови е рамен на n, а збирот на n првите членови е рамен на m.

368. Првиот член на прогресијата е 1, збирот на нејзините први m членови се однесува спрема збирот на првите n членови како $m^2 : n^2$. Најди ја таа аритметичка прогресија.

369. Дадена е низата $a_1\ a_2\ a_3, \ldots$

а) Од нејзината збирна формула $S_n = an^2 - bn$, каде се a и b зададени константи, најди го a_n.

б) Покажи дека станува збор за аритметичка низа и определи го нејзиниот прв член и разликата во функцијата од a и b.

370. Дадени се две аритметички прогресии. Збирот на првите членови на обете прогресии е 6, производот од вторите 6, разликата од третите 2 и количникот од четвртите -4. Кои се тие прогресии?

371. Броевите 5, 29, 61 можат да бидат членови на бесконечно многу аритметички прогресии. Да се определи онаа кај која разликата на прогресијата ќе биде најголема.

372. Треба да се ископа бунар длабок 12 m. За копање на првиот метар се плаќа a динари, а за копање на секој следен метар по b динари повеќе. Колку ќе изнесува копањето на последниот метар, а колку на целиот бунар?

373. При едно качување нависоко се забележало дека температурата на воздухот опаѓа на секој 100 m висина за 0,7° C. При едно мерење температурата мерена во височина изнесува 14,8° C, а на земја во истото време изнесувала 26° C. На која височина била мерена температурата?

374. За ѕидање на фабрички оџак висок 26 m се плаќа за првиот метар 80 дин., а за секој следен метар по 30 динари повеќе. Колкава е цената на ѕидањето на последниот метар, а колку чини ѕидањето на целиот оџак?

375. На повеќе лица треба да се подели извесна сума пари, така што првото лице да добие 80 динари, а секое следно по 4 динара помалку; последното лице ќе прими 28 динари. Колку лица биле и колкава сума е поделена?

376. Една младинска организација му дала на некој учител определена сума пари, со тоа што да ја раздели меѓу 25 ученици од своето одделение на овој начин: учителот ќе зададе писмена работа, ќе ја оцени според квалитетот на работата на одделните ученици и на првиот во ранг ќе му даде најголема награда, на следниот нешто помалку, на третиот во ранг за исто толку помалку итн. На овој начин третиот и четиринаесеттиот ученик заедно добиле 450 стари динари, а седмиот и последниот 300 стари динари. Колку добил првиот ученик, а колку последниот, и колкава сума учителот поделил?

377. Тело при слободен пад (во празен простор) во првата секунда изминува пат од 4,9 m, а во секоја следна секунда по 9,8 m повеќе отколку во предходната. Колкав пат изминува телото при слободно паѓање во дваесетипрвата секунда, а колкав за дваесет и една секунда?

378. Колку секунди телото ќе паѓа од височина од 4 410 m?

379. До која височина се качувало тело фрлено вертикално нагоре ако за една минута паднало повторно на земја?

380. При слободно паѓање тело поминува во првата секунда пат $\frac{g}{2}$ m, а секоја следна секунда g m повеќе отколку во претходнтаа. Колкав е изминатиот пат при слободното паѓање за t секунди?

381. Тело фрлено на високо во празен простор со почетна брзина $C\frac{m}{s}$ изминува во првата секунда $\left(C-\frac{g}{2}\right)$ m, а во секоја следна секунда g m помалку отколку во претходната. Колкав е изминатиот пат во t секунди?

382. Две тела тргнуваат истовремено од исто место и во ист правец. Едното во секоја секунда изминува 20 m, другото во првата секунда изминува 12 m, а со секоја следна по 2 m повеќе отколку во претходната. По колку секуни второто тело ќе го стигне првото и во која оддалеченост од почетната точка?

383. Поаѓајќи од иста точка се движат во круг две тела во спротивни насоки. Едното во првата секунда изминува 3°, а во секоја следна секунда 1° повеќе отколку во претходната; второто во првата секунда $1^1/_2$°, а во секоја следна секунда 6° повеќе отколку во претходната. Кога телата ќе се сретнат првпат?

384. Две тела поаѓаат во пресрет истовремено од две места оддалечени 450 m едното од другото. Првото изминува во првата минута 5 m, а во секоја следна минута 15 m повеќе отколку во претходната. Второто тело во првата минута изминува 100 m, а во секоја следна 10 m помалку отколку во претходната. Кога телата ќе се сретнат?

385. Две места A и B се помеѓусебно оддалечени 870 km. Некој поаѓа од A кон B и изминува првиот ден 80 km, вториот 75, третиот 70 km итн. Друг патник тргнува три дена подоцна од B во пресрет на првиот патник и првиот ден изминува 40 км, вториот 46 km, третиот 52 km, итн. Каде и кога ќе се сретнат патниците?

386. На патот AX се движат две тела M и N, обете тргнати од A во иста насока. Телото M во првата секунда изминува 11 m, а во секоја следна секунда по 1 m помалку отколку во претходната. N го почнува своето движење 3 секунди подоцна од M и во првата секунда изминува 10 m, а во секоја следна 1 m повеќе отколку во претходната, така што, според ова, мора да го стигне во некоја точка B телото M. Определи го AB.

487. Во четириаголникот $ABCD$ дијагоналата $AC = 15$ cm. Дијагоналата AC со страните AB и BC претставува една, а со страните CD и DA друга аритметичка прогресија. Диференцијата на втората аритметичка прогресија е за 12 cm помала од диференцијата на првата, а обемот на четириаголникот изнесува 90 cm. Најди ја површината на четириаголникот.

388. Зададена е низа од правоаголници со еднаква ширина, а нивните должини претставуваат аритметичка прогресија. Обемот на првиот четириаголник е 16 cm, површината на вториот 18 cm, а петтиот правоаголник е квадрат. За кои правоаголници станува збор?

389. Три полигона имаат заедно 28 страни и 105 дијагонали. Кои сè тие полигони ако броевите на нивните дијагонали претставуваат аритметичка прогресија?

390. Бројните вредности на полупречниците на десет концентрични кругови претставуваат аритметичка прогресија. Кружниот прстен ограничен со најголемиот и најмалиот круг има обем 26π cm и површина 117π cm^2. Најди го првиот член и диференцијата на прогресијата.

391. а) Најди ги страните на правоаголниот триаголник ако тие претставуваат аритметичка прогресија со диференција 3.

б) Бројните вредности на страните и површината на правоаголниот триаголник се четири последовни члена на аритметичка прогресија. Кој е тој триаголник?

в) Определи ги страните на правоаголниот триаголник ако нивните мерни броеви се членови на аритметичка низа, а површината на триаголникот изнесува 294 cm^2.

392. а) Површината на триаголникот изнесува 84 cm^2, а неговите страни се членови на аритметичка прогресија чија разлика е 1. Најди ги страните на триаголникот.

б) Страните на триаголникот се последовни членови на аритметичка прогресија. Колкави се тие ако обемот на триаголникот е 84 cm, а површината 336 cm^2?

393. Ако страните на правоаголен триаголник претставуваат аритметичка прогресија, разликата на таа прогресија секогаш е еднаква на полупречникот на впишаниот круг. — Докажи.

394. Полупречникот на круг впишан во триаголник изнесува 4 и со страните на триаголникот образува четири последовни члена на аритметичката прогресија. Најди ја површината на триаголникот.

395. На триаголникот со основа a и висина h му се впишуваат еден над друг правоаголници со висина $\frac{h}{n}$ каде е n дадениот природен број. Покажи дека нивните површини стојат во аритметичка прогресија и најди го збирот на површините на сите правоаголници. Што станува со овој збир ако n се стреми кон бесконечност?

396. Производот од првиот и третиот член на аритметичка прогресија е $\sin^2\alpha$, а нивниот количник е $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. Која е таа прогресија и како ќе гласи таа ако е $\alpha = 60°$?

397. а) Димензиите на правоаголен паралелопипед претставуваат аритметичка прогресија. Површината на паралелопипедот е 94 cm^2, а дијагоналата е $5\sqrt{2}$ cm. Најди ги димензиите на паралелопипедот.

б) Димензиите на правоаголен паралелопипед даваат аритметичка прогресија. Површината на паралелопипедот изнесува 52 cm^2, а зафатнината 24 cm^3. Кои се димензиите на паралелопипедот?

398. Полупречникот на базата, висината и изводницата на исправен конус се три последовни члена на аритметичка прогресија. Обвивката на конусот е 375π cm^2, а површината на оскиниот пресек е 300 cm^2. Пресметај ја зафатнината на конусот.

ИНТЕРПОЛАЦИЈА НА АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

399. Помеѓу дадените броеви a и b треба да се интерполира аритметичка прогресија од r членови, така што во настанатата прогресија да биде a првиот, а b последниот член. Најди ја диференцијата на интерполираната прогресија.

400. Објасни ја на бројната линија интерполацијата и геометриски определи ја диференцијата на интерполираната прогресија.

401. а) Помеѓу 5 и 15 интерполирај 4 члена на аритметичка прогресија. Напиши ја настанатата прогресија.

б) Помеѓу 3 и 7 интерполирај 7 членови на аритметичка прогресија.

в) Помеѓу 1 и 5 интерполирај аритметичка прогресија од 6 члена.

г) Помеѓу -14 и -7 интерполирај девет члена на аритметичка прогресија.

д) Помеѓу -3 и 1 интерполирај седум члена на аритметичка прогресија.

402. Помеѓу a и b интерполирај аритметичка прогресија од 4 члена. Напиши ја настанатата прогресија.

403. Помеѓу $a-b$ и $a+b$ интерполирај аритметичка прогреси·а од четири члена. Напиши ја целата прогресија; определи го збирот на целата прогресија.

404. а) Дадени се логаритмите на броевите и тоа: $\log 74\,510 = 4{,}87221$ и $\log 74\,520 = 4{,}87227$. Определи го $\log 74\,513$ ако се претпостави дека логаритамот расте пропорционално на нумерусот.

б) Дадени се $\log 92{,}23 = 1{,}96487$ и $\log 92{,}24 = 1{,}96492$. Пресметај го $\log 92{,}237$.

405. Помеѓу броевите 5 и 12 треба да се интерполира извесен број членови на аритметичка прогресија така што збирот на интерполираната прогресија (исклучувајќи ги 5 и 12) да изнесува 51. Колку членови треба да се интерполираат и колкава е разликата на новата прогресија?

406. Колку членови треба да се интерполираат помеѓу 2 и 8 така што збирот на интерполираните членови да изнесува 55?

407. а) Помеѓу 2 и 11 интерполирај таква аритметичка прогресија што збирот на сите членови да се однесува спрема збирот на интерполираните членови како $5:4$. Колку членови треба да се интерполираат?

б) Помеѓу 1 и 21 интерполирај аритметичка прогресија така што збирот на сите членови да се однесува спрема збирот на интерполираните членови како $11:9$.

408. Температурата мерена во 6 часот изнесувала $10° C$ а до 14 часот нараснала на $26°C$. Ако претпоставиме дека температурата растела пропорционално со времето, треба да се определи темература во $6\frac{1}{2}$ часот, во 7 часот, во $7\frac{1}{2}$ часот итн.

409. Четири броја даваат аритметичка прогресија. Збирот на реципрочните вредности на крајните членови изнесува $\frac{1}{8}$, а збирот на реципрочните вредности на средните членови е $\frac{1}{12}$. Кои се тие броеви? Помеѓу средните членови на добиената прогресија интерполирај нова аритметичка прогресија така што нејзиниот збир да е еднаков на квадратот од бројот на нејзините членови. Колкава е диференцијата на интерполираната прогресија?

§ 8. ГЕОМЕТРИСКИ НИЗИ ИЛИ ГЕОМЕТРИСКИ ПРОГРЕСИИ

410. Која низа од броеви ја нарекуваме геометриска прогресија или геометриска низа?

411. Напиши неколку членови на геометриски прогресии кои почнуваат со $a_1 = 4$, ако количникот q е даден со:

а) $q = 3$ б) $q = 1$ в) $q = \frac{1}{2}$

г) $q = -\frac{1}{2}$ д) $q = -1$ ѓ) $q = -3$

412. Повтори ја претходната задача за случај првиот член да е $a_1 = -4$, а количникот q да има вредност:

а) $q = -3$ б) $q = -1$ в) $q = -\frac{1}{2}$

г) $q = \frac{1}{2}$ д) $q = 1$ ѓ) $q = 2$

413. Напиши ја ретроградно геометриската прогресија кај која петтиот член е $a_5 = 32$, а количникот $q = 2$.

414. Напиши ја ретроградно геометриската прогресија ако нејзиниот шести член е $a_6 = 3$, а количникот $q = \frac{1}{2}$.

415. Напиши ја ре роградно геометриската прогресија ако се дад ни нејзините членови $a_5 = 4$, $a_4 = 2$.

416. Напиши неколку члена на геометриска прогресија ако се дадени првите два нејзини члена:

а) 1, 3 б) 2, 3 в) 4, —8 г) 3, $\frac{3}{2}$ д) 2, $\frac{3}{2}$

417. Изведи ја формулата за n-тиот член на геометриската прогресија (a_n) ако првиот член е a, а количникот q.

418. Пресметај го непосредно петтиот член на геометриската прогресија ако првиот член $a_1 = 3$, а количникот $q = 2$.

419. а) Пресметај го непосредно a_7, ако е $a_1 = \frac{3}{4}$, $q = 2$

б) Најди го a_9 од $a_1 = 4$, $q = -2$.

в) Најди го a_{14} од $a_1 = 8\,192$, $q = 0{,}5$.

420. Пресметај го непосредно дванаесетиот член на геометриската прогресија 3, 9; 7, 8; 15, 6;... и провери го најдениот резултат со пишување на членовите од низата.

421. Пресметај го непосредно десетиот член на геометриската прогресија:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

422. Петтиот член на геометриската прогресија е 162, а шестиот е 486. Пресметај го првиот член.

423. Последниот член на геометриската прогресија од седум членови е 819,2 а претпоследниот е 203,8. Пресметај го првиот член.

424. а) Пресметај го збирот од првите десет членови на прогресијата: 1, 2, 4,...

б) Пресметај го збирот од првите седум членови на прогресијата: —2, 4, —8, 16,...

в) Пресметај го збирот од првите осум членови на прогресијата: $3, \; -1\frac{1}{3}, \ldots$

г) Пресметај го збирот од првите единаесет членови на прогресијата: $-2, \; 1, \; -\frac{1}{2}, \ldots$

425. а) Збирот на првите седум членови на геометриската прогресија изнесува 127, а количникот е 2. Како гласи првиот член?

б) $S_6 = 1\,638$, $q = -4$; најди го a_1.

426. Пресметај ги n и S_n ако е дадено:

а) $a = 3$*), $q = 2$, $a_n = 96$ б) $a = 5$, $q = 3$, $a_n = 405$

---

*) Често, поради едноставност, првиот член a_1 го пишуваме со a

б) $a=9$, $q=\frac{2}{3}$, $a_n=\frac{32}{27}$

в) $a=\frac{3}{8}$, $q=-4$, $a_n=96$

г) a, q, a_n; $q>0$ и $a_n>0$

427. Пресметај ги q и S_n ако се дадени:

а) $a=3$ $\quad a_n=12\,288$ $\quad n=5$

б) $a=-15$ $\quad a_n=-15\,360$ $\quad n=11$

в) $a=81$ $\quad a_n=-10\frac{2}{3}$ $\quad n=6$

г) $a=\frac{1}{64}$ $\quad a_6=-\frac{16}{243}$

д) a, a_n, n, $a \cdot a_n>0$

428. Определи ги q и n ако се познати:

а) $a=2$ $\quad a_n=1\,458$ $\quad S_n=2\,186$

б) $a=1$ $\quad a_n=2\,401$ $\quad S_n=2\,801$

в) $a=3$ $\quad a_n=96$ $\quad S_n=189$

г) $a=2$ $\quad a_n=1\,458$ $\quad S_n=1\,514$

д) a, a_n, S_n, (дискутирај го решението)

429. Пресметај ги a_n и S_n ако се дадени:

а) $a=6$, $q=3$, $n=8$ $\qquad$ б) $a=-5$, $q=2$, $n=9$

в) $a=5$, $q=-\frac{1}{5}$, $n=6$ $\qquad$ г) $a=\frac{3}{4}$, $q=\frac{2}{3}$, $n=10$

д) a, q, n (дискутирај го решението)

430. Определи ги a_n и n ако се дадени:

а) $a=7$, $q=3$, $S_n=847$ $\qquad$ б) $a=8$, $q=2$, $S_n=4\,088$

в) $a=2$, $q=-3$, $S_n=-364$ $\qquad$ г) $a=3$, $q=-2$, $S_n=33$

д) a, q, S_n (дискутирај го решението)

431. Пресметај ги a и S_n ако се дадени:

а) $a_n=128$, $q=2$, $n=7$ $\qquad$ б) $a_n=78\,125$, $q=5$, $n=8$

в) $a_5 = \frac{2}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$ г) $a_6 = -243$, $q = -\frac{3}{2}$

д) a_n, q, n (дискутирај го решението).

432. Последниот член на геометриската прогресија е 384, претпоследниот е 192, а збирот на целокупната прогресија изнесува 765. Кој е првиот член и колку членови има прогресијата?

433. Пресметај го првиот член и количникот на геометриската прогресија ако се познати членовите:

а) $a_3 = 8$, $a_9 = \frac{1}{8}$ б) $a_4 = 40$, $a_7 = 320$

в) $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_6 = \frac{3}{32}$ г) $a_2 = -\frac{5}{3}$, $a_7 = \frac{5}{729}$

434. Збирот на вториот, третиот и четвртиот член на геометриската прогресија изнесува 28, а разликата од шестиот и третиот член е -7. Која е таа прогресија?

435. Најди ја геометриската прогресија од шест члена ако се знае дека збирот на првата половина членови изнесува 112, а збирот на втората половина е 14.

436. Определи ја геометриската прогресија чии членови ги исполнуваат равенките:

а) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$, $a_1 \cdot a_3 = 4$

б) $a_1 + a_2 + a_3 = 26$, $a_1 \cdot a_3 = 36$

в) $a_3 - a_1 = 12$, $a_1 \cdot a_3 = 64$

г) $a_1 + a_2 - a_3 = 5\frac{4}{5}$, $a_1 \cdot a_3 = 1$

437. Цифрите на трицифрен број се три последовни члена на геометриска прогресија. Збирот на првата и третата цифра е $2\frac{1}{2}$ пати поголем од средната. Ако се измени редот на цифрите, бројот ќе се намали за 297. Кој е тој број?

438. Како се менуваат апсолутните вредности на членовите на геометриската прогресија ($|a_n|$) ако n расте, а количникот на прогресијата q по апсолутната вредност е:

а) $|q| < 1$ б) $|q| = 1$ в) $|q| > 1$

439. Напиши неколку члена од геометриската прогресија ако се зададени првите два члена:

а) $a,\ 2a$ б) $x, -\frac{1}{3}x$ в) $a,\ b$ г) $x-y,\ x+y$

д) $\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$ ѓ) $a+2b,\ 2a+b$

440. Кога низата од броеви $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,$ ќе дава геометриска прогресија?

441. Покажи дека секој член на геометриската прогресија го има својството да е средна геометриска пропорционала на членовите помеѓу кои лежи.

442. Во геометриската прогресија кој и да било член a_n е средна геометриска пропорционала на членовите a_{n-r} и a_{n+r}. — Докажи.

443. Докажи ја оваа теорема: ако a, b и c даваат три последовни члена на геометриска прогресија, постои релацијата:

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$$

444. Претстави ги на бројната линија геометриските прогресии:

а) $1,\ 2,\ 4,\ 8$ б) $4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

в) $4, -2,\ 1, -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$ г) $1, -2,\ 4, -8,\ 16$

445. Во геометриската прогресија се познати $a_1=2$, $a_6=64$. Пресметај го количникот.

446. Во геометриската прогресија е $a_1=1$, $a_4=-27$. Пресметај го q.

447. Во геометриската прогресија е $a_5=32$, $q=2$. Пресметај го a_1.

448. Изведи ја формулата за збирот на n членовите на геометриската прогресија.

449. а) Пресметај го збирот на првите пет членови на прогресијата:

$$\sqrt{\frac{2}{3}},\ 1,\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ldots$$

б) Пресметај го збирот на првите седум членови на прогресијата:

$$\sqrt{\frac{5}{6}},\ 1,\ \sqrt{\frac{6}{5}},\ldots$$

в) Пресметај го збирот на првите n членови на прогресијата:

$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$

г) Пресметај го збирот на првите n членови на прогресијата:

$\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \ldots$

д) Најди го збирот на n членовите на прогресијата $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \ldots$

450. Во равенката за a_n и S_n доаѓаат пет величини: a_1, a_n, q, n и S_n. Ако се дадени три од тие величини, тогаш преостанатите две величини можат да се пресметаат од тие две равенки. Колку видови задачи можат да се комбинираат со оглед на тие три познати и двете непознати величини?

451. Пресметај ги a и n, ако се дадени:

а) $a_n = -216$, $q = -6$, $S_n = -186$

б) $a_n = 250$, $q = 5$, $S_n = 312$

в) $a_n = 32\,768$, $q = 4$, $S_n = 43\,008$

г) $a_n = 1\,215$, $q = -3$, $S_n = 945$

д) a_n q, S_n — Дискутирај!

452. Пресметај ги a_1 и a_n ако се дадени:

а) $q = 2$, $n = 7$, $S = 635$ б) $q = -2$, $S_8 = 85$

в) $q = -\frac{1}{2}$, $S_8 = \frac{85}{16}$ г) $q = \frac{1}{3}$, $S_6 = \frac{364}{9}$

д) q, n, S_n — Дискутирај!

453. а) Збирот на првиот и третиот член на геометриската прогресија изнесува 15, а збирот на вториот и четвртиот е 30. Која е таа прогресија?

б) $a_1 + a_3 = 24$, $a_3 + a_5 = 384$

в) $a_1 + a_4 = 52$, $a_2 + a_3 = -12$

г) $a_3 - a_1 = 24$, $a_5 - a_1 = 624$

454. Најди ги четирите броја кои даваат геометриска прогресија ако првиот е поголем од вториот за 36, а третиот е поголем од четвртиот за 4.

455. Четири броја се членови на геометриска прогресија. Збирот на крајните изнесува 27, а збирот на средните 18. Кои се тие броеви?

456. Која геометриска прогресија го има својството збирот на првиот и шестиот член да е 33, а збирот на третиот и четвртиот 12? (Задачата води кон симетрична равенка).

457. Три броја се последовни членови на геометриска прогресија. Нивниот збир е 28, а производот од средниот член со збирот на крајните членови изнесува 160. Кои се тие броеви?

458. Збирот на три реални броја кои даваат геометриска прогресија изнесува 28, а производот од геометриската средина со аритметичката средина на крајните членови е 80. Која е таа прогресија ($aq > 0$)? (Симетрична равенка!)

459. Во растечка геометриска прогресија од реални членови збирот на првиот и седмиот член изнесува 65, а производот од третиот и петтиот член е 64. Кој член на таа прогресија изнесува 1 024?

460. Збирот на три броја кои даваат геометриска прогресија изнесува 35, а збирот на нивните реципрочни вредности $\frac{7}{20}$. Кои се тие броеви?

461. Збирот на три реални броја кои даваат геометриска прогресија изнесува 7, а збирот на нивните квадрати 21. Кои се тие броеви?

462. Збирот на првите шест членови на геометриска прогресија со реални членови е 189, а збирот на следните шест е 12 096. Најди ја таа прогресија?

463. Последниот член на една геометриска прогресија е 486, претпоследниот 162, а збирот на сите членови 728. Најди го збирот на прогресијата која настанува со вадењето на вториот корен од членовите на бараната прогресија?

464. Во геометриска прогресија разликата од четвртиот и вториот член се однесува спрема разликата од вториот и првиот член како 6:1, а збирот на првите три члена изнесува 63. Која е таа прогресија?

465. Геометриска прогресија има четири члена. Збирот на крајните членови се однесува спрема збирот на средните членови како 3:2. Вториот член е за 72 помал од четвртиот. Најди ја таа прогресија.

466. Три броја се членови на геометриска прогресија. Ако првиот се подели со четири, вториот се намали за 6, а третиот се намали за збирот на првите два, се добива пак геометриска прогресија и тоа со и с т количник. Кои се тие броеви?

467. Три броја даваат геометриска прогресија. Нивниот збир е рамен на нивните реципрочни вредности, т. е. $\frac{7}{2}$. Кои се тие броеви?

468. Две геометриски прогресии имаат ист почетен член. Збирот на вторите членови изнесува 5; третите членови се разликуваат за 5, а четвртите за 19. Кои се тие прогресии?

469. Кај две геометриски прогресии четвртиот член е ист. Збирот на третите изнесува 16, разликата од вторите 16, а разликата од првите 26. Кои се тие прогресии?

470. Во растечка геометриска прогресија петтиот член е рамен на количникот, а збирот на вториот и третиот член е $1\frac{1}{9}$. Најди го првиот член и збирот на првите седум членови на прогресијата.

471. Во геометриската прогресија со непарен број членови првиот член е 3, средниот 24, а збирот на сите членови е 381. Колкав е последниот член, количникот и бројот на членовите?

472. Во геометриска прогресија со непарен број членови првиот член е 7, среднот 56, а збирот на сите членови 889. Најди го количникот и бројот на членовите.

473. Збирот на првата половина членови на геометриска прогресија со количник 2 изнесува 15, а збирот на втората половина е 240. Колку членови има прогресијата и како гласи последниот член?

474. Во геометриска прогресија збирот на првиот и последниот член изнесува 85, производот од тие членови изнесува 400, а збирот на сите членови е 55. За која прогресија станува збор?

475. а) Најди ги m-тиот и n-тиот член на геометриската прогресија во која е $(m+n)$-тиот член рамен на k, а $(m-n)$-тиот рамен на l.
б) Најди го n-тиот и $(m+p)$-тиот член на геометриска прогресија во која m-тиот член е рамен на k, а p-тиот член е рамен на l.

476. Докажи дека равенката $ax^2+2bx+c=0$ има двојно решение ако се a, b, c последовни членови на геометриска прогресија.

477. Во 8 часот еден човек дознал новост и им ја соопшти во $8\frac{1}{4}$ часот на двајца познати; по $\frac{1}{4}$ час секој од овие двајца ја соопштува истата новост на двајца нови познати и така тоа се повторува секој $\frac{1}{4}$ час. До колку часот во град со 8 000 жители секој жител ќе биде информиран за новоста?

478. Според арапските извештаи индискиот крал Серан му понудил на пронаоѓачот на шахот Сес Ебн Дахер по желба да си избере награда. Овој го замолил да му даде пченица толку колку што ќе се добие вкупно кога на првото шаховско поле би ставил 1 зрно, на второто поле 2 зрна, на третото 4 зрна итн, ставајќи на секое поле двапати повеќе отколку што е ставено на претходното поле. Колку зрна пченица би добил пронаоѓачот на шахот?

479. а) Во едно буре има 100 l вино. Вадиме 1 l вино и наместо него налеваме 1 l вода. Повторно вадиме од смесата 1 l и долеваме 1 l вода итн. Колкупати мора да се повтори оваа постапка, така што на крајот во бурето да има 50 l вино?

б) Во еден сад има 50 l осумдесетпроцентов шпиритус. Уште колку литра чист шпиритус ќе има во садот ако од садот се извади 20-пати по 1 l течност и секогаш наместо него се долее по 1 l вода?

480. Еден вид бактерии се размножува со делење на две, така што делењето се врши секој час. Колку потомци ќе се развијат од една бактерија за 10 часа, а колку за 24 часа под претпоставка развитокот со ништо да не се спречува?

481. Бројните вредности на страните на триаголникот се последовни членови на геометриска прогресија. Обемот на триаголникот е 19 cm, а збирот на квадратите на страните е 133 cm^2. Најди ги страните на триаголникот.

482. Страните на еден триаголник даваат геометриска прогресија со количник $q = \dfrac{4}{3}$. Колкав е најмалиот агол на триаголникот?

Ако најдолгата страна на триаголникот се намали за 1, се добива правоаголен триаголник во кој таа страна е хипотенуза. Колкави се страните на зададениот триаголник?

483. Бројните вредности на димензиите на правоаголен паралелопипед образуваат геометриска прогресија. Површината на базата е 8 cm^2, а целокупната површина на паралелопипедот изнесува 112 m^2. Пресметај ги димензиите на паралелопипедот.

484. Бројните вредности на димензиите на правоаголен паралелопипед се членови на геометриска прогресија. Зафатнината на паралелопипедот изнесува 216 m^3, а дијагоналата $\sqrt{364}$ m. Кои се димензиите на паралелопипедот?

485. Основните рабови и висината на исправена пирамида на која базата и е правоаголник се три последовни членови на геометриска прогресија. Зафатнината на пирамидата е 576 cm^3, а површината на нејзиниот дијагонален пресек е 120 cm^2. Пресметај ја површината на пирамидата.

ИНТЕРПОЛАЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

486. Помеѓу дадените броеви a и b треба да се интерполираат r членови на геометриска прогресија така што да е a првиот, а b последниот член на таа прогресија. Определи го количникот на настанатата прогресија.

487. а) Помеѓу 1 и 32 интерполирај четири члена на геометриска прогресија.

б) Помеѓу 2 и $\frac{2}{243}$ интерполирај четири члена на геометриска прогресија.

в) Помеѓу 16 и $\frac{1}{16}$ интерполирај седум члена на геометриска прогресија.

г) Помеѓу a и $\frac{a^5}{b^4}$ интерполирај три члена на геометриска прогресија.

488. а) Помеѓу 2 и 5 интерполирај четири члена на геометриска прогресија.

б) Помеѓу 7 и 8 интерполирај три члена на геометриска прогресија.

в) Помеѓу a и b интерполирај пет члена на геометриска прогресија.

г) Помеѓу 1 и $\frac{x}{y}$ интерполирај шест члена на геометриска прогресија.

489. Помеѓу секои два члена на геометриската прогресија 1, 8, 64, 512 интерполирај два нови члена.

490. Помеѓу секои два члена на прогресијата 1, 3, 9, 27 интерполирај два члена.

491. Помеѓу секој два члена на прогресијата 1, a, a^2, a^3, интерполирај по 1 член, така што да настане нова геометриска прогресија.

492. Помеѓу 6 и 1 536 интерполирај седум члена на геометриска прогресија и определи го збирот на интерполираните членови.

493. Помеѓу 3 и 48 интерполирај геометриска прогресија, така што збирот на целокупната прогресија да изнесува 93 (вклучи ги во збирот 3 и 48).

494. Помеѓу 8 и $\frac{1}{16}$ интерполирај таква геометриска прогресија што збирот на сите членови да се однесува спрема збирот на интерполираните членови како $85:42$.

495. Помеѓу 2^n и 2^{2n} интерполирај $n-1$ членови на геометриска прогресија. Определи го збирот на таа прогресија вклучувајќи ги крајните членови (2^n и 2^{2n}). Која вредност мора да ја добие n, така што збирот на прогресијата да биде 120?

§ 9. АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИСКИ ПРОГРЕСИИ ИЛИ НИЗИ — ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА НЕКОИ ЗБИРОВИ

496. Аритметичка и геометриска прогресија имаат ист трети член кој изнесува 4. Производот од првите членови е 2, а од вторите е 6. Кои се тие прогресии?

497. Три броја даваат аритметичка прогресија, така што разликата на прогресијата да е рамна на четирипати зголемениот прв член. За колку треба да се намали средниот член за да се добие геометриска прогресија? Колкав е количникот на таа прогресија?

498. Аритметичка прогресија од осум члена и геометриска прогресија од четири члена почнуваат со 1 и се совпаѓаат во последниот член. Збирот на геометриската прогресија е поголем за 7 од последниот член на аритметичката прогресија. Како гласат овие прогресии?

499. Дадени се две прогресии, една аритметичка и една геометриска, кои имаат ист прв член $a = 8$. Определи ја диференцијата на првата и количникот на втората прогресија, така што третите членови да бидат меѓусебно еднакви, а исто така и нивните четврти членови. Напиши ги првите четири члена на тие прогресии.

500. Збирот на три броја кои даваат геометриска прогресија е 39. Ако од третиот број се одземе 9, тогаш броевите стануваат членови на аритметичка прогресија. Кои се тие броеви?

501. Збиро` на три последовни члена на геометриска прогресија изнесува 13. Ако средниот член се зголеми за 2, прогресијата преминува во аритметичка. Кои се тие броеви?

502. Три броја образуваат аритметичка прогресија. Нивниот збир изнесува 9. Ако првиот број се зголеми за 4, прогресијата преминува во геометриска. Најди ги тие броеви.

503. Три броја се членови на аритметичка прогресија. Ако средниот се зголеми за $7\frac{1}{2}$, се добива геометриска прогресија со количник кој е рамен на разликата на зададената прогресија. Кои се тие броеви?

---

504. а) Пресметај го збирот на квадратите на првите n природни броеви.

б) Пресметај го збирот на квадратите на првите n парни броеви.

в) Пресметај го збирот на квадратите на првите n непарни броеви.

505. а) Пресметај го збирот на кубовите на првите n природни броеви.

б) Пресметај го збирот на кубовите на првите n парни броеви.

в) Пресметај го збирот на кубовите на првите n непарни броеви.

506. Пресметај го збирот на четвртите степени на првите n природни броеви.

Пресметај го збирот на првите n членови од овие редови:

507. а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+1)$ б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+2)$ в) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+3)$.

г) Врз основа на резултатите постигнати под а), б), в) напиши ги непосредно изразите за збировите: $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+4)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+5)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+a)$.

д) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2)$ ѓ) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+2)\,(k+4)$

е) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+1)^2$ ж) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+2)^2$

508. Најди ги збировите: $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+20a^{19}$.

509. а) $a+2a^2+3a^3+\ldots+(n-1)a^{n-1}+na^n$

б) $1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1}$

в) $1+2\left(\frac{x}{y}\right)+3\left(\frac{x}{y}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

510. а) $a+(a+b)\,x+(a+2b)\,x^2+(a+3b)\,x^3\ldots+(a+mb)x^m$.

б) Помножи ги членовите на аритметичката прогресија a, $a+d$, $a+2d,\ldots a+(n-1)\,d$ со кореспондентните членови на геометриската прогресија b, bq, $bq^2,\ldots bq^{n-1}$ и определи го збирот на настанатата прогресија.

511. Аритметичката средина на два позитивни реални броја е поголема од нивната геометриска средина. — Докажи! Кога аритметичката средина е рамна на геометриската?

512. Збирот на првите десет членови на една аритметичка прогресија изнесува 155. Почетниот член на аритметичката прогресија е истовремено и количник на некоја геометриска прогресија кај која збирот на првите два члена изнесува 9, а почетниот член се совпаѓа со разликата на аритметичката прогресија. Кои прогресии ги исполнуваат ови услови?

513. Три броја кои образуваат геометриска прогресија го даваат збирот 26. Ако на овие броеви им се додадат респективите 1, 6 и 3 (на првиот му се додава 1, на вториот 6, на третиот 3), се добиваат три броја кои образуваат аритметичка прогресија. Најди ги тие броеви.

514. Три броја чиј збир е 15 даваат аритметичка прогресија. Ако на тие броеви им се додадат респективите 1, 4, и 19, се добиваат три броја кои даваат геометриска прогресија. Најди ги тие броеви.

515. а) Ако на четири члена од аритметичка прогресија им се зголемат респективите за 1, 1, 3 и 9, тогаш се добиваат четири броја кои даваат геометриска прогресија. Кои се тие броеви?

б) Ако на четири броја, кои се последовни членови на геометриска прогресија, им се зголемат респективите за 5, 6, 9 и 15, се добиваат четири броја кои даваат аритметичка прогресија. Најди ги тие броеви.

516. Три члена на аритметичка прогресија можат на два начина да преминат во геометриска прогресија, така што третиот член да се зголеми за 9, или вториот член да се намали за 2. Која е таа прогресија?

517. Три броја чиј збир е K образуваат аритметичка прогресија. Ако првите два броја останат непроменети, а третиот го зголемиме за $\frac{4K}{6}$, се добива геометриска прогресија. Кои се тие броеви?

518. Три броја се членови на геометриска прогресија. Ако вториот број се зголеми за 8, прогресијата станува аритметичка. Ако во таа аритметичка прогресија последниот член се зголеми за 64, таа пак станува геометриска. Кои се тие три броја?

519. Аритметичка и геометриска прогресија со позитивни членови имаат ист почетен член. Разликата на првата прогресија е рамна на количникот на втората. Кои се тие прогресии ако производот од вториот член на геометриската прогресија и шестиот член на аритметичката прогресија е 102, а производот од првиот и петтиот член на геометриската прогресија изнесува 324?

520. Првиот член на аритметичка прогресија е рамен на количникот на некоја геометриска прогресија, а првиот член на геометриската прогресија е рамен на разликата на аритметичката прогресија. Збирот на првите пет члена на аритметичката прогресија изнесува 40, а збирот на првите два члена на геометриската прогресија е 10. Кои се тие прогресии?

521. Ако два броја се земат како први два члена на аритметичка прогресија, тогаш разликата од четвртиот и вториот член на таа прогресија ќе биде 2; ако пак тие два броја се сметаат како почетни членови на геометриска прогресија, тогаш разликата помеѓу четвртиот и вториот член би била 6. Како гласат обете прогресии?

522. Првиот член на една аритметичка прогросија е за 1 поголем од првиот член на некоја геометриска прогресија; вториот член на аритметичката прогресија е исто така за 1 поголем од вториот член на геометриската прогресија; третите членови се исти, а четвртиот член на геометриската прогресија е за 3 поголем од четвртиот член на аритметичката прогресија. Кои се тие прогресии?

523. Во три геометриски прогресии првите членови градат пак геометриска прогресија со количник 2, а количниците на тие три прогресии даваат аритметичка прогресија со диференција 1. Збирот на вторите членови на сите три геометриски прогресии изнесува 24, а збирот на првите три членови на третата геометриска прогресија изнесува 84. Кои се тие прогресии?

524. а) Три броја чиј збир е 114 можеме да ги сметаме како три последовни члена на геометриска прогресија или како прв, четврти и дваесетипети член на аритметичка прогресија. Најди ги тие броеви.

б) Три броја чиј збир е 124 го имаат својството да со три последовни члена на геометриска прогресија, а истовремено и трети, тринаесетти и петнаесетти член на аритметичка прогресија. Најди ги тие броеви.

525. Збирот на првите три члена на геометриска прогресија е 35, а нивниот производ е 1 000. Збирот на првите три члена на аритметичка прогресија е 45, а нивниот производ 3 000. Кој член на геометриска прогресија се совпаѓа со 63-тиот член на аритметичката?

526. Една аритметичка и геометриска прогресија од по 4 члена имаат ист почетен член. Вредноста на размерот на вторите членови е $\frac{3}{2}$, на третите е $\frac{5}{4}$, а збирот на првиот и последниот член на геометриската прогресија е 81. Кои се тие прогресии?

527. Ако од четири броја се отфрли првиот, останатите даваат геометриска прогресија. Ако се отфрли последниот, останува аритметичка прогресија. Определи ги тие броеви ако збирот на првата (геометриска) прогресија изнесува 13, а на втората 3.

528. Постојат три броја кои даваат аритметичка прогресија и други три кои образуваат геометриска прогресија. Ако се соберат членовите на обете прогресии од ист ранг, се добива со ред 3, 7, и 15. Збирот на членовите на аритметичката прогресија изнесува 12. Кои се тие прогресии?

529. Првиот, вториот, петтиот и последниот член на некоја аритметичка прогресија истовремено се последовни членови на една геометриска прогресија. Збирот на овие четири члена изнесува 80. Која е таа аритметичка прогресија и колку члена има прогресијата?

530. Помеѓу два броја x и y $(x > y)$ треба да се интерполира по еден број така што тие три броја еднаш да даваат аритметичка а другпат геометриска прогресија. Интерполираниот член на аритметичката прогресија треба да е за 6 поголем од интерполираниот член на геометриската прогресија и спрема него да се однесува како $5:3$. Како гласат обете прогресии? — Колку членови на аритметичката прогресија треба да се соберат за да се добие збир рамен на вредноста на нејзиниот интерполиран член?

531. Првиот член на аритметичка прогресија е за 1 поголем од првиот член на некоја геометриска прогресија. Третиот член на геометриската прогресија е за 1 поголем од истиот член на аритметичката прогресија. Збирот на првите три члена на аритметичката прогресија е за 1 поголем од збирот на првите три члена на геометриската прогресија. Кои се тие прогресии ако разликата на аритметичката прогресија е рамна на количникот на геометриската?

532. Најди ги аритметичката и геометриската прогретија под услов збирот на првите членови на обете прогресии да е 23, збирот на вторите членови 21, збирот на третите чледови 22, а на четвртите 29.

§ 10. БЕСКОНЕЧНИ НИЗИ — МОНОТОНИ НИЗИ — БЕСКОНЕЧНИ РЕДОВИ — БЕСКОНЕЧЕН ГЕОМЕТРИСКИ РЕД

533. Кога велиме дека бесконечната низа:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$

дивергира кон $+\infty$?

534. Напиши неколку бесконечни низи кои се стремат кон $+\infty$.

535. Кога велиме дека бесконечната низа

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{+1}, \ldots$

дивергира кон $-\infty$?

536. Напиши неколку бесконечни низи кои се стремат кон $-\infty$.

537. Кога велиме дека бесконечната низа

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

конвергира (или се стреми) кон бројот a?

538. Кога граничната вредност (лимеса) на бесконечната низа ќе биде нула?

539. Дали е конвергентна бесконечната низа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$?

Зошто 0 е граничната вредност на оваа низа?

Испитај ја конвергенцијата, односно дивергенцијата, на низите

540. а) $1, 2, 3, 4, \ldots$

б) $+1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots$

в) $2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, \ldots 2, 3, 4, \ldots$

г) $1+\frac{1}{1}, 2+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 4+\frac{1}{4}, \ldots$

541. а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

б) $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}, \ldots$

в) $3, 3+\frac{1}{2}, 3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{4}, 3-\frac{1}{4}, 3+\frac{1}{8}, 3-\frac{1}{8}, \ldots$

г) $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

542. а) $-4, -4+\frac{1}{2}, -4+\frac{1}{4}, -4+\frac{1}{6}, \ldots$

б) $-4, -4-\frac{1}{10}, -4-\frac{1}{10^2}, -4-\frac{1}{10^3}, \ldots$

в) $-4+4\frac{1}{2}, -4+4\frac{1}{4}, -4+4\frac{1}{6}, \ldots, -4+4+\frac{1}{2n}, \ldots$

г) $4-4\frac{1}{10}, 4-4\frac{1}{100}, 4-4\frac{1}{1000}, \ldots, 4-4-\frac{1}{10^n}, \ldots$

543. Има ли гранична вредност (дали е конвергентна) низата:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$?

544. Испитај ги во поглед на конвергенцијата бесконечните геометриски низи:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ б) првиот член $a_1 = 1$, количникот $q = \frac{3}{2}$

в) $a_1 = 2, q = -\frac{1}{3}$ ѓ) $a_2 = -4, q = 2.$

545. Каква е бесконечната низа $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$ за:

α) $|q| < 1$ β) $|q| > 1$ γ) $q = 1$ δ) $q = -1$

546. Напиши неколку члена на бесконечни низи чиј општ член е:

а) $a_n = \frac{1}{n}$ б) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ в) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

г) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ за $n = 1, 2, 3, \ldots$

547. Зададени се бесконечни низи:

а) $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \ldots$

б) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

в) $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots$ г) $3, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \ldots$

Напиши ги изразите за нивните општи членови.

548. Испитај ја конвергенцијата на монотоните низи:

а) $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$ б) $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$

в) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$

г) $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots \frac{1}{n^2}, \ldots$

д) 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; .... ѓ) $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots,$

е) $-0,4; -0,34; -0,334;$ 0,3334; ...

549. Се знае дека $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$ Напиши неколку члена:

а) на монотона низа која не опаѓа,

б) на монотона низа која не расте и која има $\sqrt{2}$ како своја гранична вредност.

550. Ако низата $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ расте каква е низата

$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots \frac{1}{a_n}, \ldots$ и обратно?

551. Ако монотоната низа не е конвергентна, како расте, односно како опаѓа?

552. Каква е аритметичката низа на која разликата ѝ е $d > 0$,а каква е аритметичката прогресија на која разликата ѝ е $d < 0$?

553. Може ли бесконечна аритметичка прогресија да биде конвергентна?

554. Испитај ја во поглед на монотоноста бесконечната геометриска низа.

555. Што нарекуваме бесконечен ред?

556. Напиши ги бесконечните редови кои припаѓаат кон бесконечните низи:

а) $1, 3, 9, 27 \ldots, 3^n, 3^{n+1}, \ldots$ б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

в) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

г) $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \ldots$

д) $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots$

557. На секој бесконечен ред:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$

му припаѓа определена бесконечна низа:

$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots a_n, \ldots$

која се вика низа на парцијалните збирови на редот. Образувај ги низите на парцијалните збирови кои припаѓаат кон бесконечните редови:

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$ б) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$

в) $1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots$

г) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$

558. Кога велиме дека бесконечниот ред е конвергентен, а кога дивергентен?

559. Што се подразбира под збир на бесконечниот конвергентен ред?

560. Докажи ја теоремата: бесконечниот геометриски ред

$a + aq + aq^2 + \ldots.$

е конвергентен за $|q| < 1$ и тогаш е неговиот збир $S = \frac{a}{1-q}$.

561, Зошто бесконечниот геометриски ред.

$a + aq + aq^2 + \ldots$

за $|q| >$ не е конвергентен?

562. Каков е бесконечниот геометриски ред

$a + aq + aq^2 + \ldots$

за а) $q = +1$ б) $q = -1$?

563. Претстави го графички збирот на бесконечниот геометриски ред:

а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ б) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots$

564. Определи го збирот на бесконечниот геометриски ред:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

а) со помошта на формулата за збирот на бесконечниот геометриски ред.

б) со помошта на лимесата на низа од парцијални збирови $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ldots,$

в) испиши ја $\lim\limits_{n \to \infty} |2 - s_n|$,

г) Ако збирот на набљудуваниот ред $s = 2$ го замениме со парцијалните збирови (го апроксимираме s со $s_1, s_2, \ldots$, т. е. ако земеме дека е $s \approx s_1, s \approx s_2 \ldots$), тогаш правиме грешка колкава е таа грешка?

д) Ако направените грешки ги означиме со ред со $R_1, R_2, R_3, \ldots$, определи ја $\lim\limits_{n \to \infty} R_n$.

565. Одговори на прашањата од претходната задача при бесконечните геометриски редови:

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ б) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots$

в) $a_1 = 4, q = \frac{1}{2}$ г) $a_1 = 10, q = -0{,}1$

566. Пресметај го збирот на бесконечните редови применувајќи ја формулата за збирот на бесконечните геометриски редови:

а) $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+-\ldots$ б) $1+\frac{1}{1{,}05^2}+\ldots$

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$ г) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$

567. а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\ldots$

б) $\frac{2}{8}+\frac{5}{8^2}+\frac{2}{8^3}+\frac{5}{8^4}+\frac{2}{8^5}+\ldots$

в) $3+5\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots$

г) $2+3+4+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{5}{6}+2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots+$

$+3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2+4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\ldots$

Со примена на бесконечни геометриски редови претвори ги во обични дропки периодските децимални броеви:

568, а) $0{,}\dot{3}\dot{7}$ б) $0{,}\dot{7}$ в) $0{,}\dot{4}0\dot{8}$ г) $3{,}\dot{5}69\dot{7}$

569. а) $2{,}7\dot{5}$ б) $0{,}5\dot{1}\dot{7}$ в) $14{,}50\dot{8}$, г) $0{,}32\dot{4}\dot{9}$ д) $0{,}108\dot{5}\dot{7}$

570. Збирот на бесконечниот геометриски ред е 4, а првиот член е 3. Како гласи третиот член?

571. Во квадрат со страна a е впишан друг квадрат што го добиваме сврзувајќи ги по ред средините на страните на првиот квадрат. На истиот начин во овој впишуваме трет квадрат, во него четврт итн. во бесконечност. Пресметај го збирот на површините на бесконечната низа од квадрати.

572. Зададен е рамностран триаголник со страна a. Сврзувајќи ги средините на неговите страни добиваме нов рамностран триаголник. На истиот начин впишуваме во него трет рамностран триаголник итн. во бесконечност. Определи го збирот на површините на сите триаголници.

573. Даден е рамностран триаголник со страна a. Неговата висина нека е страна на друг рамностран триаголник. Висината на овој ќе биде страна на трет рамностран триаголник итн. во бесконечност. Најди го збирот на површините на сите триаголници.

574. Даден е квадрат со страна a. Нег вата страна нека е дијагонала на друг квадрат, а страната на оваа дијагонала на трет квадрат итн. во бесконечност. Пресметај го збирот на површините на сите квадрати.

---

575. Испитај ја во поглед на конвергенција или дивергенција низата:

$$3+1,\ 3-1,\ 3+\frac{1}{10},\ 3-\frac{1}{10},\ 3+\frac{1}{10^2},\ 3-\frac{1}{10^2}\ldots$$

$$\ldots 3+\frac{1}{10^n},\ 3-\frac{1}{10^n},\ldots$$

Покажи дека за секој произволен мал однапред даден $\varepsilon > 0$ може секогаш да се најде достатно голем број N, така што да важи релацијата $|3-a_n| < \varepsilon$ за сите $n > N$.
Покажи понатаму дека во произволно мал интервал (да речеме широк $2\,\varepsilon$) околу точката 3 лежат бесконечно многу членови на низата, а надвор од овој интервал само конечно многу.

576. Набљудувај ја конвергентната бесконечна низа

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ldots,\frac{1}{10^n},\ldots$$

и покажи

а) дека нејзините членови можат да станат помали од произволно малиот број $\varepsilon > 0$ и

б) дека во произволно малиот интервал околу нулата (околу граничната вредност) лежат бесконечно многу членови на низата, а надвор од тој интервал само конечно многу.

Определи ги овие лимеси (гранични вредности):

577. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+3}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+5}\right)$ г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

578. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{8}{7}\right)^n$

579. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-3}{n+3}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+a}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+a}{n-b}$

580. а) Во круг со радиус r впиши правилни многуаголници со број на страни $n=3, 6, 12, 24, \dots$ Ако допишуваме дека бројот на страните $n\to\infty$, кон што се стреми:

α) секоја страна на впишаниот полигон,

β) обемот на впишаниот полигон?

Дали низата од обемите на впишаните полигони расте или опаѓа? Може ли некој член на таа низа да биде поголем или рамен на обемот на самиот круг? (Изврши разгледување без пресметување).

б) Изврши го истото разгледување ако на круг со радиус r му се впишуваат постапно правилни многуаголници чиј број на страни е $n=4, 8, 16, 32, \dots$

581. а) Околу кругот со радиус r опиши правилни многуаголници чиј број на страните е $n=3, 6, 12, 24, \dots$ Ако допуштиме дека бројот на страните на опишаните многуаголници $n\to\infty$, кон што тогаш се стреми:

α) секоја страна на опишаните полигони,

β) обемот на опишаните полигони?

Дали низата од обемите на опишаните многуаголници расте или опаѓа?
Може ли некој член на таа низа да стане помал или рамен на обемот на самиот круг?

б) Изврши го истото разгледување ако околу кругот со полупречник r постапно се опишуваат правилни многуаголници чиј број на страни е $n=4, 8, 16, 32, \dots$

582. Како може да се определи обемот на круг со полупречник r?

Пресметај ги збировите:

583. а) $1+x+x^2+\dots$ за $|x|<1$

б) $1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b^3}{a^3}+\dots$ за $|b|<|a|$

в) $\dfrac{a}{b}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+\left(\dfrac{a}{b}\right)^5-\left(\dfrac{a}{b}\right)^7+\dots,\ |a|<|b|$

г) $\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{x}{b^4}+\dfrac{x^2}{a^2b^6}-+\dots,$ за $|x|<a^2b^2$

д) $1+\frac{a-b}{a+b}+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\ldots$, за $a>0,\ b>0$

584. а) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots$ б) $\sqrt{5}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\ldots$

в) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$

г) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-1+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\ldots$

585. Пресметај ги збировите:

а) $1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\ldots$, $(\alpha\neq k\pi,\ k=0\pm 1,\ \pm 2,\ldots)$

б) $1-\sin\alpha+\sin^2\alpha-+\ldots$, $\alpha\neq\left((2k+1)\right)\frac{\pi}{2}$

в) $1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\ldots$, $|\alpha|<\frac{\pi}{4}$

г) $1-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-\ldots$, $|\alpha|<\frac{\pi}{4}$

586. Зададена е бесконечна геометриски прогресија $1, \cos\alpha, \cos^2\alpha, \cos^3\alpha, \ldots$, каде е $\alpha\neq k\pi$. Колкаво е α ако разликата помеѓу збирот на сите непарни членови и збирот на сите парни членови изнесува $\frac{2}{3}$? Колкав е во тој случај збирот на соодветниот бесконечен геометриски ред?

587. Зададен е бесконечен геометриски ред чиј прв член е $\sin 2\alpha$, а збирот $\operatorname{cotg}\alpha$. Друг таков ред има ист количник како првиот, а збирот му е рамен на квадратот од збирот на првиот ред. Со множење на соодветните членови на спомнатите редови треба да се образува трет, да се најде неговиот збир и да се спореди со збирот на првиот ред $(\cos\alpha\neq 0)$.

588. а) Збирот на бесконечен геометрички ред е 10, а количникот $\frac{3}{5}$. Најди го четвртиот член.

б) Збирот на бесконечен геометриски ред е $\frac{1}{5}$, а количникот $1\frac{1}{24}$. Најди ја прогресијата.

в) Збирот на бесконочен геометриски ред е $3\frac{1}{3}$, а вториот член е $\frac{8}{15}$.

Кој е тој ред?

589. Цифрите на трицифрен број даваат геометриска прогресија. Нивниот збир изнесува 19, а производот од цифрите на стотиците и десетиците е двојно поголем од збирот на бесконечниот конвергентен геометриски ред на кој овие цифри би му биле првите три члена. Кој е тој број?

590. Определи ја бесконечната геометриска прогресија кај која секој член е двапати поголем од збирот на членовите што следуваат по него?

591. Која бесконечна геометриска прогресија го има тоа својство секој нејзин член да е рамен на збирот на сите членови што следуваат по него?

592. Определи ја бесконечната геометриска прогресија кај која секој член изнесува $\frac{1}{3}$ од збирот на сите членови што следуваат по него.

593. Најди ја онаа бесконечна геометриска прогресија чиј збир е рамен на n-пати зголемениот прв член ($n > 0$).

594. Над должината $AB = 2r$ е конструирана брановидна крива која почнува во A а завршува во B, и тоа на следниов начин: должината AB е располовена со точката C, должината CD е располовена со точката D, должината DB со точката E итн. во бесконечност. Над должините AC, CD, $DE, \ldots$ како над пречници се конструирани полукругови и тоа така што последовните кругови да лежат на разни страни од должинита AB. Определи ги:

а) должината на кривата линија (изврши реактификација),

б) површината што ја затвора кривата со AB.

595. а) Во круг со полупречник R е впишан квадрат, во квадратот нов круг, а во овој круг пак нов квадрат итн. Пресметај го збирот на површините на сите кругови и на сите квадрати.

б) Во кругот со полупречник R е впишан рамностран триаголник: во овој триаголник е впишан круг, во кругот пак триаголник итн. во бесконечност. Пресметај го збирот на површините на сите кругови и на сите триаголници.

596. а) На кракот од агол од $45°$ земаме точка на растојание a од темето. Од таа точка спуштаме нормала на другиот крак, од подножната точка на нормалата спуштаме нормала на првиот крак, одовде пак нормала на вториот крак итн. во бесконечност.

Пресметај го збирот на должините на сите нормали.

б) истата задача за аголот $\alpha = 60°$,

в) истата задача за аголот α, каде е $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

597. а) Во рамнокрак триаголник со основа $2a$ и агол при врвот 2α се впишуваат еден над друг сè до врвот кругови така што првиот да ја допира основата на триаголникот и обата крака, а секој следен да ги допира обата крака и претходниот круг. Колкав е збирот на обемот и површините на сите кругови?

б) Во аголот 2α се наоѓаат бесконечно многу кругови кои меѓусебно се допираат однадвор, а освен тоа ги допираат и краковите на аголот. Пресметај го збирот на обемите и површините на сите кругови ако полупречникот на најголемиот е R.

598. Во зададен рамнокрак триаголник со основа a и агол при врвот α е впишан квадрат така што основите да им се поклопуваат, а останатите две темиња на квадратот лежат на краковите на триаголникот. Во рамнокракиот триаголник на првиот квадрат е впишан на истиот начин друг квадрат, над овој трет итн. во бесконечност. Пресметај го збирот на сите квадрати.

599. Во квадрат со страни $2a$ впишуваме круг. Во секој од преостанатите четири дела впишуваме пак круг итн. одејќи непрестајно кон врвовите на квадратот. Пресметај го збирот на обемите и површините на сите кругови.

600. Во агол $2\alpha < 90^\circ$ е впишана бесконечна низа од квадрати и тоа така што врвовите на симетралата на аголот да им се поклопуваат, а другите два врва лежат на краковите на аголот. Пресметај го збирот на обемите и површините на сите квадрати ако страната на најголемиот е a.

601. Од точката A се повлечени n полуправи од кои секои две соседни затвораат агол $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$. На едната од нив е спуштена точката P така што да е $AP = a$. Од точката P е спуштена нормала на соседната полуправа. Од подножјето P_1 на оваа нормала спуштена е нормала на следната полуправа и така во бесконечност. Пресметај ја должината на прекршената линија. Колкава е таа должина во специјален случај $n = 6$?

602. Должината AB се располовува со точката A_1, понатаму AA_1 се располовува со точката A_2; потоа A_1A_2 се располовува со точката A_3, па A_2A_3 со точката A_4, должината A_3A_4 со точката A_5 итн. во бесконечност. Низата од точки An се стреми кон една гранична положба M. Определи го растојанието на точкта M од A.

603. Должината AB се располовува со точката A_1, понатаму должината A_1B се располовува со точката A_2, потоа должината A_1A_2 со точката A_3, па A_2A_3 со точката A_4, должината A_3A_4 со точката A_5 итн. во бесконечност. Низата од точки An се стреми кон една гранична положба M. Определи го растојанието на точката M од A.

604. Во исправен конус со полупречник на базата R и агол при врвот на оскиниот пресек 2α се впишани бесконечно многу топки и тоа така што центрите да им лежат на оската на конусот и меѓусебно да се допираат однадвор, а да го допираат и плаштот на конусот. Пресметај го збирот на површините и зафатнините на оваа бесконечна низа од топки.

605. Во исправена правилна четиристрана пирамина со основен раб 4 cm бочен раб 3 cm е опишана коцка така што базата на коцката да лежи во базата на пирамидата, а другата база на коцката претставува пресек на пирамидата. Во просторот над оваа коцка на истиот начин е впишана друга коцка, над оваа трета итн. во бесконечност. Пресметај ја зафатнината на сите впишани коцки.

606. Во коцка со раб a е впишана топка. Во оваа топка е впишана коцка, во оваа коцка пак топка итн. во бесконечност. Пресметај го збирот на површините и зафатнините на оваа бесконечна низа од топки.

607. Зададени се три бесконечни геометриски прогресии со ист количник, а и почетниот член на првата прогресија е рамен на количникот. Првите членови на сите три прогресии се, пак, три последовни члена на аритметичка прогресија, чија разлика е исто така рамна на количникот. Колкав е збирот на секоја од зададените прогресии ако збирот на сите три изнесува 1?

608. Една аритметичка и една бесконечна геометриска прогресија имаат еднаков прв член и еднакви збирови. Се знае дека аритметичката прогресија има 9 членови и дека вториот член на аритметичката прогресија е за 1 поголем, а вториот член на геометриската прогресија е за 1 помал од заедничкиот прв член. Најди ги прогресиите и нивниот заеднички збир.

§ 11. СЛОЖЕНА ИНТЕРЕСНА СМЕТКА

609. На која вредност ќе нарасне 1 дин. вложен со камата $p\%$ по n години ако капитализирањето се врши годишно? (Следи го постапно движењето на вложениот 1 дин. по n години).

610. На која вредност ќе нарасне капитал C со $p\%$ по n години ако капитализирањето се врши годишно?

611. На која вредност ќе нарасне капитал од 2 000 дин. вложен со 5% за 4 години? Крајната вредност на капиталот определи ја така што постапно да се следи движењето на вложениот капитал во текот на сите четири години.

612. На истиот начин како и во претходната задача набљудувај го капиталот:

а) 5 000 дин. вложени со 4% на 5 години,

б) 10 000 дин. вложени со 5% на 6 години,

в) 1 000 дин. со $4\frac{1}{2}\%$ на 3 години,

г) 580 дин. со 3,5% на 5 години.

613. На која вредност ќе нарасне 1 дин. вложен со $p\%$ по n години ако капитализирањето се врши полугодишно? (Постапно следи го движењето на вложениот 1 дин. по n години).

614. На која вредност нараснува капитал од C дин. вложен со $p\%$ на n години ако капитализирањето се врши полугодишно?

615. а) На која вредност ќе нарасне капитал од $C = 6\,800$ дин. со $p = 5\%$ по $n = 12$ години*).

б) $C = 9\,000$, $p = 4\%$, $n = 5$ години,

в) $C = 15\,000$ дин. $p = 3\frac{1}{2}\%$, $n = 7$ години,

г) $C = 4\,650$ дин., $p = 4{,}5\%$, $n = 10$ години?

---

*) (Во задачите во кои не е поинаку истакнато треба да се земе дека капитализирањето се врши годишно).

616. а) Кој капитал вложен со $p = 4{,}5\%$ ќе нарасне за $n = 5$ години на $C_{10} = 10\,000$ дин.,

б) $p = 5\%$, $n = 7$ години, $C_7 = 6\,500$ дин.,

в) $p = 3{,}75\%$, $n = 7$ години, $C_n = 2\,800$ дин.,

г) $p = 4\frac{1}{2}\%$, $n = 10$ години, $C_{10} = 100\,000$ дин.?

617. а) За кое време капиталот $C = 3\,500$ дин. со $p = 4\%$ ќе нарасне на $C_n = 4\,790$ дин.,

б) $C = 7\,600$ дин,. $p = 4\%$, $C_n = 10\,000$ дин.

в) $C = 6\,000$ дин. $p = 5\%$, $C_n = 9\,777$ дин.

г) $C = 10\,000$ дин., $p = 4\%$, $C_n = 12\,166$ дин.?

618. Со кој ипроцент бил вложен:

а) Капиталот $C = 24\,000$ дин., кој за $n = 10$ години нараснал на $C_{10} = 39\,093$ дин.,

б) $C = 5\,414$ дин., $n = 8$ години, $C_8 = 8\,000$ дин.,

в) $C = 12\,000$ дин., $C_8 = 16\,423$ дин.,

г) $C = 10\,000$ дин., $C_{10} = 13\,000$?

619. За колку години извесна сума пари вложени со 4% двојно ќе се зголеми?

620. Со кој процент капитал од 25 000 дин. вложен на 12 години ќе нарасне на онаа сума на која нараснува капитал од 20 000 дин., со 6% за 15 год.?

621. Некој човек со тестамент оставил за ѕидање на училиште 900 000 стари дин. Ако трошоците според пресметката изнесуваат 1 833 500 стари дин., колку години мора да лежи под сложен интерес завештаната сума при полугодишно капитализирање за да нарасне на пресметковната сума ако банката плаќа 4,5%?

622. Колкава сума треба да вложи таткото при раѓањето на синот со $3\frac{1}{2}\%$ ако сака да му обезбеди сума од 50 000 дин. кога ќе наполни 24 години?

623. Со кој процент таткото на денот на раѓањето на својот син мора да вложи сума од 21 800 дин., па таа сума при полугодишно капитализирање по 23 години да нарасне на 48 093 дин.?

624. На својот петгодишен син таткото сака да му обезбеди сума од 20 000 дин. кога ќе наполни 18 години. Колкава сума пари мора да вложи во банка која плаќа $3\frac{1}{2}\%$?

---

625. На која вредност ќе нарасне капитал од C дин. вложен со $p\%$ на n години ако капитализирањето се врши:

а) секои три месеца,
б) секои два месеца,
в) дванаесет пати годишно,
г) секој m-ти дел од годината?

626. Треба да се испита што станува со вложената сума C со $p\%$ на n години ако капитализирањето се врши m-пати годишно и ако $m \to \infty$, т.е. ако секој момент на капиталот му се додава интересот (како што е случај на пример при растењето на дрвјата каде што прирастот во еден момент дава извесен прираст во следниот момент).

627. Во формулата $C_n = C\left(1+\frac{P}{100}\right)^n$ дадени се четири величини C, C_n, p и n.

Реши ја горната равенка ако како непозната го сметаш:

а) C б) p в) n

628. На која вредност ќе нарасне капитал од 10 000 дин., со 5% по 4 години ако капитализирањето е:

а) полугодишно,
б) секои три месеца?

629. Која сума пари ќе нарасне за 10 години со 4% и полугодишно капитализирање на истата вредност на која ќе нараснат 14 000 дин. за исто време со 5% и годишно капитализирање?

630. A вложил 1 200 дин. со 5%, а B 4 години подоцна вложил 1 800 дин. со 4%. За кое време обата капитала ќе бидат еднакви?

631. Некој пред десет години вложил 10 000 дин. со 4%, а пред 7 години пак 6 000 дин. со 5%. Колкава е сега вредноста на неговите влогови ако во обата случаи капитализирањето е полугодишно?

632. Која сума пари за 10 години со $4^0/_0$ и полугодишно капитализирање ќе нарасне на истата вредност на која нараснала за 10 000 дин. поголема сума пари за истото време со $3^0/_0$ и годишно капитализирање?

633. а) Капитал 5 000 дин. бил вложен на 8 години, и тоа првите 5 години со $4^0/_0$, а потоа со $4\frac{1}{2}\,^0/_0$. На која вредност нараснал?

б) Капитал од 10 000 бил вложен на 12 години, и тоа првите 6 години со $4^0/_0$ и полугодишно капитализирање, а останатото време со $4\frac{1}{2}\,^0/_0$ и годишно капитализирање. На која вредност нараснал?

634. На денот на раѓањето на својата ќерка таткото вложил извесна сума во банка со $4^0/_0$. Кога по 10 години процентот бил намален на $3\frac{3}{4}\,^0/_0$, тој вложил уште 2 000 дин. Колкава била вложената сума ако ќерката по наполнетите дваесет години примала од банката 23 701 дин.?

635. Според пресметките во една шума има 42 350 m^3 дрва. Колку дрва ќе има во шумата по 10 години ако се смета на годишен прираст од $3^0/_0$. Сметај:

а) според формулата за сложен интерес,

б) според формулата за непрестајно капитализирање.

636. Во една земја има 2 540 000 жители. Колку жители ќе има таа земја по 15 години ако годишниот прираст е $1{,}2^0/_0$?

637. Населението на еден град по 9 години пораснало од 208 700 на 318 500 жители. Колку жители ќе има тој град по следните 15 години ако се претпостави дека прирастот и во овој временски интервал ќе биде ист како и порано? (Сметај според формулата за годишно капитализирање).

638. За колку години ќе се зголеми бројот на жителите на едно место од 5 200 на 9 440 со годишен прираст од $2^0/_0$?

639. Еден град имал во 1945 год. 8 600 жители, а во 1950 год. 9 300. Колку жители имал тој град во 1960 година ако се претпостави дека прирастот бил рамномерен? По кој процент се зголемувало населението на овој град?

640. Работниот колектив на една фабрика дал обврска дека секој месец ќе ја зголемува продуктивноста на трудот за $5^0/_0$. За колку проценти ќе биде зголемена продуктивноста на трудот за цела година?

641. Работниот колектив на едно претпријатие дал обврска дека секои два месеца ќе ја зголемува продуктивноста на трудот за $6^0/_0$. За колку ќе биде зголемена продуктивноста на трудот за $1\frac{1}{2}$ година?

642. Со кој процент треба да се вложи некој капитал кој за $2n$ години би нараснал на толкава вредност што ќе треба да му се додаде само почетната вредност на капиталот па да биде рамен на r-пати поголемата вредност на која би нараснал за n години. Специјално $n=10$, $r=3$.

643. Суми од 5 600 дин. и 3 700 дин. се дадени под сложен интерес. Кон крајот на десеттата година вредноста на првата сума е поголема од втората за 4 000 дин., а нивната вкупна вредност е 14 000 дин. Со кој процент биле вложени сумите?

§ 12. СИСТЕМАТСКИ ПРЕГЛЕД НА БРОЕВИТЕ

644. Определи го правилото за деливоста на природниот број со бројот: а) 2 б) 4 в) 8 г) 2^n (n е природен број).

645. Определи го правилото за деливоста на природниот број N со бројот 5.

646. Определи го правилото за деливоста на природниот број со броевите 3 и 9.

647. Од четирите основни математички операции кои се директни, а кои инверзни?

648. Во што се состојат овие основни закони на собирањето: а) законот на комуникацијата, б) законот на асоцијацијата.

649. Објасни во што се состојат основните закони на множењето: а) законот на комутацијата, б) законот на асоцијацијата, в) законот на дистрибуцијата.

650. Кои од четирите основни математички операции со природни броеви секогаш како резултат даваат природен број?

651. Во кој случај операцијата делење на природни броеви дава како резултат природен број? Како треба да се прошири областа на природните броеви за да биде можно без исклучок да се изведе делењето на природни броеви?

652. Во кои случаи операцијата одземање, изведена на броеви кои припаѓаат кон бројната област на цели и раздробени позитивни броеви, дава како резултат број кој припаѓа кон таа област? Како треба да се прошири оваа бројна област за да може операцијата одземање да биде изводлива во таа нова област без исклучок?

653. Како се викаат сите цели, дропките, позитивните и негативните броеви и нулата?

654. Дали во областа на рационалните броеви се изводливи без исклучок четирите математички операции или, со други зборови, дали резултатот од операциите на четирите основни математички дејства со рационални броеви е секогаш рационален број?

655. Можат ли да „се докажат" правилата за операциите со релативните броеви?

Врз основа на што, значн, се зема дека е:

а) $(+5)+(-3)=+2$ б) $(-5)+(+3)=-2$

в) $(-5)+(-3)=-8$ г) $(+5)\cdot(-3)=-15$

д) $(-5)\cdot(-3)=+15$?

656. Дали конечните и бесконечните периодични децимални дропки се исто така рационални броеви?

657. Секој рационален број може да се напише во форма на $\frac{p}{q}$, каде се p и q цели, меѓусебно прости броеви и $q \neq 0$. Во кој случај рационалниот број $\frac{p}{q}$ можеме да го претвориме:

а) во конечна децимална дропка,

б) во чиста периодична дропка,

в) во мешовита периодична дропка?

658. Напиши ги во форма на децимален број овие рационални броеви:

а) $2\frac{1}{4}$ б) $\frac{1}{5}$ в) $-\frac{3}{40}$ г) $\frac{1}{3}$ д) $1\frac{5}{21}$ ѓ) $\frac{4}{15}$ е) $3\frac{7}{30}$

659. Напиши ги во форма на $\frac{p}{q}$ овие децимални дропки:

а) $7{,}5$ б) $0{,}408$ в) $3{,}\dot{5}$ г) $0{,}\dot{2}\dot{3}$

д) $-15{,}\dot{7}0\dot{9}$ ѓ), $0{,}2\dot{5}$ е) $13{,}54\dot{7}$ ж) $0{,}5\dot{8}\dot{9}$

660. Како следниве конечни децимални дропки можат да се напишат во форма на бесконечни децимални дропки:

а) $3{,}7$ б) $0{,}94$ в) $-0{,}09$ г) $47{,}01$?

661. Можат ли во подрачјето на рационалните броеви да се изведат без исклучок операциите степенување на цели броеви и инверзната операција — коренување (каде што радикандот е позитивен број?

662. Дали операцијата логаритмирање (базата на логаритмите е позитивен број различен од 1) е изводлива без исклучок во подрачјето на реалните броеви?

663. Како би „докажале":

а) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ б) $a^\circ = 1$ в) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$?

664. Дали овие равенки: а) $x^2 + 1 = 0$ и б) $x^2 + a^2 = 0$ имаат решение во подрачјето на реалните броеви?

---

665. Определи го правилото за деливоста на природниот број со бројот 11.

666. Помеѓу секои два рационални броја лежи барем еден рационален број. — Докажи!

667. Покажи дека помеѓу секои два рационални броја лежат бесконечно многу рационални броеви.

668. Колку и да е мал позитивниот рационален број ε, секогаш може за дадениот рационален број a да се најдат два рационални

броја b и c, така што да е $b < a < c$ и $c - b = \varepsilon$. Броевите b и c се викаат приближни вредности на рационалниот број a. Најди ги приближните вредности b и c на бројот $a = \dfrac{1}{3}$, така

што ε да ги прима вредностите на низата $1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \ldots$

669. Спроведи ја постапката од претходната задача кај броевите:

а) $1\dfrac{3}{7}$ б) $\dfrac{1}{2}$ $\left(\varepsilon\right.$ ги прима вредностите на низата $1, \dfrac{2}{10}, \dfrac{2}{100}, \dfrac{2}{1\,000}, \ldots\left.\right)$.

670. Докажи дека $\sqrt{2}$ не е рационален број.

671. Колку и да е мал позитивниот рационален број ε, секогаш може за дадениот реален број x да се најдат два рационални броја a и b, така што да е $a < x < b$ и $b - a = \varepsilon$. Рационалните броеви a и b се викаат приближни рационални вредности на реалниот број x.

Побарај ги приближните рационални вредности на ирационалниот број $\sqrt{2}$, така што да е $a < \sqrt{2} < b$ и $b - a = \varepsilon$, каде е $\varepsilon = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$

672. Претстави ги со помошта на две низи од рационални броеви од кои едната расте, а другата опаѓа и се стреми кон ирационален број: а) $\sqrt{5}$ б) $\sqrt[3]{3}$.

673. Како се изведуваат математичките операции собирање и множење со ирационални броеви?

674. Изведи ги назначените математички операции со ирационални броеви во задачите:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ б) $\sqrt{6} + \sqrt[3]{7}$ в) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5}$ г) $2 + \sqrt[3]{10}$.

675. За апсолутните вредности на два реални броја a и b важат правилата:

а) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,

б) $|a-b| \geqslant ||a| - |b||$,

в) $|ab| = |a| \cdot |b|$,

г) $|a:b| = |a| : |b|$, каде е $b \neq 0$.

Увери се во точноста на овие правила за броевите:

α) $a = -7$, $b = +3$ β) $a = -4$, $b = -8$

γ) $a = +10$, $b = -3$ δ) $a = +\frac{1}{2}$, $b = -0{,}9$

676. Релациите $|x| < a$ и $-a < x < +a$ значат исто.
Одбери некои вредности на x за кои важи релацијата $|x| < 4$, па потоа увери се дека за тие вредности на x важи и релацијата $-4 < x < +4$.

677. Кои вредности на x ги задоволуваат релациите:

а) $|x| > a$, $a > 0$ б) $|x| \geqslant 2$ в) $|x-a| < b$ г) $|x-7| < 5$?

678. Покажи дека е:

а) $\frac{a+|a|}{2} = \begin{cases} a & \text{за } a \geqslant 0, \\ 0 & \text{за } a \leqslant 0, \end{cases}$

г) $\frac{a-|a|}{2} = \begin{cases} 0 & \text{за } a \geqslant 0, \\ a & \text{за } a \leqslant 0, \end{cases}$

679. Напиши ги во форма на комплексен број:

а) $(3+2i)^{-2}$ б) $(2-i)^{-3}$

680. Покажи:

а) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$,

б) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$,

в) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha$,

г) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.

681. Може да се докаже дека е:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{за } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Увери се во точноста на оваа релација за $n = 1, 2, 3, 4, 8$.

§ 13. ПЕРМУТАЦИИ И КОМБИНАЦИИ

682. Направи ги сите пермутации ако се зададени елементите:

а) 1, 2, 3 б) a, b, c в) x, y, z г) a_1, a_2, a_3

д) 1, 2, 3 4 ѓ) c, d, e, f е) a_1, a_2, a_3, a_4

683. Од елементите 1, 2, 3, 4, 5 напиши ги сите пермутации (без повторување) кои го имаат елементот 5 на прво место.

684. Пермутирај ги буквите во збирот *ako*.

685. Напиши ги во лексикографски ред сите пермутации на буквите во зборот *АМОР*.

686. Од зададениве букви испиши ги сите зборови така што во секој збор да дојдат сите зададени букви и да не се повторуваат:

а) *ц, и, с* б) *А, Д, Ј, С* в) *В, И, Н, О*

687. Колку пермутации можат да се состават од буквите на зборот *МОСТАР*?

688. Напиши ги сите пермутации од елементите 3, 4, 5, 6, 7 кои го имаат 6 на прво место, а 4 на второ место.

689. Колку петцифрени броја можат да се напишат од цифрите 2, 4, 5, 8, 9 така што цифрите да не се повторуваат?

690. На колку начина можат да се распоредат пет должности помеѓу пет лица кои се избрани во управата на едно спортско друштво?

691. На колку начина можат да се распоредат 8 лица околу тркалезна маса?

692. Колку броја почнуват со цифрата 4 помеѓу сите пермутации на цифрите од бројот 3 456?

693. Колку пермутации од елементите c, d, e, f, g, h, почнуваат со

а) d б) df в) deg?

694. На колку начина 7 лица можат да седат околу тркалезна маса ако меѓу нив две истакнати лица треба да седат постојано едното до другото?

695. Колку различни гривни можат да се направат ако во гривната се нижат 6 различно обоени перли?

---

696. Напиши комбинации од втор, трет и четврт ред од елементите:

а) a, b, c, d, e б) 1, 2, 3, 4, 5 в) 1, 3, 5, 7, 9

697. Напиши ги сите комбинации од трет ред од елементите a, b, c, α, β.

698. Во просторот се зададени четири точки A, B, C, D кои не лежат во иста рамнина. Колку е со тие точки определено:

а) прави линии,

б) рамнини и кои се тие рамнини?

699. Кои се легури можеме да ги направиме од металите *Ag*, *Cu*, *Fe*, и *Ni*, ако секоја легура треба да содржи само по два елемента?

700. Определи го бројот на различните триаголници кои можат да се направат со меѓусебно сврзување на врвовите:

а) на петоаголник,

б) на шестоаголник.

701. Во играта *ЛОТО* може да се учествува со која и да било комбинација од шести ред од сите природни броеви од 1 до 49. Колку такви комбинации можат да се направат?

702. Колку дијагонали има седумаголникот?

703. Од пет музички инструменти: виолина, гитара, хармоника, труба и барабан треба да се состават оркестри кои ќе содржат по:

а) три,

б) четири инструмента.

Колку такви оркестри можат да се состават?

704. Физикален кабинет располага со пет отпорници, и тоа од 1, 2, 5, 10 и 20 ома. Колку различни отпора можеме да добиеме ако отпорниците ги споиме сериски?

705. Помеѓу 6 борци треба за стража да се одделат двајца. На колку начина тој избор на стража може да се изврши?

706. На еден ученик му е дозволено од 9 зададени задачи да избере по желба 5 за домашна задача. На колку начина тоа може да се стори?

707. Колку рамнини можеме да положиме низ 8 точки од просторот ако по 4 од нив не лежат во иста рамнина?

708. Колку тетиви определуваат седум точки од кружната линија?

709. На еден шаховски турнир треба да учествуваат 12 играчи. Секој од нив треба со секој од останатите да одигра по една партија. Колку партии се одиграни?

---

710. Напиши ги пермутациите на елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6 кои го имаат 2 на прво, 4 на четврто и 3 на петто место.

711. Напиши ги пермутациите на елементите 1, 2, 4, 6, 8, 9 кај кои е 2 на прво место, 6 на трето, а 1 на шесто место.

712. Најди ја непосредно 60-тата пермутација на елементите 1, 2, 4, 5.

713. Кој е по (лексикографски) ред зборот *МАРЕ* од почетната пермутација *АРЕМ*?

714. Која пермутација доаѓа непосредно по комплексијата 31 254?

715. Која е по ред пермутацијата 31 254 од почетната комплексија 12 345?

716. Која е по ред пермутацијата *САОВ* од почетната комплексија *АВСО*?

717. Направи ги четирите идни пермутации од комплексијата 41 135.

718. Која е по ред пермутацијата *ВАСО* ако почетната пермутација е *СОВА*?

719. Со пермутирање на буквите од зборот *ЛУЗАТ* се добива зборот *ТУЗЛА*. Која е по ред таа пермутација?

---

720. Колку елементи треба за да може од нив да се направат 15 комбинации од втор ред?

721. На секој состанок имало 45 ракувања, кога секој се ракувал еднаш со секого. Колку луѓе имало на состанокот?

722. Колку различни видови метал треба да имаме ако сакаме да направиме 21 легура, а во секоја легура да влегуваат само по два метала?

723. Од 6 ученика и 5 ученички треба да се изберат во комитет 7 члена со тоа да се вклучени 4 ученика. На колку начина тоа може да се направи?

724. Бројот на комбинации е од 3-ти ред од извесен број елементи се однесува спрема бројот на комбинациите од 5-ти ред од истите елементи како 5:3. Колку такви елементи има?

725. Напиши ги сите комбинации од трет ред од елементите a_1, a_n, d, n, S_n.

726. Напиши ги сите комбинации од трет ред од елементите a_1, a_n, q, n, S_n.

§ 14. БИНОМНА ФОРМУЛА

727. Со помошта на биномната формула степенувај $(a+b)^n$ за $n=2, 3, 4, 5, 6$.

728. Со помошта на биномната формула степенувај $(a-b)^n$ за $n=2, 3, 4, 5, 6$.

Со помошта на биномната формула степенувај:

729. а) $(1+x)^4$ б) $(1-a)^5$ **730.** а) $(2+a)^4$ б) $(2-x)^5$

731. а) $(1+2a)^4$ б) $(1+3a)^5$ в) $(2+2a)^4$ г) $(3-2a)^6$

732. а) $(a^2+b)^4$ б) $(a^2-b)^5$ в) $(x^3-xy^3)^5$ г) $(a^2+2a^2)^6$

---

733. Најди го четвртиот член на развиениот израз $(a+b^2)^5$

734. Најди го петиот член на развиениот израз $(b^2-2b)^6$.

735. Најди ги првите три члена во развојот на изразот $(a+a^2b^2)^5$.

736. а) $(1+a^{-1})^4$ б) $(a^{-1}+a^{-2})^4$ в) $(1-x^{-2})^5$ г) $(x^{-2}-x^{-3})^5$

737. а) $\left(2+a^{\frac{1}{2}}\right)^4$ б) $\left(2-a^{\frac{1}{2}}\right)^5$ в) $\left(a^{\frac{1}{2}}+a\right)^4$ г) $\left(a^{\frac{2}{3}}-a\right)^5$

738. а) $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^4$ б) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}\right)^5$

в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^5$ г) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^6$

739. а) $\left(\frac{1}{2}+a\right)^5$ б) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$ в) $\left(\frac{1}{2}+a^{\frac{1}{2}}\right)^4$ г) $\left(\frac{1}{3}-a^{-\frac{1}{3}}\right)^5$

740. а) $(a^x+b^x)^4$ б) $(a^x-b^x)^5$
в) $(a^{2x}-1)^4$ г) $(a^{2x}+b^{3x})^5$

741. а) $(a^x+a^{-x})^4$ б) $(a^x+a^{-x})^5$ в) $(a^x-a^{-x})^6$

742. а) $(1+a)^{-5}$ б) $(1-b)^{-5}$

743. Кој е најголем коефициент во развојот $(1+a)^7$?

744. Кој е најголем коефициент во развојот $(1+a)^8$?

745. а) $(a+1)^4+(a-1)^4$ б) $(2-x)^5+(2+x)^5$

746. а) $(a+x)^5-(a-x)^5$ б) $(a+b)^6+(a-b)^6$

747. а) $(1+\sqrt{2})^4+(1-\sqrt{2})^4$ б) $(1+\sqrt{2})^4-(1-\sqrt{2})^4$

748. Развиј го со помошта на биномната формула $(1+a+a^2)^3$.

749. Развиј го со помошта на биномната формула $(1-x-x^2)^4$.

750. Кој е најголем од броевите:

а) $\binom{12}{r}$, $(r=1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 12)$ б) $\binom{11}{r}$, $(r=1,\ 2,\ 3, \ldots\ 11)$

751. а) $(1+i)^5$ б) $(1-i)^4$ в) $(1+i)^6$ г) $(1-i)^7$

752. а) $(1+i)^4+(-i)^3$ б) $(1-i)^5-(1+i)^4$

753. а) $(1+2i)^4$ б) $(2-i)^5$

754. а) $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}$ б) $\dfrac{(1-i)^5}{(1+i)^2}$

755. а) $(1+i\sqrt{2})^4$ б) $(\sqrt{2}-i)^6$

§ 15. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

756. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата: $a_n = a_1 + (n-1)\ d.$

757. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата:

$$S_n = \frac{n}{2}\ (a_1 + a_n).$$

758. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$

759. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

760. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата:

$$C_n = C\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n.$$

761. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата:

а) $S^2{}_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6},$

б) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \dfrac{n(2n+1)(2n+1)}{3},$

в) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n = 1)^2 = \dfrac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}.$

г) $S^3{}_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right]^2,$

д) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2\,(2n^2-1)$

762. а) Најди ја формулата за збирот $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \ldots + \frac{2}{n^2-1}$. (Упатство: изрази го општиот член $\frac{2}{n^2-1}$ во форма на $\frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}$, каде што се A и B константи кои треба да се определат, па добиениот резултат примени го при пресметувањето на тој збир). За добиената формула, со потполна индукција, докажи дека за секој природен број важи $n \geqslant 2$. Најди ја $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

б) Најди ја формулата за збирот $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. (За општиот член користи го упатството од претходната задача!). Со потполна индукција докажи дека најдената формула за S_n важи за секој природен број n. Најди ја лимесата $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

763. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата:

а) $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

б) $S_n = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$,

в) $S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,

г) $\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$,

д) $\sum_{k=1}^{n} k(k+a) = \frac{n(n+1)(2n+1+3a)}{6}$,

ѓ) $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)(k+4) = \frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$,

е) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$,

ж) $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)^2 = \frac{n(n+1)(3n^2+19n+32)}{12}$.

764. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата:

$$2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$$

765. Со методот на потполна индукција докажи дека важи формулата:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\,b+\binom{n}{2}a^{n-2}\,b^2+$$

$$+\binom{n}{3}a^{n-3}\,b^3+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

766. Со методот на потполна индукција докажи дека за n-аголникот важи формулата:

а) бројот на неговите дијагонали е $D_n=\dfrac{n(n-3)}{2}$,

б) збирот на внатрешните агли $S_n=(n-2)\cdot 180°$.

767. Разгледај го судот: секој број од обликот n^2-n+11, каде што е n природен број, е прост број. Дали е овој суд точен за $n=1$, 2, 3, ..., 10? А за $n=11$ и 12? Како стои сега со докажувањето од n на $n+1$?

768. Со методот на потполна индукција докажи дека важи релацијата (Бернулиево неравенство):

а) $(1+h)^n>1+nh$ за $h\neq 0$ и $1+h>0$,

б) со потполна индукција докажи $2^n>n$ за $n=0, 1, 2, \ldots$,

в) на истиот начин докажи $2^n>n^2$ за $n=5, 6, 7, \ldots$

§ 16. ВЕРОЈАТНОСТ

769. Колкава е веројатноста дека со една коцка ќе го фрлиме бројот 6?

770. Колкава е веројатноста дека со една коцка ќе фрлиме: а) парен број, б) број поголем од 4?

771. Во врекичка се наоѓаат 4 бели, 9 црвени и 12 црни топчиња. Колкава е веројатноста дека ќе се извлечат: а) бело, б) црвено, в) црно, г) сино топче?

772. Колкава е веројатноста дека со истовремено фрлање на две коцки ќе се добие вкупен збир 6?

773. Колкава е веројатноста дека со две коцки ќе се фрлат: а) два еднакви броја, б) 1 и 2, в) вкупно 8, г) повеќе од 10?

774. Колкава е веројатноста дека со истовремено фрлање на три метални монети ќе се добие од горната страна: а) на сите три државниот грб, б) барем на две грбот?

775. Колкава е веројатноста дека со три коцки ќе се фрлат: а) еднакви броеви? б) вкупен збир 10, в) помалку од 10?

776. Во врекичка се наоѓаат 3 бели, 5 црвени и 12 црни топчиња. Колкава е веројатноста: А) дека ќе се извлечат: а) бело, б) црно топче; Б) дека нема да се извлечат: а) бело, б) црвено?

777. Во врекичка се наоѓаат 3 црвени и 5 бели топчиња. Колкава е веројатноста дека со истовремено извлекување на две топчиња ќе се извлечат: а) две црвени, б) две бели?

778. Во врекичка се навоѓаат 3 црвени и 6 сини топчиња. Влечеме ѓутуре 2 топчиња. Колкава е веројатноста дека тие ќе бидат: а) од различни бои, б) обете сини, в) обете црвени?

779. Во еден сад се наоѓаат 3 бели, 5 жолти, 8 зелени и уште неколку топчиња од други бои. Здоговорено е дека се добива ако се извлечат 2 бели и 2 жолти топчиња, а дека се губи ако се извлечат две зелени. Ниеден друг случај не се зема предвид. Колкава е веројатноста дека при влечењето ќе се добие?

780. Во една кутија има два вида светли топчиња: две бели и четири жолти, а освен тоа има и три црни топчиња. Колкава е веројатноста дека ќе извлечеме светло топче?

781. Колкава е веројатноста дека со две коцки ќе се фрли која и да било од триве суми: 4 или 9 или 11?

782. Колкава е веројатноста дека со две коцки ќе се фрлат 11 или 12?

783. Колкава е веројатноста дека со една коцка ќе се фрли бројот 1 двапати едноподруго?

784. Во врекичка имаме 3 бели, 4 црвени и 5 сини топчиња. Колкава е веројатноста дека, влечејќи трипати по едно топче, ќе извлечеме првиот пат бело, вториот пат црвено, третиот пат сино ако извлечените топчиња: а) се враќаат во врекичката, б) не се враќаат?

785. Колкава е веројатноста дека од врекичката во која има 3 бели и 7 бојадисани топчиња трипати со ред ќе се извлече бело топче ако: а) извлечените топчиња се враќаат во врекичката, б) не се враќаат?

786. Колкава е веројатноста дека од игра од 32 карти двапати со ред ќе се извлече ас ако картата: а) се враќа во играта, б) ако не се враќа?

§ 17. ФУНКЦИИ

787. Кога се вели дека величината y е функција на величината x?

788. Определи го геометриското и физикалното значење на следните формули а потоа определи го бројот на независно менливите во задачите:

а) $0 = 2r\pi$ б) $P = 4r^2\pi$ в) $0 = 4a$

г) $0 = 2(a+b)$ д) $V = abc$ ѓ) $s = \frac{1}{2}gt^2$

е) $i = \frac{v}{r}$

789. Побарај ја вредноста на функциите:

а) $y = 3x + 2$ за $x = 2, a, a+h$

б) $y = x^2 - 5x + 1$ за $x = -2, 0, a$

в) $y = x^3$ за $x = -1, 0, +1, a + \Delta a$

г) $y = (x-3)^2$ за $x = 3, 4, a, a+h$

790. а) $f(x) = \frac{x}{x+3}$; најди го $f(-1)$, $f(a)$, $f(x+\Delta x)$,

б) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-5x}$; најди го $f(-3)$, $f(1)$, $f(a)$, $f(a+\Delta a)$,

в) $f(x) = \log x$ за $x = a, a+h, x_1$,

г) $f(x) = a^x$; најди го $f(3), f(h), f(x+\Delta x)$

791. $y = f(x)$ за $x = a, a+h, x, x+\Delta x$

792. Ако е $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, докажи дека е $f(2) + 2f(0) = f(1)$.

793. Ако е $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, докажи дека е $\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)} = \frac{x-y}{1+xy}$.

794. Ако е $f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$, докажи дека е $f(x)+f(a)=f\left(\frac{x+a}{1+ax}\right)$.

795. Ако е $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, докажи дека е $f[f(x)]=x$.

796. Испитај кои функции монотоно растат, а кои монотоно опаѓаат:

а) $y=3x-5$ б) $y=-\frac{2}{3}x+2$ в) $y=\log x$

г) $y=-\log x$ д) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ ѓ) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$

е) $y=\operatorname{tg} x$ ж) $y=\operatorname{ctg} x$ з) $y=x^3$

797. Определи ги интервалите во кои функцијата монотоно расте, а во кои монотоно опаѓа:

а) $y=x^2-2x$ б) $y=\frac{2}{x}$ в) $y=\sin x$

г) $y=\cos 2x$ д) $y=|x-2|$

798. Распореди ги овие алгебарски фунции:

а) $y=x^2-3x+7$ б) $y=\frac{x+3}{x^2-5x+8}$

в) $y=\sqrt{x^2+a^2}$ г) $y=\sqrt{\frac{2x}{x-3}}$

799. Испитај ги со оглед на парноста или непарноста функциите:

а) $y=3x^2+1$ б) $y=2x$ в) $y=2^{x^2+1}$

г) $y=\log(x^2+1)$ д) $y=\frac{2x^2}{x^2+3}$ ѓ) $y=\frac{x^3}{x^4-3}$

е) $y=x+1$ ж) $y=|x|-3$ з) $2x^2+3y^2=6$

800. Напиши ги во експлицитен облик овие имплицитни функции:

а) $2x-y+3=0$ б) $3x^2+7x-y-5=0$

в) $x^2+y^2-r^2=0$ г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

801. Доведи ги во имплицитен облик функциите:

а) $y = \frac{5}{7}x + 8$ б) $y = \sqrt{1 - x^2}$

в) $y = \frac{x+1}{x+2}$ г) $y = \pm\sqrt{x^2 + 4}$

802. Напиши ја функцијата што ја изразува површината P на квадратот во зависност од страната a, како и инверзната функција со која страната a на квадратот е изразена во зависност од неговата површина P. Во аналитичките изрази на тие функции потоа означи ја независната варијабла со x, а функцијата со y. Претстави ги графички обете функции во ист координатен систем. Какви се тие криви во однос на правата $y = x$?

803. Која функција е инверзна на функцијата:

а) $y = x^3$ б) $y = 2x - 3$ в) $y = \pm\sqrt{x - 2}$?

804. Докажи дека функцијата инвезрна на линеарна функција е исто така линеарна.

805. Докажи дека функцијата $x^2 + y^2 = r^2$ е инверзна самата на себе.

806. Кои функции ќе бидат инверзни сами на себе?

807. Која функција е инверзна на формулата:

а) $y = 2^x$ б) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ в) $y = 10^x$?

808. Што нарекуваме дефиниционо подрачје на функцијата $y = y\ (x)$? Кое подрачје на дефиницијата го нарекуваме интервал?

Определи го дефиниционото подрачје на функцијата:

809. а) $y = x + 3$ б) $y = x^2$ в) $y = x^2 - 5x + 11$

г) $y = |x + 1|$ д) $y = -|x + 1|$ ѓ) $y = |x| + 1$ е) $y = -|x| + 1$

810. а) $y = \frac{2}{x}$ б) $y = \frac{x+2}{x^2 - 9}$

в) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ г) $y = \frac{x-1}{x^2 - 1}$

811. а) $y = \sqrt{x + 2}$ б) $y = \sqrt{1 - x^2}$ в) $y = \sqrt{x^2 - a^2}$

г) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$ д) $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

812. а) $y = \sin x$ б) $y = \operatorname{tg} x$ в) $y = 2^x$ г) $y = 2^{x-3}$

813. а) $y = \log x$ б) $y = \log(x+2)$ в) $y = 1 - \log x$

г) $y = \log_x 2$

814. а) $y = \log(-x^2 + x + 6)$ б) $y = \dfrac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$

815. Интерпретирај го графички дефиниционото подрачје на функцијата:

а) $y = \pm\sqrt{4-x^2}$ б) $y = \pm\sqrt{x^2-4}$

816. Определи ги интервалите во кои е y дефинирано како функција од x ако е:

а) $x + 2y - 3 = 0$ б) $y^2 + 4x + 8 = 0$

в) $xy + y - x - 3 = 0$ г) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

д) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

817. Кога е функцијата еднозначна (униформна), а кога двозначна или многузначна (мултиформна)

818. Распредели ги во поглед на многузначноста функциите:

а) $2x - y + 3 = 0$ б) $x^2 + y^2 = r^2$

в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ г) $x^2 - y^2 = a^2$

819. Какво значење има реченицата: менливата величина x се стреми или конвергира кон a (пишуваме $x \to a$ или $\lim x = a$).

820. Кога велиме дека G е граничната вредност на функцијата $f(x)$ кога $x \to a$?

821. Определи ја граничната вредност на функциите:

а) $y = x + 3$ за $x \to 0$ б) $y = x^2$ за $x \to -2$

в) $y = x^2 - 2x + 1$ за $x \to 2$ г) $y = -2x^3 + 1$ за $x \to 1$

822. Определи ја граничната вредност на функциите кога x се стреми кон точки во кои тие не се дефинирани:

а) $y=\frac{x^2-1}{x^2-x}$ б) $y=\frac{x+1}{x^2-1}$

в) $y=\frac{x-5}{x^2-6x+5}$ г) $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

823. Определи ја граничната вредност на функциите:

а) $y=\frac{1}{x^2}$ за $x\to 0$ б) $y=\sin x$ за $x\to\infty$

в) $y=\frac{1}{x}$ за $x-\infty$ г) $y=\frac{x-1}{x^3-1}$ за $x\to 1$

824. Определи ги за $x\to\infty$ граничните вредности на функциите:

а) $\frac{x+2}{3x+5}$ б) $\frac{x+1}{x^2-10}$ в) $\frac{28x+1}{x^3-14x^2}$

г) $\frac{x^2-5x}{3x^2+7}$ д) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ ѓ) $\sqrt{x}-\sqrt{x+2}$

е) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ ж) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-5}$

825. Објасни го значењето на симболите:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\pm\infty$ б) $\operatorname{ctg} 0=\pm\infty$

826. Определи ја граничната вредност на функцијата $y=\frac{x}{x-2}$ кога x се стреми кон бројот 2 растејќи, а потоа опаѓајќи.

827. Докажи дека е $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ x>0.$

828. Определи го прирастот на функцијата $y=x^2$ на местото $x=1$ ако е прирастот на независната варијабла $\Delta x=2$.

829. Определи го на некое место x прирастот на функциите:

а) $y=x^2+5x$ б) $y=x^3$ в) $y=\frac{3}{x}$

г) $y=\sqrt{x+2}$ д) $y=\sin x$ ѓ) $y=2^x$

е) $y=f(x)$

830. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $y = 4x + 2$ на местото $x = 3$.

831. Покажи дека се непрекинати за секое x функциите:

а) $y = x^2$ б) $y = x^2 - 2x$

б) $y = x^3$ г) $y = x^3 - 2x^2 + x + 5$

832. На кое место се прекинати функциите:

а) $y = \dfrac{1}{x-2}$ б) $y = \dfrac{x-3}{x+1}$

в) $y = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$ г) $y = \dfrac{4}{x^2-9}$?

833. Докажи ја непрекинатоста на функциите за секое x:

а) $y = \sin x$ б) $y = \cos x$

---

834. Определи ги граничните вредности на функциите:

а) $y = \dfrac{2x - \sin x}{x}$ за $x \to 0$ б) $\dfrac{x^2 - \sin x}{x}$ за $x \to 0$

в) $\dfrac{\sin ax}{x}$ за $x \to 0$ г) $\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ за $x \to 0$

835. Докажи: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

836. Пресметај го обемот на правилен многуаголник впишан во круг со полупречник r, па потоа дозволи бројот на страните да се стреми кон бесконечност. Објасни го значењето на најдената гранична вредност.

837. Пресметај ја површината на правилен многуаголник впишан во круг со полупречник r, па потоа дозволи бројот на страните да се стреми кон бесконечност. Објасни го значењето на најдената гранична вредност.

838. Во кој интервал е непрекината функцијата:

а) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ б) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

в) $y = \sqrt{-x^2 + x + 6}$?

§ 18. ИЗВОД И ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈА

839. Пресметај го средниот подем (средната брзина на порастот на функцијата) ако независно менливата се промени од x_0 до x_1 за:

а) $y=2x,\ x_0=1,\ x_1=3$ б) $y=x^2,\ x_0=1,\ x_1=2$

в) $y=\cos x,\ x_0=a,\ x_1=a+h$

г) $y=\log x,\ x_0=a,\ x_1=a+\Delta a$

840. Пресметај го средниот подем на функцијата $y=x^2$ на местото $x_1=1$, па потоа на местото $x_2=10$, ако во обата случаја прирастот на независно менливата е $\Delta a=2$. Дали функцијата побрзо расте околу точката $x_1=1$ или околу точката $x_2=10$?

841. Објасни го геометрискиот среден подем на функцијата:

а) $y=f(x)$ од $x_0=a$ до $x_1=a+h$

б) $y=kx$ од $x_0=a$ до $x_1=a+\Delta a$

в) $y=kx^2$ од $x_0=a$ до $x_1=a+\Delta a$

842. Колкав е средниот подем кај кривата $y=x^2$ од $x_0=1$ до $x_1=1+\dfrac{1}{n}$? Земи по ред $n=1, 2, 3, \ldots$ Кон која вредност се стреми подемот кога $n\to\infty$?

843. Кога средниот подем ќе биде нула? Како во тој случај лежи секантата спрема апсцисната оска?

844. Најди го изводот или деривацијата на функцијата:

а) $f(x)=2x-1$ на местото $x=x_1$

б) $y=x^2$ на местото $x=x_1$

в) $y=2x^2-3x+1$ на местото $x_1=1$

г) $f(x)=x^3$ на мес ото $x=a$

Побарај го изводот на функцијата во произволната точка x врз основа на дефиницијата на изводот:

845. а) $y=x$ б) $y=x^2$ в) $y=x^3$ г) $y=k$

846. а) $y=ax$ б) $y=ax^2$ в) $y=ax^3$

847. а) $y=u+v$ б) $y=u—v$ в) $y=u\cdot v$

г) $y=\frac{u}{v}$ каде се u и v функции од x

848. Нека е $u=\varphi(x)$, а $y=f(u)$, т.е. $y=f[\varphi(x)]$. Побарај го изводот на оваа функција од функција (сложени функции).

849. а) $y=\sin x$ б) $y=\cos x$ в) $=\operatorname{tg} x$ г) $y=\operatorname{ctg} x$

Побарај го изводот на функцијата во произволната точка x врз основа на правилото за барање извод:

850. а) $y=3x^2—5x+7$ б) $y=x^4—2x^3+5x+6$

851. а) $y=\frac{2}{x}$ б) $y=\frac{1}{x^2}$ в) $y=\frac{3}{2x^4}$

852. а) $y=\frac{2x—1}{x+3}$ б) $y=\frac{x+3}{x^2—5x}$

853. а) $y=(2+x)(3—x^2)$ б) $y=(x^2—x)(x+3)$

854. а) $y=\sqrt{x}$ б) $y=\sqrt[3]{x^2}$ в) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ г) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

855. а) $y=\sqrt{x^2+3}$ б) $y=\sqrt{x^2—5x}$ в) $y=\sqrt{a^2—x^2}$

856. а) $y=x\sqrt{1+x^2}$ б) $y=(a^2+x^2)\sqrt{a^2—x^2}$

857. а) $y=\sin x+3\cos x$ б) $y=2\operatorname{tg} x\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x$

858. а) $y=\sin 2x$ б) $y=\operatorname{tg} 3x$

859. а) $y=\sin^3 x$ б) $y=\sqrt{\cos x}$

860. а) $y=\frac{\sin x}{x}$ б) $y=\frac{\text{coc}\,x}{1+\cos^2 x}$

861. а) $y=e^x$ б) $y=e^x \sin x$ в) $y=e^{2x}$

862. а) $y=ln\,x$ б) $y=ln \sin x$ в) $y=ln\,x^2$

863. $y=ln\ (x+\sqrt{x^2-a^2})$

864. Напиши ги диференцијалите на функциите:

а) $y=x^2$ б) $y=ax^3$ в) $y=\sqrt{x^3}$

г) $y=ax^2+bx$ д) $y=\sin x$ ѓ) $y=\cos 3x$

865. Најди ги изводите од трет ред на функциите:

а) $y=x^3$ б) $y=x^5$ в) $y=ax+bx^5$ г) $y=\sin x$

866. Геометриски интерпретирај го изводот на функцијата $f(x)$ во точката x.

867. Определи го коефициентот на насоката на тангентата врз кривата:

а) $y=x^2$ во точката $x=2$ б) $y=2x^2-3x$ во точката $x=0$

в) $y=\sin x$ во точката $x=0$ г) $y=\cos\ 2x$ во $x=\frac{\pi}{4}$

868. Определи ја равенката на тангентата врз кривата $y=x^2-2x+1$ во точката $x=2$.

869. Определи ја равенката на тангентата врз кривата:

а) $y=x^3$ во точката чија апсциса е $x=2$

б) $y=x^3-x^2$ во $x_1=2$ и $x_2=0$

в) $xy=1$ во $x_1=-2$ и $x_2=1$

г) $x^2-y^2=4$ во $x=4, y>0$

870. Со $s(t)$ нека е изразена зависноста на патот од времето. Ако е $s(t)$ изминатиот пат за времето t, а $s(t+\Delta t)$ патот изминат за времето $t+\Delta t$, тогаш средната брзина во растојанието на времето Δt е дадена со изразот $\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$. Брзината во моментот t се дефинира како $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

Пресметај ја брзината при:

а) рамномерно движење,

б) слободно паѓање,

в) вертикален истрел.

871. Дали функцијата $y=x^2-2x$ расте или опаѓа во околината на точките $x_1=-1$ и $x_2=3$?

872. Најди ги интервалите во кои функцијата $y=-x^2+2x$ а) расте б) опаѓа.

873. Определи ги екстремните вредности на функциите:

а) $y=2x^2+4$ б) $y=-x^2+4x+1$

в) $y=2x^3+3x^2-12x+1$ г) $y=x^3-x$

874. Испитај ги функциите:

а) $y=x^2-2x-3$ б) $y=-x^2+4x$

со помошта на извод.

875. Со помошта на извод испитај ги функциите:

а) $y=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2-3x$ б) $y=-x^3+3x-2.$

в) $y=(x+1)(x-2)^2$ г) $y=-x^3+x$

876. Иследи го текот на функциите:

а) $y=\frac{x}{x-1}$ б) $y=\frac{2x-1}{x-4}$ в) $y=\frac{x-1}{x+1}$

877. Престави ги графички функциите:

а) $y=\frac{1}{1-x^2}$ б) $y=\frac{x}{3-x^2}$ в) $y=\frac{x}{1+x^2}$

878. Растави го бројот 12 на два дела така што нивниот производ да е што поголем.

879. Растави го бројот 36 на два позитивни фактора чиј збир е што помал.

880. Кој позитивен број собран со својата реципрочна вредност дава што помал збир?

881. Помеѓу сите правоаголници со зададен обем од 24 cm најди го оној чија површина е што поголема.

882. Од сите правоаголни триаголници со константен збир на катетите k нека се определи оној кај кој хипотенузата е најкратка.

883. На квадратен картон со страна a се отсекува при секој врв квадрат со страна x; преостанатиот дел се пресвиткува така што да се добие кутија во форма на правилна четиристрана призма. Колкава е страната x на отсечените квадрати за да може зафатнината на добиената кутија да биде што поголема?

884. Од сите валјци со зададена површина $P = 18\pi$ нека се определи оној кој има максимална зафатнина.

885. Елипсата $3x^2 + 4y^2 = 12$ ротира околу оската x. Во добиениот елипсоид треба да се впише валјак со максимална зафатнина. Колкава е таа зафатнина?

886. Од точката $(8;6)$ треба да се повлече права така што со координатните оски да затвора триаголник со минимална површина?

887. Во триаголник се зададени страната c и спротивниот агол γ. Колку треба да бидат останатите агли па површината на триаголникот да биде што поголема?

§ 19. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Пресметај ги неопределените интеграли:

888. а) $\int dx$ б) $\int x\,dx$ в) $\int x^2\,dx$ г) $\int x^5\,dx$

889. а) $\int (x^2+x-1)\,dx$ б) $\int (x^3+x^4-x^5+x^6)\,dx$

890. а) $\int (2x^3-3x^2+5x-1)\,dx$

б) $\int \left(2-3x+\frac{4}{3}x^2-\frac{5}{7}x^3\right)dx$

891. а) $\int x(2-x)^2\,dx$ б) $\int x^2(3x-5)\,dx$

892. а) $\int \frac{dx}{x^2}$ б) $\int \frac{dx}{x^3}$ в) $\int \frac{2-3x}{x^4}\,dx$ г) $\int \frac{x-5}{x^5}\,dx$

893. а) $\int \frac{(x+3)^2}{x^5}\,dx$ б) $\int \frac{(3x-1)^2}{x^4}\,dx$ в) $\int \frac{(x+1)^3}{3x^8}\,dx$

894. а) $\int \sqrt{x}\,dx$ б) $\int \sqrt{x^3}\,dx$ в) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ г) $\int \sqrt[5]{x^7}\,dx$

895. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}}$

896. а) $\int \left(\sqrt{x^3}-3\sqrt{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\right)dx$

б) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^5}}\right)dx$

897. а) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ б) $\int \sqrt{x}\,(x-\sqrt[3]{x})\,dx$

в) $\int (2-\sqrt{x})^2\,dx$

898. а) $\int 2\sin x\,dx$ б) $\int 3\cos x\,dx$ в) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x}$ г) $\int \frac{3\,dx}{\sin^2 x}$

899. а) $\int \left(2\cos x - \frac{5}{7}\sin x\right) dx$ в) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5\sin^2 x}\right) dx$

Со методот на супституција најди ги неопределените интеграли:

900. а) $\int \sqrt{x+3}\,dx$ б) $\int \sqrt[3]{x-4}\,dx$

в) $\int \sqrt{2-x}\,dx$ г) $\int \sqrt{3-4x}\,dx$

901. а) $\int \sqrt{(x-1)^3}\,dx$ б) $\int \sqrt[3]{(x+3)^5}\,dx$ в) $\int \sqrt{(x-a)^3}\,dx$

902. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+5)}}$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x)^3}}$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4}}$

903. а) $\int \sin 2x\,dx$ б) $\int \cos 3x\,dx$ в) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$ г) $\int \frac{dx}{\sin^2 8x}$

904. а) $\int \sin^2 x\,dx$ б) $\int \cos^2 x\,dx$ в) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

905. а) $\int \left(\sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{5}{7}x\right) dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{3}{4}x}$

906. а) $\int \sin(2x+3)\,dx$ б) $\int \cos(2-4x)\,dx$ в) $\int \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$

907. а) $\int \sin x \cos x\,dx$ б) $\int \sin^3 x \cos x\,dx$ в) $\int \cos^4 x \sin x\,dx$

§ 20. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ И НЕГОВАТА ПРИМЕНА

Пресметај ги определените интеграли:

908. а) $\int_2^5 x dx$ б) $\int_1^2 dx$ в) $\int_0^{10} x^2 dx$ г) $\int_1^{1\frac{1}{2}} x^3 dx$

909. а) $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\ dx$ б) $\int_2^3 (x-3)^2 x dx$

910. а) $\int \frac{dx}{x^2}$ б) $\int_{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{x^3} dx$ в) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$ г) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

911. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\ x\, dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - 2 \sin x)\, dx$

912. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ б) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{3 \sin^2 x}$

913. Пресметај ја површината ограничена со правата $y = x + 1$ со ординати во точките $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ и со апсцисна оска.

914. Пресметај ја површината ограничена со кривата и со апцисна оска:

а) $y = -x^2 + 2x$ б) $y = -x^2 + 2x + 3$

в) $y = x^2 - x$ г) $y = x^2 - 1$

915. Пресметај ја површината ограничена со линиите:

а) $y = x + 2, \quad y = x^2$ б) $y = x + 1, \ y = (x - 1)^2$

916. Определи ја површината ограничена со кривите линии:

а) $y = x^2 + 5, \ y = 2x^2 + 1$

б) $y = x^2 - 6x + 14, \ y = 2x^2 - 12x + 19$

917. Пресметај ја површината што лежи помеѓу кривите:

а) $y = x^2, \ y^2 = x$ б) $y^2 = 4x, \ x^2 = 32y$

918. Пресметај ја површината на отсечката што ја затвора правата $2x - 3y + 8 = 0$ со параболата $y^2 = 8x$.

919. Пресметај ја зафатнината на телото што се добива со ротација околу оската x на површината ограничена со кривата $y^2 = 4x$ со ордината во точката $x = 1$ и со оската X.

920. Пресметај ја зафатнината на телото што настанува со ротација околу оската X на површина ограничена со линиите:

а) $y = x + 1, \quad x = 1, \quad x = 5, \quad y = 0$

б) $y = -x^2 - 2x, \quad y = 0$ в) $y = x + 2, \quad y = x^2$

г) $y = x^2, \quad y^2 = x$ д) $y = x^2 + 5, \quad y = 2x^2 + 1$

ѓ) $y = \sin x, \quad y = 0$ во интервалот $[0, \pi]$

---

921. Пресметај ја површината ограничена со кривата $y^2 = 2px$, со ордината во точката c, и со оската X.

922. Пресметај ја површината на отсечката што ја дава правата $y = ax + b$ со параболата $y^2 = 2px$.

923. Пресметај ја површината на кругот со помошта на определен интеграл.

924. Пресметај ја површината на елипсата.

925. Пресметај ја површината на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ над интервалот $[a, x]$.

926. Со помошта на определениот интеграл најди ги формулите за пресметување на зафатнината на:

а) валјак — б) конус

в) пресечен конус — г) топка

д) топкин отсечок — ѓ) ротацион елипсоид.

927. Точката се движи со постојана акцелерација g и за времето $t=0$ има брзина c. Колкава е нејзината брзина во времето t и колкав пат изминала до тогаш?

928. Брзината на телото при извесно движење е дадена со знакот $v=(2t^2+3t)\frac{\text{cm}}{s}$. Треба да се пресмета патот што ќе го помине телото за првите 6 секунди.

929. Брзината на телото при некое движење е дадена со формулата $v=\sqrt{1+t}\,\frac{\text{m}}{s}$. Колкав е патот што ќе го помине телото во првите 10 секунди?

930. Топката е истркалана по хоризонтална рамнина со брзина од $8\,\frac{\text{m}}{s}$; поради триење во текот на движењето брзината ѝ се намалува со константна ретардација од $2\,\frac{\text{m}}{s^2}$. Колку далеку ќе се истркала топката?

931. Сила од 1 kp ја истегнува спиралата за 3 cm. Колкава е извршената работа?

932. Со челично јаже долго 30 m, тешко 240 kg, дигаме товар од 250 kg. Колкава е работата извршена при дигањето ако на колцето од вретеното (чекрек) се намотал 24 m јаже?

933. Од резервоар во форма на валјак ($r=0{,}6$ m, $h=3$ m) треба да се исцрпе вода со која е наполнет тој резервоар до врвот. Колкава работа ќе се изврши притоа?

934. Пресметај ја површината на триаголникот што го затвораат правите;

а) $v=0,\ x=10,\ y=\frac{1}{2}x$ — б) $y=0,\ x=10,\ y=2x$

в) $y=0, \quad x=a>0, \quad y=kx \quad (k>0)$

Примени го ексхаустиониот метод*)

935. По ексхаустиониот метод пресметај ја површината на трапезот што го затвораат правите:

а) $y=0, \quad y=\frac{1}{3}x, \quad x=3, \quad x=8$

б) $y=0, \quad y=2x, \quad x=1, \quad x=7$

---

*) Методот на ексхаустија се состои во тоа на зададената површина на погоден начин да и́ се впишат или опишат ликови кои ја апроксимираат таа површина. Се докажува дека набљудуваната површина е поголема од збирот на површините на впишаните а е помала од збирот на површините на опишаните ликови. Ако бројот на елементарните ликови се стреми кон бесконечност и притоа површината на секој се стреми кон нула, тогаш збировите на површините на впишаните и опишаните елементарни ликови се стремат кон истата гранична вредност, а тоа е токму големината на набљудуваната површина.

УПАТСТВА И РЕЗУЛТАТИ

§ I. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Ако равенката може да се сведе на обликот

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

тогаш $f(x) = g(x)$.

* * *

1. а) $2^x = 2^3$, $x = 3$ б) $x = 2$ в) $x = 4$ г) $x = 3$
д) $x = -4$ ѓ) $x = 4$ е) $x = 2$

2. а) $3^x = 3^0$, $x = 0$ б) $x = 0$ в) $x = 0$ г) $x = 0$

3. а) $2^{-x} = 2^2$, $x = -2$ б) $x = -3$
в) $2^3 = 2^{-x}$, $x = -3$ г) $3^{-x} = 3^4$, $x = -4$

4. а) $2^{x+3} = 2^4$, $x + 3 = 4$, $x = 1$ б) $x = -1$
в) $x = -\frac{1}{2}$ г) $x = 5$

5. $2^{3x} = 2^5$, $x = \frac{5}{3}$ б) $x = \frac{1}{2}$ в) $x = -\frac{3}{2}$ г) $x = \frac{7}{4}$

6. а) $2^{x-1} = 2^{-3}$, $x = -2$ б) $x = -2$ в) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$, $x = -\frac{4}{3}$
г) $x = 1$

7. а) $x = \frac{1}{2}$ б) $x = 5$ в) $x = 20$ г) $x = 9$

8. а) $2^{2+x} = 2^4$, $x = 2$ б) $x = \frac{5}{8}$ в) $x = -\frac{1}{2}$
г) $4^{-5} = 4^{\frac{5x-3}{3}} 4^{4-9x}$, $-9x + \frac{5x-3}{3} = -5$, $x = \frac{6}{11}$

9. а) $5^{\frac{6-x}{4}} = 5^{\frac{x+2}{3}}$, $x = \frac{10}{7}$ б) $x = 8$ в) $x = 9$ г) $x = 4$

10. а) $x=\frac{9}{5}$ б) $x=13$ в) $x=-\frac{16}{3}$ г) $x=\frac{36}{13}$

11. а) $a^{x+x+6}=a^0$, $x=-3$ б) $x=\frac{17}{11}$ в) $x=\frac{17}{9}$ г) $x=10$

12. а) $x=6$ б) $x=3$ в) $x=-\frac{3}{16}$ г) $x=1$

13. а) $x=-\frac{11}{16}$ б) $x=8$ в) $x=\frac{23}{19}$

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=6$

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}=6$, $4^{-x}=16$, $x=-2$

14. а) $8^x=7^x(7^{-1}+1)$, $\left(\frac{8}{7}\right)^x=\frac{1}{7}+1$, $\left(\frac{8}{7}\right)^x=\frac{8}{7}$, $x=1$

б) $7^x(7-5)=2^x(3\cdot 2^3+2^{-1})$, $2\cdot 7^x=2^x\cdot\frac{49}{2}$,

$\left(\frac{7}{2}\right)^x=\left(\frac{7}{2}\right)^2$, $x=2$ в) $x=4$ г) $x=3$

15. а) $49\cdot 5^x=1\,225$, $5^x=25$, $x=2$ б) $x=2$ в) $x=-1$ г) $x=2$

16. а) $x=-1$ б) $x=-\frac{1}{2}$ в) $x=5$ г) $x=5$

§ 2. ЛОГАРИТМИРАЊЕ

$b^n = a, \quad b = \sqrt[n]{a}, \quad n = \log_b a \;\; b > 0, \quad b \neq 1, \quad a > 0.$

$\log_b b^a = a, \quad \log_b b = 1,$

пишуваме: $\log_{10} a = \log a,$

$\log \; 10^n = n,$

$\log \; (mn) = \log m + \log n, \qquad \log \frac{m}{n} = \log m - \log n$

$\log \; a^n = n \log a, \qquad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$

* *
*

17. а) $c = 2^3 = 8$ б) $a^3 = 8 \quad a = \sqrt[3]{8} = 2$

в) $2^b = 8, \; b = \log_2 \; 8 = 3$ г) $c = 4^2 = 16$ д) $a^2 = 16, \; a = \sqrt{16} = 4$

ѓ) $4^b = 16, \; b = \log_4 \; 16 = 2$

18. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = c, \quad c = \frac{1}{16}$ б) $a^4 = \frac{1}{16}, \; a = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^b = \frac{1}{16}, \; b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

19. а) $\log_3 \; 81 = x, \; 3^x = 81, \; 3^x = 3^4, \; x = 4, \; \log_3 \; 81 = 4$
б) 2 в) 3

20. а) -1; б) -2; в) -3 **21.** а) $\frac{1}{2}$ б) $\frac{3}{2}$ в) $\frac{3}{2}$

22. а) -2; б) -2; в) -3 **23.** а) 2 б) 3 в) 3

24. а) $\frac{3}{2}$ б) $\frac{5}{4}$ в) $\frac{4}{3}$ **25.** а) $\frac{2}{3}$ б) $= -\frac{3}{2}$ в) $-\frac{3}{4}$

26. а) -2 б) -2 в) -2 **27.** а) $-\frac{1}{2}$ б) $-\frac{2}{3}$ в) $-\frac{3}{5}$

28. а) 1 б) 1 в) 1 г) 1

29. Тоа се по ред: $1, 2, 3, 6, 7, -1, -2, -5, -9, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ $\frac{1}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 0.$

30. Тоа се по ред: $1, 2, 4, 7, 0, -1, -3, -5, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5},$ $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}.$

31. Тоа се по ред: $1, 3, 5, 7, -2, -4, -6, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 0.$

32. По ред: $-1, -3, 1, 0, 4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -2, \frac{3}{2}, 4.$

33. а) $-1, 2, 0, -3.$ **34.** $1, 2, -1, -3, -\frac{1}{2}.$

35. а) 3 б) 4 в) 12 г) a **36.** а) n б) $m+n$ в) $m-n$ г) $\frac{1}{n}$

37. а) 0 б) 0 в) 0 г) 0

38. а) $x^3=8$, $x=\sqrt[3]{8}$ $x=2$; $\log_2 8=3$ б) $x=\frac{1}{3}$ в) $x=2$ г) $x=4$

39. а) $x=\frac{2}{3}$ б) $x=\frac{3}{5}$ в) $x=3$ г) $x=\frac{1}{2}$

40. а) $x=3^4=81$ б) $x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ в) $x=2\sqrt{2}$ д) $x=4$

41. а) $x=4^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{4})^3=8$ б) $x=\frac{1}{9}$ в) $x=\frac{25}{9}$ г) $x=3$

42. а) Нека е $\log_a M=m$ и $\log_a N=n$. Тогаш е $M=a^m$ и $N=a^n$. Со множење добиваме дека е $MN=a^{m+n}$, а со логаритмирање дека е $\log_a (MN)=m+n$. Со замената на m и n со дадените изрази следува $\log_a (MN)=\log_a M+\log_a N$, што и требаше да се докаже. На сличен начин докажи ги б), в) и г).

43. а) $\log (5ab)=\log 5+\log a+\log b$ б) $\log 3+2 \log x$
в) $\log [2a(a+b)]=\log 2+\log a+\log (a+b)$ г) $\log(a+b)+\log(a-b)$

44. а) $\log[5(a-2b] = \log 5 + \log(a-2b)$ б) $\log 5 + \log a + \log(x+b)$

в) $\log a + \log a(a+b) + \log(a-b)$ г) $\log 7 + \log(x-2y) + \log(x+2y)$

45. а) $\log\frac{ab}{c} = \log a + \log b - \log c$ б) $\log a - (\log b + \log c)$

в) $\log a + \log b - \log c - \log d$

г) $\log a + \log b + \log c - \log x - \log y - \log z$

46. а) $\log\frac{5a}{x+y} = \log 5 + \log a - \log(x+y)$

б) $\log(a-b) + \log(a+b) - \log(x-y) - \log(x+y)$

в) $\log a + \log(1+a) - \log b - \log(b-1) - \log(b+1)$

г) $-\log a - \log b$, зашто е $\log 1 = 0$

47. а) $\log(a^3 b^4) = \log a^3 + \log b^4 = 3\log a + 4\log b$

б) $\log 15 + 4\log a - \log 7 - \log c - 3\log d$

в) $\log a + 2\log(a+b) - \log 5 - 3\log c - 3\log(x+y)$

г) $2(\log a + \log b - 2\log c)$

48. а) $\log a - \log b + 2(\log x - \log y)$ б) $2(\log a - \log b) + 3(\log c - \log d)$

в) $\log 1 - 2(\log a + \log b) = -2(\log a + \log b)$

г) $-2(\log a + \log b) - 3(2\log c + \log d)$

49. а) $\log\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}} = \log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{3}\log c$

б) $\frac{1}{2}(\log a + 3\log b) - \log c - \frac{3}{4}\log d$

в) $\log 5 + \log x + \frac{1}{3}[2\log a + \log(a-b)]$ г) $-\log a - \frac{1}{4}\log b$

50. а) $\log 8 + \log a - \frac{1}{3}[2\log a + 4\log(a-b)]$

б) $\frac{1}{2}(\log a + \log b) + \frac{1}{3}(\log c + 4\log d) - \frac{1}{2}\log(a-b)$

в) $\frac{1}{2}\left[\log a + \frac{1}{3}\log b\right]$ г) $\frac{1}{3}\left[\log 3 + \frac{1}{4}\left(\log 5 + \frac{1}{3}\log 6\right)\right]$

51. а) $\frac{1}{2}\left[\log 2+\log a+\frac{1}{2}\ (\log a+\log b)-\frac{1}{3}\ \log c\right]$

б) $\log a+\frac{1}{3}\left\{2\log b+\frac{1}{4}\left[\log (a+b)+\frac{1}{2}\ \log c\right]\right\}$

в) $\frac{1}{2}\left[\ \log x+\frac{1}{3}\ \log y-\log a-\frac{1}{2}\ (\log b+\log b)\right]$

г) $\frac{1}{2}\left[\log a+3\ \ \log b+\frac{3}{2}\ \log x-3\ \log (a+b)\right]$

52. а) $\frac{1}{2}\left(2\log a+\frac{1}{2}\log V\right)-(\log 2+\log \pi+\log b)$

б) $\frac{1}{2}\left[\log 2+\log \pi\ +\ \frac{1}{2}\log P-\log 3-2\log a-\frac{1}{3}\log b\right]$

в) $0{,}5\log 0{,}8\ +\ \frac{1}{3}\log (a+b)-3\log\ \ 1{,}47-\log \pi$

г) $\log 4+3\log 0{,}00875+\log \pi-\log 5-2\log a-\log b-$

$-\frac{1}{3}\ (\log c+\log d)$

53. а) $\log a+\log b-\log c=\log\frac{ab}{c}$; бараниот израз гласи $\frac{ab}{c}$

б) $\frac{x}{yz}$ в) $\frac{8a}{7b}$ г) $\frac{a}{bc}$

54. а) $\log a+2\log b-\log \pi=\log\frac{ab^2}{\pi}$, оттука бараниот израз е $\frac{ab^2}{\pi}$

б) $\frac{x^2}{y^2z}$ в) $\frac{a^2-b^2}{ad}$ г) $\frac{ab^2}{c^3d}$

55. а) $3\ \log a-2\log (a+b)-[\log b+4\log (a-b)]=$

$=\log\frac{a^3}{(a+b)^2\cdot b(a-b)^4}$, така што бараниот израз е $\frac{a^3}{(a+b)^2\cdot b(a-b)^4}$

б) $\frac{ab^3}{a^2-b^2}$ в) $\frac{5{,}3^2\,a}{2\pi(a+b)^3}$ г) $\frac{45{,}3\,a}{\frac{17}{\pi}}=\frac{45{,}3\,a\pi}{17}$.

56. а) Бараниот израз е $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}$ б) $\frac{1}{a^2\sqrt[3]{b}}$ в) $\frac{1}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt[3]{x^2}}$ г) $\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}}{c^5\sqrt[4]{d}}$

57. а) $\frac{\sqrt{a}}{b^2\sqrt[3]{c}}$ б) $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{b\sqrt[3]{c}}$ в) $\frac{\sqrt[3]{(a+b)^2}}{\sqrt{ab}}$ г) $\frac{1}{(xy)^2\sqrt[3]{(ab)^2}}$

58. а) $\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{(bc^7)^3}$ б) $\frac{\sqrt[4]{(a+b)^3}}{\sqrt[3]{(a-b)^5}}$ в) $\frac{a+b}{\sqrt[4]{(a^2\sqrt[4]{b^3})^2}}$ г) $\frac{a^n\sqrt[m]{b}}{\sqrt[3]{(a+b)^r}}$

59. а) $\sqrt[3]{\frac{a}{(a+b)^5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+b)b^3}}$ б) $\frac{1}{ab\sqrt[3]{c}}$

в) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{(a+b)}\cdot c^5}$ г) $\frac{a+b}{a-b}\cdot\sqrt[n]{\frac{\sqrt[3]{cr}}{d^m}}$

60. а) $\log 6=\log 2+\log 3$ б) $\log 21=\log 3+\log 7$ в) $\log 5-\log 3$

61. а) $0<\log 7<1$ б) $1<\log 15<2$ в) $1<\log 77{,}8<2$

62. а) $2<\log 156{,}1<3$ б) $2<\log 553{,}17<3$ в) $1<\log 10{,}517<2$

63. а) $3<\log 3778{,}9<4$ б) $5<\log 507\,918<6$ в) $8<\log(3\cdot 10^8)<9$

64. а) $-1<\log 8<0$ б) $-1<\log 0{,}309<0$ в) $-2<\log 0{,}033<-1$

65. а) $\log 0{,}001=-3$ б) $-3<\log 0{,}007<-2$
г) $-8<\log(3\cdot 10^{-8})<-7$

66. а) 1,76343 б) 2,85309 **67.** а) 3,00561 б) 3,44979

68. а) 4,56820 б) 4,68305 **69.** а) 5,61700 б) 6,72997

70. а) 4,75422 б) 4,61159 **71.** а) 4,61643 б) 5,51924

72. а) 1,63849 б) 1,76916 **73.** а) 0,89867 б) 0,30229

74. а) 0,27875—1 б) 0,85552—1 **75.** а) 0,70586—2 б) 0,48885—3

76. а) 4 170 б) 4 595 **77.** а) 71 040 б) 83 180

78. а) 550,3 б) 521,5 **79.** а) 38,1 б) 18,78

80. а) 0,7153 б) 0,07609 в) 0,02347 г) 0,0001517

81. а) 1 496,9 б) 12 450 **82.** а) 1,1381 б) 3,1679

83. а) 0,35984 б) 0,059004 в) 0,01349 г) 0,0037153

84. а) Бараниот број нека е x. Тогаш е $\log x = 1 - 0{,}73911 - 1 = 0{,}26089 - 1$, $x = 0{,}18234$ б) 0,087868
в) $\log x = 3 - 2{,}30117 - 3 = 0{,}69883 - 3$, $x = 0{,}0049984$ г) 0,03121

85. а) Го бараме бројот $x = 1\,058 \cdot 731$. Со логаритмирање е $\log x = \log\ 1058 + \log\ 731 = 3{,}02449 + 2{,}86392 = 5{,}88841$. Со антилогаритмирање го наоѓаме самиот број $x = 773\,420$ б) 21 175
в) 117 760

86. а) Го бараме бројот $x = 519{,}3 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}05593$. Одовде е $\log x = \log 519{,}3 + \log 0{,}14 + \log 0{,}05593 = 2{,}71542 + (0{,}14613 - 1) + (0{,}74764 - 2) = 0{,}60919$. Бараниот број е $x = 4{,}0662$ б) 0,16812

87. а) $x = \dfrac{573}{419}$, $\log x = \log 573 - \log 419 = 0{,}13594$, $x = 1{,}3675$
б) 0,077535 в) 168,67

88. а) $x = \dfrac{0{,}917 \cdot 37{,}5}{4\,051}$, $\log x = \log 0{,}917 + \log 37{,}5 - \log 4\,051 = (0{,}96237 - 1) + 1{,}57403 - 3{,}60756 = 2{,}53640 - 4{,}60756 = (5{,}53640 - 4{,}60756) - 3 = 0{,}92884 - 3$,
$x = 0{,}0084886$ б) 117,8

89. а) 0,3432 б) 0,060814 в) 5,9483

90. а) $x = 2{,}375^5$, $\log x = 5 \log 2{,}375 = 5 \cdot 0{,}37566 = 1{,}87830$,
$x = 75{,}562$ б) 0,056296 в) 101,49

91. а) $\sqrt[4]{7\,853{,}7} = 9{,}414$ б) 1,4119 в) $x = \sqrt[4]{0{,}0178}$, $\log x = \dfrac{1}{4} \log\ 0{,}0178 = \dfrac{1}{4}(0{,}25\,042 - 2) = \dfrac{1}{4}(2{,}25042 - 4) = 0{,}56216 - 1$, $x = 0{,}36527$

92. а) 23,343 б) 1,2357 в) 0,02228 г) $x = \dfrac{15{,}175\sqrt{3{,}058}}{4{,}008^3}$,
$\log x = \log 15{,}178 + \dfrac{1}{2} \log 3{,}058 - 3 \log 4{,}008 = 1{,}18121 + \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}48544 - 3 \cdot 0{,}60293 = 0{,}61514 - 1$, $x = 0{,}41223$.

93. а) 5,7363 б) $x = \sqrt{\left(\frac{0,88}{73}\right)^3}$, $\log x = \frac{3}{2}(\log 0,88 - \log 73) =$

$$= \frac{3}{2}[(0,94448 - 1) - 1,86332] = \frac{3}{2}[0,94448 - 2,86332] =$$

$$= \frac{3}{2}[(2,94448 - 2,86332) - 2] = \frac{3(0,08116 - 2)}{2} =$$

$$= 0,12\,174 - 3,\quad x = 0,001\,323\,5$$

94. а) 1,6743 б) 4,6939 **95.** а) 0,021736 б) 168,615 в) 1,761

96. а) 1,96655 б) 0,30127 **97.** а) 4,8262 б) 25,299 в) 41,6064

98. а) $\log(x+5)$ постои за $x+5>0$ т. е. за $x>-5$

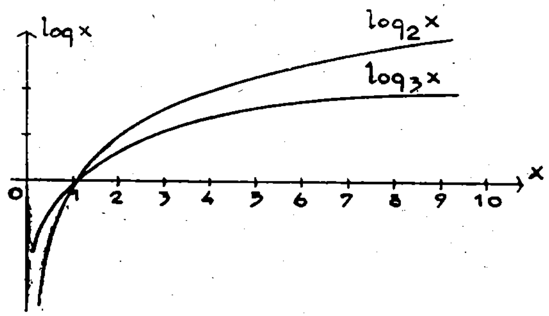
б) $x<\frac{3}{5}$ в) $-\infty<x<-2$ или $3<x<+\infty$

г) $0<x<\frac{1}{2}$

99. а) $\log(x+3)\geqslant 0$ за $x+3\geqslant 1$ т. е. за $x\geqslant -2$

б) $\log(2x-5)\leqslant 0$ за $0<2x-5\leqslant 1$ т.е. $2\frac{1}{2}<x\leqslant 3$

в) за $x^2-5x+7\geqslant 1$ т. е. за $x^2-5x+6\geqslant 0$, а тоа е за $-\infty<x<2$ и $3<x<+\infty$ г) за $0<x^2-4x+4<1$, а тоа е за $1<x<2$ и $2<x<3$



Сл. а

100. а) $\log_2 x<\log_3 x$ за $0<x<1$; $\log_2 x=\log_3 x$ за $x=1$; $\log_2 x>\log_3 x$ за $1<x<+\infty$ (сл. а) б) $3<x<4$

в) за $0<x^2-1<1$ т. е. $1<x^2<2$ или $1<|x|<\sqrt{2}$

г) $\log_a(x^2-8x+13)>\log_b(x^2-8x+13)$ за $1<x^2-8x+$ $+13<+\infty$, а тоа е за $-\infty<x<2$ или $6<x<+\infty$; $\log_a(x^2-8x+13)=\log_b(x^2-8x+13)$ за $x^2-8x+13=1$ т. е. за $x_1=2$ и $x_2=6$; $\log_a(x^2-8x+13)<\log_b(x^2-8x+13)$ за $0<x^2-8x+13<1$, а тоа е за $2<x<4-\sqrt{3}$ и $4+\sqrt{3}<x<6$.

101. За $a>1$ $\log_a N\to\infty$ кога $N\to+\infty$.

102. За $a>1$ $\log_a N\to-\infty$ кога $N\to 0$.

103. Не може, зашто е $1^x=1$ за секое x.

104. Зашто логаритмите на негативните броеви не се реални броеви.

105. Ако е $0<a<1$ и $N\to\infty$, тогаш $\log_a N\to-\infty$.

106. Ако е $0<a<1$ и $N\to 0$, $\log_a N\to+\infty$.

107. а) Треба да се познава $\log 2$ и $\log 3$, зашто е $12=2^2\cdot 3$
б) $\log 5$ и $\log 2$ в) $\log 2$ и $\log 19$ г) $\log 7$ и $\log 5$

108. а) $\log 6=\log 2+\log 3=0{,}77815$ б) $\log 10=\log 2+\log 5=1$
в) $\log 15=\log 3+\log 5=1{,}17609$ г) $\log 2+2\log 3=1{,}25527$
д) $3\log 2+\log 3=1{,}38021$ ѓ) $2\log 2+\log 3+\log 5=1{,}77815$
е) $\log 0{,}6=\log 6-\log 10=0{,}77815-1$ ж) $\frac{1}{2}(\log 3-\log 10)=$
$=\frac{1}{2}(0{,}47712-1)=\frac{1}{2}(1{,}47712-2)=0{,}73856-1$
з) $\log 2-(\log 3+\log 5)=0{,}30103-1{,}17609=$
$=(1{,}30103-1{,}17609)-1=0{,}12494-1$ ѕ) $0{,}47712-3$

109. а) $1{,}14613$ б) $2\log 2+\log 7=1{,}44716$
в) $2\log 7=1{,}69020$ г) $\frac{1}{2}(\log 7-\log 2)=0{,}27204$

110. а) $\log 20=\log(2\cdot 10)=\log 2+\log 10=1{,}30103$
б) $\log 2+\log 100=2{,}30103$ в) $\log 0{,}2=\log 2-\log 10=0{,}30103-1$
г) $\log 2-\log 1000=0{,}30103-3$

111. а) $\log 3+\log 10=1{,}47712$ б) $\log 3+\log 10\,000=4{,}47712$
в) $\log 3-\log 10=0{,}47712-1$ г) $0{,}47712-5$

112. а) $\log 600=\log(2\cdot 3\cdot 10^2)=\log 2+\log 3+2=2{,}77815$
б) $0{,}77815-2$ в) $\log\frac{2^2\cdot 3}{1000}=2\log 2+\log 3-\log 1000=0{,}07918-2$

113. а) $3{,}49415$ б) $6{,}49415$ в) $0{,}49415$ г) $0{,}49415-1$

114. а) 1,87262 б) 0,87262 в) 2,87262 г) $2\cdot 3{,}87262=7{,}74524$

д) $0{,}87262-1$ ѓ) $0{,}87262-2$ е) $0{,}87262-4$

115. а) Ако бројот порасне 15 560 на 15 570, тогаш логаритамот се зголемува од 4,19201 на 4,19229, т. е. за $28\cdot 10^{-5}$. Се зема (приближно) дека логаритамот се зголемува пропорционално на зголемувањето на бројот. Значи, ако нашиот број 15 560 го зголемиме за 1, т.е. преминуваме на бројот 15 561, тогаш и логаритамот на набљудуваниот број треба да се зголеми за

$28\cdot 10^{-5}:10=2{,}8\cdot 10^{-5}\approx 3\cdot 10^{-5}$, па ќе биде и $\log\ 15\,561=$

$=4{,}19201+0{,}00003=4{,}19204$.

б) $\log\ 15\,562=4{,}19201+2\cdot 2{,}8\cdot 10^{-5}\approx 4{,}19207$ д) 4,19226

116. а) 3,70809 б) 3,70811 в) 3,70814 г) 3,70816

117. а) 0,78011 б) 0,78013 в) 0,78015 г) 0,78016

118. а) 0,5856 б) 0,01953

119. а) Ако е $x=\sqrt[3]{9-\sqrt[5]{8}}$ и $y=\sqrt[5]{8}$, тогаш е $\log y=\frac{1}{5}\log\ 8=$

$=0{,}18062$, $y=1{,}5157$. Според тоа е $x=\sqrt[3]{9-1{,}5157}=$

$=\sqrt[3]{7{,}4843}$; $\log x=\frac{1}{3}\log\ 7{,}4843=0{,}29138$, $x=1{,}95605$.

б) 2,0938 в) 5,9725 г) 4,9564

120. а) 1,03 б) 1,6212

121. а) $b=\sqrt{c^2-a^2}$; наоѓаме (со примена на логаритам)

$b=43{,}34$ cm. б) 0,4377

122. а) $P=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, $P=11{,}2187\ \text{m}^2$ б) 0,1395

123. $a=2\sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}}$, $a=34{,}5\,542$ m

124. $P=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$; $P=139{,}716\ \text{m}^2$

125. Ако е $2s=a+b+c$, тогаш површината, според Хероновата формула, е:

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $P=9{,}008\ \text{cm}^2$.

126. $r=\sqrt{\frac{P}{\pi}}$; $r=5{,}83$ cm.

127. $P=4r^2\pi$, $V=\dfrac{4r^3\pi}{3}$. $P=337{,}18$ m^2, $V=582{,}21$ m^3.

128. $r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$; $r=5{,}18$ cm.

129. Тежината на ваљакот е $Q=r^2\pi hs$; $Q=209{,}91$ g.

130. Работ на коцката е $a=\sqrt[3]{\dfrac{Q}{S}}$; $a=4{,}3909$ cm.

131. $r=\sqrt{\dfrac{Q}{\pi hs}}$; $r=3{,}2$ cm. **132.** а) $360{,}7$ kg

б) $V=\dfrac{\pi}{3}r^2\sqrt{s^2-r^2}=\dfrac{\pi}{3}r^2\sqrt{(s-r)\ (s+r)}$; $V=11{,}774$ m^3.

133. Ако волуменот на конусот е V, тогаш е $r=\sqrt[3]{\dfrac{V\sqrt{3}}{\pi}}$; $r=2{,}4$ dm.

134. а) Од $\log_m a=M$ и $\log_n a=N$ е $a=m^M$ и $a=n^N$, т.е. $m^M=n^N$. Со логаритмирање на левата и на десната страна најпрвин при основа m, а потоа при основа n добиваме $M\log_m M=N\log_m n$ и $M\log_n m=N\log_n n$. Но $\log_a a=1$, така што е $M=N\log_m n$ и $N=M\log_n m$. Со супституција на вредноста M во втората релација и со скратување добиваме $\log_n m\cdot\log_m n=1$, кое и требаше да се докаже.

б) Секако е $b=c^{\log_c b}$ (1), $c=a^{\log_a c}$ (2) и $a=b^{\log_b a}$ (3). Од (2) и (3) е $c=(b^{\log_b a})^{\log_a c}$, а одовде според релацијата (1) е $c=[(c^{\log_c b})^{\log_b a}]^{\log_a c}$ или $c=c^{\log_c b\,\cdot\,\log_a c\,\cdot\,\log_b a}$, т.е. $\log_c b\cdot\log_a c\cdot\log_b a=1$, што и требаше да се докаже.

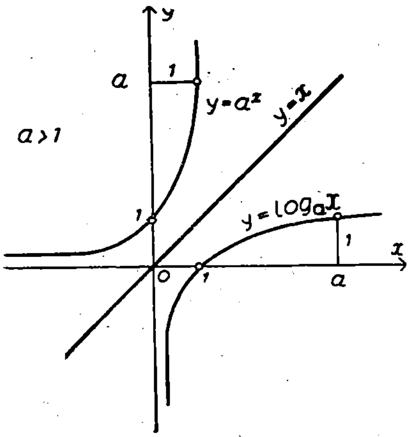
в) Од зададените релации е $\dfrac{1}{1-\log x}=\log y$ и $\dfrac{1}{1-\log y}=\log z$.

Оттука со ред следува: $\log z=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\log x}}=\dfrac{\log x-1}{\log x}$,

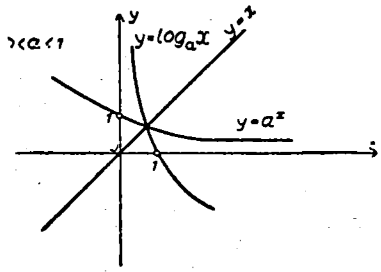
$\log x=\dfrac{1}{1-\log z}$, а одовде е $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

г) Од $a=bc$ излегува $\log_k a=\log_k b+\log_k c$. Според 134. а) е $\log_k a=\dfrac{1}{\log_a k}$ и слично за останатите логаритми. Со замена во горната равенка следува бараната релација. д) Од $v^2=pq$ е $2\log_q v=1+\log_p q$ и $2\log_q v=1+\log_q p$ или $\log_p q=2\log_p v-1$ и $\log_p p=2\log_q v-1$. Со множење на десната страна со десната, а левата со левата излегува, по средувањето $2\log_p v+2\log_q v=4\log_p v\cdot\log_q v$, а одовде со делење со $2\log_p v\cdot\log_q v$ ја добиваме бараната релација.

§ 3. ГРАФИЧКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ a^x и $\log_a x$



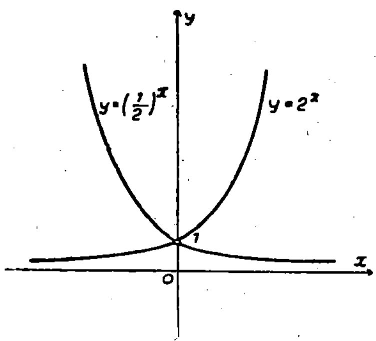
Сл. 1



Сл. 2

135. а) в) (сл. 3)

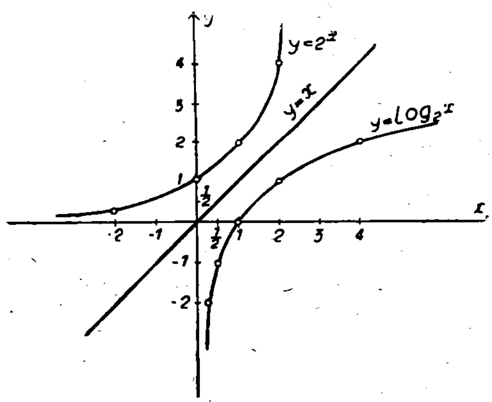
136. (сл. 3)



Сл. 3

138. (сл. 4)

139. (сл.4)

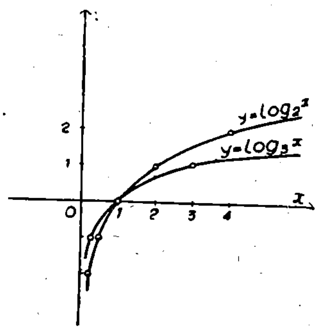


Сл. 4

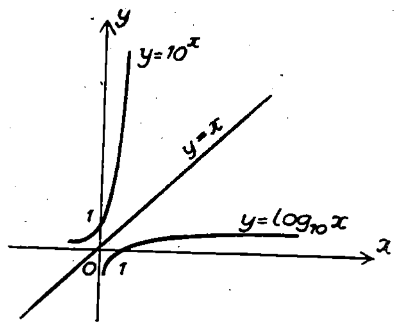
141. (сл. 5) а) $x > 1,\ \log_2 x > \log_3 x$

б) $0 < x < 1,\ \log_2 x < \log_3 x$

142. (сл. 6)



Сл. 5

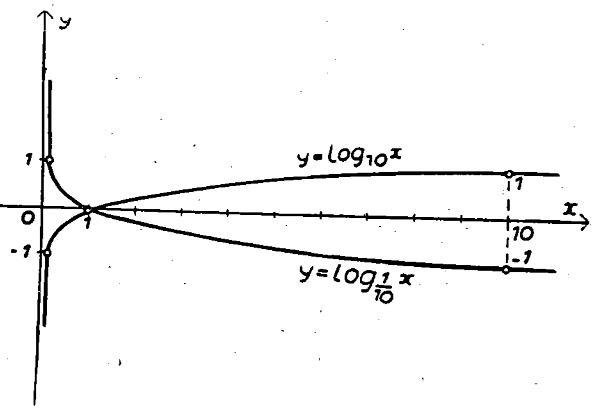


Сл. 6

143. (сл. 7)

$$0 < x < 1 \left\{ \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{10}} x > 0 \\ \log_{10} x < 0 \end{array} \right.$$

$$x > 1 \left\{ \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{10}} x < 0 \\ \log_{10} x > 0 \end{array} \right.$$



Сл. 7

144. а) 3^{x-5} постои за секое x б) секое x в) за $x > 0$

145. а) $2^x > 3^x$ за $-\infty < x < 0$; $2^x = 3^x$ за $x = 0$,

$2^x < 3^x$ за $0 < x < +\infty$ б) за $-\infty < x < -3$

в) $a^{2x-4} > b^{2x-4}$ за $-\infty < x < 2$, $a^{2x-4} = b^{2x-4}$

за $x = 2$, $a^{2x-4} < b^{2x-4}$ за $2 < x < +\infty$

§ 4. ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

I Од равенката
$\log f(x) = \log g(x)$
следува равенката $f(x) = g(x)$.

II Равенката
$\log x = a$ има решение $x = 10^a$.

III Од равенката
$\log f(x) + a = \log g(x)$
следува $\log f(x) + a \log 10 = \log g(x)$,
односно $10^a f(x) = g(x)$.

* * *

146. а) $x = 10^2 = 100$ б) $x = \sqrt[3]{10}$ в) $x = 0{,}001$ г) $x = 1$ д) $x = 9$
ѓ) $x = \frac{1}{9}$ е) $x = 3$ ж) $x = 9$ з) $x = 8$ ѕ) $x = 4^9$

147. а) Од $\log[5x(2x+3)] = \log[10(3-x)^2]$ следува
$5x(2x+3) = 10(3-x)^2$. Решението е $x = \frac{6}{5}$.

б) $\log \frac{x+2}{x-2} = \log \frac{100}{4}$, $\frac{x+2}{x-2} = 25$, $x = \frac{13}{6}$

в) $\log \frac{x+2}{x-2} = \log 3$, $\frac{x+2}{x-2} = 3$, $x = 4$ г) $x = -\frac{37}{21}$

148. а) $x = \frac{1}{3}$ б) $14 \log x - 12 \log x = 2 \log 5$, $\log x = \log 5$, $x = 5$

в) $x = \frac{1}{4}$ г) $x = 11$ д) $x = 10$. Второто решение $x = 0$ нема смисла, зошто $\log 0$ не е дефиниран. ѓ) $x = \frac{1}{3}$ е) $x = 2$.

За втората вредност $x = -\frac{17}{4}$ логаритамот не е реален.

ж) $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{31}{2}$ нема смисла.

149. а) $x_1 = 10$, $x_2 = \sqrt[5]{100}$ б) $x_1 = 1$, $x_2 = 10$

§ 5. СИСТЕМИ ОД КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

I $\left.\begin{aligned} ax^2+bxy+by^2+dx+ey+f=0 \\ mx+ny+p=0 \end{aligned}\right\}$

Од линеарната равенка се изразува една непозната со помошта на друга, на пример

(а) $y=-\dfrac{mx+p}{n}$

па потоа се наредува во квадратна равенка. Со тоа се добива квадратна равенка со една непозната (x), која дава x_1 и x_2. Со замена на најдените вредности на непознатата x во равенката (а) добиваме y_1 и y_2. Овој систем, значи, во општ случај има две решенија: x_1, y_1 и x_2, y_2.

II Системот од две квадратни равенки со две непознати не доведува (по елиминацијата на една непозната) на равенка од 4 степен, која не може да се реши по единствени методи. Во специјални случаи ваквите системи можат да се решат по методот на супституција, компарација или по методот на еднакви коефициенти. Некои од овие системи можеме некогаш да ги решиме и по некои специјални методи.

III Ако една од дадените равенки е хомогена, т.е. од обликот

$ax^2+bxy+cy^2=0,\ y\neq 0,$

тогаш со делење со y^2 равенката се сведува на квадратна со непознато $\dfrac{x}{y}$. Со решавање на оваа равенка наоѓаме:

$\dfrac{x}{y}=k_1$ и $\dfrac{x}{y}=k_2$.

Ако на секоја од овие равенки и припишеме друга равенка од дадениот систем, тогаш сме поставиле 2 система равенки од обликот под I. (Делењето на дадената равенка може да се изведе и со x^2).

IV $\left.\begin{array}{l} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy-c_2y^2=d_2 \end{array}\right\} d_1d_2\neq 0.$

Со множење на првата равенка со $s\ d_2$, на втората со $s-d_1$ и со собирање излегува хомогена равенка, така што системот се сведува на случајот III. Системот се решава на поинаков начин со помошта на супституција $y=tx$. Со замена во обете равенки и со делење на првата со втората равенка добиваме

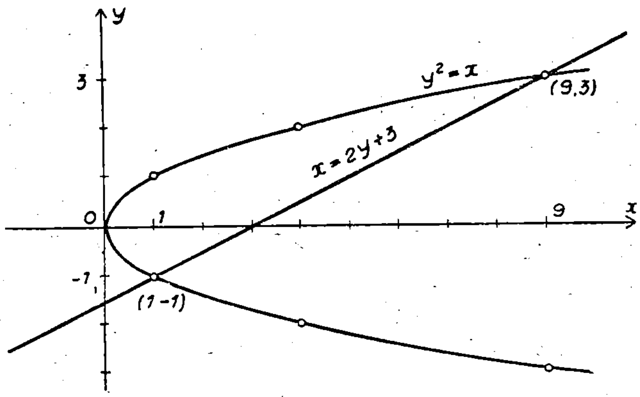
$$\frac{a_1+b_1t+c_1t^2}{a_2+b_2t+c_2t^2}=\frac{d_1}{d^2}.$$

Решенијата t_1 и t_2 на оваа равенка ги воведуваме во супституциона равенка и добиените равенки $y=t_1x$ и $y=t_2x$ ги решаваме со една од равенките на дадениот систем.

* * *

150. а) Со супституција на непозната x од втората равенка во првата ја добиваме равенката $y^2=2y+3$, $y_1=-1$, $y_2=3$.

Од втората равенка следува $x_1=1$, $x_2=9$. Решенијата се $x_1=1$ $y_1=-1$ и $x_2=9$, $y_2=3$ (сл. 8). б) $x_1=1$; $y_1=2$; $x_2=9$, $y_2=6$ в) $x_1=y_1=0$; $x_2=3$, $y_2=6$ г) $x_{1,2}=y_{1,2}=2$



Сл. 8

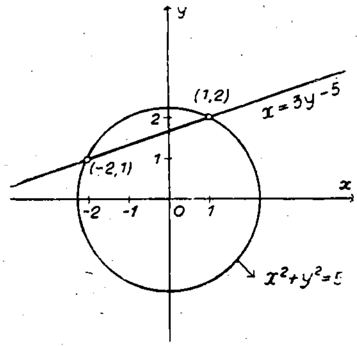
151. а) Со замена на $x=3$ во првата равенка имаме $y^2=9$, $y=\pm 3$.

Решенијата се: $x_1=3$, $y_1=3$, $y_2=-3$.

б) $x_{1,2}=1$, $y_{1,2}=\pm 4$ в) $x_{1,2}=y_{1,2}=0$ г) $x_{1,2}=6$, $y_{1,2}=\pm 3$.

152. а) $x_{1,2}=6$, $y_{1,2}=6$ б) $x_{1,2}=2$, $y_{1,2}=4$

в) $x_{1,2}=1$, $y_{1,2}=\frac{3}{2}$ г) $x_1=3$, $y_1=-4$; $x_2=12$, $y_2=-8$



Сл. 9

153. а) $x_{1,2}=1$, $y_{1,2}=\pm 1$ б) $x_{1,2}=-3$, $y_{1,2}=\pm 4$

в) $x_{1,2}=\pm 4$, $y_{1,2}=0$ г) $x_1=-2$, $x_2=-8$, $y_{1,2}=1$

154. а) $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=-2$, $y_2=1$ (сл. 9) б) $x_1=4$, $y_1=1$; $x_2=-1$, $y_2=4$ в) $x_1=-2$, $y_1=4$; $x_2=-9$, $y_2=-3$

г) $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=\pm 1$

155. а) $x_{1,2}=8$, $y_{1,2}=\pm 3$ б) $x_{1,2}=\pm 4$, $y_{1,2}=\pm \frac{9}{5}$

в) $x_{1,2}=0$, $y_{1,2}=\pm 3$ г) $x_{1,2}=\pm 4$, $y_{1,2}=3$

156. а) $x_1=6$, $y_1=0$;

$x_2=-2$, $y_2=4$ (сл. 10)

б) $x_1=0$, $y_1=5$;

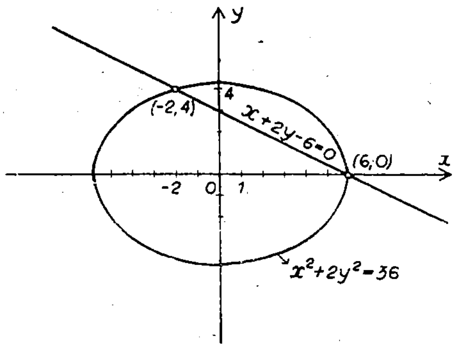
$x_2=9$, $y_2=4$

в) $x_1=-10$, $y_1=0$;

$x_2=8$, $y_2=3$

г) $x_1=-6$, $y_1=2$,

$x_2=-8$, $y_2=-\frac{3}{2}$



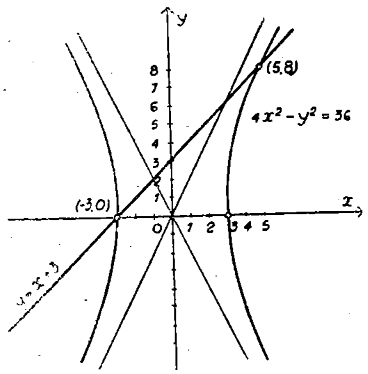
Сл. 10

157. а) $x_{1,2}=10$, $y_{1,2}=\pm 4$ б) $x_{1,2}=6$, $y_{1,2}=0$

в) $x_{1,2}=2$, $y_{1,2}=\pm 2i\sqrt{2}$ г) $x_{1,2}=9$, $y_{1,2}=\pm 4$

д) $x_{1,2}=\pm 4$, $y_{1,2}=3$

158. а) $x_1 = 5, y_1 = 8$; $x_2 = -3$, $y_2 = 0$ (сл. 11) б) $x_1 = 3, y_1 = 0$; $x_2 = -6$, $y_2 = 3$ в) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 7, y_2 = -12$ г) $x_1 = 3, y_1 = 0$; $x_2 = 5, y_2 = 8$



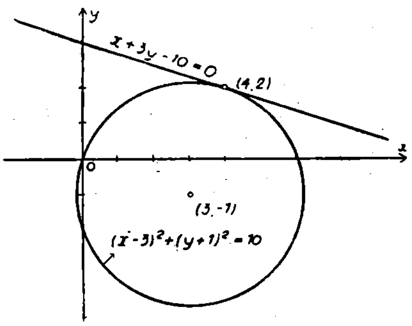
Сл. 11

159. Со елиминација на непознатата y доаѓаме до равенката $0 \cdot x^2 + 16x - 80 = 0$. Решенијата се: $x_1 = 5$, $y_1 = -6$; $x_2 = \infty, y_2 = \infty$.

160. а) $x_{1,2} = 2$, $y_{1,2} = 1$ б) $x_{1,2} = 5$, $y_{1,2} = 1$ в) $x_{1,2} = 0$, $y_{1,2} = 4$ г) $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 2$ (сл. 12)

161. а) $x_{1,2} = \dfrac{40 + 2i\sqrt{95}}{9}$ $y_{1,2} = \dfrac{50 + 2i\sqrt{95}}{9}$ б) $x_{1,2} = 5$, $y_{1,2} = 4$ в) $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 3$ г) $x_{1,2} = 2$, $y_{1,2} = \dfrac{3}{2}$

162. а) $x_{1,2} = 6$, $y_{1,2} = 4$ б) $x_{1,2} = 2$, $y_{1,2} = 3$ в) $x_{1,2} = 2$ $y_{1,2} = 4$ г) $x_{1,2} = 3$, $y_{1,2} = 2$



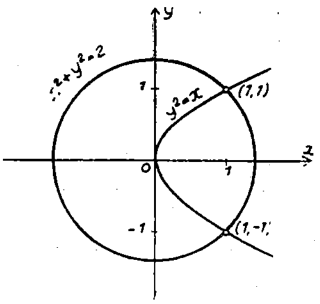
Сл. 12

163. а) $x_1 = 5, y_1 = 2$; $x_2 = 2, y_2 = 5$ б) $x_1 = 2, y_1 = 6$; $x_2 = 6, y_2 = 2$ в) $x_1 = 5, y_1 = 4$; $x_2 = -4, y_2 = -5$

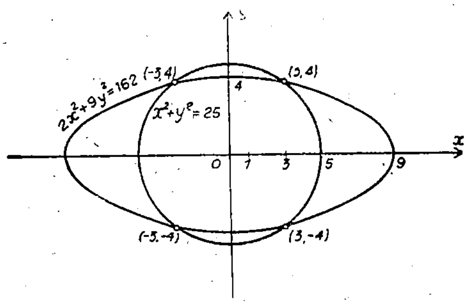
164. а) $x_1 = 3, y_1 = 2$; $x_2 = 2, y_2 = 3$ б) $x_1 = -4, y_1 = -3$; $x_2 = 3, y = 4$ в) $x_{1,2} = \pm\, 0{,}1$, $y_{1,2} = \pm\, 2$

165. а) $x_1 = 3,\ y_1 = 3;$ $\qquad x_2 = -2,\ y_2 = \frac{3}{4}$ $\qquad$ б) $x_1 = 3,\quad y_1 = 4;$
$x_2 = 1,\quad y_2 = 2$

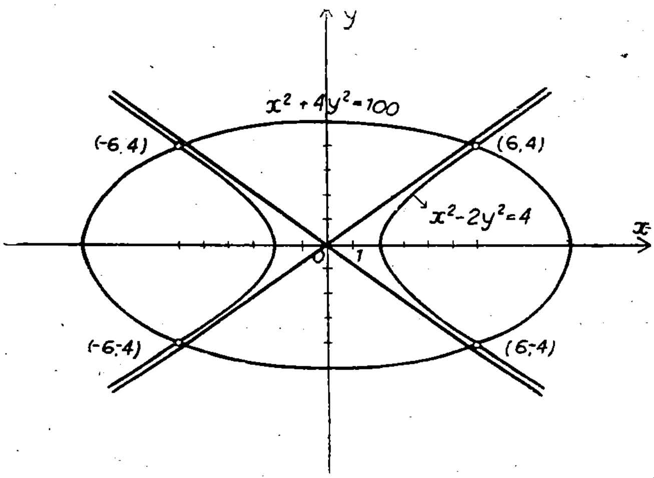
166. а) Со замена ја добиваме равенката $x^2 + x = 2,\ x_1 = 1\quad x_2 = -2.$ За $x_1 = 1$ добиваме $y = \pm 1$, а за $x_2 = -2$ следува $y = \pm i\sqrt{2}$. Според тоа, имаме четири решенија: $x_1 = 1;\ y_1 = 1;\ x_2 = 1,$ $y_2 = -1;\ x_3 = -2,\ y_3 = i\sqrt{2};\ x_4 = -2,\ y_4 = -i\sqrt{2}$ (сл. 13).
б) $x_{1,2} = 2,\ y_{1,2} = \pm 4;\ x_{3,4} = -10,\ y_{3,4} = \pm 4i\sqrt{5}$ в) $x_{1,2} = = y_{1,2} = 0;\quad x_{3,4} = 2,\ y_{3,4} = \pm 2$ г) $x_{1,2} = 3,\ y_{1,2} = \pm 6,$ $x_{3,4} = -25,\ y_{3,4} = \pm 10i\sqrt{3}.$



Сл. 13



Сл. 14



Сл. 15

167. а) $x_1=6,\ y_1=4;\ \ x_2=6,\ y_2=-4;\ x_3=-\frac{50}{3},\ \ y_3=\frac{20}{3}i;$

$x_4=-\frac{50}{3},\ y_4=-\frac{20}{3}i$ б) $x_{1,2}=6,\ y_{1,2}=\pm 6;\ x_{3,4}=-\frac{3}{2},$

$y_{3,4}=\pm 3i$ в) $x_{1,2}=3,\ y_{1,2}=\pm 2;\ x_{3,4}=-\frac{25}{3},\ y_{3,4}=\pm\frac{10}{3}i$

г) $x_{1,2}=10,\ y_{1,2}=\pm 3;\quad x_{3,4}=-\frac{32}{5},\ \ y_{3,4}=\pm\frac{12}{5}i.$

168. а) Со одземање на равенките добиваме $x=2$. Со замена на најдените вредности за x во едната од равенките добиваме $x=\pm 2$.

б) $x_1=3,\ y_1=-1;\ \ x_2=-1,\ y_2=3$ в) $x_1=y_1=-1\ \ x_2=1,$ $y_2=3$ г) $x_{1,2}=-2,\ y_{1,2}=-1$

169. а) Со методот на еднакви коефициенти. Решенијата: $x_1=3,\ y_1=4;\ x_2=3,\ y_2=-4;\ x_3=-3,\ y_3=4;\ x_4=-3,\ y_4=-4$ (сл. 14). б) $x_{1,2}=4,\ y_{1,2}=\pm 3;\ x_{3,4}=-4,\ y_{3,4}=\pm 3$

в) елиминирај го y^2! $x_{1,2}=6,\ y_{1,2}=\pm 4;\ x_{3,4}=18,\ y_{3,4}=\pm 2i\sqrt{14}$

170. а) $x_1=6,\ y_1=4;\ \ x_2=6,\ \ y_2=-4;\ \ x_3=-6,\ \ y_3=4;\ x_4=-6,$ $y_4=-4$ (сл. 15) б) $x_{1,2}=10,\ y_{1,2}=3;\ x_{3,4}=10,\ y_{3,4}=-3$

в) $x_{1,2}=-2,\ y_{1,2}=0;\ \ x_{3,4}=6,\ y_{3,4}=\pm 4$

г) $x_{1,2}=2,\ y_{1,2}=\pm 3;\ x_{3,4}=-2,\ y_{3,4}=\pm 3$

171. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Со квадратирање имаме $11+6\sqrt{2}=x+y+2\sqrt{xy}$, така што е $x+y=11$, $2\sqrt{xy}=6\sqrt{2}$. Од $x+y=11$, $xy=18$ излегува $x_1=9,\ y_1=2$ или $x_2=2,\ y_2=9$. Според тоа е $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$.

172. а) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}=4+\sqrt{2}$ б) $2-\sqrt{3}$

173. а) $\sqrt{9-\sqrt{56}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ б) $2-\sqrt{5}$ в) $\frac{\sqrt{22}+\sqrt{2}}{2}$

174. а) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

б) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ в) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$

г) $\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}$, д) $\sqrt{2a}+\sqrt{3b}$.

175. а) $p=2kn$ б) $r^2(k^2+1)=n^2$ в) $a^2k^2+b^2=n^2$

г) $a^2k^2-b^2=n^2$ д) $r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$

176. Со елиминација на непознатата y доаѓаме до равенката $x^2-x(m+2)+m+2=0$.

а) Решенијата се реални и различни ако дискриминантата е $(m+2)^2-4(m+2)>0$

а тоа е за $-\infty<m<-2$ и $+2<m<+\infty$. Кривата $x^2-mx-y+m=0$ се пресекува со правата $2x-y-2=0$.

б) Двојното решение е за $D=0$, а тоа е за $m=\pm 2$. Кривата и правата се допираат.

в) Конјугирано комплексни решенијата се кога е $D<0$, т. е. $-2<m<+2$. Линиите немаат заеднички точки.

177. а) $|m|<10$ б) $m=\pm 10$ в) $|m|>10$

178. а) $|m|<5$ б) $m=\pm 5$ в) $|m|>5$

179. а) Со собирање на равенките добиваме $x+y=6$, со одземање $xy=5$, така што решенијата на овој систем се истовремено и решенија на равенката $z^2-6z+5=0$. Следува: $x_1=5$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=5$. Системот може да се реши и со воведување на новата непозната $x+y=u$, $xy=v$.

б) $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=3$ в) $x_1=1$, $y_1=4$; $x_2=4$, $y_2=1$

г) $x_1=2$, $x_1=-3$; $x_2=-3$, $y_2=2$.

180. а) Едната равенка подели ја со другата. Решенијата се: $x_1=2$. $y_1=3$; $x_2=-2$, $y_2=-3$. (Обиди се да ги собереш равенките),

б) $x_{1,2}=\pm 6$, $y_{1,2}=\pm 4$ в) $x_{1,2}=\pm 19$, $y_{1,2}=\pm 15$

г) $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=\pm 6$

181. а) Помножи ја втората равенка со 2 и изврши прво собирање на обете равенки, потоа одземање на втората од првата равенка. Ги добиваме системите од равенки;

$$\left.\begin{aligned} x+y&=6\\ x-y&=4\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x+y&=6\\ x-y&=-4\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x+y&=-6\\ x-y&=4\end{aligned}\right\};\quad \left.\begin{aligned} x+y&=-6\\ x-y&=-4\end{aligned}\right\};$$

Решенијата се: $x_1=5$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=5$; $x_3=-1$, $y_3=-5$; $x_4=-5$, $y_4=-1$. Обиди се системот да го решиш и на друг начин.

б) $x_1=29$, $y_1=11$; $x_2=11$, $y_2=29$

в) $x_1=5$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=5$; $x_3=-5$; $y_3=-3$; $x_4=-3$, $y_4=-5$

г) $x_1=4$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=4$; $x_3=-4$, $y_3=-2$; $x_4=-2$, $y_4=-4$.

182. а) Најди ги $x^2+y^2=10$ и $2xy=6$; понатаму е $x+y=\pm 4$, $x-y=\pm 2$. Решенијата се: $x_1=3$, $y_1=1$, $x_2=1$; $y_2=3$; $x_3=-1$, $y_3=-3$; $x_4=-3$, $y_4=-1$, б) $x_1=5$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=5$; $x_3=-5$, $y_3=-3$; $x_4=-3$, $y_4=-5$

в) $x_1=7$, $y_1=4$; $x_2=4$, $y_2=7$; $x_3=-7$, $y_3=-4$; $x_4=-4$, $y_4=-7$

183. а) Втората равенка помножи ја со 2 и собери ја со првата. Следува $(x+y)^2+(x+y)-12=0$. Одовде ги добиваме равенките $x+y=-4$ и $x+y=3$, кои со втората равенка од дадениот систем ги даваат овие решенија; $x_1=-2+\sqrt{2}$, $y_1=-2-\sqrt{2}$; $x_2=-2-\sqrt{2}$, $y_2=-2+\sqrt{2}$; $x_3=1$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=1$. б) $x_{1,2}=y_{1,2}=3$; $x_{3,4}=\dfrac{-5\pm i\sqrt{11}}{2}$, $y_{3,4}=\dfrac{-5\mp i\sqrt{11}}{2}$

184. а) $x+y$ сметај ги како една непозната, а xy друга. Решенијата: $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=3$; $x_3=\dfrac{3+i\sqrt{7}}{2}$,

$y_3=\dfrac{3-i\sqrt{7}}{2}$; $x_4=\dfrac{3-i\sqrt{7}}{2}$, $y_4=\dfrac{3+i\sqrt{7}}{2}$

б) $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=2$; $x_3=5$, $y_3=1$; $x_4=1$, $y_4=5$.

185. $x_{1,2}=2$, $y_{1,2}=1$.

186. а) Со дигање на куб на првата равенка излегува: $x^3+y^3+3xy(x+y)=27$. Користејќи ги обете равенки на системот следува: $xy=2$. Решенијата: $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=1$.

б) $x_1=2$, $y_1=6$; $x_2=6$, $y_2=2$ в) $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=-1$, $y_2=-2$ г) $x_1=5$, $y_1=2$; $x_2=-2$, $y_2=-5$.

187. а) Со делење на првата равенка со y^2 добиваме $3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-7\left(\dfrac{x}{y}\right)+4=0$; одовде е $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{x}{y}=1$.

Од системот;

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{4}{3}y \\ 5x^2-3xy-y^2&=35 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x&=y \\ 5x^2-3xy-y^2&=35 \end{aligned}\right\}$$

наоѓаме ; $x_{1,2}=\pm 4$, $y_{1,2}=\pm 3$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{35}$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{35}$,

б) $x_{1,2}=\pm 12$, $y_{1,2}=\pm 4$; $x_{3,4}=\pm 16\sqrt{\frac{22}{19}}$, $y_{3,4}=\mp 4\sqrt{\frac{22}{29}}$

в) $x_{1,2}=\pm 6$, $y_{1,2}=\mp 2$; $x_{3,4}=\pm 16\sqrt{\frac{2}{17}}$, $y_{3,4}=\pm 2\sqrt{\frac{2}{17}}$

188. Со множење на втората равенка со -1 и со собирање со првата се добива $x^2-4xy-5y^2=0$. Одовде е $\frac{x}{y}=5$ и $\frac{x}{y}=-1$.

Овие равенки заедно со која и да било равенка од дадениот систем даваат два система равенки од кои следува:
$x_{1,2}=\pm 5$, $y_{1,2}=\pm 1$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{13}$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{13}$

б) $x_{1,2}=0$, $y_{1,2}=\pm\sqrt{3}$; $x_{3,4}=\pm 1$, $y_{3,4}=\mp 2$.

в) $x_{1,2}=\pm 6$, $y_{1,2}=\pm 4$; $x_{3,4}=\pm\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $y_{3,4}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

189. а) Ако се помножи првата равенка со 10, а втората со -3 и ако се соберат се добива хомогена равенка $10x^2-13xy-3y^2=0$

Решенијата: $x_{1,2}=\pm 15$, $y_{1,2}=\pm 10$; $x_{3,4}=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$,

$y_{3,4}=\mp\frac{25\sqrt{2}}{2}$. б) $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=\mp 3$; $x_{3,4}=\pm 3$, $y_{3,4}=\mp 2$

в) $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\pm 5$; $x_{3,4}=\pm 15\sqrt{\frac{2}{29}}$, $y_{3,4}=\pm 4\sqrt{\frac{2}{29}}$

190. а) Се добива хомогена равенка $x^2-5xy+6y^2=0$ или

$x=3y$, $x=2y$. Решенијата: $x_{1,2}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x_{3,4}=\pm 2$, $y_{3,4}=\pm 1$. б) $x_{1,2}=\pm 5$, $y_{1,2}=\pm 4$, $x_{3,4}=\pm 4i$, $y_{3,4}=\mp 6i$ в) $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm 2$, $y_{3,4}=\mp 3$
г) $x_{1,2}=\pm 5$, $y_{1,2}=\pm 1$; $x_{3,4}=\pm i$, $y_{3,4}=\pm 5i$.

191. $\sqrt{3+4i}=x+iy$. Со квадратирање добиваме $3+4i=x^2-y^2+2ixy$. Комплексните броеви на обете страни од знакот за равенство се еднакви ако е $x^2-y^2=3$, $2xy=4$, каде x и y треба да бидат реални. Со квадратирање на обете равенки и со собирање се добива $x^4+2x^2y^2+y^4=25$, односно $x^2+y^2=5$. Заедно со $2xy=4$ дава $x=\pm 2$, $y=\pm 1$. Поради равенката $xy=2$ мораат и x и y да имаат ист знак, така што е $\sqrt{3+4i}=2+i$ или $\sqrt{3+4i}=-2-i$

192. а) $\sqrt{11-60i}=-6+5i$ или $\sqrt{11-60i}=6-5i$ б) $3+5i$
$-3-5i$ в) $\sqrt{5}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}-i\sqrt{2}$
г) $2\sqrt{5}-i\sqrt{3}, -2\sqrt{5}-i\sqrt{3}$.

193. а) $\sqrt{-3-4i}=2i-1$ или $\sqrt{-3-4i}=-2i+1$ б) $\pm 2\mp i$

в) $\pm 3\pm i\sqrt{5}$ г) $\sqrt{a\pm ib}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$

194. $x_1=-3$, $y_1=4$, $z_1=-2$; $x_2=2$, $y_2=-1$, $z_2=3$.

195. Собери ги равенките и од овој збир одземи ја секоја посебно. Следува системот $yz=35$, $zx=21$, $xy=15$. Решенијата се: $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\pm 5$, $z_{1,2}=\pm 7$.

196. Собери ги равенките. Се добива $x+y+z=\pm 6$. Решенијата: $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\pm 2$, $z_{1,2}=\pm 3$.

197. Од втората равенка е $(x+y)^2=(6-z)^2$. Со помошта на првата и третатата $14-z^2+\frac{4z}{3}=(6-z)^2$.

Решенијата: $z_{1,2}=\frac{11}{3}$, $x_{1,2}=\frac{7\pm i\sqrt{39}}{6}$, $y_{1,2}=\frac{7\mp i\sqrt{39}}{6}$;

$z_3=3$, $x_3=1$, $y_3=2$; $z_4=3$, $x_4=2$, $y_4=1$.

198. а) Квадратирај ја првата равенка и од тоа одземи ја двапати зголемена втората. Ако притоа се води сметка и за третата равенка, се добива $z^2=25$, $z_{1,2}=\pm 5$. Ако најдените вредности на непознатата z се применат во кои и да било две равенки на дадениот систем, се добиваат и другите непознати. Решенијата се: $z_1=5$, $x_1=3$, $y_1=4$; $z_2=5$, $x_2=4$, $y_2=3$; $z_{3,4}=-5$,

$x_{3,4}=\frac{17\pm i\sqrt{239}}{2}$, $y_{3,4}=\frac{17\mp i\sqrt{239}}{2}$.

б) $x_1=-3$, $y_1=2$, $z_1=4$; $x_2=2$, $y_3=-3$, $z_2=4$; $x_3=3$, $y_3=-4$, $z_3=-2$; $x_4=-4$, $y_4=3$, $z_4=-2$

в) $x_1=3$, $y_1=6$, $z_1=2$; $x_2=6$, $y_2=3$, $z_2=2$; $x_{3,4}=\frac{9\pm 3i\sqrt{87}}{2}$,

$y_{3,4}=\frac{9\mp 3i\sqrt{87}}{2}$, $z_{3,4}=-20$

г) $x_{1,2}=9$, $y_{1,2}=\frac{5\pm i\sqrt{89}}{2}$, $z_{1,2}=\frac{5\mp i\sqrt{89}}{2}$; $x_{3,4}=5$,

$y_{3,4}=\frac{9\pm i\sqrt{33}}{2}$, $z_{3,4}=\frac{9\mp i\sqrt{33}}{2}$

д) Првата равенка помножи ја со -1 и собери ја со втората и третата. Ќе ги добиеш равенките $(x-y)(x+y+z)=6$ и $(x-z)(x+y+z)=12$. Со нивното делење и средување излегува $z=2y-x$ итн. Решенијата:

$$x_{1,2}=\pm 3,\ y_{1,2}=\pm 2,\ z_{1,2}=\pm 1;\ x_{3,4}=\pm\frac{7\sqrt{3}}{3},\ y_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$z_{3,4}=\mp\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

199. а) Со елиминација на x и z од сите три равенки добиваме $y^2=(26-y)^2-364$. Решенијата се $x_1=2$, $y_1=6$, $z_1=18$: $x_2=18$, $y_2=6$, $z_2=2$.

б) $x_1=7$, $y_1=6$, $z_1=5$; $x_2=5$, $y_2=6$, $z_2=7$; $x_{3,4}=36\pm\sqrt{1621}$, $y_{3,4}=-54$, $z_{3,4}=36\mp\sqrt{1621}$.

200. а) Од првата е $(x+y)^2=(6-z)^2$. Оваа равенка со втората од системот дава $2xy=28-12z$. Со дигање на куб на првата имаме $x^3+y^3+3xy\ (x+y)=(6-z)^3$. Оттука е $90-z^3+3(14-6z)(6-z)=(6-z)^3$. Решенијата се: $x_1=4$, $y_1=-1$, $z_1=3$; $x_2=-1$, $y_2=4$, $z_2=3$.

б) $x_1=1, y_1=2, z_1=3, x_2=2, y_2=1, z_2=3; x_3=2, y_3=1, z_3=2; x_4=1, y_4=3, z_4=2; x_5=2, y_5=3, z_5=1; x_6=3, y_6=2, z_6=1.$

201. Тргни од идентичноста $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3\ [x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz]$. Од првата равенка е $y+z=k-x$, $z+x=k-y$, $x+y=k-z$. Супституирај ги тие изрази во горната идентичност. На крајот излегува $xyz=\dfrac{k^3-3\,kl^2+2m^3}{6}$

202. а) Од втората равенка е $x^2+2xu+u^2=162$, од третата е $y^2+2yz+z^2=400$. Со собирање на овие равенки врз основа на четвртата равенка е $xu+yz=72$, а врз основа на првата е $xu=yz=36$. Ги имаме системите:

$$\left.\begin{aligned} x+u&=13\\ xu&=36\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} y+z&=20\\ yz&=36\end{aligned}\right\}.$$

Решенијата се: $x_1=9$, $y_1=18$, $z_1=2$, $u_1=4$; $x_2=4$, $y_2=2$, $z_2=18$, $u_3=9$; $x_3=9$, $y_3=2$, $z_2=18$, $u_3=4$; $x_4=4$, $y_4=18$, $z_4=2$, $u_4=9$.

б) Од четвртата равенка и од првите две е $(x+u)^2+(y+z)^2=74$; со равенката $(x+u)+(y+z)=2$ имаме систем со непознати $x+u$ и $y+z$. Добиваме $(x+u)_1=7$, $(y+z)_1=-5$; $(x+u)_2=-5$, $(y+z)_2=7$. Така доаѓаме до системот:

$$\left.\begin{aligned} x+u&=7\\ y+z&=-5\\ xu&=6\\ yz&=5\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} x+u&=-5\\ y+z&=7\\ xu&=6\\ yz&=5\end{aligned}\right\}$$

Решенијата: $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, $z_1 = -3$, $u_1 = 6$,

$x_2 = 6$, $y_2 = -3$, $z_2 = -2$, $u_2 = 1$,

$x_3 = -2$, $y_3 = 1$, $z_3 = 6$, $u_3 = -3$,

$x_4 = -3$, $y_4 = 6$, $z_4 = 1$, $u_4 = -2$,

$x_5 = 1$, $y_5 = -3$ $z_5 = -2$, $u_5 = 6$,

$x_6 = 6$, $y_6 = -2$, $z_6 = -3$, $u_6 = 1$,

$x_7 = -2$, $y_7 = 6$, $z_7 = 1$, $u_7 = -3$,

$x_8 = -3$, $y_8 = 1$, $z_8 = 6$, $u_8 = -2$,

203. Од системот $(xy)^{-1} = \frac{x+y}{6}$, $x + y = 5 - xy$ ги наоѓаме реалните решенија $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$. Останатите решенија се комплексни.

§ 6. ПРОБЛЕМИ ОД II СТЕПЕН СО ДВЕ И ПОВЕЌЕ НЕПОЗНАТИ

204. Ако се тие броеви x и y, тогаш е $xy = 252$, $\frac{x}{y} = 7$; $x_{1,2} = \pm 42$, $y_{1,2} = \pm 6$.

205. Ако збирот на броевите е a, производот b, тогаш тие два броја се корени на равенката $z^2 - az + b = 0$, т.е. $z_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Броевите се реални и различни за $a^2 > 4b$ реални и еднакви за $a^2 = 4b$, а комплексни за $a^2 < 4b$. Во специјален случај тоа се броевите 7 и 8.

206. Тоа се броевите $\frac{+d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2}$ и $\frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2}$. Проблемот има реални решенија за $d^2 + 4p \geqslant 0$. Специјално: 12, 9 или -9, -12.

207. 13 и 9 или $-\frac{61}{5}$ и $-\frac{39}{5}$

208. Тоа се броевите 5 и 10.

209. $xy = 18$, $x^2 - y^2 = 27$; $x_{1,2} = \pm 6$, $y_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \pm 3i$, $y_{3,4} = \mp 6i$.

210. $x^2 + y^2 - (x + y) = 152$, $xy = 60$. Следуваат системите.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 17 \\ xy &= 60 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + y &= -16 \\ xy &= 60 \end{aligned}\right\}$$

Бараните броеви се 12 и 5, односно -6 и -10.

211. $x + y = xy = x^2 - y^2$. Решенија: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_{3,4} = 0$, $y_{3,4} = 0$.

212. Бараната дропка нека е $\frac{x}{y}$, тогаш имаме: $x + y = 17$, $\frac{x + 24}{y + 9} = 2\frac{x}{y}$. Тоа е дропката $\frac{8}{9}$ или $\frac{51}{-34}$.

213. Тоа се дропките $\frac{3}{5}$ и $\frac{\frac{64}{13}}{\frac{40}{13}}$ (не ги скратувај):

214. Тоа е бројот $10x+y$. Од $\frac{x0x+y}{xy}=6, \quad 10y+x-9=10x+y$ е $x_1=1, y_1=2; \left(x_2= -\frac{1}{6}, \ y_2=\frac{5}{6}\right)$. Бараниот број е 12.

215. Тоа се броевите 82 и 28.

216. Ако нивното растојание од врвот во почетокот е x и y, тогаш е $x^2+y^2=400$, $(x-6)^2+(y-8)^2=100$; $x=12$ m, $y=16$ m.

217. $x:y=(16-y):(24-x)$, $x^2+y^2+(16-y)^2+(24-y)^2=580$. Бараната пропорција е $21:9=7:3$; останатите три решенија даваат пропорции кои настануваат од оваа пропорција. Најди ги сам!

218. 9 cm и 40 cm; второто решение дава исти страни со друг ред.

219. 12 cm и 35 cm.

220. 9 cm и 12 cm.

221. 7 cm, 24 cm, 25 cm; второто решение нема смисла, зашто страната на триаголникот не може да биде негативна.

222. Основата на триаголникот нека е $2x$, а кракот y. Имаме: $2x+2y=50, \sqrt{y^2-x^2}=y-2$; $x=8$ cm; $y=17$ cm.

223. $x:y=1:\frac{3}{4}$, $x^2+y^2=100$; $x=8$ m, $y=6$ m,

224. $x\sqrt{2}-y\sqrt{2}=4\sqrt{2}, x^2+y^2=80$. Задоволува решението: $x=8$ cm, $y=4$ cm.

225. $x:y=2:1$, $xy=32$; $x=8$ cm, $y=4$ cm.

226. 15 cm и 8 cm.

227. Страните на правоаголникот се 24 cm и 7 cm, а обемот е 62 cm.

228. $xy=60$, $(2x+2y):\sqrt{x^2+y^2}=34:13$, $x=12$, $y=5$.

229. 12 cm и 15 cm.

230. а) 24 cm и 10 cm.

б) Дијагоналите се $2x$ и $2y$. Имаме: $2x=2y+4, \frac{2x\cdot 2y}{2}=30$; $x=5$ cm, $y=3$ cm

231. 112 cm и 66 cm.

232. Ако страните на делтоидот се a и b, тогаш е $2a+2b=70$. Со примена на Хероновата формула се добива $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d_1)}=$ $=300$, каде е $s=\frac{a+b+d_1}{2}$. Со средување на обете равенки се добива системот $a-b=5$, $a+b=35$. Страните на делтоидот се $a=20$ cm, $b=15$ cm.

233. Рабовите на коцките нека се x и y; $x-y=6$, $x^3-y^3=1206$; $x=11$cm, $y=5$ cm.

234. Основните рабови нека се a и c; $\frac{15}{3}(a^2+ac+c^2)=855$, $a:c=3:2$,

$a=9$ cm, $c=6$ cm.

235. Полупречникот на базата нека е r, а висината h. Од $2r^2\pi+2r\pi h=$ $=224\pi$, $2r:h=8:3$ следува $r=8$ cm, $h=6$ cm.

236. Полупречниците на базите нека се R и r. $R^2\pi+r^2\pi+5\pi(R+r)=$ $=64\pi$, $R-r=3$. Има смисла решението: $R=5$ cm, $r=2$ cm, $h=4$ cm, $V=52\pi$ cm^3.

237. $R=50$ cm, $r=10$ cm.

238. $R=21$ cm, $r=9$ cm.

239. Ако се полупречниците на топките R и r, тогаш е $R+r=13$, $4R^2\pi+4r^2\pi=436\pi$; $R=10$ cm; $r=3$ cm.

240. $P_1=64\pi$ cm^2, $P_2=16\pi$ cm^2.

241. 8 cm и 5 cm.

242. Ако е полупречникот на базата на ваљакот r и висината $2h$, тогаш ги имаме равенките $4\pi rh=48\pi$, $r^2+h^2=25$. Решенија: $r_1=4$ cm, $h_1=3$ cm; $r_2=3$ cm, $h_2=4$ cm.

243. $(x+y)^2=a^2+x^2+y^2$, $(x+y)^3=\left(\frac{3a}{2}\right)^3+x^3+y^3$.

Од равенките се добива системот $x+y=\frac{9a}{4}$, $xy=\frac{a^2}{2}$.

Тоа се броевите $2a$ и $\frac{a}{4}$.

244. Бројот $10x+y$. Ги имаме равенките $(10x+y)(10y+x)=403$, $\frac{10x+y}{x+y}=7+\frac{3}{x+y}$. Бараниот број е 31.

245. Тоа е бројот 32.

246. Првиот патник бил на пат x денови и изминувал дневно по y mk. Од $xy=520$ и $(x-3)(y+12)=520$ е $x_1=13$, $y_1=40$; (x_2 и y_2 не задоволуваат). Првиот патник патувал 13 дена со брзина од 40 km на ден, а вториот 10 дена со брзина од 52 km на ден.

247. Ако брзината на првиот патник е x km на час, а на вториот y km на час, тогаш е $5x+5y=45$. Ако патникот од A до средбата измине z km, тогаш е $5x=z$ и $\frac{45-z}{x}+2\frac{1}{4}=\frac{z}{y}$; $x_1=5$ km на час, $y_1=4$ km на час, $z_1=25$ km.
Второто решение не задоволува.

248. Првата сума пари е xd вложена со $y\%$; $\frac{xy}{100}=120$,
$\frac{(6\,000+x)(y+2)}{100}=540$. Две решенија: Капиталот од 3 000 дин. е вложен со 4%, а вториот од 9 000 дин. е вложен со 6%. Второто решение: Капитал од 12 000 дин. со 1%, а вториот од 18 000 дин. вложен со 3%.

240. Капиталот бил в банка 8 месеци со камата од 3,5%.

250. Низ првата цевка поминува во една минута $x\,l$, а низ втората $y\,l$. Ги имаме равенките: $20x+20y=540$, $\frac{540}{x}=\frac{540}{y}+9$; $x_1=$ $=12\,l$ во минута, $y_1=15\,l$ во една минута. Друго решение не задоволува.

251. Од $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$, $y=x-b$ следува $x_1=\frac{1}{2}(2a+b+\sqrt{4a^2+b^2})$,
$y_1=\frac{1}{2}(2a-b+\sqrt{4a^2+b^2})$; x_2 и y_2 не задоволуваат, зашто е y_2 негативно. Специјално е $x_1=6$, $y_2=4$.

252. A работел x денови со дневна заработувачка од y дин., а B работел $(x-5)$ денови со дневна заработувачка од z дин. Имаме: $xy=600$, $(x-5)\ z=480$, $(x-5)\ y=xz-190$. Решение: $x=20$ дена, $y=30$ дин., $z=32$ дин.

253. Ако е x оддалеченоста на предметот, а y оддалеченоста на сликата од леќата, тогаш е $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{30}$, $\frac{1}{x+15}+\frac{1}{y-5}=\frac{1}{30}$; $x_1=$ $=75$ cm, $y_1=50$ cm; $(x_2=-30,\ y_2=16)$.

254. Платно од видот a има x метри и продадено е по цена од y дин., а z m од видот b продадено по u дин. Ги имаме равенките: $x+z=100$, $xy=uz$; $xu=450$; $zy=200$. Задоволува решението: $x=60$ m, $y=5$ дин., $z=40$ m, $u=7{,}5$ дин.

255. $x:y=y:z$, $x+y+z=14$, $x^2+y^2+z^2=84$. Бараните пропорции се: $2:4=4:8$ и $8:4=4:2$.

256. $6:24=24:96$.

257. $21:3=28:4$. Другите седум решенија не водат кон пропорциите кои следуваат од оваа.

258. Катетите нека се x и y а хипотенузата z. Од $z+x=50$, $z+y=81$, $x^2+y^2=z^2$ е $z_1=41$ cm, $x_2=9$ cm, $y_1=40$ cm. Друго решение не задоволува.

259. Катетите се 5 cm и 12 cm, а хипотенузата е 13 cm.

260. Ако се катетите x и y, тогаш е $x+y=7$, $xy=2{,}4z$, $x^2+y^2=z^2$. Катетите се 3 cm и 4 cm, а хипотенузата е 5 cm.

261. $x+y=10+z, xy=12z, x^2+y^2=z^2; x=20$ cm, $y=15$ cm, $z=25$ cm.

262. Катетите се x и y. Ги имаме равенките: $x^2+y^2=c^2$, $y^2=cx$;

$$x=\frac{c}{2}(\sqrt{5}-1). \quad y=\frac{c}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-2}.$$

263. $x+y+z=12$, $\dfrac{xy}{x+y+z}=1$, $x^2+y^2=z^2$. Страните се 3 cm, 4 cm, 5 cm. Задачата можеме да ја решиме и со помошта на еден друг систем од равенки. Ако земеме дека катетите се x и y, а хипотенузата z, тогаш е: $x+y+z=12$, $\dfrac{x+y-z}{2}=1 \quad x^2+y^2=z^2$.

Овој систем го има истото решение што веќе го најдовме од претходниот систем.

264. Ако катетите ги означиме со x и y, а хипотенузата со z, тогаш го добиваме системот: $\dfrac{xy}{2}=84$, $\dfrac{x+y-z}{2}=3$, $x^2+y^2=z^2$. Од второта равенка е $x+y=6+z$ или $x^2+2xy+y^2=(6+z)^2$. Ако левата страна ја замениме со изразите за xy и x^2+y^2 што ги даваат првата и третата равенка на системот, излегрва: $z^2+2\,.\,168=(6+z)^2$. Одовде е $z=25$. Од системот $x+y=31$, $xy=168$ следува $x=24$, $y=7$ или обратно. Страните на триаголникот се 7 cm, 24 cm 25 cm.

265. $x+y+z=24$, $\dfrac{xy}{x+y+z}+\dfrac{z}{2}=7$, $x^2+y^2=z^2$; $x=8$ cm, $y=6$ cm, $z=10$ cm. Проблемот можеме да го решиме и со помошта на еден друг систем од равенки. Ако катетите ги означиме со x и y а хипотенузата со z, тогаш е: $x+y+z=24, x+y=14, x^2+y^2=z^2$. (Втората равенка постои заради релацијата: $2R+2r=a+b$, каде е R полупречник на опишаниот круг, а r полупречник на впишаниот круг во триаголникот, додека a и b се катети).

266. $x+y+z=24$, $x^2+y^2=z^2$, $\left|\dfrac{x^2}{z}\right| : \left|\dfrac{y^2}{z}\right|=9:16$; $x=6$ cm, $y=8$ cm, $z=10$ cm.

267. $x+y+z=42$, $y=\dfrac{x+z}{2}$, а врз основа на Хероновата формула ја имаме равенката $\sqrt{21\,(21-x)\,(21-y)\,(21-z)}=84$. Страните на триаголникот се: 13 cm, 14 cm и 15 cm.

268. Висината на призмата нека е x, а на пирамидата y. Ги имаме равенките: $a^2x = \frac{a^2y}{3}$, $2a^2 + 4ax = a^2 + 2a\sqrt{y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

Решение: $x_1 = \frac{2a}{5}$, $y_1 = \frac{6a}{5}$. Друго решение нема смисла.

269. Основните рабови ги означуваме со a и c. Ги имаме равенките: $\frac{18}{6}(a^2 + ac + c^2) = 684$, $a^2 - c^2 = 30$. Основите се 54 cm^2 и 24 cm^2.

270. Ако е полупречникот на основата r и изводницата s, тогаш е $r^2\pi + r\pi s = 24\pi$, $s^2 - r^2 = 16$.

Задоволува решението: $r = 3$ cm, $s = 5$ cm.

271. Полупречниците на основите нека се R и r, а изводницата нека е s. Ги имаме равенките:

$$\begin{cases} R^2\pi + r^2\pi + \pi s\,(R + r) = 42\pi \\ \frac{4\pi}{3}\,(R^2 + Rr + r^2) = 28\pi \\ s^2 + (R - r)^2 + 16. \end{cases}$$

Земаме дека е $R^2 + r^2 = u$, $Rr = v$. Тогаш е

$$\begin{cases} R + r = \sqrt{u + 2v} \\ R - r = \sqrt{u - 2v} \\ s = \sqrt{u - 2v + 16} \end{cases}$$

Првите две равенки на системот преминуваат во

$$\begin{cases} u + \sqrt{16 + u - 2v}\,\sqrt{u + 2v} = 42 \\ u + v = 21 \end{cases}$$

Задоволуваат решенијата $u = 17$, $v = 4$, $s = 5$, $R = 4$, $r = 1$. Обвивката е 25π cm^2.

272. Полупречникот на базата на првиот ваљак нека е x, а на вториот y. Ги имаме равенките:

$$\begin{cases} 2x^2\pi + 2xy\pi + 2y^2\pi + 2xy\pi = 200\pi \\ x^2y\pi + y^2x\pi = 240\pi \end{cases}$$

Решенијата: $x_1 = 6$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 7$. Разликата од површините е 40π, а од зафатнините 48π.

273. Основниот раб на пирамидата е a, висината на пирамидата е H, а висината на бочната страна е h. Тогаш е:

$h = H + 1$, $h = a + 3$, $h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Задоволуваат решенијата: $a = 10$ cm, $H = 12$ cm, $h = 13$ cm.

274. Димензиите нека се a, b, c. Ги имаме равенките: $abc = 24$, $2a + 2b, = 10$, $2(bc + ca + ab) = 52$. Решенија: $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm.

275. $a^2 + b^2 + c^2 = 49$, $c = \dfrac{2ab}{a+b}$, $a + b + c = 11$: $a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $c = 3$ cm.

276. $a^2 + b^2 + c^2 = 741$, $a + b + c = 39$, $b = \sqrt{ac}$. Решенијата: $a_1 = 25$ cm, $b_1 = 10$ cm, $c_1 = 4$ cm, $a_2 = 4$ cm, $b_2 = 10$ cm, $c_2 = 25$ cm.

277. $a_1 = 15$ cm, $b_1 = 8$ cm, $c_1 = 17$ cm; $a_2 = 8$ cm, $b_2 = 15$ cm, $c_2 = 17$ cm.

278. 12 m, 4 m, 6 m.

279. 4 cm, $\sqrt{33}$ cm, $4\sqrt{3}$ cm.

280. Според теоријата за тежишната линија е $x^2 + y^2 = 2t^2 + \dfrac{a^2}{2}$, $x + y = 2a$. Наоѓаме $xy = \dfrac{7a^2 - 4t^2}{4}$; x и y се корени на равенката

$$z^2 - 2az + \frac{7a^2 - 4t^2}{4} = 0.$$

Проблемот има решение ако е дискриминантата $4t^2 - 3a^2 \geqslant 0$ и тогаш е $z_{1,2} = \dfrac{2a \pm \sqrt{4t^2 - 3a^2}}{2}$.

Натаму е потребно корените на равенката по непознатата z да се позитивни, а тоа е за $7a^2 - 4t^2 > 0$. Освен тоа, за да биде можен триаголник, треба да е $|x - y| < a < x + y$. Но, од $|x - y| < a$ имаме $(x - y)^2 < a^2$, или: $(x + y)^2 - 4xy < a^2$ или $4a^2 - (7a^2 - 4t^2) < a^2$, т. е. $t^2 < a^2$.

Според тоа, проблемот е можен ако се истовремено задоволени релациите: $4t^2 - 3a^2 \geqslant 0$, $7a^2 - 4t^2 > 0$, $t^2 < a^2$, т.е. $\dfrac{3}{4} a^2 \leqslant t^2 < a^2$.

Бидејќи станува збор за позитивни величини $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \leqslant t < a$.

Во граничен случај: α) $t = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $D = 0$, $x = y$.

Триаголникот е рамностран: β) $t = a$:

равенката преминува во $z^2 - 2az + \dfrac{3a^2}{4} = 0$. Сега е $x = \dfrac{3a}{2}$, $y = \dfrac{a}{2}$ (или обратно). Триаголникот е дегенериран во отсечката $2a$.

281. Ако висината е x, а основата $2y$, тогаш е $x + 2y = d$, $y^2 = x(2r - x)$. Одовде е

$f(x) = 5x^2 - 2x(d + 4r) + d^2 = 0.$

Проблемот има решение ако е барем коренот на таа равенка помал од d и ако лежи помеѓу 0 и $2r$.

Проблемот има само едно решение ако е $f(0) f(d) < 0$, а тоа е за $d < 2r$.

Проблемот има две решенија ако е $D \geqslant 0$, $f(0) > 0$, $f(d) > 0$, $0 < \frac{d+4r}{5} < d$. Овој систем постои за $2r < d \leqslant r(\sqrt{5}+1)$. За $d = 2r$ е граничен случај. Тогаш е $x_1 = 2r$, $x_2 = \frac{2r}{5}$.

282. Паралелните страни на трапезот нека се $2x$ и $2y$. Бидејќи трапезот е тангентен четириаголник, со примената на Питагорината теорема добиваме: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4r^2$ и $2r(x+y) = P$.

Излегува: $x+y = \frac{P}{2r}$, $xy = r^2$; x и y се решенија на равенката

$$z^2 - \frac{P}{2r} z + r^2 = 0.$$

Дискриминантата $D \geqslant 0$ за $P \geqslant 4r^2$. Тогаш се x и y позитивни, зашто е $z_1 + z_2 > 0$ и $z_1 z_2 > 0$. Излегува:

$$x = \frac{P + \sqrt{P^2 - 16r^4}}{4r} \text{ и } y = \frac{P - \sqrt{P^2 - 16r^4}}{4r} \text{ (или обратно).}$$

За $P = 4r^2$ е $x = y = \frac{P}{4r}$, така што трапезот преминува во квадрат.

283. Од $x - y = d$, $x^2 + y^2 = 4r^2$ добиваме $2y^2 + 2dy + d^2 - 4r^2 = 0$. Проблемот е можен ако е $0 < y < 2r$.

Проблемот има само едно решение ако е $f(0), f(2r) < 0$, т.е. за $(d^2 - 4r^2)(2r + d) < 0$; оваа неравенка има решение $d < 2r$. Проблемот нема никогаш две решенија, зашто е

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{d}{2} < 0.$$

284. Ако бараната оддалеченост е x, полупречникот на кружниот пресек на конусот y, а полупречниците на базата на конусот и на валјакот R и r, тогаш имаме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi x}{3}(R^2 + Ry + y^2) &= r^2 \pi x \\ R : h &= y : (h - x) \end{aligned}\right\}$$

Се добива равенката:
$f(x) = R^2 x^2 - 3h R^2 x + 3h^2 (R^2 - r^2) = 0$
Проблемот е можен за $0 < x < h$.
Проблемот има само едно решение ако е $f(0)\, f(h) < 0$ или $(R^2 - r^2)(R^2 - 3r^2) < 0$, а тоа е за $r < R < r\sqrt{3}$.

Проблемот не може да има две решенија, зашто би требало да биде $0<\frac{x_1+x_2}{2}<h$. Меѓутоа е $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3h}{2}>h$, така што условот не е исполнет.

285. a) Ако со x ја означиме оддалеченоста на пресечената рамнина од врвот на конусот, тогаш полупречникот на пресекот на конусот е $\frac{x\sqrt{3}}{3}$, а полупречникот на пресекот на топката $\sqrt{x(2r-x)}$, па имаме $\pi x\ (2r-x)-\frac{x^2\pi}{3}=a^2\pi$ или $f\ (x)=4x^2-6rx+3a^2=0$.

Проблемот има решение ако е $0<x<\frac{3r}{2}$.

Само едно решение има за $f\ (0)\ f\left(\frac{3r}{2}\right)<0$, а тоа не е никогаш. Две решенија има за

$$D\geqslant 0\ f\ (0)>0, f\left(\frac{3r}{2}\right)>0,\ 0<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{3r}{2}.$$

Последните три услова се сокогаш исполнети, а првиот за $a^2\leqslant$ $\leqslant\frac{3}{4}r^2$.

Ако е $a^2=\frac{3}{4}r^2$, тогаш е $x=\frac{3}{4}r$.

§ 7. АРИТМЕТИЧКИ НИЗИ ИЛИ АРИТМЕТИЧКИ ПРОГРЕСИИ

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots;\ a_1 = a$

$a_n = a + (n-1)\ d$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$

* *
*

286. Аритметичка прогресија е низа од броеви која го има тоа својство разликата меѓу секој член од низата и членот пред него да е постојана.

287. Аритметичката прогресија е прогресивна ако членовите на низата растат. Во тој случај диференцијата (разликата) на прогресијата е позитивна. Според тоа, кога аритметичката прогресија ќе биде регресивна?

288. а) $2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots$ б) $-8,\ -4,\ 0,\ 4, \ldots$
в) $5,\ 4\frac{1}{2},\ 4,\ 3\frac{1}{2}, \ldots$ г) $\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\ \alpha+3\beta, \ldots$

289. а) Диференцијата на прогресијата е $d = a_2 - a_1 = 4$, така што прогресијата гласи: $3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots$ б) $-1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ 3\frac{1}{2}, \ldots$
в) $2,\ -0{,}5,\ -3,\ -5{,}5, \ldots$ г) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1\frac{1}{2}, \ldots$

290. а) $a,\ b,\ a+2(b-a),\ a+3(b-a), \ldots$ б) $a+b,\ a-b,\ a-3b$ $a-5b, \ldots$ в) $x,\ y+z,\ 2(y+z)-x,\ 3(y+z)-2x, \ldots$
г) $a+b,\ c+d,\ 2(c+d)-(a+b),\ 3(c+d)-2(a+b), \ldots$

291. а) $7,\ 7-2,\ 7-2\cdot 2,\ 7-3\cdot 2,\ 7-4\cdot 2$, т.е. $7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1$
б) $11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,$ в) $8,\ 8-b,\ 8-2b,\ 8-3b,\ 8-4b$
г) $a,\ a-\delta,\ a-2\delta,\ a-3\delta,\ a-4\delta$

292. а) Диференцијата е $d = a_5 - a_4 = 2$. Прогресијата е $8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0.$
б) $-3,\ 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22$ в) $6\frac{1}{2},\ 7,\ 7\frac{1}{2},\ 8,\ 8\frac{1}{2}$
г) $\alpha,\ \beta,\ 2\beta-\alpha,\ 3\beta-2\alpha$

293. Мора да биде $b-a=c-b$.

294. Морм да биде $b-a=c-b=d-c=e-d=f-e$.

295. а) $a_7-a_1+6d=23$ б) $a_{10}=37$ в) $a_9=-1$ г) $a_{100}=a+99b$

296. а) Од $a_8=a_1+7d$ е $d=\dfrac{a_8-a_1}{7}=3$ б) $d=2$

297. а) $a_7=a_1+6d$ или $a_1=a_7-6d=8$ б) $a_1=4$

298. $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$ или $S_n=a_1+(a_1+d)+\ldots+[a_1+(n-2)\,d]+[a_1+(n-1)\,d]$. Но десната страна можеме да ја пишуваме и вака:

$$S_n=a_n+(a_n-d)+\ldots+[a_n-(n-2)\,d]+[a_n-(n-1)\,d].$$

Со собирање на равенките добиваме

$$2\,S_n=n\,(a_1+a_n) \text{ или } S_n=\frac{n}{2}\,(a_1+a_n).$$

299. $S_{10}=\dfrac{10}{2}(2\cdot 1+9\cdot 4)=190$

300. $S_{25}=-800$

301. $a_{12}=51$, $S_{12}=282$

302. $a_{25}=10\dfrac{1}{2}$, $S_{20}=115$

303. а) 5 050 б) 930 в) 1 521 г) $\dfrac{n}{2}\,(1+n)$

304. Првиот број е 6, а последниот 96. Од равенката $96=6+(n-1)\,6$ наоѓаме дека такви броеви има 16. Нивниот збир е 816

305. 112.

306. Ги има 14. Нивниот збир е 2 107.

307. Ги има 9. Нивниот збир изнесува 477.

308. а) $n=10$, $S_n=265$ б) $n=8$, $S_n=92$ в) $n=9$ $S_n=0$

г) $n=\dfrac{a_n-a_1+d}{d}$, $S_n=\dfrac{a_n-a_1+d}{2d}\,(a_1+a_n)$

309. а) $d=4$ $S_n=528$ б) $d=5$, $S_n=697$

в) $d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$, $S_n=\dfrac{n}{2}\,(a_1+a_n)$

310. а) $n=21$, $d=5$ б) $n=18$, $d=5$

в) $n=\dfrac{2\,S_n}{a_1+a_n}$, $d=\dfrac{a_n^2-a_1^2}{2\,S_n-a_1-a_n}$

311. а) $a_n=55$, $S_n=403$ б) $a_n=49$, $S_n=410$

в) $a_n=a_1+(n-1)\,d$, $S_n=\dfrac{n}{2}\,[2a_1+d\,(n-1)]$

312. а) $n=10,\ a_n=47$ б) $n_1=15,\ n_2=6;\ a_{n1}=-16,\ a_{n2}=20$

в) $n_1=30,\ n_2<0,\ a_n=-153$

г) $n=\dfrac{d-2a_1\pm\sqrt{(d-2a_1)^2+8dS_n}}{2d}$, n е природен број,

$a_n=\dfrac{-d\pm\sqrt{(d-2a_1)^2+8dS_n}}{2}$

313. а) $d=10,\ a_n=140$ б) $d=4,\ a_n=36$ в) $d=3,\ a_n=45$

г) $d=\dfrac{2(S_n-a_1n)}{n(n-1)}$, $a_n=\dfrac{2S_n-a_1\cdot n}{n}$

314. а) $a_1=2,\ S_n=1\,661$ б) $a_1=10,\ S_n=450$ в) $a_1=56,\ S_n=680$

г) $a_1=a_n-d(n-1),\ S_n=\dfrac{n}{2}[2a_n-d(n-1)]$

315. а) $a_1=2,\ n=10$ б) $a_1=-6$ и 8, $n=9$ и 2

в) $n_1=4$, n_2 не е природен број; $a_1=11$

г) $a_1=\dfrac{d\pm\sqrt{(2a_n+d^2)-8dS_n}}{2d}$,

$n=\dfrac{2a_n+d\pm\sqrt{(2a_n+d)^2-8dS_n}}{2d}$, n е природен број.

316. а) $a_1=9,\ d=2,$ б) $a_1=2,\ d=9$ в) $a_1=17,\ d=-5$

г) $a_1=\dfrac{2S_n}{n}-a_n$, $d=\dfrac{2(na_n-S_n)}{n(n-1)}$

317. а) $a_1=7,\ a_n=61$ б) $a_1=1\,000,\ a_n=-990$

в) $a_1=\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{d(n-1)}{2}$, $a_n=\dfrac{S_n}{n}+\dfrac{d(n-1)}{2}$

318. а) $d=-4,\ a_1=33$ б) $d=-5,\ a_1=100$

319. а) Од равенките $a_1+6d=10,\ a_1+16d=50$ се добива $a_1=-14$, $d=4$ б) $d=6,\ a_1=4$

320. а) 590 б) $S_{15}=15$ в) Треба да се соберат 4 или 9 члена.

321. а) $a_3+a_7=4,\ a_2+a_{14}=-8;\ a_1=10,\ d=-2$ б) $a_1=7,\ d=3$

322. а) $a_1+a_4+a_{11}=35,\ a_3+a_6=20;\ a_1=3,\ d=2$ б) $a_2=20,\ d=-3$

323. а) Од равенките: $\frac{6}{2}(2a_1+5d)=42$, $\frac{10}{2}(2a_1+9d)=110$ добиваме

$a_1=2,\ d=2$ б) $a_1=3,\ d=-2$

324. а) $a_3-a_6=9$, $a_2+a_5=19$; $a_1=17,\ d=-3$ б) $a_1=3,\ d=4$

325. а) $a_1=2,\ d=3$ б) $a_1=25,\ d=-4$ в) $a_1=d=2$
г) $a_1=16,\ d=2$

326. а) $a_1=-1,\ d=2$ б) $a_1=-5,\ d=3$

327. а) Две решенија: $a_1=25,\ d=-4$; $a'_1=36,\ d'=-\frac{42}{5}$.

б) $(a_1)_1=\frac{14}{41}$, $d_1=\frac{47}{41}$ $(a_1)_2=d_2=1$

в) $(a_1)_1=2$, $(a_1)_2=14$, $d_{1,2}=\pm 3$

г) $(a_1)_1=-3$, $d_1=1$; $(a_1)_2=\frac{567}{102}$, $d_2=-\frac{143}{102}$

328. а) $a_1=2,\ d=3$ б) $a_1=-5,\ d=2$

в) $(a_1)_1=1$, $d_1=2$; $(a_1)_2=-\frac{191}{4}$, $d_2=\frac{47}{4}$

329. $S_6=0$, $S_{13}-S_6=91$; $-5,\ 3,\ -1,\ldots$

330. $\frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ldots$ **331.** $a_1=2$.

332. $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot=80$, $a_1+a_2+a_3=15$. Тоа се прогресиите 2, 5, 8 или 8, 5, 2.

333. *а*) Ако се a, b, c последовни членови на аритметичката прогресија, тогаш е $b-a=c-b$, а одовде е $b=\frac{a+c}{2}$, б) $a_{n-r}=a_1+$ $+(n-r-1)\ d=[a_1+(n-1)\ d]-rd=a_n-rd$. На сличен начин докажи го останатото.

334. $\frac{a_{n-r}+a_{n+r}}{2}=\frac{(a_n-rd)+(a_n+rd)}{2}=a_n$

335. Води сметка дека е $2b+c=a+2c$.

336. Аритметичката прогресија е претставена на бројната линија со еквидистантни точки.

337. $a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$, $S_n=n^2$.

338. а) $S_n = \frac{n}{2}[a+b+n(a-b)]$ б) Првиот член е b, а разликата на низите е $b-a$, така што е

$$S_n = \frac{n}{2}[2b+(n-1)(b-a)] = \frac{n}{2}[a+b-n(a-b)].$$

339. Можат да се поставаат задачи каде се дадени a_1, a_n, d, а се бара n, S_n или

дадени се:	$a_1, a_n, n,$	а се бара d, S_n
,,	$a_1, a_n\ S_n,$	,, ,, ,, $d, n,$
,,	$a_1, d, n,$	,, ,, ,, $a_n, S_n,$
,,	$a_1, d, S_n,$	,, ,, ,, $a_n, n,$
,,	$a_1, n, S_n,$	,, ,, ,, $a_n, d,$
,,	$a_n, d, n,$	,, ,, ,, $a_1, S_n,$
,,	$a_n, d, S_n,$	,, ,, ,, $a_1, n,$
,,	$a_n, n, S_n,$	,, ,, ,, $a_1, d,$
,,	$d, n, S_n,$	,, ,, ,, $a_1, a_n,$

Според тоа може да се комбинираат десет вида задачи.

340. а) $a_1 = 1$, $d = 1$; $a_1' = -1$, $d' = -1$ б) $(a_1)_{1,2} = \pm 2$, $d_{1,2} = \mp 1$

в) $(a_1)_{1,2} = \pm 24$, $d_{1,2} = \mp 4$; $(a_1)_{3,4} = \pm \frac{13\sqrt{6}}{6}$, $d_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

г) $(a_1)_{1,2} = \pm 3$, $d_{1,2} = \mp 2$, $(a_1)_{3,4} = \pm\frac{13\sqrt{6}}{2}$, $d_{3,4} = \mp\frac{\sqrt{6}}{6}$

341. Заради $a_8 = \frac{a_1+a_{15}}{2}$ го имаме системот: $\frac{a_1+a_{15}}{2} = 7$, $a_1 \cdot a_{15} = -147$. Одовде е $a_1 = 21$, $a_1' = -7$, $a_{15} = -7$, $a_{15}' = 21$ и понатаму $d = -2$, $d' = 2$. Бараните низи се: 21, 19, 17, ... и -7, -5, -3, ...

342. -5, 0, $+5$, или $+5$, 0, -5, **343.** $d = -10$.

344. а) Означи ги членовите: $a-d$, a, $a+d$.
Две решенија -4, 3, 10; 10, 3, -4:
б) -1, 1, 3 и 3, 1, -1
в) 4, 1, -2 и -2, 1, 4
г) Првиот член означи го со $a-3d$, а диференцијата со $2d$, така што низата да гласи: $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$.
Решенијата се: првото 1, 3, 5, 7; второто 7, 5, 3, 1? третото

$4-\sqrt{151}$, $4-\frac{\sqrt{151}}{3}$, $4+\frac{\sqrt{151}}{3}$, $4+\sqrt{151}$ и

четвртото: $4+\sqrt{151}$, $4+\frac{\sqrt{151}}{3}$, $4-\frac{\sqrt{151}}{3}$, $4-\sqrt{151}$.

д) Членовите на низата земи ги во форма на $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$. Решенијата се: -3, -1, 1, 3, 5, и 5, 3, 1, -1, -3; останатите решенија не се реални.

345. Тоа се прогресиите 10, 14, 18, ... и $-\frac{5}{9}$, $-\frac{7}{9}$, $-1, \ldots$

346. $(x-3)(x-5)(x-7)=0$.

347. $a_3 \cdot a_{11}=132$, $S_{10}-S_3=98$. Две прогресии: 2, 4, 6, ... и 26, 24, 22, ...

348. а) $a_1=5$, $d=-1$; $a'_1=-8$, $d'=5\frac{1}{2}$;

б) $(a_1)_1=12$, $d_1=-2$; $(a_1)_2=-26$, $d_2=\frac{66}{5}$.

349. $-3, -2, -1, 0, +1, \ldots$ или $6, 5, 4, \ldots$

350. а) 4, 68 или 26, 6, -14; б) 14, 9, 4.

351. $a_1=-5$, $d=\frac{1}{2}$ и $a'_1=4$, $d=-\frac{1}{2}$.

352. Членовите на низата означи ги: $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$.

Излегува: $a=2$, $d_{1,2}=\pm 1$, $d_{3,4}=\pm\frac{4}{3}$. Бараните броеви се: -1, 1, 3, 5 (или 5, 3, 1, -1) и $-2, \frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}$, 6 или 6, $3\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -2$).

353. Ако е $(a-d)$ цифрата на стотките, a на десетките и $(a+d)$ на единиците, тогаш е

$100(a-d)+10a+(a+d)=26\cdot 3a$,

$100(a-d)+10a+(a+d)+396=100(a+d)+10a+a-d$.

Бараниот број е 468.

354. Од равенките $\frac{n}{2}\left[2a_1+\frac{1}{2}(n-1)\right]=81$ и $\frac{n+4}{2}\left[2a_1+\frac{1}{2}(n+3)\right]=124$ (наместо втората равенка може да се земе и равенката $81=4a_1+4nd+6d=124$) добиваме две решенија од кои барањето на задачата го задоволува само $a_1=4$ и $n=12$.

355. а) $18-3(n-1)=\frac{n-1}{2\cdot 5}[36-3(n-2)]$, $n_1=21$, $n_2=4$. Две решенија: $a_{21}=-42$ и $a_4=9$; б) $a_{91}=-130$, $a_{16}=20$.

356. Бараниот број е $5n$. Од равенката $5n=\frac{1}{22}\cdot\frac{5n-1}{2}\cdot(1+5n-1)$ следува дека тоа е бројот 45.

357. а) Тоа нека се броевите $2, 4, 6, \ldots 2n-2, 2n$. Тогаш е $2n = \frac{1}{10}(2+4+6+\ldots+2n-2)$ или $2n = \frac{1}{10}\cdot\frac{n-1}{2}[2+(2n-2)]$.

Одовде е $n=21$. Бараниот број е 42.

б) Се бара непарниот број $2n+1$. Претходниот непарен број е $2n-1$, а збирот на сите непарни броеви до вклучително $2n-1$ е n^2. Од равенката $2n+1=\frac{1}{5}n^2+1$, $n=10$, така што бараниот број е 21.

358. а) Да земеме дека е потребно да се соберат n членови од низата за да се добие максимален збир S_n. Разликата од низите е $d = -\frac{2}{15}$, така што $S_n = \frac{n}{2}\left[6-\frac{2}{15}(n-1)\right] = -\frac{1}{15}n^2+\frac{49}{15}n$. S_n прима максимум $\frac{529}{15}$ за $n=23$.

б) Од $S_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{16}{3}n$ наоѓаме дека минимумот настапува за $n = 8$ и изнесува $-21\frac{1}{3}$.

359. 79 е и тоа дваесетипрви, 140 не е, 395 е стоти член, а 500 не е член на таа низа.

360. Десети.

361. Од $\frac{n}{2}[2n+2(n-1)]=28$, $n=4$. Тоа е прогресијата 4, 6, 8, 10.

362. $a_1 = \frac{n-1}{n}$, $d = -\frac{1}{n}$, така што бараната прогресија е $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \ldots$

363. а) (сл. 16).

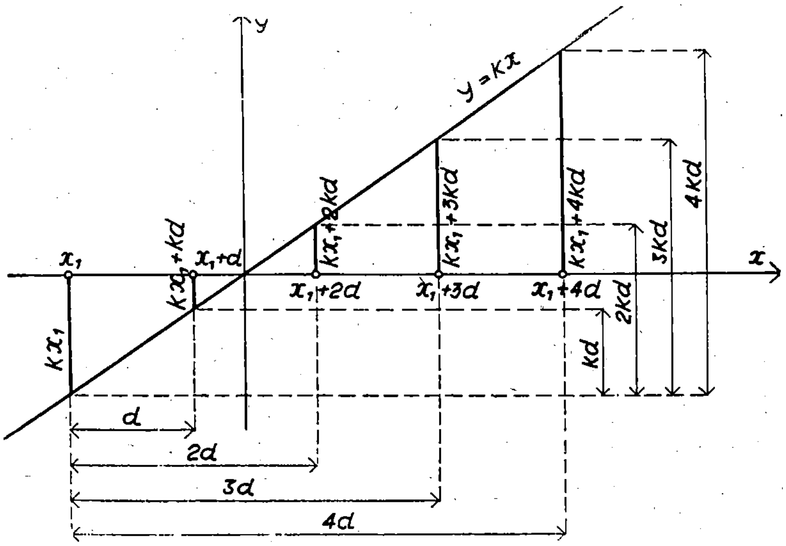
б) Ако независно менливата x ги прима со ред вредностите на членовите на аритметичката прогресија: $x, x+d, x+2d, \ldots$ на функцијата и припаѓаат вредностите $kx+l$, $k(x+d)+l$, $k(x+2d)+l$, т.е. вредностите на функцијата се членови на аритметичката прогресија чиј прв член е $kx+l$, а разликата kd.

364. (сл. 17)

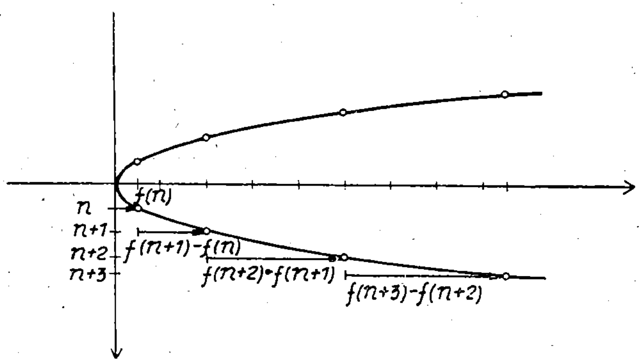
365. а) Разликите се $f(n+1)-f(n)$, $f(n+2)-f(n+1)$, $f(n+3)-f(n+2), \ldots$ при функцијата $f(x)=ax^2$ се $a(n+1)^2-an^2$, $a(n+2)^2-a(n+1)^2$, $a(n+3)^2-a(n+2)^2, \ldots$ т. е. $2an+a$, $2an+3a$, $2an+5a, \ldots$ а тоа се членови на аритметичката прогресија.

б) Се добива прогресија како под а), в) $2an+a+b$, $2an+$ $+3a+b$, $2an+5a+b, \ldots$ г) Низа како под в).

366. Земи предвид дека е $b=\dfrac{a+c}{2}$.



Сл. 16



Сл. 17

367. а) Од $\dfrac{m}{2}\,[4+d\,(m-1)] : \dfrac{n}{2}\,[4+d\,(n-1)] = m\,(m+1) : n\,(n+1)$ се добива $d=2$, така што бараната прогресија е 2, 4, 6, 8, . . .

б) Од $a_1+d\,(m-1)=n$, $a_1+d\,(n-1)=m$ излегува $d=-1$, $a_1=$ $=m+n-1$, така што е $S_{m+n}=\dfrac{m+n}{2}\,(m+n-1)$.

в) Од равенките $\frac{m}{2}\,[2a_1+(m-1)d]=n,\ \frac{n}{2}\,[2a_1+(n-1)\,d]=m$ добиваме a_1 и d и на крајот $S_{m-n}=\frac{(m-n)(m+2n)}{m}$.

368. 1, 3, 5, . . .

369. а) $a_n=S_n-S_{n-1}=(an^2-bn)-[a(n-1)^2-b(n-1)]=2an-a-b$

б) $a_{n-1}=2a(n-1)-a-b=2an-3a-b,\ a_{n+1}=2an+a-b$. Од $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}=2an-a-b=a_n$ заклучуваме дека низата е аритметичка. Според $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ доаѓаме до равенката $an^2-bn=\frac{n}{2}(a_1+2an-a-b)$. Одовде е $a_1=a-b$. Од $d=a_n-a_{n-1}$ излегува $d=2a$.

370. Тоа се прогресиите:

$a,\ a+d,\ a+2d, \ldots$ и $b,\ b+c,\ b+2c, \ldots$

па ги имаме равенките $a+b=6,\ (a+d)(b+c)=6,\ (a+2d)-(b+2c)=2, \frac{a+3d}{b+3c}=-4$. Решение: $a=1,\ b=5,\ c=-2,\ d=1$.

371. Најголемиот заеднички делител на броевите (29—5) и (61—29) е 8, така што бараната прогресија е: 5, 13, 21, 29, . ., 61.

372. Копањето на последниот метар од бунарот ќе чини $a+11b$, а на целиот бунар $6(2a+11b)$.

373. 1 600 m.

374. Ѕидањето на последниот метар од оџакот ќе изнесува 830 дин., а ѕидањето на целиот оџак 11 830 дин.

375. 14 лица. Разделена е сума од 756 дин.

376. Првиот ученик добил 300 стари дин., последниот 60 стари дин., а целото одделение 4 500 стари дин.

377. $a_{21}=4{,}9+20\cdot 9{,}8$ е патот во дваесетипрвата секунда, а $S_{21}=\frac{21}{2}[2\cdot 4{,}9+20\cdot 9{,}8]$ е патот за 21 секунда.

378. 30 секунди.

379. 4 410 m.

380. $S_t=\frac{t}{2}\left[2\cdot\frac{g}{2}+g(t-1)\right]=\frac{g}{2}t^2$.

381. $S_t=\frac{t}{2}\left[2\left(c-\frac{g}{2}\right)-g(t-1)\right]=ct-\frac{g}{2}t^2$.

382. Телата ќе се стигнат за n секунди, така што е $20n = \frac{n}{2}$ $[24 + 2(n-1)]$, $n = 9$ сек.

383. Од $\frac{n}{2}[6 + (n-1)] + \frac{n}{2}[3 + 6(n-1)] = 360$ излегува $n_1 = 10$ сек., а $n_2 < 0$.

384. $\frac{n}{2}[10 + 15(n-1)] + \frac{n}{2}[200 - 10(n-1)] = 450$, $n_1 = 4$ минути, $n_2 < 0$.

385. $\frac{n}{2}[2 \cdot 80 - 5(n-1)] + \frac{n-3}{2}[2 \cdot 40 + 6(n-4)] = 870$, $n = 9$ денови по поаѓањето на патникот од A. Тој до тогаш ќе измине 540 km, а патникот од B 330 km.

386. $AB = 60$ m.

387. Нека е $AC = 15$, $AB = 15 + d$, $BC = 15 + 2d$, $CD = 15 + (d - 12)$, $DA = 15 + 2(d - 12)$. Се добива $d = 11$. Површината изнесува 240 cm^2.

388. Ширината на правоаголникот е b, а должините се: a, $a + d$, $a + + 2d, \ldots$ Од $2a + 2b = 16$, $b(a + d) = 18$, $b = a + 4d$ добиваме $b = = 6$ cm, а должините даваат прогресија 2, 3, 4, ...

389. Ако бројот на страните на полигонот го означиме со n_1, n_2, n_3, тогаш е $n_1 + n_2 + n_3 = 28$,

$$\frac{n_1(n_1-3)}{2} + \frac{n_2(n_2-3)}{2} + \frac{n_3(n_3-3)}{2} = 105,$$

$$\frac{n_2(n_2-3)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{n_1(n_1-3)}{2} + \frac{n_3(n_3-3)}{2}\right].$$ Се добива $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 13$.

390. Од $2\pi(r_1 + 9d) + 2\pi r_1 = 26\pi$, $(r_1 + 9d)^2\pi - r_1^2\pi = 117\pi$ е $r_1 = 2$, $d = 1$.

391. а) 9, 12, 15

б) Ако страните се a, $a + d$, $a + 2d$, тогаш е $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + + d)^2$, $a + 3d = \frac{1}{2}a(a + d)$; $a = 3$, $d = 1$. Тоа е триаголник со страни 3, 4, 5.

в) 21, 28, и 35 cm

392. Страните на триаголникот означи ги со $a - 1$, a, $a + 1$ и примени ја Хероновата формула. Страните изнесуваат 13, 14 и 15 cm. б) 26, 28 и 30 cm.

394. Страните на триаголникот се $4 + d$, $4 + 2d$, $4 + 3d$. Од равенката $\sqrt{\frac{(2 + 2d)(2 + d)\,2}{6 + 3d}} = 4$ е $d = 11$. Страните се 15, 26, 37, а површината е 156.

395. Површините на правоаголниците образуваат прогресија: $\frac{ah(n-1)}{n^2}, \frac{ah(n-2)}{n^2}, \frac{ah(n-3)}{n^2}, \ldots$ Разликата на прогресијата е $-\frac{ah}{n^2}$. Збирот на површините на сите правоаголници е $S_n = \frac{ah}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Ако $n \to \infty$, тогаш $\frac{1}{n} \to 0$, па $S_n \to \frac{ah}{2}$ т.е., кон површината на триаголникот.

396. Тоа се прогресиите: $1-\cos\alpha$, 1, $1+\cos\alpha$ или $-1+\cos\alpha$, -1, $-1-\cos\alpha$.

Во специјален случај $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, односно $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$.

397. Од равенките $a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=50$, $2[a(a+d)+(a+d)(a+2d)+a(a+2d)]=94$ наоѓаме $a_1=3$, $d=1$ и $a'_1=5$, $d'=-1$. Димензиите се 3 cm, 4 cm, 5 cm. б) Рабовите на паралелопипедот означи ги со $a-d$, a, $a+d$. Го добиваме системот $3a^2-d^2=26$, $a^3-ad^2=24$. Со елиминација на d^2 доаѓаме до кубната равенка $a^3-13a+12=0$. Забележуваме дека едно нејзино решение е $a_1=1$, што значи дека триномот $a^3-13a+12$ е делив со $a-1$. Со тоа делење го добиваме триномот a^2+a-12, кој станува нула за $a_2=3$ и $a_3=-4$. Со тоа ги најдовме сите три решенија на кубната равенка. Во нашиот проблем има смисла само $a=3$ за кое е $d=\pm 1$. Димензиите на паралелопипедот се 2, 3 и 4.

398. Од $a\pi(a+2d)=375\pi$, $a(a+d)=300$ излегува $a=15$, $d=5$. Зафатнината е $1\,500\pi$ cm^3.

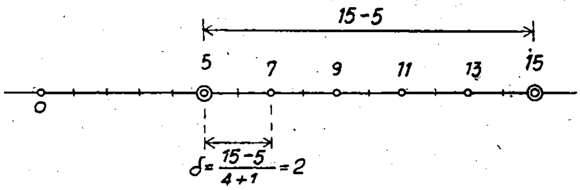
399. Тогаш е $a_1=a$, $a_{r+2}=b$, па имаме $a+(r+1)\delta=b$, каде е $\delta=\frac{b-a}{r+1}$ бараната диференција на интерполираната прогресија.

400. Ако се a и b две точки на бараната линија, тогаш растојанието на тие точки е $(b-a)$. Бидејќи помеѓу тие два броја треба да се интерполираат r членови на аритметичка прогресија, тоа треба должината $(b-a)$ да се раздели на $(r+1)$ делови, зашто членовите на аритметичката прогресија се претставени на бројната линија со еквидистантни точки. Според тоа разликата на интерполираната прогресија ќе биде $\delta=\frac{b-a}{r+1}$.

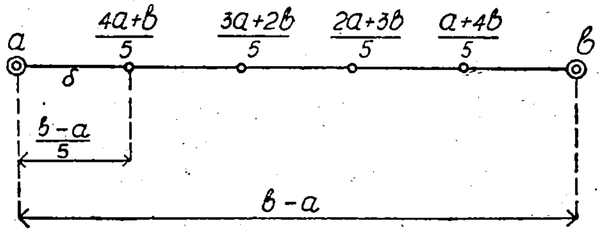
401. а) $\delta=\frac{15-5}{4+1}=2$. Се добива прогресијата: 5, 7, 9, 11, 13, 15 (сл. 18).

б) $3, 3\frac{1}{2}, 4, \ldots, 6\frac{1}{2}, 7$ в) $1, 1\frac{4}{7}, 2\frac{1}{7}, \ldots, 4\frac{3}{7}, 5$ г) $-14, -13{,}3, -12{,}6, \ldots, -7{,}7, -7$ д) $-3, -2\frac{1}{2}, -2, \ldots, \frac{1}{2}, 1$.

402. Прогресијата гласи: $a,\ a+\frac{b-a}{5},\ a+2.\frac{b-a}{2},\ a+3.\frac{b-a}{5},\ a+4.\frac{b-a}{5},\ b$ или $a,\ \frac{4a+b}{5},\ \frac{3a+2b}{5},\ \frac{2a+3b}{5},\ \frac{a+4b}{5},\ b$ (сл. 19).



Сл. 18



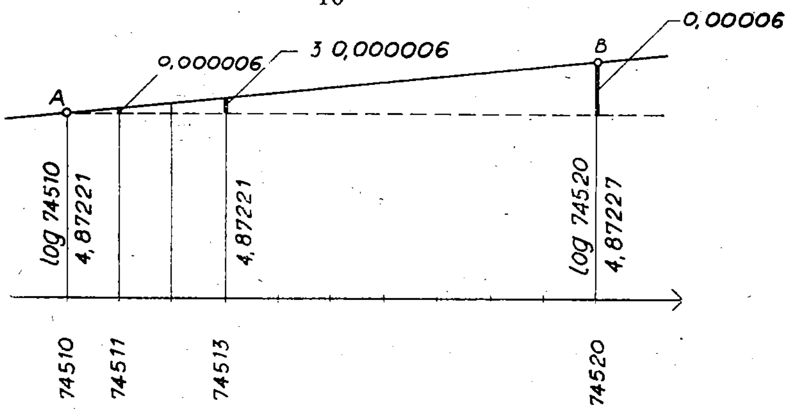
Сл. 19

403. $a-b,\ a-\frac{3}{5}b,\ a-\frac{1}{5}b,\ a+\frac{1}{5}b,\ a+\frac{3}{5}b,\ a+b.$

Збирот изнесува $6a$.

404. а) Помеѓу броевите 4,87221 и 4,87227 треба да се интерполира аритметичка прогресија од 9 члена и да се најде третиот член. Разликата на интерполираната прогресија ќе биде

$$\delta=\frac{4{,}87227-4{,}87221}{10}=0{,}000006.$$



Сл. 20

Според тоа е $\log 74\,513 = 4{,}87221 + 3 \cdot 0{,}000006 = 4{,}87221 + + 0{,}00002 = 4{,}87223$. (На сликата 20 логаритамската крива $y = \log x$ помеѓу точките $A(74\,510, \log 74\,510)$ и $B(74\,520, \log 74\,520)$ ја заменуваме со правата AB. Определените точки 74 510 и 74 520 се разликуваат за 0,00006, додека оваа разлика на сликата ја претставиме претерано).

б) $\delta = 0{,}000005$ па е $\log 92{,}237 = 1{,}96487 + 7 \cdot 0{,}000005 \approx 1{,}96491$.

405. Треба да се интерполираат r членови. Првиот член на интерполираната прогресија ќе биде $(5+\delta)$, а последниот $(12-\delta)$. Според тоа е $\frac{r}{2}(5+\delta+12-\delta) = 51$, $r = 6$; разликата на прогресијата е $\delta = 1$.

406. 11 членови.

407. а) Од равенката

$$\frac{r+2}{2}(2+11) : \left[\frac{r+2}{2}(2+11) - 13\right] = 5 : 4, \text{ зашто е } r = 8.$$

б) $r = 9$, $\delta = 2$; прогресијата е $1, 3, 5, \ldots, 19, 21$.

408. Помеѓу 10 и 26 треба да се интерполираат 15 члена на аритметичка прогресија. Температурата секој половина час растела за 1°C.

409. Означи ги членовите $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$. Се добиваат броевите 10, 20, 30, 40 или 40, 30, 20, 10. Разликата на интерполираната прогресија е $d = \pm\frac{5}{13}$.

§ 8. ГЕОМЕТРИСКИ НИЗИ ИЛИ ГЕОМЕТРИСКИ ПРОГРЕСИИ

$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots;\ a_1 = a;\ q = \frac{a_n}{a_{n-1}};\ a_n = aq^{n-1},\ S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$

$S_n = a\frac{1 - q^n}{1 - q},\ q \neq 1;\ S_n = a + a + a + \ldots + a = na$ за $q = 1.$

*

* *

410. Геометриска прогресија е низа од броеви која го има својството количникот помеѓу секој член на низата и членот пред него да е постојан.

411. а) $4, 12, 36, \ldots,$ б) $4, 4, 4, \ldots,$ в) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots,$

г) $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots,$ д) $4, -4, 4, \ldots,$ ѓ) $4, -12, 36, -108, \ldots$

412. а) $-4, 12, -36, \ldots,$ б) $-4, 4, -4, 4, \ldots,$ в) $-4, 2, -1, \frac{1}{2}, \ldots,$

г) $-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots,$ д) $-4, -4, -4, \ldots,$

ѓ) $-4, -8, -16, \ldots,$

413. 32, 16, 8, 4, 2. **414.** 3, 6, 12, 24, 48, 96.

415. Количникот на прогресијата е $q = \frac{a_5}{a_4} = 2$, така што прогресијата (пишувана ретроградно) е: $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$

416. а) $1, 3, 9, 27, \ldots,$ б) $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \ldots,$ в) $4, -8, 16, -32, \ldots,$

г) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots,$ д) $2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \ldots$

417. $a_1 = a,\ a_2 = aq,\ a_3 = a_2q = aq^2,\ a_4 = a_3q = aq^3, \ldots,\ a_n = a_{n-1}\,q = aq^{n-1}.$

418. $a_5 = aq^4 = 3 \cdot 2^4 = 48.$

419. а) $a_7 = 48$ б) $a_9 = 1\,024$ в) $a_{14} = 1.$

420. $a_{12} = 3{,}9 \cdot 2^{11} = 7987{,}2$ **421.** $a_{10} = \frac{1}{512},$

422. $a_1 = 2$ **423.** $a_1 = 0{,}2$

424. а) $S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 1\,023$ б) $S_7 = -86$ в) $S_8 = \frac{1640}{729}$ г) $-\frac{683}{512}$

425. а) $a_1 = 1$ б) $a_1 = -2$

426. а) $n = 6,\ S_6 = 189$ б) $S_5 = 605$ в) $S_6 = \frac{665}{27}$ г) $S_5 = \frac{615}{8}$

д) $n = 1 + \frac{\log a_n - \log a}{\log q}\ a_n > 0,\ a > 0,\ S_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$

427. а) $q = 8, S_5 = 14\,043,\ q' = -8,\ S_5' = 10\,923$ б) $q = 2,\ S = -30\,705$

в) $q = -\frac{2}{3},\quad S_n = 44\,\frac{1}{3}$ г) $q = -\frac{4}{3},\quad S_6 = -\frac{481}{15\,552}$

д) $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}}$, n парно, $S_n = \frac{a_n \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}} - 1},\quad q = \pm \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}}$

за n непарно.

428. а) Ги имаме равенките $2q^{n-1} = 1\,458,\ 2 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2\,186$. Од првата равенка е $q^n = 729\,q$. Со замена во втората равенка се добива $q = 3$, а потоа $n = 7$. б) $q = 7,\ n = 5$

в) $q = 2,\ n = 6$ г) $q = 27,\ n = 3$

д) $q = \frac{S_n - a}{S_n - a_n},\ n = \frac{\log a_n - \log a}{\log\ (S_n - a) - \log\ (S_n - a_n)} + 1$

429. а) $a_n = 13\,122,\ S_n = 19\,680$ б) $a_9 = -1\,280,\ S_9 = -2\,555$

в) $a_6 = -\frac{1}{625},\quad S_6 = \frac{2\,604}{625}$ г) $a_{10} = \frac{128}{6\,561},\quad S_{10} = \frac{58\,025}{26\,244}$

д) $a_n = aq^{n-1},\ S_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$

430. а) $n = 5,\ a_n = 567$ б) $n = 9,\ a_9 = 2\,048$
в) $n = 6,\ a_6 = -486$ г) $n = 5,\ a_5 = 48$

д) $n = \frac{\log\,[S_n\,(q - 1) + a] - \log a}{\log q},\ a_n = aq^{n-1}$

431. а) $a=2,\ S_n=254$ б) $a=1,\ S_n=97\,656$

в) $a=\frac{3}{8},\quad S_n=\frac{55}{216}$ г) $a=32,\ S_n=-133$

д) $a=\frac{a_n}{q^{n-1}},\quad S_n=\frac{a_n(q^n-1)}{q^{n-1}(-1)}$

432. $a=3,\ n=8$

433. а) $a=32,\quad q=\frac{1}{2}$ б) $a=5,\ q=2$

в) $a=3,\ q=\frac{1}{2}$ г) $a=5,\quad q=-\frac{1}{3}$

434. 32, 16, 8, . . .

435. Реално решение е: 64, 32, 16, . . .

436. а) Четири решенија: 1, 2, 4; 4, 2, 1; $\frac{9+\sqrt{65}}{2}, -2, \frac{9-\sqrt{65}}{2}$, и $\frac{9-\sqrt{65}}{2}, -2, \frac{9+\sqrt{65}}{2}$; б) $a_1=2,\ q_1=3;\ a_2=18,\ q_2=\frac{1}{3}$;

$a_{3,4}=16\pm 2\sqrt{55},\quad q_{3,4}=\frac{-8\pm\sqrt{55}}{3}$

в) $a_1=4,\quad q_1=2;\quad a_{2,3}=16,\quad q_{2,3}=\frac{1}{2};\quad a_4=4,\ q_4=-2$

г) $a_1=5,\ q_1=\frac{1}{5};\quad a_2=-\frac{1}{5},\ q_2=-5;$

$a_{3,4}=\frac{17\pm\sqrt{314}}{5},\quad q_{3,4}=\frac{17\mp\sqrt{314}}{5}$

437. Тоа се броевите: 421 и -124.

438. а) Опаѓаат; б) не се менуваат в) растат.

439. а) $a,\ 2a,\ 4,\ 8a, \ldots$ б) $x,\ -\frac{1}{3}x,\ \frac{1}{9}x, \ldots$

в) $a,\ b,\ \frac{b^2}{a},\ \frac{b^3}{a^2}, \ldots$ г) $x-y,\ x+y,\ \frac{(x+y)^2}{x-y},\ \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}, \ldots$

д) $\frac{a}{b},\ \frac{c}{a^2},\ \frac{bc^2}{ad^2},\ \frac{b^2c^3}{a^2d^3}, \ldots$

ѓ) $a+2b,\ 2a+b,\ \frac{(2a+b)^2}{a+2b},\ \frac{(2a+b)^3}{(a+2b)^2}, \ldots$

440. Условот е $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}=\frac{f}{e}$.

441. Ако се a, b, c три последовни члена на геометриска прогресија, тогаш е $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ или $b=\sqrt{ac}$.

442. $\sqrt{a_{n-r}\cdot a_{n+r}}=\sqrt{aq^{n-r-1}\cdot aq^{n+r-1}}=aq^{n-1}=a_n$.

445. Од $a_6=aq^5$ е $q=\sqrt[5]{\frac{a_6}{a}}=2$ **446.** $q=-3$ **447.** $a_1=\frac{a_5}{q^4}=2$.

448. $S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}$. Ако ја помножиме оваа равенка со q и од добиената равенка ја одземеме дадената равенка, добиваме $S_n=a\,\frac{q^n-1}{q-1}$ или $S_n=a\,\frac{1-q^n}{1-q}$.

449. а) $\frac{19\sqrt{6}=30}{12}$ б) $\frac{2\,730+671\sqrt{30}}{750}$ в) $\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

г) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}[(\sqrt{3})^n-1]$ д) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}[(\sqrt{2})^n-1]$

450. Можни се задачите каде се

дадени a_1, a_n, q,	се бара n и S_n,
„ a_1, a_n, n,	„ „ q и S_n,
„ a_1, a_n, S_n,	„ „ q и n,
„ a_1, q, n,	„ „ a_n и S_n,
„ a_1, q, S_n,	„ „ a_n и n,
„ a_1, n, S_n,	„ „ a_n и q,
„ a_n, q, n,	„ „ a_1 и S_n,
„ a_n, q, S_n,	„ „ a_1 и n,
„ a_n, n, S_n,	„ „ a_1 и q,
„ q, n, S_n,	„ „ a_1 и a_n.

451. а) Ги имаме равенките $a(-6)^{n-1}=-216$ и $a\frac{(-6)^n-1}{-7}=-186$.

Од првата е $a=\frac{-216}{(-6)^{n-1}}$, така што со замена во втората добиваме експоненцијална равенка чие решение е $n=3$. Понатаму е $a=-6$. б) $a=2$, $n=4$, в) $a=2\,048$, $n=3$ г) $a=135$, $n=3$, д) $a=a_nq-S_n(q-1)$, $n=1+\frac{\log a_n-\log[a_nq-S_n(q-1)]}{\log q}$

452. а) $a=5,\ a_7=320$ б) $a=-1,\ a_8=128$

в) $a=8,\ a_8=-\frac{1}{16}$ г) $a=27,\ a_6=\frac{1}{9}$

д) $a=\frac{S_n(q-1)}{q^n-1}$ $a_n=\frac{S_n(q-1)q^{n-1}}{q^n-1}$

453. а) 3, 6, 12, 24 б) $\frac{24}{17}, \frac{96}{17}, \frac{384}{17}, \ldots$ и $\frac{24}{17}, -\frac{96}{17}, \frac{384}{17}, \ldots$

в) 54, -18, 6, -2 и ретроградна прогресија

г) 1, ± 5, 25, ± 125, 625

454. 54, 18, 6, 2 и 27, -9, 3, -1

455. 3, 6, 12, 24, или 24, 12, 6, 3. (Подели ја равенката со $q-1 \neq 0$!) Реални се прогресиите: 1, 2, 4, ... и 32, 16, 8, ...

456. Бараните броеви се 1, 2, 4, ..., 32; 32, 16,8, ..., 1; $\frac{3(11\pm i\sqrt{7})}{2}$,

$3(-5\pm i\sqrt{7})$, $6(1\mp i\sqrt{7})$, ..., $\frac{3(11\mp i\sqrt{7})}{2}$

457. 4, 8, 16, или 16, 8, 4 **458.** 4, 8, 16 и 16, 8, 4

459. Тоа е прогресијата 1, 2, 4, ... Единаесеттиот член е 1 024.

460. Четири решенија: $a_1=5,\ q_1=2;\ a_2=20,\ q_2=\frac{1}{2};$

$a_3=\frac{5(9+\sqrt{65})}{2},\ q_3=\frac{-9+\sqrt{65}}{4};\ a_4=\frac{5(9-\sqrt{65})}{2},\ q_4=$

$=\frac{-6-\sqrt{65}}{4}.$

461. Ги имаме равенките: $a+aq+aq^2=7$ и $a^2+a^2q^2+a^2q^4=21$. Втората равенка да ја поделиме со првата. Бараните броеви се 1, 2, 4, односно 4, 2, 1.

462. 3, 6, 12, ... и -9, 18, -36, ...

463. Бараната прогресија е 2, 6, 18, ... 486, а збирот е $13\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

464. 9, 18, 36, ... и 9, -27, 81, -243, ...

465. 12, 24, 48, 96 и -192, -96, -48, -24

466. Ги имаме равенките: $aq-6=\frac{aq}{4}$, $aq^2-a-aq=q(aq-6)$.

Бараните броеви се 4, 8, 16 или -12, 8, $-\frac{16}{3}$.

467. Од равенката $a+aq+aq^2=\frac{7}{2}$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{aq}+\frac{1}{aq^2}=\frac{7}{2}$ се добива $\frac{1}{2}$

1, 2; 2, 1, $\frac{1}{2}$; $\frac{9\pm\sqrt{65}}{4}$, -1, $\frac{9\mp\sqrt{65}}{4}$.

468. Тоа се прогресиите a, aq, aq^2, aq^3 и a, ap, ap^2, ap^3. Од равенките $aq+ap=5$, $aq^2-ap^2=5$, $aq^3-ap^3=19$; две решенија:

$$\text{прво:}\begin{cases}1,\ 3,\ 9,\ 27\\ \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8\end{cases}\qquad \text{второ:}\begin{cases}75,\quad 40, \frac{64}{3}, \frac{512}{45}\\ 75,\ -35, \frac{49}{3}, -\frac{343}{45}\end{cases}$$

469. Бараните прогресии нека се:

$$\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, \ a \text{ и } \frac{a}{p^3}, \frac{a}{p^2}, \frac{a}{p}, a.$$

Ако воведеме нови непознати: $\frac{1}{q}=t$, $\frac{1}{p}=s$, тогаш ги имаме равенките: $at^3-as^3=26$, $at^2-as^2=16$, $at+as=16$. Решенијата се: $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=\frac{7}{12}$, $s_1=\frac{1}{2}$, $s_2=-\frac{5}{12}$.

Бараните прогресии се:

$$\begin{cases}27,\ 18,\ 12,\ 8\\ \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8\end{cases}\text{ и }\begin{cases}\frac{343}{18}, \frac{98}{3},\quad 56,\ 96\\ \frac{125}{18}, \frac{50}{3}, -40, 96.\end{cases}$$

470. $a=\frac{8}{27}$, $\quad S_7=\frac{2\,059}{216}$

471. Бројот на членовите е $2n+1$. Средниот член е a_{n+1}. Од равенките $3q^n=24$ и $3\cdot\frac{q^{2n+1}-1}{q-1}=381$ излегува $q=2$, $n=3$. Последниот член е $a_7=192$, а се добива непосредно од равенката $a_{n+1}=\sqrt{a_1\cdot a_{2n+1}}$.

472. Количникот е 2, а членови има 7.

473. Ако земеме дека прогресијата има $2n$ членови, тогаш е:

$$a\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=15,\quad a\cdot\frac{2^{2n}-1}{2-1}=255.$$

Подели ги равенките. Се добива $n=4$, така што прогресијата има 8 члена. $a_1=1$, $a_8=128$.

474. Ги имаме равенките:

$a+aq^{n-1}=85$, $a^2q^{n-1}=400$, $a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=55$. Од првите две равенки го елиминираме q^{n-1}, па добиваме $a_1=80$ и $a_2=5$. Со замена на овие вредности во втората равенка наоѓаме $q^n=\frac{1}{16}q$ и $q^n=16q$. Со замена на q^n во трета равенка се добива $q_1=$

$= -\frac{1}{2}$ и $q_2 = -2$. На крајот го наоѓаме $n = 5$. Две прогресии: $80, -40, 20, -10, 5$ и $5, -10, 20, -40, 80$.

475. a) Ги имаме равенките: $aq^{m+n-1} = k$ и $aq^{m-n-1} = l$. Со делење на равенките се добива $q = \sqrt[2n]{\frac{k}{l}}$ и $a = \sqrt[2n]{k^{n-m+1} \quad l^{m+n-1}}$;

$$a_m = aq^{m-1} = \sqrt{kl}, \quad a_n = k \sqrt[2n]{\left(\frac{l}{k}\right)^m};$$

б) $a_n = \sqrt[m-p]{\frac{k^{n-p}}{l^{n-m}}}$, $a_{m+p} = \sqrt[m-p]{\frac{k^m}{l^p}}$.

477. По $\frac{n}{4}$ часа новоста ја разбрале S_{n+1} лице. Од $\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 8\,000$ го наоѓаме $n \approx 12$ $(11 < n < 12)$. Новоста ќе ја разбере целиот град во 11 часот.

478. Ќе добие $\frac{2^{64}-1}{2-1} = 18\,446\,744\,073\,551\,615$ зрна пченица. Тоа э вкупно повеќе од 5 000 годишни жетви, ако се земе средната светска годишна жетва од 1 236 милиони квинтали, каква што беше во 1927—1932 година.

479. a) Ако извадиме 1 l вино, во бурето ќе останат 99 l вино. На 1 l смеса доаѓа сега $\frac{99}{100}\,l$ вино. Со повторно вадење на 1 l од смесата во бурето ќе остане $\left(99 - \frac{99}{100}\right) l$ вино или $99\,q\,l$, каде е $q = 1 - \frac{1}{100}$. Ако во бурето додадеме 1 l вода, тогаш на секој литар доаѓаат $\frac{99}{100}\,q\,l$ вино. Ако извадиме 1 l од смесата, во бурето остануваат $\left(99\,q - \frac{99}{100}\,q\right)\,l = 99\,q^2\,l$ вино итн. По n вадења во бурето мора да бидат 50 l вино. Од равенката $99\,q^{n-1} = 50$ следува $n \approx 69$.

480. По 10 часа ќе бидат $2^{10} = 1\,024$ бактерии, а по 24 часа $2^{24} \approx \approx 16{,}8 \cdot 10^6$.

481. Страните на триаголникот се 4 cm, 6 cm и 9 cm.

482. Со примена на косинусната теорема е $\cos\alpha = \frac{319}{384}$, $\alpha = 33^\circ\ 49'\ 31''$. Од равенката $\left(\frac{16a}{9} - 1\right)^2 = a^2 + \frac{26a^2}{9}$ излегува $a = 9$. Страните се 9, 12 и 16.

483. Од равенката $a^2q=8$ и $2(a^2q+a^2q^2+a^2q^3)=112$ следува $a=2$, $q=2$ (друго решение нема смисла). Димензиите на паралелопипедот се (2, 4, 8) m.

484. Ги имаме равенките $a^3q^3=216$ и $a^2+a^2q^2+a^2q^4=364$. Димензиите се (2, 6, 18) m.—Уште поедноставно е ако ги означиме димензиите со $\frac{a}{q}$, a, aq. Тогаш ги имаме равенките: $\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=$ $=216$ и $\frac{a^2}{q^2}+a^2+a^2q^2=364$. Од првата равенка непосредно излегува $a=6$, а од втората следуваат две позитивни вредности за q, и тоа 3 и $\frac{1}{3}$.

485. Основните рабови се a и aq, а висината е aq^2. Од равенките $\frac{a^3q^3}{3}=576$, $\frac{aq^2\sqrt{a^2+a^2q^2}}{2}=120$ следува $a=9$, $q=\frac{4}{3}$. Основните рабови се 9 cm, 12 cm, а висината е 16 cm.

486. Ако е a првиот член, тогаш е $b:(r+2)$—gi, така што е $b=$ $=aq^{r+2-1}$.

Одовде количникот на интерполираната прогресија е $q=\sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}$.

487. а) Количникот е $q=\sqrt[5]{32}=2$, па ја имаме прогресијата: 1, 2, 4, 8, 16, 32

б) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{243}$ в) $16, 8, 4, \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

г) $a, \frac{a^2}{b}, \frac{a^3}{b^2}, \frac{a^4}{b^3}, \frac{a^5}{b^4}$.

488. а) $2,\ 2\sqrt[5]{\frac{5}{2}},\ 2\sqrt[5]{\left(\frac{5}{2}\right)^2},\ 2\sqrt[5]{\left(\frac{5}{2}\right)^3},\ 2\sqrt[5]{\left(\frac{5}{2}\right)^4},\ 5$

б) $7,\ 7\sqrt[4]{\frac{8}{7}},\ 7\sqrt{\frac{8}{7}},\ 7\sqrt[4]{\left(\frac{8}{7}\right)^3},\ 8$

в) $a,\ a\sqrt[6]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[3]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^5},\ b$

г) $1,\ \sqrt[7]{\frac{x}{y}},\ \sqrt[7]{\left(\frac{x}{y}\right)^2},\ldots,\ \sqrt[7]{\left(\frac{x}{y}\right)^6},\ \frac{x}{y}$

489. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

490. $1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, 3, 3\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[3]{9}, 9, \ldots$ **491.** $1, \sqrt{a}, a, a\sqrt{a}, a^2, a^2\sqrt{a}, a^3$

492. 6, 12, 24, . . . , 1536; збирот на интерполираната прогресија е $12\cdot\frac{2^7-1}{2-1}=1\,524$.

493. Ако е q количникот на интерполираната прогресија, а r бројот на интерполираните членови, тогаш е $3 \cdot \frac{q^{r+2}-1}{q-1}=93$, $3 \cdot q^{r+1}=48$. Со супституција на $q^{r+1}=16$ во првата равенка се добива $q=2$. Понатаму е $r=3$. Бараната прогресија гласи: 3, 6, 12, 24, 48.

494. Ако е r бројот на интерполираните членови, тогаш ги имаме равенките: $8 \cdot \frac{q^{r+2}-1}{q-1} : \left(8 \cdot \frac{q^{r+2}-1}{q-1} - 8\frac{1}{16}\right) = 85:42$ и $8 \cdot q^{r+1} = \frac{1}{16}$. Со замена на $q^{r+1}=\frac{1}{128}$ во првата равенка наоѓаме $q=\frac{1}{2}$ и $r=6$. Бараната прогресија гласи: $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{16}$.

495. $q=2$, $S=2^{2n+1}-2^n$. Од $2^{2n+1}-2^n=120$ се добива $n=3$. Прогресијата во специјален случај гласи: 8, 16, 32, 64.

§ 9. АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИСКИ ПРОГРЕСИИ. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА НЕКОИ ЗБИРОВИ

496. Аритметичката прогресија е $4-2d$, $4-d$, 4, а геометриската е $\frac{4}{q^2}$, $\frac{4}{q}$, 4. Од равенката $(4-2d)\frac{4}{q^2}=2$ и $(4-d)\frac{4}{q}=6$ излегува $q_1=4$, $d_1=-2$ и $q_2=2$, $d_2=1$. Две решенија:

$$\begin{cases} 8, & 6, & 4 \\ \frac{1}{4}, & 1, & 4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2, & 3, & 4 \\ 2, & 2, & 4 \end{cases}$$

497. Членовите на прогресијата се a, $5a$, $9a$. Броевите a, $5a-x$, $9a$ се членови на геометриската прогресија, па е $5x-x=\pm\sqrt{a\cdot 9a}$. Излегува $x_1=8a$, $x_2=2a$. Бараните прогресии се a, $-3a$, $9a$ или a, $3a$, $9a$. Количници се: $q=\mp 3$.

498. Ги имаме равенките $1+7d=q^3$, $1+q+q^2+q^3=1+7d+7$. Две решенија: $q_1=2, d_1=1$; $q_2=-3, d_2=-4$. Бараните прогресии се:

$$\begin{cases} 1, 2, 3, 4, \ldots 8 \\ 1, 2, 4, 8 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} +1, & -3, & -7, & -11, \ldots, -27 \\ 1, & -3, & 9, & -27. \end{cases}$$

499. Од равенките: $8+2d=8q^2$, $8+3d=8q^3$ е $q_1=1$, $d_1=0$; $q_2=-\frac{1}{2}$, $d_2=-3$. Прогресиите се:

$$\begin{cases} 8, 8, 8, 8 \\ 8, 8, 8, 8 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 8, & 5, & 2, & -1 \\ 8, & -4, & 2, & -1. \end{cases}$$

500. a, aq, aq^2, геометриска прогресија, a, aq, aq^2, -9 аритметичка прогресија. Од равенките $a+aq+aq^2=39$ и $aq-a=aq^2-9-aq$ добиваме $a_1=4$, $q_1=\frac{5}{2}$; $a_2=25$, $q_2=\frac{2}{5}$. Бараните броеви се 4, 10, 25, односно 25, 10, 4.

501. Од равенките $a+aq+aq^2=13$, $aq+2-a=aq^2-(aq+2)$ излегува $a_1=1$, $q_1=3$; $a_2=9$, $q_2=\frac{1}{3}$. Тоа се броевите 1, 3, 9, односно 9, 3, 1.

502. Ако бараните броеви се $a-d$, a, $a+d$, тогаш се $a-d+4$, a, $a+d$ членови на геометриската прогресија. Ги имаме равенките $a-d+a+a+d=9$ и $(a-d+4)$ $(a+d)=a^2$. Решенијата се: $a=3$, $d_1=6$, $d_2=-2$. Бараните броеви се: -3, 3, 9 и 5, 3, 1.

503. Од равенките $\dfrac{a+d+7\frac{1}{2}}{a}=d$, $\dfrac{a+2d}{a+d+7\frac{1}{2}}=d$ следува: $a_1=-\dfrac{12}{5}$,

$d_1=-\dfrac{3}{2}$; $a_2=-\dfrac{5}{12}$, $d_2=-5$. Бараните броеви се: $-\dfrac{12}{5}$, $-\dfrac{32}{10}$, $-\dfrac{27}{5}$ и $-\dfrac{5}{12}$, $-5\dfrac{5}{12}$, $-10\dfrac{5}{12}$.

504. а) Во равенката $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ за n стави ги по ред вредностите $0, 1, 2, \ldots, n$ па собери ги добиените равенки. Ќе добиеш $(n+1)^3=3S_2+3S_1+n+1$, каде S_1 го означува збирот на првите n природни броеви, а S_2 збирот на нивните квадрати.

Бараниот збир е $S_2=\dfrac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$.

б) $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=2^2\ (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=2^2 S_2=$ $=\dfrac{2n(n+1)\ (2n+1)}{3}$

в) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=?$ Стави го во идентитет $(2n-1)^2=(2n)^2-4n+1$ со ред за $n=1, 2, 3, \ldots, n$ и собери ги добиените равенства. Ќе добиеш $4S_2-4S_1+n$ и на крајот бараниот збир излегува во форма на $\dfrac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}$.

505. а) Во равенката $(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$ замени го n со $0, 1, 2, \ldots, n$ и собери ги добиените равенки. Ќе добиеш $(n+1)^4=4S_3+6S_2+4S_1+n+1$, каде S_1 и S_2 имаат значење како во претходната задача, а S_3 го означува збирот на кубовите на првите n природни броеви. Се добива $S_3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=S_1^2$.

б) $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2^3(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)=8S_3=$ $=2n^2(n+1)^2$

в) Тргни од идентичноста $(2n-1)^3=8n^3-6n^2+6n-1$, стави со ред $n=1, 2, 3, \ldots, n$ и собери ги добиените равенства. Бараниот збир е рамен на $8S_3-12S_2+6S_1-n=n^2(2n^2-1)$.

506. Тргни од $(n+1)^5=n^5+5n^4+10n^3+5n+1$ и користи ги упатствата и резултатите од претходните задачи.

507. а) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)$.

Тргни од идентичноста $k(k+1) = k^2 + k$ и стави со ред за $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Ако добиените равенства се соберат, излегува за бараниот збир $S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. б) Тргни од идентичноста $k(k+2) = k^2 + 2k$ и користи го упатството од претходната задача: ќе добиеш $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

в) $\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$. г) Збировите под а), б), в) можеме да ги пишуваме во форма на

$\frac{n(n+1)(2n+1+1\cdot 3)}{6}$, $\frac{n(n+1)(2n+1+2\cdot 3)}{6}$,

$\frac{n(n+1)(2n+1+3\cdot 3)}{6}$ па ќе бидде $\sum_{k=1}^{n} k(k+4) =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1+4\cdot 3)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k(k+5) = \frac{n(n+1)(2n+1+5\cdot 3)}{6}$.

$\sum_{k=1}^{n} k(k+a) = \frac{n(n+1)(2n+1+3a)}{6}$.

д) Тргни од идентичноста $k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$ и постапи како во претходните задачи; излегува: $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

ѓ) $\frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$. е) Бараниот збир е рамен на $S_3 + 2S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$. ж) $\frac{n(n+1)(3n^2+19n+32)}{12}$

508.

$$\begin{aligned}
&1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \ldots + 20a^{19} = \\
&= 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{19} + \\
&\quad + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{19} + \\
&\quad\quad + a^2 + a^3 + \ldots + a^{19} + \\
&\quad\quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\quad\quad\quad\quad + a^{19} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^{20}-1}{a-1} + a\cdot\frac{a^{19}-1}{a-1} + a^2\cdot\frac{a^{18}-1}{a-1} + \ldots + a^{19}\cdot\frac{a-1}{a-1} = 20\cdot\frac{a^{20}}{a-1} -$$

$$- \frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^{19}}{a-1} = \frac{20a^{20}}{a-1} - \frac{a^{20}-1}{(a-1)^2} = \frac{20a^{21} - 21a^{20} + 1}{(a-1)^2}.$$

509. а) $a+2a^2+3a^3+\ldots+(n-1)a^{n-1}+na^n=$

$$\begin{array}{rl}
=a+a^2+a^3+\ldots+ & a^{n-1}+a^n+\\
+a^2+a^3+\ldots+ & a^{n-1}+a^n+\\
+a^3+\ldots+ & a^{n-1}+a^n+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
+ & a^{n-1}+a^n+\\
 & +a^n=
\end{array}$$

$$=\frac{a^{n+1}-a}{a-1}+\frac{a^{n+1}-a^2}{a-1}+\ldots+\frac{a^{n+1}-a^{n-1}}{a-1}+\frac{a^{n+1}-a^n}{a-1}=$$

$$=\frac{a}{(a-1)^2}\left[na^{n+1}-(n+1)a^n+1\right]$$

б) Зададениот израз можеме да го доведеме во обликот:

$\frac{1}{a}(a+2a^2+3a^3+\ldots+na^n)$. Врз изразот во заградата примени го резултатот од задачата а). Излегува:

$\frac{1}{(a-1)^2}\left[na^{n+1}-(n+1)a^n+1\right]$. в) Во задачата б) земи го $a=\frac{x}{y}$,

$$S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^ny+y^{n+1}}{y^{n-1}(x-y)^2}.$$

510. а) $S=a\frac{x^{m+1}-1}{x-1}+bx\frac{mx^{m+1}-(m+1\,x^m+1}{(x-1)^2}$.

б) $ab+(a+d)bq+(a+2d)bq^2+\ldots+[a+(n-1)d]bq^{n-1}=$

$$=\frac{ab(q^n-1)}{q-1}+\frac{abq}{(q-1)^2}\left[nq^{n-1}(q-1)-(q^n-1)\right]=$$

$$=ab\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+bdq\cdot\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(q-1)^2}$$

511. Аритметичката средина на двата броја a и b е $A=\frac{a+b}{2}$, а геометриската средина е $G=\sqrt{ab}$. Од $A^2-G^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2>0$ за $a\neq b$. Значи $A>G$; $A=G$ за $a=b$.

512. Членови на аритметичката прогресија се: q, $q+d$, $q+2d,\ldots$, а на геометриската d, dq, dq^2. Од равенките $5(2q+9d)=155$, $d+dq=9$ е $d_1=3$, $q_1=2$; $d_2=\frac{1}{3}$, $q=\frac{25}{2}$.

513. Ако бараните броеви се a, aq, aq^2, тогаш $a+1$, $aq+6$, aq^2+3 се членови на аритметичката прогресија, така што имаме $a+aq+aq^2=26$, $2(aq+6)=(a+1)+(aq^2+3)$. Решенијата се: $q_1=3$, $a_1=2$; $q_2=\frac{1}{3}$, $a_2=18$. Тоа се броевите: 2, 6, 18 или 18, 6, 2.

514. Да земеме дека членовите на аритметичката прогресија се $a-d$, a, $a+d$. Тогаш е $a-d+a+a+d=15$, $(a+4)^2=(a-d+1)(a+d+19)$. Наоѓаме $a=5$, $d_1=3$, $d_2=-21$. Тоа се броевите: 2, 5, 8, и 26, 5, -16.

515. а) Се бараат броевите a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$. Броевите $a+1$, $a+d+1$, $a+2d+3$, $a+3d+9$ се членови на геометриската прогресија, така што ги имаме равенките

$$(a+d+1)^2=(a+1)(a+2d+3)$$
$$(a+2d+3)^2=(a+d+1)(a+3d+9)$$

Смисла има само решението $a=1$, $d=2$, така што бараните броеви се 1, 3, 5, 7.

б) Тоа се броевите a, aq, aq^2, aq^3. Членовите на аритметичката прогресија ќе бидат: $a+5$, $aq+6$, aq^2+9, aq^3+15. Од равенките

$$2(aq+6)=a+5+aq^2+9.$$
$$2(aq^2+9)=aq+6+aq^3+15$$

Следува $a=-8$, $q=\frac{3}{2}$. Бараните броеви се: $-8, -12, -18, -27$.

516. 4, 10, 16 и $\frac{4}{25}, \frac{34}{25}, \frac{64}{25}$

517. Тоа се броевите $a-d$, a, $a+d$, па ги имаме равенките $a-d+a+a+a=K$ и $a^2=(a-d)\left(a+d+\frac{4K}{9}\right)$. Решенијата се: $d_1=\frac{2K}{9}$, $a_1=\frac{K}{3}$ и $d_2=-\frac{2K}{3}$, $a_2=\frac{K}{3}$. Тоа се броевите: $\frac{K}{9}$, $\frac{K}{3}$, $\frac{5K}{9}$, и K, $\frac{K}{3}$, $-\frac{K}{3}$.

518. Од равенките $2(aq+8)=a+aq^2$, $(aq+8)^2=a(aq^2+64)$ излегува $a_1=4$, $q_1=3$, $a_2=\frac{4}{9}$, $q_2=-5$. Бараните броеви се 4, 12, 36 и $\frac{4}{9}$, $-\frac{20}{9}$, $\frac{100}{9}$.

519. Од равенките $ad(a+5d)=102$ и $a\cdot ad^4=324$ добиваме, поради $ad^2=\pm 18$, два система. Барањето на задачата го задоволува само еден систем кој дава $a=2$, $d=3$. Бараните прогресии се:

аритметичката: 2, 5, 8, 11, . . .

геометриската: 2, 6, 18, 54, . . .

520. Ако $a,\ a+d,\ a+2d, \ldots$ се членови на аритметичката прогресија тогаш геометриската прогресија е $d,\ ad,\ a^2d, \ldots$ Од равенките $5a+10d=40$ и $d+ad=10$ излегуваат две решенија: $a_1=3$, $d_1=\frac{5}{2}$ и $a_2=4$, $d_2=2$. Бараните прогресии се:

$$\begin{matrix}\text{аритметичката: } 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ldots \\ \text{геометриската: } 2,\ 8,\ 32,\ 128,\ldots\end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\text{аритметичката: } 3,\ \frac{11}{2},\ 8,\ldots \\ \text{геометриската: } \frac{5}{2},\ \frac{15}{2},\ \frac{45}{2},\ldots\end{cases}$$

521. Тие два броја нека се a и b, тогаш прогресиите гласат:

аритметичката: $a,\ b,\ a+2(b-a),\ a+3(b-a)$,

геометриската: $a,\ b,\ a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2,\ a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3,\ldots$ Од равенките $a+3(b-a)-b=2$ и $a\left(\frac{b}{a}\right)^3-b=6$ следува: $a_1=1,\ b_1=2$; $a_2=-\frac{1}{4},\ b_2=\frac{3}{4}$.

Бараните прогресии: гласат;

$$\begin{cases}1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ -\frac{9}{4},\ \frac{27}{4}.\end{cases}$$

522. Ако ги означиме членовите на прогресиите

на аритметичката: $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d$

на геометриската: $\frac{a}{q^2},\ \frac{a}{q},\ a,\ aq,$

тогаш ги имаме равенките: $a-2d=\frac{a}{q^2}+1,\quad a-d=\frac{a}{q}+1,$ $a+d=aq-3.$

Решенијата се: $a=4,\ d=1,\ q=2$. Тоа се прогресиите: $2,\ 3,\ 4,\ 5$ и $1,\ 2,\ 4,\ 8$.

523. Тоа нека се прогресиите:

$a,\ aq,\ aq^2,\ldots$

$2a,\ 2a(q+1),\ 2a(q+1)^2,\ldots$

$4a,\ 4a(q+2),\ 4a(q+2)^2,\ldots$

тогаш ги имаме равенките:

$$\left.\begin{aligned} aq+2a(q+1)+4a(q+2)&=42\\ 4a+4a(q+2)+4a(q+2)^2&=84\end{aligned}\right\}$$

Со делење на равенките излегува $8q^2-9q-14=0$, одкаде е: $q_1=2$, $a_1=1$; $q_2=-\frac{7}{8}$, $a_2=\frac{192}{31}$. Бараните прогресии се:

$$\begin{cases} 1,\ 2,\ 4,\ldots\\ 2,\ 6,\ 18,\ldots\\ 4,\ 16,\ 64,\ldots\end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{192}{31},\ -\frac{168}{31},\ \frac{147}{31},\ldots\\ \frac{384}{31},\ \frac{48}{31},\ \frac{6}{31},\ldots\\ \frac{768}{31},\ \frac{864}{31},\ \frac{972}{31},\ldots\end{cases}$$

524. а) Тоа нека се броевите a, $a+3d$, $a+24d$. Од равенките $a+$ $+a+3d+a+24d=114$ и $(a+3d)^2=a(a+24d)$ наоѓаме $a=2$, $d=4$. Тоа се броевите: 2, 14, 98, и 38, 38, 38;

б) 100, 20, 4 и $\frac{124}{3}, \frac{124}{3}, \frac{124}{3}$

525. Геометриските прогресии се 5, 10, 20, и 20, 10, 5, а аритметичките се 10, 15, 20 и 20, 15, 10. Кај прогресивните прогресии a_{63} од аритметичката прогресија е рамно на $10+62\cdot 5$, така што ја имаме равенката $5\cdot 2^{n-1}=10+62\cdot 5$, $n=7$, т.е. седмиот член на геометриската прогресија се совпаѓа со a_{63} од аритметичката. Бидејќи кај регресивните прогресии е $a_{63}<0$, а ниеден член на геометриската прогресија не е негативен, тоа овде отпаѓа ова испитување.

526. Врз основа на равенките $\frac{a+d}{aq}=\frac{3}{2}$, $\frac{a+2d}{aq^2}=\frac{5}{4}$, $a+aq^3=81$ наоѓаме дека тоа се прогресиите:

$$\begin{cases} 9,\ 27,\ 45,\ 63\\ 9,\ 18,\ 36,\ 72\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{81\cdot 125}{133},\ \frac{81\cdot 75}{133},\ \frac{81\cdot 25}{133},\ -\frac{81\cdot 25}{133}\\ \frac{81\cdot 125}{133},\ \frac{2\cdot 81\cdot 25}{133},\ \frac{4\cdot 81\cdot 5}{133},\ \frac{8\cdot 81}{133}.\end{cases}$$

527. Тоа се броевите $a-d$, a, $a+d$, b. Ги имаме равенките: $a+a+$ $+d+b=13$.

$a-d+a+a+d=3$, $(a+d)^2=ab$. Се добива: $a_1=1$, $d_1=2$, $b_1=9$; $a_2=1$, $d_2=-5$, $b_2=16$. Тоа се броевите -1, 1, 3, 9 односно 6, 1, -4, 16.

528. Члeновите на аритметичката прогресија нека се $a-d$, a, $a+d$, на геометриската b, bq, bq^2; тогаш ги имаме равенките: $a-d+$ $+b=3$, $a+bq=7$, $a+d+bq^2=15$, $a-d+a+a+d=12$. Наоѓаме две решенија:

$$\begin{cases} 2, & 4, & 6 \\ 1, & 3, & 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -6, & 4, & 14 \\ 9, & 3, & 1. \end{cases}$$

529. Тие броеви нека се a, $a+d$, $a+4d$, $a+(n-1)\,d$, тогаш постојат равенките: $(a+d)^2=a\,(a+4d)$, $(a+4d)^2=(a+d)\;[a+(n-1)\,d]$ и $a+a+d+a+4d+a+(n-1)\,d=80$. Тоа е прогресијата: 2, 6, 10, . . ., 54. Таа има 14 члена.

530. x, $\dfrac{x+y}{2}$, y е аритметичката прогресија, а x, $\sqrt{xy}, y$ е геометриска.

Од равенките $\dfrac{x+y}{2}=\sqrt{xy}+6$ и $\dfrac{x+y}{2}:\sqrt{xy}=5:3$ наоѓаме $x_1=$ $=27$, $y_1=3$; ($x_2=3$, $y_2=27$ отпаѓа поради барањето $x>y$). Тоа се прогресиите: 27, 15, 3, и 27, 9, 3. Од равенката $\dfrac{n}{2}$ $[54-12$ $(n-1)]=15$ наоѓаме $n=5$ т.е. треба да се соберат 5 членови на аритметичката прогресија за да се добие збирот 15 (вредноста на интерполираниот член).

531. Членовите на аритметичката прогресија нека се $a+1$, $a+1+d$, $a+1+2d, \ldots$ а на геометриската a, ad, $ad^2 \ldots$. Од равенките $ad^2=a+1+2d+1$ и $2a+3d+2=ad+ad^2$ следува:

$a_1=\dfrac{1}{2}$, $d=-1$; $a_2=2$, $d_2=2$. Тоа се прогресиите:

$$\begin{cases} 3, & 5, & 7, & 9 \\ \\ 2 & 4, & 8, & 16 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{3}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

532. Нека се a, $a+d$, $a+2d, \ldots$ членови на аритметичката прогресија и b, bq, $bq^2, \ldots$ членови на геометриската прогресија. Од равенките: $a+b=23$, $a+d+bq=21$, $a+2d+bq^2=22$ и $a+3d+$ $+bq^3=29$ наоѓаме дека бараните прогресии се:

$$\begin{cases} 20, & 15, & 10, & 5 \\ 3, & 6, & 12, & 24. \end{cases}$$

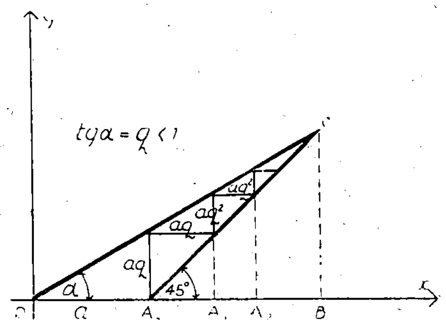
§ 10. БЕСКОНЕЧНИ НИЗИ — МОНОТОНИ НИЗИ БЕСКОНЕЧНИ РЕДОВИ — БЕСКОНЕЧНИ ГЕОМЕТРИСКИ РЕД

I Бесконечната геометриска прогресија $a, aq, aq^2, \ldots$ е конвергентна за $-1 < q \leqslant +1$, а дивергентна за $|q| > 1$ и $q = -1$.

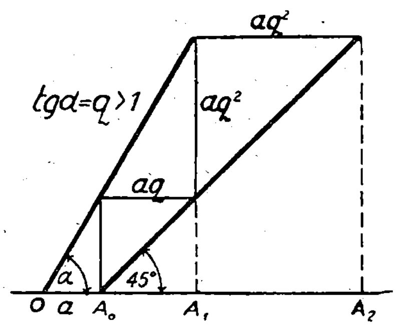
II Бесконечниот геометриски ред $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ е конвергентен за $|q| < 1$, а дивергентен за $|q| \geqslant 1$.

III За $|q| < 1$ важи теоремата $a + aq + aq^2 + \ldots = \dfrac{a}{1-q}$.

* *
*



Сл. 21



Сл. 22

а) Објаснение: $0 \leqslant \operatorname{tg}\alpha = q < 1$ (сл. 21)

$OB = OA_0 + A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots = a + aq + aq^2 \ldots = a + A_0B$

$OB = a + BC = a + OB \cdot \operatorname{tg}\alpha = a \cdot OB \cdot q$

$$OB = \frac{a}{1-q}$$

б) Објаснение: $\operatorname{tg}\alpha = q > 1$ (сл. 22)

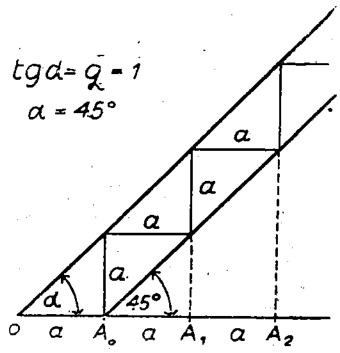
$OA_0 + A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots = a + aq + aq^2 + \ldots;$

дивергира кон $+\infty$.

в) Објаснение: $\operatorname{tg} \alpha = q = 1$ (сл. 23)

$OA_0 + A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots = a + a + a \ldots;$

диверıира кон $+\infty (a > 0)$.



Сл. 23

IV Монотона низа која:

а) расте: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$

б) опаѓа: $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

в) монотоно не опаѓа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$

г) монотоно не расте: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots$

V Теоремата за монотоните низи:

Ограничената монотона низа која не опаѓа е конвергентна и нејзината горна граница е и нејзина гранична вредност.

Ограничената монотона низа која не расте е конвергентна и нејзината долна граница е и нејзина гранична вредност.

* * *

533. Велиме дека бесконечната низа дивергира кон $+\infty$ ако за секој, колку и да е голем, однапред даден број M постојат само конечно многу членови кои се помали од M. Ако ги набљудуваме членовите на низата на бројната линија, тогаш сите членови на низата лежат десно од кој и да е број M, освен нив и конечно многу. Во овој случај велиме дека низата конвергира или се стреми кон $+\infty$, иако низата е всушност дивергентна.

534. а) Низата $1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots$ чии членови се од обликот $a_n = n$, е дивергентна; пишуваме $a_n \to +\infty$ кога $n \to \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

б) $a_n = 2n + 1$ в) $a_n = 2^n$

535. Велиме дека бесконечната низа конвергира кон $-\infty$ ако сите членови на низата, освен конечно многу од нив, лежат лево од кој и да е број N на бројната линија. Во овој сллучај велиме дека низата конвергира или се стреми кон $-\infty$, иако низата е всушност дивергентна.

536. а) $a_n = -n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ се стреми кон $-\infty$. Пишуваме: $a_n \to -\infty$ кога $n \to \infty$, б) $a_n = -2n$ в) $a_n = -10^n$

537. Бесконечната низа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ конвергира кон бројот a ако внатре во секој интервал, на кој центар му е a, лежат сите членови на низата освен можеби конечно многу од нив. Пишуваме: $a_n \to a$ кога $n \to \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ако за секој $\varepsilon > 0$ и за секој член на низата, освен можеби за конечно многу, важи релацијата $|a_n - a| < \varepsilon$. Тоа значи дека бесконечно многу членови на низата a_n паѓаат во интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а надвор од овој интервал ги има конечно многу.

538. $a_n \to 0$, кога $n \to \infty$, ако за сите членови на низата, освдн за конечно многу од нив, важи релацијата $-\varepsilon < a_n < +\varepsilon$, за секое $\varepsilon > 0$ произволно малечко.

539. $\dfrac{1}{n} \to 0$ кога $n \to \infty$, па, според тоа, прогресијата $\dfrac{1}{n}$ е конвергентна и нејзината гранична вредност е нула. Одбираме произволно мал позитивен број ε; на пример нека е $\varepsilon = 10^{-6}$, тогаш во интервалот $(-10^{-6}, 10^{-6})$ паѓаат бесконечно многу членови на прогресијата, надвор од тој интервал само конечно многу (999 999).

Општо земено $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ за сите членови чиј индекс е $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

540. а) Прогресијата е дивенгентна зашто се стреми кон $+\infty$.
б) дивергентна в) дивергентна г) дивергентна

541. а) Конвергентна $a_n \to 0$ кога $n \to \infty$,
б) конвергентна; граничнита вредност е нула,
в) конвергентна; граничнита вредност е нула,
г) $\dfrac{n}{n+1} \to 1$ кога $n \to \infty$, конвергентна

542. а) Прогресијата е конвергентна: граничната вредновс е -4:
б) граничната вредност е -4, в) и г) граничната вредност е 0.

543. Непарните членови на прогресијата се стремат кон нула, парните кон 1, така што прогресијата е дивергентна.

544. а) конвергентна и граничната вредност ѝ е нула,
б) дивергентна и граничната вредност ѝ е $+\infty$,
в) конвергентна и се стреми кон нула,
г) дивергентна и се стреми кон $-\infty$.

545. α) конвергентна $\quad$ β) дивергентна
γ) конвергентна $\quad$ δ) дивергентна.

546. а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\quad$ б) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

в) $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}$ $\quad$ г) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

547. а) $a_n = 1 + \frac{n-1}{n}$ или $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ за $n = 1, 2, 3, \ldots$

б) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ за $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\quad$ в) $a_n = \frac{n}{n+2}$.

г) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$ за $n = 2, 3, 4, \ldots$

548. а) Прогресијата дивергира кон $+\infty$. б) прогресијата дивергира кон $+\infty$,
в) ограничена прогресија која опаѓа: нејзината долна граница е 0, а тоа е и нејзина гранична вредност,
г) ограничена прогресија која расте; граничната вредност ѝ е $\frac{1}{3}$,
д) прогресија која опаѓа и дивергира кон $-\infty$,
ѓ) ограничена прогресија која расте и чија гранична вредност е $-\frac{1}{3}$.

549. а) 1 $\quad$ 1,4 $\quad$ 1,41 $\quad$ 1,414 $\quad$ 1,4142...
б) 2 $\quad$ 1,5 $\quad$ 1,42 $\quad$ 1,415 $\quad$ 1,4143...

550. Ако прогресијата расте, тогаш низата од нејзините реципрочни вредности опаѓа и обратно, под услов сите членови на прогресијата да имаат ист знак и да се различни од нула.

551. Монотона прогресија која расте и не е конвергентна се стреми кон $+\infty$. Монотона прогресија која опаѓа и не е конвергентна се стреми кон $-\infty$.

552. Аритметичката прогресија на која ѝ е $d > 0$ расте и се стреми кон $+\infty$. Ако е $d < 0$, таа опаѓа и се стреми кон $-\infty$.

553. Не може (освен кога е разликата $d = 0$).

554. Бесконечната геометриска прогресија: $a, aq, aq^2, \ldots aq^{n-1}, \ldots$

а) расте за $a>0$, $q>1$; се стреми кон $+\infty$,

б) $a>0$ или $a<0$, $q=1$, прогресијата монотоно не расте и монотоно не опаѓа,

в) $a<0$, $q>1$, прогресијата се стреми кон $-\infty$,

г) $a>0$, $0<q<1$ опаѓа; се стреми кон нула,

д) за $q=0$ не расте за $a>0$, а не опаѓа за $a<0$,

ѓ) за $-\infty<q<0$, а различно од нула $a\neq 0$ прогресијата не е монотона.

555. Ако членовите на бесконечната прогресија ги поврземе со знакот $+$, тогаш настанува бесконечен ред.

556. а) $1+3+9+27+\ldots+3^n+3^{n+1}+\ldots$ б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$

в) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+\ldots$ г) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-++\ldots$

д) $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots$

557. а) $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3\ldots$

б) $1,\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2},\ldots$ в) $1{,}1+10^{-1}{,}1+10^{-2},\ldots$

г) $1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ldots$

558. За бесконечниот ред велиме дека е конвергентен ако низата на неговите парцијални збирови е конвергентна; инаку е дивергентен.

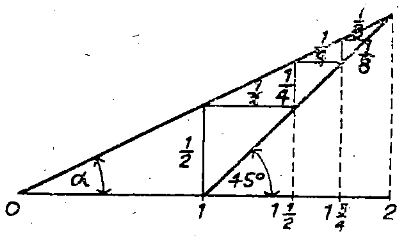
559. Под збир на бесконечниот конвергентен ред ја сметаме граничната вредност на низа парцијални збирови од тој ред.

560. $S_n=a\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{a}{1-q}+\dfrac{1}{q-1}\cdot q^n$. Ако е $|q|<1$, тогаш $q^n\to 0$ кога $n\to\infty$, па $S_n\to\dfrac{a}{1-q}$ кога $n\to\infty$.

561. Затоа што за $|q|>1$, $|q|^n\to\infty$. кога $n\to\infty$. Според $S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$ се гледа дека $S_n\to+\infty$ кога е $a_1>0$ и $q>1$, а $S_n\to-\infty$ кога е $a_1<0$ и $q>1$. За $q<-1$ спроведи ја натаму сам дискусијата.

562. а) дивергентен б) дивергентен

563. а) (сл. 24)



Сл. 24

564. а) $S=\dfrac{a}{a-q}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$ б) $1,\ 1\dfrac{1}{2},\ 1\dfrac{3}{4},\ 1\dfrac{7}{8},\dots$

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}},\dots,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\to 2 \text{ кога } n\to\infty,$$

в) $S_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}},\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|2-\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0,$

г) грешките даваат низа: $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\dots,$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0.$

565. а) $S=\dfrac{3}{2}$ б) $S=\dfrac{10}{9}$ в) $S=8$ г) $S=\dfrac{100}{11}$

566. а) $\dfrac{4}{7}$ б) $\dfrac{441}{41}$ в) $\dfrac{1}{2}$ г) $\dfrac{9}{4}$

567. а) $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^5}+\dots\right)+\left(\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{2}{3^4}+\dots\right)=$

$=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^2}}+\dfrac{\frac{2}{3^2}}{1-\frac{1}{3^2}}=\dfrac{5}{8}$ б) $\dfrac{1}{3}$ в) 14 г) 30,7

568. а) $0,\dot{3}\dot{7} = 0,373737\ldots = \frac{37}{100} + \frac{37}{10\,000} + \frac{37}{1\,000\,000} + \ldots =$

$= \dfrac{\frac{37}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{37}{99}$ б) $\frac{7}{9}$ в) $\frac{408}{999} = \frac{136}{333}$ г) $3\,\frac{633}{1111}$

569. а) $2,7\dot{5} = 2,7555\ldots = 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots = 2 +$

$+ \frac{7}{10} + \dfrac{\frac{5}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{90} = 2 + \frac{7 \cdot 9 + 5}{90} = 2 +$

$+ \frac{7(10-1)+5}{90} = 2 + \frac{75-7}{90} = 2\,\frac{68}{90} = 2\,\frac{34}{45}$

б) $0,5\dot{1}\dot{7} = \frac{517-5}{990} = \frac{512}{990} = \frac{256}{495}$ в) $14\,\frac{229}{450}$ г) $\frac{3\,217}{9\,900}$

д) $\frac{3\,583}{33\,000}$

570. Од $\frac{3}{1-q} = 4$ добиваме $q = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{3}{16}$.

571. Површините на квадратите ја даваат прогресијата: $a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \ldots$

Збирот на површините на сите квадрати е $S = \dfrac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$.

572. Низа површини: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{16}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \ldots$ Збирот на сите површини е: $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

573. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{64} + \ldots = a^2\sqrt{3}$. **574.** $2\,a^2$

575. Нека е на пр. $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$, тогаш е $|3 - a_n| = \left|3 - \left(3 \pm \frac{1}{10^n}\right)\right| =$

$= \left|\frac{1}{10^n}\right| = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^6}$ за $n > 6$.

576. а) Нека е на пр. $\varepsilon = 10^{-10}$, тогаш е $\frac{1}{10^n} < 10^{-10}$ за $n > 10$;

општо е $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ за $n > \log \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

б) Во интервалот $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ лежат сите членови на прогресијата $\frac{1}{10^n}$ за кое е $n > \log \frac{1}{\varepsilon}$, а надвор од интервалот само оние кај кои е $n \leqslant \log \frac{1}{\varepsilon}$. На пример ако е $\varepsilon = 10^{-10}$, тогаш надвор од тој интервал лежат само десет членови.

577. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ б) и в) граничните вредности се 0

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

578. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$ в) 0 г) $+\infty$

579. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$

б) 1 в) 1 г) 3

580. а) α) Ако бројот на n страните на вписаните полигони се стреми кон бесконечност, тогаш секоја страна ќе се стреми кон нула. β) Низата на обемот на вписаните полигони постојано расте, но ни еден член на низата нема да стане поголем или рамен на обемот на кругот.

581. а) Секоја страна на опишаните полигони се стреми кон нула кога $n \to \infty$. Низата на обемите на опишаните полигони опаѓа, но ни еден член на низата нема да стане помал или рамен на обемот на кругот.

582. Обемот на кругот е гранична вредност на бесконечната прогресија на обемите на вписаните и опишаните правилни полигони кога бројот на страните се стреми кон бесконечност (а, според тоа, секоја страна се стреми кон нула).

583. а) $\frac{1}{1-x}$ б) $\frac{a}{a+b}$ в) $\frac{ab}{a^2+b^2}$ г) $\frac{a^4}{a^2b^2+x}$ д) $\frac{a+b}{2b}$

584. а) $3\sqrt{\frac{3}{2}}$ б) $\sqrt{10}(\sqrt{2}+1)$ в) $4+3\sqrt{2}$ г) $\frac{26+15\sqrt{3}}{4}$,

585. а) $\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ б) $\frac{1}{1+\sin\alpha}$ в) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}$ г) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

586. Од равенката $\frac{1}{1-\cos^2\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}$ е $\cos\alpha=\frac{1}{2}$;

$\alpha=\pm 60^\circ+k\cdot 360^\circ$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

587. Од $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1-q}$ количникот на првата прогресија е $q=\cos 2\alpha$. Од $\frac{a}{1-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$ следува $\alpha+2\cos^2\alpha$, кај вториот ред. Прогресиите се: првата: $\sin 2\alpha$, $\sin 2\alpha \ \cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha \ \cos^2 2\alpha, \dots$ втората: $2\cos^2\alpha$, $2\cos^2\alpha \ \cos 2\alpha$, $2\cos^2\alpha \ \cos^2 2\alpha, \dots$ Збирот на третиот ред изнесува $\operatorname{ctg}\alpha$.

588. а) $a_4=\frac{108}{125}$ б) $a_1=\frac{1}{120}$ в) Од $\frac{a}{1-q}=\frac{10}{3}$, $aq=\frac{8}{15}$ добиваме две решенија: $a_1=\frac{2}{3}$; $q_1=\frac{4}{5}$; $a_2=\frac{8}{3}$; $b_2=\frac{1}{5}$.

589. $a+aq+aq^2=19$, $a\cdot aq=2\cdot\frac{a}{1-q}$; бројот е 964.

590. Ако е S_n збирот на n члeновите, S збирот на целата прогресија, тогаш е $a_n=2\ (S-S_n)$ или $aq^{n-1}=2\left(\frac{a}{1-q}-a\frac{1-q^n}{1-q}\right)$. Равенката може да се скрати со a, т.е. првиот член на бараната прогресија е произволен. Се добива $q=\frac{1}{3}$, така што бараната прогресија е a, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{9}, \dots$

591. $aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}-a\frac{1-q^n}{1-q}$, $q=\frac{1}{2}$. Бараната прогресија е: a $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{8}$ ...

592. a, $\frac{3}{4}\ a$, $\frac{9}{16}\ a, \dots$

593. $na=\frac{a}{1-q}$, $q=\frac{n-1}{n}$. Секоја прогресија која има количник $q=\frac{n-1}{n}$.

594. Полупречниците на полукруговите ја даваат прогресијата $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{4}$, $\frac{r}{8}, \dots$ Должината на кривата линија е $\frac{r\pi}{2}+\frac{r\pi}{4}+\frac{r\pi}{8}+\dots=r\pi$, а бараната површина е $\frac{r^2\pi}{8}+\frac{r^2\pi}{32}+\frac{r^2\pi}{128}+\dots=\frac{r^2\pi}{6}$.

595. а) Збирот на површините на квадратите е $2R^2+R^2+\frac{R^2}{2}+\ldots=$

$=4R^2$, а збирот на површините на круговисте е $R^2\pi+\frac{R^2\pi}{2}+$

$+\frac{R^2\pi}{4}+\ldots=2R^2\pi.$

б) Збирот на површините на круговите изнесува $\frac{4R^2\pi}{3}$, а на триаголниците $R^2\sqrt{3}.$

596. а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{4}+\ldots=a(\sqrt{2}+1)$ б) $a\sqrt{3}$ в) $a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

597. а) Полупречниците на круговите се $r_1=\frac{a\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$,

$r_2=\frac{a\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},\quad r_3=\frac{a\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2\ldots$

Збирот на обемите на сите кругови е $O=\frac{2a\pi\cos\alpha}{1+\sin\pi}\left[1+\right.$

$\left.+\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}+\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2+\ldots\right]=\alpha\pi\operatorname{ctg}\alpha=\pi h,$ каде што е h висина на триаголникот. Збирот на површините на круговите е $P=\frac{a^2\pi\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}\left[1+\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^4+\ldots\right]=$

$=\frac{a^2\pi\cos^2\alpha}{4\sin\alpha}.$

б) Збирот на обемите е $\frac{2R\pi\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, а на површините е

$\frac{R^2\pi\sin^4\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$

598. Страните на впишаните квадрати ја даваат прогресијата:

$a_1=a\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}},\quad a_2=a\left\{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right\}^2,\quad a_3=a\left\{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right\}$ итн.

Збирот на површините на сите квадрати е $\frac{a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{4\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}.$

599. Полупречниците на кругoвите се членови на прогресијата: $r_1 = a$, $r_2 = a(3-2\sqrt{2})$, $r_3 = a(3-2\sqrt{2})^2$, $r_4 = a(3-2\sqrt{2})^3 \ldots$ Збирот на обемите на круговите е $2a\pi(2\sqrt{2}-1)$, а збирот на површините е $\frac{a^2\pi}{2}(3\sqrt{2}-2)$.

600. Страните на квадратот се членови на прогресијата: a, $a\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$, $a\left(\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 \ldots$ Збирот на обемите е $2a(1+\operatorname{ctg}\alpha)$, а збирот на површините е $\frac{a^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2\sin 2\alpha}$.

601. Должините на нормалите се: $a\sin\alpha$, $a\sin\alpha\cos\alpha$, $a\sin\alpha\cos^2\alpha \ldots$ Збирот на должините на сите нормали е $S = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$. За $n = 6$ е $S = a\sqrt{3}$.

606. $AA_1 = \frac{1}{2}AB$, $A_1A_2 = \frac{1}{4}AB$, $A_2A_3 = \frac{1}{8}AB$, $A_3A_4 = \frac{1}{16}AB$, $A_4A_5 = \frac{1}{32}AB \ldots$,

$$AA_1 = \frac{1}{2}AB,$$

$$AA_2 = AA_1 - A_1A_2 = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB,$$

$$AA_3 = AA_2 + A_2A_3 = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB + \frac{1}{8}AB$$

$$AA_4 = AA_3 - A_3A_4 = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB + \frac{1}{8}AB - \frac{1}{16}AB,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Низа AA_1, AA_2, AA_3, $AA_4, \ldots \to AM$ т.е.

$$AM = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB + \frac{1}{8}AB - \frac{1}{16}AB + \frac{1}{32}AA - + \ldots = \frac{AB}{3}.$$

603. $AA_1 = \frac{1}{2}AB$,

$$AA_2 = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB,$$

$$AA_3 = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB - \frac{1}{8}AB,$$

$$AA_4 = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB - \frac{1}{8}AB + \frac{1}{16}AB,$$

$$AA_5=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{4}AB-\frac{1}{8}AB+\frac{1}{16}AB-\frac{1}{32}AB, \dots$$

$$AM=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{4}AB-\frac{1}{8}AB+\frac{1}{16}AB-\frac{1}{32}AB+$$

$$+\frac{1}{64}AB-+\dots=\frac{1}{2}AB+\frac{\frac{1}{4}AB}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}AB.$$

Дали резултатот можеше непосредно да се заклучи од резултатот на 602-та задача?

604. Полупречниците на топките ја образуваат прогресијата: $\frac{R\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$, $\frac{R\cos\alpha}{1+\sin\alpha}, \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}, \frac{R\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\beta}\right)^2\dots$ Збирот на површините на топките е $\frac{R^2\pi\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, а збирот на зафатнините е $\frac{2R^3\pi\cos^3\alpha}{3\sin\alpha(3+\sin^2\alpha)}$.

605. Рабовите на коцките се: $\frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{125}, \dots$ Зборот на зафатнините изнесува $\frac{16}{32}$.

606. Полупречниците на топките се: $\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{6}, \dots$

Збирот на површините е: $a^2\pi+\frac{a^2\pi}{3}+\frac{a^2\pi}{9}+\dots=\frac{3a^2\pi}{2}$.

Збирот на зафатнините е $\frac{a^3\pi}{6}+\frac{a^2\pi\sqrt{3}}{54}+\frac{a^3\pi}{162}+\dots=\frac{a^3\pi(9+\sqrt{3})}{52}$.

607. Тоа се прогресиите: $q, q^2, q^3, \dots, 2q, 2q^2, 2p^3, \dots, 3q, 3q^2, 3q^3, \dots$ Од равенката $\frac{q}{1-q}+\frac{2q}{1-q}+\frac{3q}{1-q}=1$ се добива $q=\frac{1}{7}$.

$S_1=\frac{1}{6}$, $S_2=\frac{1}{3}$, $S_3=\frac{1}{2}$.

608. Од равенките $\frac{9}{2}(2a+8d)=\frac{a}{1-q}$, $a+d=a+1$, $aq=a-1$ наоѓаме: $a_1=12$, $q_1=\frac{11}{12}$, $\left(a_2=-3,\ q_2=\frac{3}{4}\right.$ отпаѓа зашто е дивергентна$\left.\right)$. Прогресиите се аритметичката: 12, 13, 14, ... 20, а геометриската: 12, 11. $\frac{11^2}{12}, \frac{11^3}{12}, \dots$ Збирот на секоја прогресија е 144.

§ 11. СЛОЖЕНА ИНТЕРЕСНА СМЕТКА

I Капиталот од C динари вложен со $p^0/_0$ на n години при годишно капитализирање ќе нарасне на вредност

$$C_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad q = 1 + \frac{p}{100},\ C_n = Cq^n.$$

II Капиталот од C динари вложен со $p^0/_0$ на n години при капитализирање на секој m-ти дел од годината ќе нарасне на вредноста од

$$C_n = C\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{mn} = Cq^{mn}, \text{ каде е } q = 1 + \frac{p}{100\,m}.$$

III Непрекинатото капитализирање и природниот прираст стануваат според формулата

$$C_n = Ce^{\frac{pn}{100}},\ e = 2{,}71828$$

* *
*

609. Ако во банка вложиме 1 динар со $p^0/_0$, тогаш неговата вредност се менува вака: на крајот од првата година нараснува на $C_1 = 1 + \frac{p}{100}$, на крајот на втората година на $C_2 = C_1 + C_1\frac{p}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, на крајот на третата година на $C_3 = C_2 + C_2\frac{p}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$

— — — — — — — —

на крајот на n-тата година нараснува на

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\frac{p}{100}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

610. Ако со C_k ја означиме вредноста на капиталот на крајот од k-та година, тогаш е

$$C_1 = C + \frac{Cp}{100} = C\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

$$C_2 = C_1 + \frac{C_1 p}{100} = C_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

$$C_3 = C_2 + C_2 \frac{p}{100} = C_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

— — — — — — — —

$$C_n = C_{n-1} + \frac{C_{n-1} p}{100} = C_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

или ако земеме $1 + \frac{p}{100} = q$, имаме $C_n = Cq^n$.

611. На крајот од првата година вредноста на капиталот е $C_1 = 2\,000 + \frac{2\,000 \cdot 5}{100} = 2\,000\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 2\,100$ динари.

На крајот од втората година вредноста на капиталот е $C_2 = 2\,100 + \frac{2\,100 \cdot 5}{100} = 2\,100\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 2\,205$.

На крајот од третата година е $C_3 = 2\,315{,}25$.

На крајот од четвртата година е $C_4 = 2\,431{,}01$ динари.

612. а) $C_1 = 5\,200$ дин. $C_2 = 5\,408$ дин. $C_3 = 5\,624{,}32$ дин. $C_4 = 5\,849{,}29$ дин. $C_5 = 6\,083{,}26$ дин. б) $C_1 = 10\,500$ $C_2 = 11\,025$ $C_3 = 11\,576{,}25$ $C_4 = 12\,155{,}06$ $C_5 = 12\,762{,}81$ $C_6 = 13\,400{,}95$
в) $C_1 = 1\,045$ $C_2 = 1\,092{,}03$ $C_3 = 1\,141{,}17$ г) $C_1 = 600{,}30$ $C_2 = 621{,}31$ $C_3 = 643{,}06$ $C_4 = 665{,}57$ $C_5 = 688{,}86$

613. На крајот од $\frac{1}{2}$ година вредноста на вложениот динар ќе нарасне на $C_1 = 1 + \frac{p}{200}$.

На крајот од првата година вредноста е $C_2 = C_1 + \frac{C_1 p}{200} = C_1\left(1 + \frac{p}{200}\right) = \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2$.

На крајот од $1\frac{1}{2}$ година вредноста е $C_3 = C_2 + C_2\frac{p}{200} = \left(1 + \frac{p}{200}\right)^3$.

— — — — — — — —

На крајот од петтата година вредноста е $C_{2\cdot 5}=\left(1+\frac{p}{200}\right)^{10}$.

На крајот од n-та година вредноста е $C_{2n}=\left(1+\frac{p}{200}\right)^{2n}$.

614. $C_{2n}=C\left(1+\frac{p}{200}\right)^{2n}$

615. а) 12 212 б) 10 949 в) 19 084 г) 7 222

616. а) 8 024,17 д б) 4 619 в) 2 164 г) 65 949

617. а) 8 години б) 7 години в) 8 години г) 5 години

618. а) Со 5%. Пресметај го најпрвин q.

619. За 17,7 години. **620.** Со $5{,}58\%$.

621. $900\,000\,q^{2n}=1\,833\,500$, $n\approx 16$ години.

622. Мораме да вложиме $C=\frac{50\,000}{1{,}035^{24}}$ д $=21\,898{,}4$ д.

623. Од равенката $21\,800\left(1+\frac{p}{200}\right)^{46}=48\,093$ имаме

$$p=200\left(\sqrt[46]{\frac{48\,093}{21\,800}}-1\right).$$

624. 12 788 дин.

625. а) $C_{4n}=C\left(1+\frac{p}{4\cdot 100}\right)^{4n}$ г) $C_{mn}=C\left(1+\frac{p}{100\,m}\right)^{mn}$

626. Ако во формулата $C=c\left(1+\frac{p}{100\,m}\right)^{mn}$ земаме дека е $\frac{100\,m}{p}=x$, тогаш е $m=\frac{px}{100}$ и $C=c\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{pnx}{100}}=c\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{pn}{100}}$. Од изразот $\frac{100\,m}{p}=x$ се гледа дека кога $m\to\infty$, тогаш и $x\to\infty$. Во вишата математика се покажува дека е $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\approx 2{,}71\,828\ldots$

Според тоа, кога $x\to\infty$, тогаш и $C\to c\cdot e^{\frac{pn}{100}}$. Тоа е формулата за природниот пораст. Според неа се пресметува порастот на живите организми и слично (порастот на населението, прирастот на шумите, радиоактивното распаѓање, апс рпцијата на светлината и слично).

627. а) $C=\frac{C^{n}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}}$ б) $p=100\left(\sqrt[n]{\frac{C_n}{C}}-1\right)$

в) $n=\dfrac{\log C_n-\log C}{\log\left(1+\dfrac{p}{100}\right)}$

628. а) 12 155 дин. б) 12 201 дин.

629. $C\cdot 1{,}02^{20}=14\,000\cdot 1{,}05^{10}$, $C=15\,347$ дин.

630. Од равенката $1\,200\cdot 1{,}05^{n}=1\,800\cdot 1{,}04^{n-4}$ следува $n=25{,}95\approx 26$ години.

631. 23 335,8 дин.

632. Нека не е позната сумата C тогаш е
$C\cdot 1{,}02^{20}=(C+10\,000)\cdot 1{,}03^{10}\cdot C=94\,696$ дин.

633. а) $C_8=5\,000\cdot 1{,}04^5\cdot 1{,}045^3=6\,942$ дин. б) 16 517

634. Вложената сума пари нека е C, тогаш е
$(C\cdot 1{,}04^{10}+2\,000)\cdot 1{,}0375^{10}=23\,701$,

$$C=\frac{1}{1{,}04^{10}}\left(\frac{23701}{1{,}0375^{10}}-2\,000\right).$$

635. а) $C_{10}=42\,350\cdot 1{,}03^{10}=56\,919$ m³

б) $C_{10}=C\cdot e^{\frac{pn}{100}}=42\,350\cdot e^{\frac{3}{10}}=57\,166$ m³

636. 3 040 200 жители (според формулата за природниот пораст)

637. 644 300 жители

638. од равенката $9\,440=5\,200\cdot e^{\frac{2n}{100}}$ е $n=\dfrac{100\,(\log 944-\log 520)}{5\log e}\approx$ $\approx 29{,}85$ години.

639. Од равенката $8\,600\cdot e^{\frac{5p}{100}}=9\,300$ е $p=\dfrac{100\,(\log 93-\log 86)}{5\log e}=$ $=1{,}565\%$. Бројот на жителите во 1960 година ќе биде

$$C=9\,300e^{\frac{10p}{100}}=9\,300\cdot e^{\frac{10}{100}\cdot\frac{100\,(\log 93-\log 86)}{5\log e}}.$$

Со логаритмирање следува:

$$\log C=\log\ 9\,300+\frac{2\log 93-\log 86}{\log e}\cdot\log e=3\ \log\ 9\,300-2\log$$
$8\,600=4{,}03644$. Бројот на жителите во 1960 год. ќе биде 10 875.

640. Од $\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^{12}=1{,}79588$ добиваме дека за целата година продуктивноста на трудот ќе биде зголемена за $79{,}59\%$.

641. Приближно за $68{,}96^0/_0$.

642. Од равенката $C \cdot q^{2n} + C = r \cdot Cq^n$ излегува $q^{2n} — rq^n + 1 = 0$,

$$q = \sqrt[n]{\frac{r \pm \sqrt{r^2 — 4}}{2}}, \text{ па е } p = 100\sqrt[n]{\frac{r \pm \sqrt{r^2 — 4}}{2}} — 100.$$

Специјално е $p = 10{,}102^0/_0$. Во специјален случај коренот со негативен знак нема смисла, зашто тогаш е $p < 0$.

643. Од равенките
$5\,600\, q^{10} + 3\,700\, q_1^{10} = 14\,000,$
$5\,600\, q^{10} — 3\,700\, q_1^{10} = 4\,000,$
се добива $q^{10} = \dfrac{45}{28}$, $p = 4{,}86^0/_0$, а $q_1^{10} = \dfrac{50}{27}$, $p_1 = 3{,}056^0/_0$.

§ 12 СИСТЕМАТСКИ ПРЕГЛЕД НА БРОЕВИТЕ

644. Нека е даден природниот број $N = 10^k n_k + \ldots + 10^3 n_3 + 10^2 n_2 + 10 n_1 + n_0$, каде е n_0 цифрата на единиците, n_1 цифрата на десетиците итн.

а) Бидејќи е 10 делив во 2, тоа бројот N ќе биде делив со 2 кога му е цифрата n_0 делива со 2, т.е. кога N е парен број.

б) Бидејќи е 10^2 делив со $2^2 = 4$, тоа бројот N ќе биде делив со 4 кога со тој број е делив и бројот $n_0 + 10n_1$, т.е. кога двоцифрениот завршок на бројот N е делив со 4.

645. $N = 10^k n_k + \ldots + 10^3 n_3 + 10^2 n_2 + 10 n_1 + n_0$. Бидејќи е бројот $10 n_1 + 10^2 n_2 + \ldots$ секогаш делив со 5, тоа и бројот N ќе биде делив со 5 кога е цифрата $n_0 = 0$ или 5.

646. $N = 10^k n_k + \ldots + 10^3 n_3 + 10^2 n_2 + 10 n_1 + n_0 = (n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_k) + 9(n_1 + 11 n_2 + 111 n_3 + \ldots)$ Бидејќи е бројот $9(n_1 + 11 n_2 + \ldots)$ секогаш делив со 3 и со 9, тоа и бројот N ќе биде делив со 3, односно со 9 кога збирот на неговите цифри $(n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)$ е делив со 3, односно со 9.

647. Директни операции се собирање и множење, а инверзни се одземање и делење.

648. а) Законот на комутацијата за два броја a и b се искажува со равенството $a + b = b + a$.

б) Законот на асоцијацијата: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

649. а) $ab = ba$ б) $(ab)c = a(bc)$ в) $a(b + c) = ab + bc$.

650. Тоа се директни математички операции, т.е. операциите собирање и множење.

651. Со делење на природни броеви добиваме природен број ако деленикот го содржи делителот. За да може во секој случај операцијата делење да биде изводлива, бројната област на природните броеви треба да се прошири со дропки.

652. Операцијата одземање $a—b$ на два броја a и b кои припаѓаат кон областа на позитивните цели и раздробените броеви е изводлива во таа област само ако е $a>b$. Кон областа на позитивните броеви треба да се додадат негативни цели и раздробени броеви и нула за да може во вака проширена област операцијата одземање да биде изводлива без исклучок.

653. Тоа се рационални броеви.

654. Се, со исклучок на делењето со нула кое не се дефинира.

655. Овие операции не се докажуваат, туку се дефинираат.

656. Тоа се рационални броеви.

657. а) Рационалниот број $\frac{p}{q}$ може да помине во децимална дропка ако q ги содржи само простите фактори 2 и 5.

б) $\frac{p}{q}$ може да помине во чиста периодична децимална дропка ако q не ги содржи простите фактори 2 и 5.

в) $\frac{p}{q}$ може да се напише во форма на мешовита периотична децимална дропка ако q, раставен на прости фактори, освен факторите 2 и 5, содржи и некои други прости фактори.

658. а) $2\frac{1}{4}=2{,}25$ б) $\frac{1}{5}=0{,}2$

в) $—\frac{3}{40}=—3:40=—0{,}075$ г) $\frac{1}{3}=1:3=0{,}333\ldots=0{,}\dot{3}$

д) $1{,}\dot{2}38\,09\dot{5}$ ѓ) $\frac{4}{15}=0{,}266\ldots=0{,}2\dot{6}$ е) $3{,}2\dot{3}$

659. а) $7{,}5=7\frac{5}{10}=7\frac{1}{2}$ б) $\frac{408}{1000}=\frac{51}{125}$ в) $3\frac{5}{9}$ г) $\frac{23}{99}$

д) $—15\frac{709}{999}$ ѓ) $0{,}2\dot{5}=\frac{25—2}{90}=\frac{23}{90}$ е) $13\frac{547—54}{900}=13\frac{493}{900}$

660. а) $3{,}7=3{,}7\dot{0}$ или $3{,}7=3{,}6\dot{9}$ б) $0{,}94\dot{0}$ или $0{,}93\dot{9}$

в) $—0{,}09\dot{0}$ или $—0{,}08\dot{9}$ г) $47{,}01=40{,}01\dot{0}$ или $47{,}01=47{,}00\dot{9}$

661. Степенувањето може да се изведе секогаш. Резултатот од степенувањето секогаш е рационален број. Операцијата коренување не е секогаш изводлива во подрачјето на рационалните броеви. За да може операцијата коренување (радикандот позитивен) да биде изводлива без исклучок, треба рационалното бројно подрачје да се прошири со ирационални броеви. Така проширената област на броевите се вика подрачје на реалните броеви.

662. Секогаш е изводлива, зашто логаритмите на броевите (позитивните) секогаш се реални броеви.

663. Нема смисла да се докажува, зашто така се зема според дефиницијата.

664. Равенките немаат реални корени. За да можат овие и слични равенки да имаат корени, потребно е ново проширување на бројното подрачје со воведување на имагинарни единици $\sqrt{-1} = i$, како и на имагинарни броеви $a\sqrt{-1} = ai$ (a е реален број).

665. $N = 10^k n_k + \ldots + 10^3 n_3 + 10^2 n_2 + 10 n_1 + n_0 = n_0 + (11-1) n_1 + (99+1) n_2 + (1001-1) n_3 + \ldots = (n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + - \ldots) + (11 n_1 + 99 n_2 + 1001 n_3 + \ldots) \ldots$ Бидејќи бројот во втората заграда е секогаш делив со 11, тоа и бројот N ќе биде делив со 11 ако со 11 е делив бројот $(n_0 + n_2 + \ldots) - (n_1 + n_3 + \ldots)$, т.е. ако разликата помеѓу збирот на неговите цифри на непарните места и збирот на неговите цифри на парните места е делива со 11.

666. Ќе докажеме дека помеѓу кои и да било два рационални броја a и b лежи барем еден рационален број, на пример нивната аритметичка средина. Да земеме дека е $a<b$. Ако на левата и десната страна на неравенството го додадеме a, добиваме $2a<a+q$. Слично ги наоѓаме $a+b<2b$. Од добиените неравенства следува $a<\frac{a+b}{2}<b$, со што е докажано тврдењето.

667. Помеѓу два рационална броја a и b секако лежи рационалниот број m, кој е рамен на нивната средина. Така е $a<m<b$. Меѓутоа, и помеѓу a и m, како и помеѓу m и b, лежат пак рационални броеви кои се рамни на нивните аритметички средини, така што е $a<m_1<m<m_2<b$.

Но, и помеѓу секои два од овие броеви лежат нови рационални броеви, итн. во бесконечност.

668. $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ Според тоа е

$$0 < \frac{1}{3} < 1,$$

$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4,$$

$$0{,}32 < \frac{1}{3} < 0{,}34.$$

— — — — — — —

669. а) $1\frac{3}{7} = 1{,}\dot{4}2857\dot{1}$; според тоа е: $1 < 1\frac{3}{7} < 2$,

б) $0 < \frac{1}{2} < 1$,

$0{,}4 < \frac{1}{2} < 0{,}6$,

$1,4 < 1\frac{3}{7} < 1,5,$ $\qquad$ $0,49 < \frac{1}{2} < 0,51,$

$1,42 < 1\frac{3}{7} < 1,43,$ $\qquad$ $0,499 < \frac{1}{2} < 0,501,$

$1,428 < 1\frac{3}{7} < 1,429$ $\qquad$ ——————————

——————————

670. Кога $\sqrt{2}$ би бил рационален број, тогаш ќе можеме да го напишеме во форма на $\frac{p}{q}$, каде се p и q релативно прости броеви. Од $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ по квадратирањето следува $p^2 = 2q^2$. Одовде заклучуваме дека е p парен број, зашто е таков и бројот $2q^2$. Според тоа p може да се напише во форма на $p = 2q_1$. Од равенката $(2p_1)^2 = 2q^2$ следува $q^2 = 2q_1^2$, така што и q мора да биде парен број. Овој заклучок е противен на претпоставката дека се p и q релативно прости броеви. Значи, тврдењето $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ не беше исправно, т. е. $\sqrt{2}$ на е рационален број.

671. Ако според познатата постапка се извади $\sqrt{2}$, ќе добиеме $\sqrt{2} = 1,414\ldots$, така што е

$1 < \sqrt{2} < 2,$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$

——————————

672. а) 2, $\quad$ 2,2, $\quad$ 2,23, $\quad$ 2,236, ... $\to \sqrt{5}$

3, $\quad$ 2,3, $\quad$ 2,24, $\quad$ 2,237, ... $\to \sqrt{5}$

б) 1, $\quad$ 1,4, $\quad$ 1,44, $\quad$ 1,442, ... $\to \sqrt[3]{3}$

2, $\quad$ 1,5, $\quad$ 1,45, $\quad$ 1,443, ... $\to \sqrt[3]{3}$

673. Математичките операции со ирационални броеви се изведуваат на тој начин што истите тие операции се изведуваат со нивните приближни рационални вредности. Кога се изведуваат математичките операции со членовите на двојните низи на приближните рационални вредности на ирационални броеви, тогаш настапуваат две низи рационални броеви кои имаат иста гранична вредност. Таа гранична вредност се смета како резултат од математичката операција со ирационалните броеви.

674. а) $\sqrt{2} = 1,414,\ldots$ $\qquad$ $\sqrt{3} = 1,732\ldots$

$1 < \sqrt{2} < 2$ $\qquad$ $1 < \sqrt{3} < 2$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ $\qquad$ $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ $\qquad$ $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ $\qquad$ $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$

—————————— $\qquad$ ——————————

$2 = 1 + 1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 2 + 2 = 4$
$3{,}1 = 1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8 = 3{,}3$
$3{,}14 = 1{,}41 + 1{,}73 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}42 + 1{,}74 = 3{,}16$
$3{,}146 = 1{,}414 = 1{,}732 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}415 + 1{,}733 = 3{,}148$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Според тоа е $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14\ldots$

б) $\sqrt{6} = 2{,}44949\ldots;\ \sqrt[3]{7} = 1{,}91293\ldots,$

$$2{,}44949 = 1{,}91293 < \sqrt{6} + \sqrt[3]{7} < 2{,}44950 + 1{,}91294$$

или

$$4{,}36242 < \sqrt{6} + \sqrt[3]{7} < 4{,}36244\ldots.$$

според тоа е $\sqrt{6} + \sqrt[3]{7} = 4{,}3624\ldots$

в) $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots,\ \sqrt{5} = 2{,}23607\ldots$

Прогресиите кои растат или опаѓаат и се стремат кон граничната вредност $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5}$ се:

$1 \cdot 2,\quad 1{,}2 \cdot 2{,}2,\quad 1{,}25 \cdot 2{,}23,\quad 1{,}259 \cdot 2{,}236, \ldots$ и
$2 \cdot 3,\quad 1{,}3 \cdot 2{,}3,\quad 1{,}26 \cdot 2{,}24,\quad 1{,}260 \cdot 2{,}237, \ldots$

Значи е $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5} = 2{,}81\ldots$

г) $2 + \sqrt[3]{10} = 2 + 2{,}15443\ldots = 4{,}154\ldots$

675. а, α) $|a+b| = |(-7)+(+3)| = |-4| = 4 < |-7| + |+3| = 10,$
а, β) $|(-4)+(-8)| = |-4| + |-8|$, зашто е $12 = 12,$
б, α) $|(-7)-(+3)| > ||-7| - |+3||$, зашто е $10 > 4$
б, β) $|(-4)-(-8)| = ||-4| - |-8)||$, зашто е $4 = 4,$
в, α) $|(-7)\cdot(+3)| = |-7| \cdot |+3|$, зашто е $21 = 21,$
г, α) $|(-7):(+3)| = |-7| : |+3|$, зашто е $\frac{7}{3} = \frac{7}{3}.$

676. За $x = -3$ важи $|-3| < 4$, но исто така е и $-4 < -3 < +4$. Одбери самиот уште некои вредности на x кои ја задоволуваат релацијата $|x| < 4$.

677. а) Релацијата $|x| > a$ ја задоволуваат сите вредности на x кои ги задоволуваат релациите $-\infty < x < -a$ или $+a < x < +\infty$.
б) $-\infty < x \leqslant -2$ или $+2 \leqslant x < +\infty$
в) $a - b < x \leqslant +b$

679. а) $(3+2i)^{-2} = \dfrac{1}{(3+2i)^2} = \dfrac{1}{5+12i} = \dfrac{5}{169} - \dfrac{12}{169}i$ б) $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$

681. За $n=3$ треба да сеземе $k=0, 1, 2$.
За $k=0$ е $\sqrt[3]{1}=\cos 0+i\sin 0=1$.

За $k=1$ е $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

за $k=2$ е $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Со кубирање можеме да се увериме во точноста на овие равенства. На пример:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1.$$

§ 13. ПЕРМУТАЦИИ И КОМБИНАЦИИ

Бројот на пермутациите од n елементи без повторување е $P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Бројот на комбинациите од r-ти ред од n елементи е

$$K_r(n) = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}.$$

*

* *

682. а)

123	213	312
132	231	321

в)

xyz	yxz	zxy
xzy	yzx	zyx

г)

$a_1a_2a_3$
$a_1a_3a_2$
$a_2a_1a_3$
$a_2a_3a_1$
$a_3a_1a_2$
$a_3a_2a_1$

д)

1 234	2 134	3 124	4 123
1 243	2 143	3 142	4 132
1 324	2 314	3 214	4 213
1 342	2 341	3 241	4 231
1 423	2 413	3 412	4 312
1 432	2 431	3 421	4 321

683.

51 234	52 134	53 124	54 123
51 243	52 143	53 142	54 132
51 324	52 314	53 214	54 213
51 342	52 341	53 241	54 231
51 423	52 413	53 412	54 312
51 432	52 431	53 421	54 321

Пермутациите читај ги со ред според колоните озгора надолу

684.

ако	*као*	*оак*
аок	*коа*	*ока*

685.

АМОР	*МАОР*	*ОАМР*	*РАМО*
АМРО	*МАРО*	*ОАРМ*	*РАОМ*
АОМР	*МОАР*	*ОМАР*	*РМАО*
АОРМ	*МОРА*	*ОМРА*	*РМОА*
АРМО	*МРАО*	*ОРАМ*	*РОАМ*
АРОМ	*МРОА*	*ОРМА*	*РОМА*

686. а) *цис* *ицс* *сци*
цси *исц* *сиц*

б)

АДЈС	*ДАЈС*	*ЈАДС*	*САДЈ*
АДСЈ	*ДАСЈ*	*ЈАСД*	*САЈД*
АЈДС	*ДЈАС*	*ЈДАС*	*СДАЈ*
АЈСД	*ДЈСА*	*ЈДСА*	*СДЈА*
АСДЈ	*ДСАЈ*	*ЈСАД*	*СЈАД*
АСЈД	*ДСЈА*	*ЈСДА*	*СЈДА*

687. Зборот МОСТАР има 6 букви, така што од тие букви можат да се состават вкупно $6! = 720$ пермутации.

688. 64 357 64 537 64 735
64 375 64 573 64 753

689. Можат да се напишат $5! = 120$ броеви.

690. $5! = 120.$

691. $8! = 40\,320.$

692. Бројот 4 може да биде на прво место онолку пати колку што има пермутации од останатите три елементи (3, 5, 6), а тоа е $3! = 6.$

693. а) $5! = 120$ б) $4! = 24$ в) $3! = 6$

694. $5! = 120$

695. $6! = 720$

696. а) *ab* *ac* *ad* *ae*; *bc* *bd* *be*; *cd* *ce*; *de*

abc *abd* *abe* *acd* *ace* *ade*; *bcd* *bce* *bde*; *cde*

abcd *abce* *abde* *acde*; *bcde*

697. abc, $ab\alpha$, $ab\beta$, $ac\alpha$, $ac\beta$, $a\alpha\beta$; $bc\alpha$, $bc\beta$, $b\alpha\beta$; $c\alpha\beta$

698. а) $\binom{4}{2} = 6$ прави: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

б) $\binom{4}{3} = 4$ рамнини: ABC, ABD, ACD, BCD.

699. *AgCu* *AgFe* *AgNi*; *CuFe* *CuNi*; *FeNi*

700. а) Бројот иа триаголниците е рамен на бројот на комбинациите од 3 ред од 5 елементи, т.е.

$$\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10 \qquad \text{б)}\ \binom{6}{3}=20$$

701. Вкупниот број елементи е

$$\binom{49}{6}=\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.$$

702. Бројот на сите прави што можат да се повлечат сврзувајќи по два врва од седумаголникот е $\binom{7}{2}=21$. Бидејќи 7 од овие спојници се страни на седумаголникот, тоа вкупниот број на дијагоналите е $21-7=14$.

703. а) $\binom{5}{3}=10$ б) $\binom{5}{4}=5$

704. Отпорите можат да се земат најпрвин поединечно, а потоа да се сврзуваат по два, три итн. Бараниот број е

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=31.$$

705. Можат да се состават $\binom{6}{2}=15$ стражи.

706. Има вкупно $\binom{9}{5}=126$ комбинациии.

707. Вкупниот број на рамнините е $\binom{8}{3}+56.$

708. Бројот на тетивите е $\binom{7}{2}=21.$

709. Бројот на шаховските партии е $\binom{12}{2}=66.$

710. 215 436, 216 435, 251 436, 256 431, 261 435, 265 431

711. 246 891, 246 981, 286 491, 286 941, 296 481, 296 841

712. Со елементот 1 на прво место има $4!=24$ комбинации. Истото важи и за елементот 2. Елементот 3 ќе биде на прво место, а 1 на второ $3!=6$ пати. Истото важи и за елементите 32. Но $60=4!+4!+3!+3!$ тако што бараната пермутација е 32 541.

713. Деветнаесетта.

714. Доаѓа 31 425

715. Педесетта

716. Четиринаесетта

717. 42 153 42 315 42 351 42 513

718. Буквите во почетната пермутација да ги означиме со S—1, O—2, V—3, A—4; потоа се прашува која е по ред пермутацијата 3 412 од почетната 1 234. Одговор: седумнаесетта.

719. Прашањето може да се постави на овој начин: која е по ред пермутацијата 52 314 ако почетната е 12 345. Одговор: сто и петта.

720. Ако земеме дека непознатиот број на елементите е n, тогаш е

$$\binom{n}{2}=15 \qquad \text{или} \qquad \frac{n(n-1)}{2}=15.$$

Одовде се добива квадратната равенка $n^2-n-30=0$. Задоволува само решението $n=6$.

721. На состанокот имало n луѓе. Од равенката $\binom{n}{2}=45$ следува $n=10$.

722. Потребни се седум видови метал.

723. Баранио број е:

$$\binom{6}{4}\cdot\binom{5}{3}=15\cdot10=150.$$

724. $\binom{n}{3}:\binom{n}{5}=5:3$

или

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}:\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=5:3$$

Откако ќе се среди, следува $(n-3)(n-4)=3\cdot4$ или $n^2-7n=0$. Проблемот го задоволува само $n=7$.

725. Види ја задачата 339.

726. Види ја задачата 450.

§ 14. БИНОМНА ФОРМУЛА

$$(a+b)^4=a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4.$$

$$(a+b)^5=a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+\binom{5}{5}b^5$$

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+$$

$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

* * *

727. $(a+b)^2=a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^6=a^6+\binom{6}{1}a^5b+\binom{6}{2}a^4b^2+\binom{6}{3}a^3b^3+$

$+\binom{6}{4}a^2b^4+\binom{6}{5}ab^5+\binom{6}{6}b^6=\ldots$

728. $(a-b)^4=a^4-\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2-\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4$

$(a-b)^5=a^5-\binom{5}{1}a^2b+\binom{5}{2}a^3b^2-\binom{5}{3}a^2b^3+$

$+\binom{5}{4}ab^4-\binom{5}{5}b^5=\ldots$

729. а) $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

б) $1-5a+10a^2-10a^3+5a^4-a^5$

730. а) $16+32a+24a^2+8a^3+a^4$
б) $32-80x+80x^2-40x^3-10x^4-x^5$

731. а) $1+8a+24a^2+32a^3+16a^4$ б) $1+15a+90a^2+270a^3+405a^4+$
$+243a^5$ г) $729-486a+324a^2-216a^3+144a^4-96a^5+64a^6$

732. а) $a^8+4a^6b+6a^4b^2+4a^2b^3+b^4$ б) $a^{15}-15a^{12}b+10a^9b^2-$
$-10a^6b^3+5a^3b^4-b^5$ г) $a^{12}+12a^{13}+60a^{14}+160a^{15}+240a^{16}+$
$+192a^{17}+64a^{18}$

733. $\binom{5}{3}a^{5-3}(b^2)^3=10a^2b^6$

734. $\binom{6}{4}(b^2)^{6-4}(-2b)^4=240b^8$

735. $a^5+5a^6b^2+10a^7b^4$

736. а) $1+4a^{-1}+6a^{-2}+4a^{-3}+a^{-4}$ б) $a^{-4}+4a^{-5}+6a^{-6}+4a^{-7}+a^{-8}$
в) $1-5x^{-2}+10x^{-4}+5x^{-6}+5x^{-8}-x^{-10}$

737. а) $16+32a^{\frac{1}{2}}+24a+8a^{\frac{3}{2}}+a^2$ б) $32-80a^{\frac{1}{2}}+80a-40a^{\frac{3}{2}}+$
$+10a^2-a^{\frac{5}{2}}$ в) $a^2+4a^{\frac{5}{2}}+6a^3+4a^{\frac{7}{2}}+a^4$

738. а) $a^2+4a+6+4a^{-1}+a^{-2}$ б) $x^{\frac{5}{3}}-10x+40x^{\frac{1}{3}}-80x^{-\frac{1}{3}}+$
$+80x^{-1}-32x^{-\frac{5}{3}}$ в) $a^2\sqrt{a}+5a^2\sqrt{b}+10ab\sqrt{a}+10ab\sqrt{b}$
$+5b^2\sqrt{a}+b^2\sqrt{b}$

739. а) $\frac{1}{32}+\frac{5}{16}a+\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{2}a^3+\frac{5}{2}a^4+a^5$ б) $x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{2}x^3-$
$-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{16}x-\frac{1}{32}$ в) $\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}a+2a^{\frac{3}{2}}+a^2$

740. а) $a^{4x}+4a^{3x}b^x+6a^{2x}b^{2x}+4a^xb^{3x}+b^{4x}$ б) $a^{5x}-5a^{4x}b^x+10a^{3x}b^{2x}-$
$-10a^{2x}b^{3x}+5a^xb^{4x}-b^{5x}$ в) $a^{8x}-4a^{6x}+6a^{4x}-4a^{2x}+1$

741. а) $a^{4x}+4a^{2x}+6a^0+4a^{-2x}+a^{-4x}$ б) $a^{5x}+5a^{3x}+10a^x+10a^{-x}+$
$+5a^{-3x}+a^{-5x}$ в) $a^{6x}-6a^{4x}+15a^{2x}+20+15a^{-2x}-$
$-6a^{-4x}+a^{-6x}$

742. а) $\dfrac{1}{1+5a+10a^2+10a^3+5a^4+a^5}$

743. Најголеми се средните два коефициента, и тоа: $\binom{7}{3}=\binom{7}{4}=35.$

744. Најголем е средниот коефициент $\binom{8}{4}=70.$

745. а) $2a^4+12a^2+2$ б) $64+160x^2+20x^4$

746. а) $10a^4x+20a^2x^3+2x^5$ б) $2a^6+30a^4b^2+30a^2b^4+2b^6$

747. а) 34 б) $24\sqrt{2}$

748. $(1+a)^3+\binom{3}{1}(1+a)^2\cdot a^2+\binom{3}{2}(1+a)\cdot a^4+a^6=\dots$

749. $(1-x)^4-\binom{4}{1}(1-x)^3x^2+\binom{4}{2}(1-x)^2x^4-\binom{4}{3}(1-x)x^6+x^8=\dots$

750. а) Најголем е $\binom{12}{6}=924.$ б) $\binom{11}{5}=\binom{11}{6}=462$

751. а) $-4-4i$ б) -4 в) $-8i$ г) $8+8i$

752. а) $-6-2i$ б) $4i$

753. а) $-7-24i$ б) $-38-41i$

754. а) $\dfrac{2}{1+i}=1-i$ б) $\dfrac{-4+4i}{2i}=2+2i$

755. а) $-7-4i\sqrt{2}$ б) $-23+10i\sqrt{2}$

§. 15. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Правилото за потполна индукција или доказот од n на $n+1$:

I Ако некое правило важи за природниот број 1 и ако од претпоставката дека правилото важи за природниот број n може да се докаже дека важи и за природниот број $n+1$, тогаш правилото важи за секој природен број.

II Ако некое правило важи за природниот број $n=k$ и ако од претпоставката дека правилото важи за природниот број $k+r$ може да се докаже дека важи и за $k+r+1$, тогаш правилото важи за секој природен број n.

*
* *

756. Врз основа на дефиницијата за аритметичката прогресија е:

$$a_1 = a_1 + (1-1)d,$$

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + (2-1)d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d = a_1 + (3-1)d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d = a_1 + (4-1)d \text{ итн.}$$

Ако формулата е точна за природниот број n, тогаш е $a_n = a + (n-1)d$.

Треба да се докаже дека формулата важи и за $n+1$, т.е.

$$a_{n+1} = a_1 + [(n+1)-1]d.$$

Според претпоставката е:

$$\text{(a)} \quad a_n = a_1 + (n-1)d.$$

а според дефиницијата за аритметичката прогресија е:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

или

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Но според релацијата (a) е

$$a_{n+1}=a_1+(n-1)d+d=a_1+nd$$

или

$$a_{n+1}=a_1+[(n+1)-1]d,$$

а тоа всушност и требаше да се докаже.

Од претпоставката дека формулата за општиот член на аритметичката прогресија важи за природниот број $n \geqslant 1$ докажавме дека таа важи и за $n+1$. Од тоа заклучуваме дека формулата ќе важи и за $(r+1)+1=n+2$ и натаму за $n+3$, $n+4, \ldots$ што значи, дека таа формула важи и за секој природен број n.

757. Збировите на почетните членови на аритметичките прогресии можеме да ги пишуваме во форма на:

$$S_1=a_1=\frac{1}{2}(a_1+a_1),$$

$$S_2=a_1+a_2=\frac{2}{2}(a_1+a_2),$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}\Big\{[a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)]+[a_3-2d)+$$

$$+(a_3-d)+a_3\Big\}=\frac{3}{2}(a_1+a_3).$$

На аналоген начин се докажува:

$$S_4=\frac{4}{2}(a_1+a_4), \qquad S_5=\frac{5}{2}(a_1+a_5) \text{ итн.}$$

Ако е формулата точна за природниот број n, т.е.

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n),$$

треба да се докаже дека важи и за $n+1$

$$S_{n+1}=\frac{n+1}{2}(a_1+a_{n+1}).$$

Секако е:

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=\frac{n}{2}(a_1+a_n)+a_{n+1}=$$

$$=\frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d]+a+nd=$$

$$=\frac{n}{2}(2a_1+nd)-\frac{nd}{2}+a_1+nd=$$

$$= \frac{n}{2}(2a_1 + nd) + \frac{1}{2}(2a_1 + nd) =$$

$$= \frac{n+1}{2}(2a_1 + nd) = \frac{n+1}{2}[a_1 + (a_1 + nd)] =$$

$$= \frac{n+d}{2}(a_1 + a_{n+1})$$

што всушност и требаше да се докаже.

Набљудуваната формула важи и за $n = 1, 2, 3, \ldots$

758. Врз основа на дефиницијата на геометриската прогресија е:

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1},$$
$$a_2 = a_1 q = a_1 q^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2 = a_1 q^{3-1},$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 = a_1 q^{4-1} \text{ итн.}$$

Од претпоставката дека истата формула важи уште за природниот број n треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$.

Според претпоставката е

(б) $a_n = a_1 q^{n-1}$,

а според дефиницијата за геометриската прогресија е

$a_{n+1} = a_n \cdot q$.

или, со оглед на релацијата (б) е:

$a_{n+1} = a_1 q^{n-1} \cdot q = a_1 q^n = a_1 q^{(n+1)-1}$,

што и требаше да се докаже.

Набљудуваната формула важи за $n = 1, 2, 3, \ldots$

759. Според претпоставката важи формулата $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ за природниот број n.

Треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$, т.е. $S_{n+1} = = a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

Секако е:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n =$$

$$= a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} =\right.$$

$$= a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

а тоа и требаше да се докаже.

Набљудуваната формула важи и за $n = 1, 2, 3, \ldots$

760. Од претпоставката дека важи:

(в) $C_n = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

треба да се докаже дека важи и

$$C_{n+1} = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n+1}.$$

Капиталот C_n нараснува за една година со $p^0/_0$ на вредноста

$$C_{n+1} = C_n + \frac{C_n \cdot p}{100} = C_n\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Според (в) е:

$$C_{n+1} = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$$

или

$$C_{n+1} = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n+1},$$

што и требаше да се докаже.

Разгледуваната формула важи и за $n = 1, 2, 3, \ldots$

761. а) Ако за природниот број n е точна формулата:

$$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$.

Секако е:

$$S_{n+1}^2 = S_n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)[2n(n+2)+3(n+2)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

што и требаше да се докаже.

Разгледуваната формула важи за $n = 1, 2, 3, \ldots$

г) Збирот на кубовите на по ред земените членови од природната бројна низа можат да се пишуваат во форма на:

$$S_1^3 = 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2.$$

$$S_2^3 = 1^3 + 2^3 + \left[\frac{2(2+1)}{2}\right]^2.$$

$$S_3{}^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = \left[\frac{3(3+1)}{2}\right]^2,$$

$$S_4{}^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = \left[\frac{4(4+1)}{2}\right]^2.$$

На сличен начин можеме да ги напишеме збировите:

$S_5{}^3$, $S_6{}^3, \ldots$ Ако е формулата точна уште и за природниот број n, т. е.

$$S_n{}^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$, т. е.

$$S_{n+1}^3 \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Навистина е:

$$S_{n+1}^3 = S_n{}^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 =$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2,$$

што и требаше да се докаже.

762. а) Од $\frac{2}{n^2-1} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}$ следува $2 = A(n+1) + B(n-1)$ од каде доаѓаме до системот $A + B = 0$, $A - B = 2$.

Тој систем има решение $A = 1$, $B = -1$, па е $\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} +$ $+ \frac{1}{n+1}$. Според тоа е $S_n = \left(\frac{1}{2-1} = \frac{1}{2+1}\right) + \left(\frac{1}{3-1} - \frac{1}{3+1}\right) +$ $+ \left(\frac{1}{4-1} - \frac{1}{4+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$

Тргнувајќи од претпоставката дека добиената формула важи за природниот број n треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$. Навистина е $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1}$, што и требаше да се докаже.

формулата е точна за $n = 2$, така што излегува дека е вистината за секој природен број $n \geqslant 2$. Прогресијата $S_2, S_3, S_4, \ldots$ е конвергентна и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}.$

б) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, па е $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}\right)+$
$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$. Натаму е

$$S_{n+1}=Sn+\frac{1}{(n+1)\,[(n+1)+1]}=1-\frac{1}{(n+1)+1}.$$

Формулата важи за $n=1$, така што важи за секој природен број.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

763. а) Може да се напише:

$$S_1=1\cdot 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3},$$

$$S_2=1\cdot 2+2\cdot 3=\frac{2(2+1)(2+2)}{3},$$

$$S_3=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4=\frac{3(3+1)(3+2)}{3}.$$

На сличен начин можеме да ги пишуваме збировите S_4, $S_5\ldots$ Ако е формулата точна уште за природниот број n, т. е.

$$S_n=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$, т. е.

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Навистина е:

$$S_{n+1}=S_n+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+$$
$$+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3},$$

што и требаше да се докаже.

Гледаме дека разгледуваната формула важи за $n=1, 2, 3,\ldots$

764. Ако за природниот број n е точна формулата:

$$S^3{}_{2n}=2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2,$$

(во кое лесно непосредно се уверуваме на пример: за $n=1$, 2, 3, 4), треба да се докаже дека е таа точна и за $n+1$, т.е.

$$S^3{}_{2(n+1)}=2(n+1)^2(n+2)^2.$$

Навистина е

$$S^3{}_{2(n+1)}=S^3{}_{2n}+[2(n+1)]^3=2n^2(n+1)^2+$$
$$+2^3(n+1)^3=2(n+1)^2[n^2+2^2(n+1)]=$$
$$=2(n+1)^2(n+2)^2,$$

што и требаше да се докаже.

765. Треба да се докаже дека формулата

г) $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$

$$+\binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,$$

која секако важи за природниот број $n=1$ и за која претпоставуваме дека важи и за природниот број n, важи и за $n+1$. За таа цел најпрвин треба да се докаже дека биномниот коефициент го покажува ова својство:

д) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k}$.

Навистина е:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)+1]}{(k-1)!} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!}\left(1+\frac{n-k+1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!} \cdot \frac{n+1}{k} =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}.$$

Да ги помножиме левата и десната страна од формулата (г) со $(a+b)$. Ќе добиеме:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 +$$

$$+\binom{n}{3} a^{n-2} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} ab^n + a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 +$$

$$+\binom{n}{2} a^{n-2} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^n + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + 1 + \binom{n}{1} a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^{n-1} b^2 +$$

$$+\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right] a^{n-2} b^3 + \ldots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] \cdot ab^n + \binom{n}{n} b^{n+1}.$$

Ако земеме (според дефиницијата) дека е $1=\binom{n}{0}$, и ако гò замениме коефициентот $\binom{n}{n}$ на задниот член со $\binom{n+1}{n+1}$ и за сите изрази во средните загради ја примениме релацијата (b), следува:

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+$$
$$+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1},$$

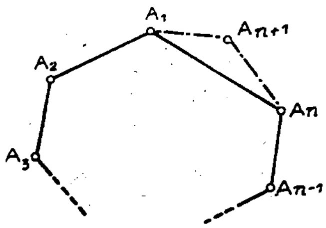
што и требаше да се докаже.

766. а) Лесно е да се увериме дека четириаголникот има две дијагонали кое се добива и од изразот $D_4\frac{4(4-3)}{2}$. Според тоа, формулата $\frac{n(n-3)}{2}$ е точна за $n=4$.

Од претпоставката дека истиот израз важи и за многуаголникот $A_1A_2A_3\ldots A_n$, т. е. дека уште за природниот број n е точна формулата $D_n=\frac{n(n-3)}{2}$,

треба да се докаже дека бројот на дијагоналите на многуаголникот кој има $n+1$ врв ќе биде $D_{n+1}=$

$$=\frac{(n+1)[(n+1)-3]}{2}=$$
$$=\frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$



Сл. 25

Да замислиме дека кај зададениот конвексен n-аголник сме ги задржале сите негови врвови $A_1, A_2A_3, \ldots, A$ и да одбереме надвор од многуаголникот некоја точка A_{n+1} покрај една од неговите страни на пр. A_1A_n (види ја сл. 25), така што спојувајќи ја точката A_{n+1} со соседните врвови A_1 и A_n, добиваме нов конвексен многуаголник $A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$ со n_{+1} врв. Со зголемувањето на бројот на врвовите на многуаголникот од n на $n+1$ се зголемува и бројот $\frac{n(n-3)}{2}$ на неговите дијагонали и тоа за оние дијагонали кои можат да се повлечат од новонастанатиот врв A_{n+1} кон сите други врвови — освен кон двата соседни врвови — а нив ги има $n-2$. Освен тоа, меѓу дијагоналите можеме да ја вброиме и страната A_1A_n, зашто и таа во новиот многуаголник станала дијагонала. Според тоа, вкупниот број на дијагоналите на многуаголникот кој има $n+1$ врв ќе биде:

$$\frac{n(n-3)}{2}+(n-2)+1=\frac{n(n-3)}{2}+n-1=$$
$$=\frac{n^2-3n+2n-2}{2}=\frac{n^2+n-2n-2}{2}=$$
$$=\frac{n(n+1)-2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2},$$

што и требаше да се докаже.

Очигледно е дека формулата $D_n=\frac{n(n-3)}{2}$ важи за $n=3$, 4, 5,... Вредноста на природниот број $n=1$, 2, не доаѓа предвид (зошто?). Што имаме за $n=3$?

767. Судот е точен за првите десет вредности на бројот n, а за $n=11$, 12 тој не е точен. Методот на потполна индукција не доаѓа предвид за докажување дека бројот од обликот n^2-n+11 ќе биде за секое n прост број. Уште повеќе, непосредно се гледа дека за $n=11$ тоа не може да биде прост број, зашто е: $11^2-11+11=11^2$, а тоа е сложен број.

768. а) Од $(1+h)^2=1+2h+h^2$ поради $h^2>0$ јасно е дека е $(1+h)^2>2h$.

Ако обете страни ги помножиме со $1+h>0$, ќе добиеме $(1+h)^3>(1+2h)(1+h)=1+3h+2h^2$, т. е. $(1+h)^3>1+3h$. Ако пак ги помножиме обете страни со $1+h>0$, ќе добиеме $(1+h)^4>1+4h$.

Според тоа Бернулиевото неравенство $(1+h)^m>1+mh$ е точно за $m=2$, 3, 4. Да претпоставиме дека неравенството е точно и за $m=5, 6, \ldots, n$. Треба да се докаже дека тоа ќе биде точно и за $n+1$. Значи, според претпоставката е $(1+h)^n>1+nh$. Ако ги помножиме со $1+h>0$, излегува

$$(1+h)^{n+1}>(1+nh)(1+h)=1+(n+1)h=nh^2,$$

т. е.

$$(1+h)^{n+1}>1+(n+1)h,$$

што значи дека Бернулиевото неравенство важи за сите природни броеви поголеми од 1.

б) Ако за природниот број n е точна релацијата $2^n>n$, треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$. Навистина $2\cdot 2^n>2n>$ $>n+1$ (за $n>1$), т. е. $2^{n+1}>n+1$, што и требаше да се докаже. Формулата важи за $n=0, 1, 2, \ldots$

в) Ако за природниот број n е точна релацијата $2^n>n^2$, треба да се докаже дека таа важи и за $n+1$. Секако е $2\cdot 2^n>2n^2=$ $=n^2+n^2$. Но $n^2>2n+1$ (за $n>2$), така што е и $2^{n+1}>n^2+$ $+2n+1$ или $2^{n+1}>(n+1)^2$, што и требаше да се докаже.

§ 16. ВЕРОЈАТНОСТ

I Веројатност

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\text{број на поволните случаи}}{\text{број на сите можни случаи}}$$

II Спротивна веројатност

$$v = 1 - \frac{p}{m} = 1 - v$$

III Тотална веројатност

$$v = \frac{p_1 + p_2 \ldots + p_r}{m} = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$$

IV Сложена веројатност

$$v = \frac{p_1}{m_1} \cdot \frac{p_2}{m_2} \cdot \ldots \frac{p_r}{m_r} = v_1 v_2 \ldots v_r$$

*

* *

769. Бројот на можните случаи е 6, а поволен е само еден случај така што е $v = \frac{1}{6}$.

770. а) Три поволни случаи (2, 4, 6), а 6 можни, така што е $v = \frac{1}{2}$,.

б) $\frac{1}{3}$

771. а) $\frac{4}{25}$ б) $\frac{9}{25}$ в) $\frac{12}{25}$ г) $\frac{0}{25} = 0$

772. Секој број на една коцка може да падне заедно со секој број на другата коцка, така што бројот на можните случаи е $m = 6^2 = 36$. Поволни случаи се: 1, 5; 2, 4; 3, 3; 4, 2; 5, 1. Според тоа и бројот на поволните случаи е $p = 5$, а веројатноста $v = \frac{5}{36}$.

773. а) $v=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ б) $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ в) $v=\frac{5}{36}$

774. а) $v=\frac{1}{8}$ б) $v=\frac{3}{8}$

775. Бројот на можните случаи е $6^3=216$.

а) поволни случаи се: 1, 1, 1; 2, 2, 2; 3, 3, 3, ..., 6, 6, 6, т.е.

$p=6 \quad v=\frac{1}{36}$ б) $\frac{27}{216}$

776. А) а) $\frac{3}{20}$ б) $\frac{12}{20}$ В) а) $1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$ б) $1-\frac{5}{20}$

777. Црвените топчиња да ги означиме со c_1, c_2, c_3, а белите со b_1, $b_2, \ldots b_5$.

Бројот на можните случаи е $\binom{8}{2}=28$.

а) Поволни случаи се: $c_1\, c_2$, $c_1\, c_3$, c_2, c_3, така што е $v=\frac{3}{28}$.

б) Поволни случаи се: $b_1\, b_2$, $b_1\, b_3, \ldots\, b_2\, b_3, \ldots\, b_4\, b_5$ и ги има 10, така што е $v=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$.

778. Бројот на можните случаи е $\binom{14}{2}=91$.

а) Бројот на поволните случаи е $8\cdot 6=48$, т. е. срекавањето на кое и да е црвено со кое и да е сино; $v=\frac{48}{91}$.

б) Бројот на поволните случаи е $\binom{6}{2}=15$ и $v=\frac{15}{91}$.

в) $v=\frac{28}{92}$.

779. $m=\binom{3}{2}+\binom{5}{2}+\binom{8}{2}=41$, а $p=\binom{3}{2}+\binom{6}{2}=13$,

$v=\frac{13}{41}$.

780. Веројатноста да извлечеме бело топче е $v_1 = \frac{2}{9}$, а жолто $v_2 = \frac{4}{9}$.

Веројатноста да извлечеме бело топче е $v = v_1 + v_2 = \frac{2}{3}$.

781. Бројот на сите можни страни е $m^2 = 6^2 = 36$. Поволни случаи за збирот 4 се: $1+3$, $2+2$ и $3+1$. За збирот 9 поволни случаи се: $3+6$; $4+5$; $5+4$ и $6+3$, а збирот 11 само два: $5+6$ и $6+5$.

Веројатностите се: $v_1 = \frac{3}{36}$, $v_2 = \frac{4}{36}$, $v_3 = \frac{2}{36}$, а бараната веројатност е $v = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

782. $m = 6^2 = 36$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$

$v_1 = \frac{2}{36}$, $v_2 = \frac{1}{36}$; $v = v_1 + v_2 = \frac{1}{12}$

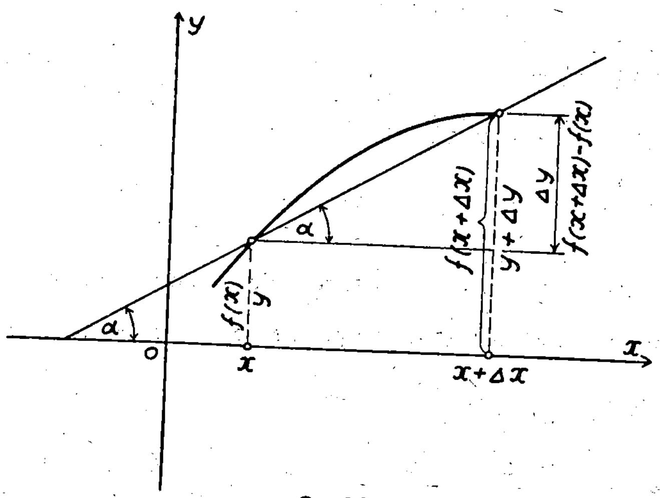
783. Веројатноста дека со една коцка ќе се фрли бројот 1 е $\frac{1}{6}$, а веројатноста дека со една коцка ќе се фрли бројот 1 двапати со ред е $v = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

784. а) $v = \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot = \frac{5}{144}$ б) $v = \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{22}$

785. а) $v = \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$ б) $v = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$

786. а) $v = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{64}$ б) $v = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$

§ 17. ФУНКЦИИ



Сл. 26

I Δx, прирастот на независно менливата
$\Delta x = f(x + \Delta x) - f(x)$, прирастот на функцијата

II Велиме дека функцијата $y = f(x)$ има гранична вредност G кога x се стреми (конвергира) кон x_0, ако разликата $|G - y|$ станува и останува произволно мала кога x доволно ќе се приближи до бројот x_0.

Пишуваме

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G.$$

III За функцијата $f(x)$ велиме дека е непрекината на местото $x = x_0$, ако е

а) дефинирана во околината на точката x_0,

б) ако постои гранична вредност на функцијата $f(x)$ кога $x \to x_0$, т.е. ако постои $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

в) ако таа гранична вредност е рамна на вредноста на функцијата во точката x_0 ако е $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* * *

787. Велиме дека величината y е функција на величаната x, ако на секоја вредност во определено множество од вредности на x ѝ припаѓа определена вредност на величината y.

788. а) Формулата за пресметување на обемот на кругот

б) површина на топка

в) обем на квадрат и ромб

г) обем на правоаголник и ромбоид

д) зафатнина на квадрат

ѓ) законот на патот кај слободното паѓање

е) Омовиот закон

Функциите под а), б), в), ѓ) зависат од една независно менлива, Под г) и е) се функции на две независно менливи, а под д) е функција на три независно менливи.

789. а) за $x=2$, $y=3\cdot 2+2=8$; за $x=a$ е $y=3a+2$

б) тоа се по ред вредностите: 15, 1, a^2-5a+1

в) со ред: -1, 0, $+1$, $(a+\Delta a)^3$

г) со ред: 0, 1, $(a-3)^2$, $(a+h-3)^2$

790. а) За $x=-1$ е $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ $f(x+\Delta x)=\dfrac{x+\Delta x}{x+\Delta x+3}$

б) $f(-3)=0$, $f(1)=-1$, $f(a)=\dfrac{a+3}{a^2-5a}$

в) $f(a)=\log a$, $f(a+h)=\log(a+h)$

г) $f(3)=a^3$, $f(h)=a^h$, $f(x+\Delta x)=a^{x+\Delta x}$

791. За $x=a$ е $y=f(a)$; за вредноста на независно менливата $x+\Delta x$ вредноста на функцијата е $f(x+\Delta x)$.

796. а), в), д), е), з) функцијата монотоно расте, а другите функции монотоно опаѓаат.

797. а) Во интервалот $(-\infty, 1)$ монотоно опаѓа, а надвор од овој интервал монотоно расте, б) за $x=0$ функцијата не е дефинирана, а инаку монотоно опаѓа в) монотоно расте во интервалите $\left((4k-1)\dfrac{\pi}{2},\ (4k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ за $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$; надвор од тие интервали монотоно опаѓа, д) монотоно опаѓа за $x<2$ а расте за $x>2$.

798. а) Цела рационална функција или полином

б) раздробена рационална функција

в) и г) се ирационални функции.

799. а) Идентички е $f(-x)=3(-x)^2+1=3x^2+1=f(x)$, така што функцијата е парна, б) $f(-x)=-2x=-f(x)$, така што функцијата е непарна,

в) парна г) парна д) парна ѓ) непарна е) не е ни парна ни непарна ж) парна з) парна.

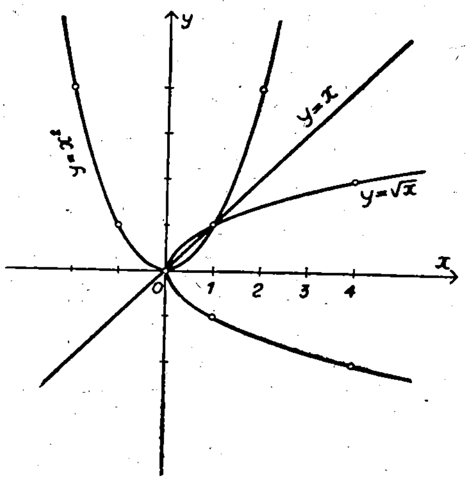
800. а) $y=2x+3$ б) $y=3x^2+7x-5$

в) $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ г) $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

801. а) $5x-7y+56=0$ б) $x^2+y^2-1=0$

в) $xy-x-2y-1=0$ г) $x^2-y^2+4=0$

802. $P=a^2$, $a=\sqrt{P}$, т. е. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ (сл. 27). Кривите се симетрични со оглед на правата $y=x$.



Сл. 27

803. а) На функцијата $y=x^3$ ѝ е инверзна функција $x=y^3$, т.е. $y=\sqrt[3]{x}$.

б) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ в) $y=x^2+2$

804. На функцијата $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ ѝ е инверзна функцијата $x=ay+b$, а тоа е исто така линеарна функција.

805. На функцијата $x^2+y^2=r^2$ ѝ е инверзна функцијата $y^2+x^2=r^2$, а тоа е истата функција.

806. Инверзни сами на себе се оние функции чии графикони се симетрични со оглед на правата $y=x$.

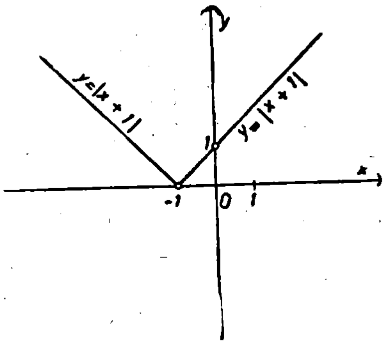
807. а) $x=2^y$ или $y=\log_2 x$

б) $y=\log_a x$ в) $y=\log x$

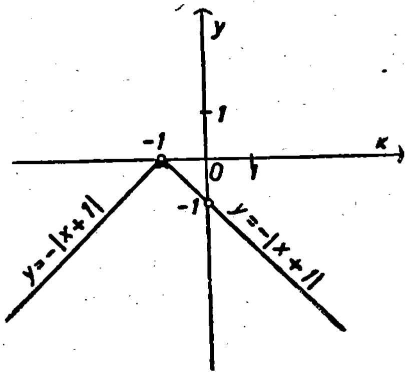
808. Дефиниционото подрачје на функцијата е збир од сите вредности на независно менливата за кои функцијата ги прима конечните и определените реални вредности. Ако кон дефеционото подрачје на функцијата припаѓаат сите вредности на независно менливата помеѓу два броја a и b $(a<b)$, тогаш велиме дека подрачјето на дефиницијата е интервал и ги пишуваме со (a, b).

809. а) $-\infty < x < +\infty$ б) $-\infty < x < +\infty$

в) $-\infty < x < +\infty$ г) Функцијата е дефинирано за секое x и идентична со $y=x+1$ за $x+1 \geqslant 0$, т. е. за $x \geqslant -1$, а со $y=-(x+1)$ за $x<-1$ (сл. 27 а) д) (сл. 27 б).

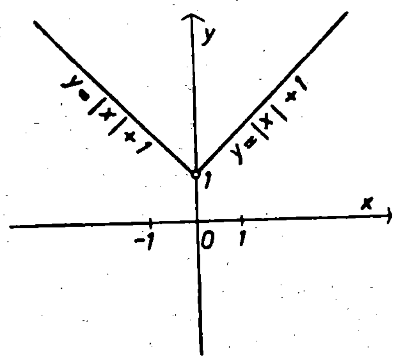


Сл. 27 а

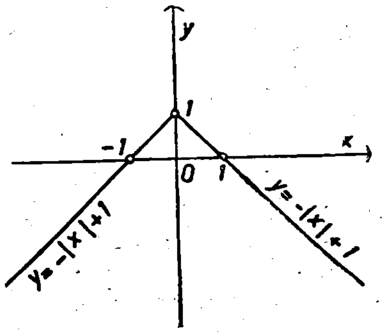


Сл. 27 б

ѓ) Функцијата е дефинирана за секое x и идентична со $y=x+1$ за $x \geqslant 0$, а со $y=-x+1$ за $x<0$ (сл. 27 в) е) (сл. 27 г).



Сл 27 в



Сл. 27 г

810. а) Функцијата е дефинирана за секое $x \neq 0$; $x = 0$ е точка на бесконечноста на функцијата,

б) секое $x \neq 3$

в) секое x

г) Функцијата е дефинирана за секое x освен за $x = \pm 1$. Меѓутоа, функцијата има гранични вредности на тие места и тоа: $\lim\limits_{x \to +1} f(x) = \frac{1}{2}$; кога x паѓајќи се стреми кон -1, функцијата се стреми кон $+\infty$; кога x растејќи се стреми кон -1, функцијата се стреми кон $-\infty$.

811. Функциите се дефинирани за

а) $x \geqslant -2$ б) $|x| \leqslant 1$ в) $|x| \geqslant a$

г) Дефинирана за секое $x > 0$, освен за $x = 1$. Кога x паѓајќи се стреми кон 1, тогаш функцијата се стреми кон $+\infty$, а кога x растејќи се стреми кон 1, тогаш функцијата се стреми кон $-\infty$.

д) дефинирана за секое $-1 \leqslant x \leqslant +3$.

812. а) Секое x

б) секое $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, каде е $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

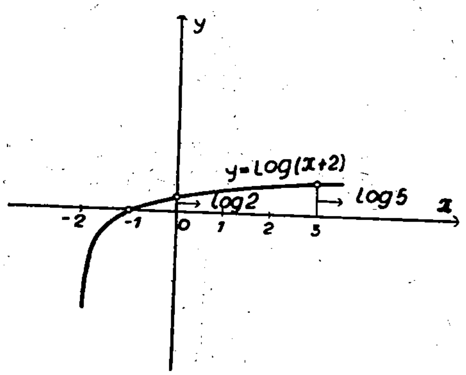
в) секое x

813. а) Функцијата е дефинирана за $x > 0$,

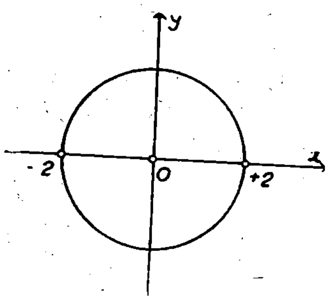
б) дефинирана за $x + 2 > 0$, т.е. $x > -2$, (сл. 28),

в) дефинирана за $x > 0$,

г) $0 < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.



Сл. 28



Сл. 29

814. а) Функцијата е дефинирана за $-x^2 + x + 6 > 0$, а тоа е за $-2 < x < 3$.

б) Функцијата е дефинирана за оние вредности на x кои истовремено ги задоволуваат релациите: $1 - x > 0, \neq 0$, $x + 2 \geqslant 0$. Од ова заклучуваме дека функцијата е дефинирана за $-2 \leqslant x < 0$ и $0 < x < 1$.

815. а) Ако равенката ја напишеме во форма на $x^2+y^2=4$, ќе препознаеме дека станува збор за круг со полупречник 2 чиј центар се наоѓа во излезната точка (сл. 29). Од графиконот гледаме дека функцијата е дефинирана за $-2 \leqslant x \leqslant +2$.

б) дефинирана за $|x| \geqslant 2$.

816. а) $-\infty < x < +\infty$ б) $x \leqslant -2$

в) секое $x \neq -1$ г) $|x| \leqslant a$

д) $|x| \geqslant a$.

817. Функцијата е еднозначна ако на секоја вредност на независно менливата од дефинираното подрачје и припаѓа само една вредност на функцијата. Функцијата е двозначна ако на секоја вредност на независно менливата и припаѓаат по две вредности на функцијата. Аналогно за многузначна функција.

818. а) Еднозначна,

б) двозначна за $|x| < r$, а еднозначна за $|x| = r$,

в) двозначна за $|x| < a$, а еднозначна за $|x| = a$

г) двозначна за $|x| > a$, а еднозначна за $|x| = a$

819. Менливата величина x се стреми кон a ако таа ја прима вредноста на која и да било прогресија која како гранична вредност го има a.

820. За функцијата $f(x)$ се вели дека се стреми кон граничната вредност G, кога $x \to a$, ако за секоја прогресија x_n (од подрачјето на независно менливата x) која се стреми кон a, се стреми и прогресијата со вредности на функцијата $f(x_n)$ кон конечната гранична вредност G. Пишуваме: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = G$ или $f(x) \to G$ кога $x \to a$.

821. а) $\lim\limits_{x \to 0} (x+3) = 0 + 3 = 3$ б) $\lim\limits_{x \to -2} y = \lim\limits_{x \to -2} x^2 = 4$

в) $\lim\limits_{x \to 2} y = 1$ г) $\lim\limits_{x \to 1} (-2x^3 + 1) = -1$

822. а) Функцијата не е дефинирана за $x=1$ и $x=0$. Но, ако независно менливата се стреми кон 1, тогаш и функцијата се стреми кон 2. На пример, ако x ја прима вредноста на прогресијата

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \ldots; \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

и, според тоа, се стреми кон 1, тогаш y ги прима вредностите

$$3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3}, \ldots, 2\frac{1}{9},\ 2\frac{1}{10}, \ldots, 2\frac{1}{99},\ 2\frac{1}{100}, \ldots, 2+$$

$+\frac{1}{n}, \ldots$ и се стреми кон 2.

Или, ако x ги прима вредностите на прогресијата

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{100}{99}, \frac{101}{100}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

и паѓајќи се стреми кон 1, тогаш y ги прима вредностите

$$1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{3}{4}, \ldots,\ 1\frac{99}{100},\ 1\frac{100}{101}, \ldots,\ 1+\frac{n}{n+1}$$

и се стреми кон 2.

Општо земено е $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = 2.$

Оваа гранична вредност ќе ја добиеме и со оваа постапка:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Испитај ја самиот граничната вредност на функцијата кога $x \to 0$ и тоа кога:

α) опаѓа β) расте

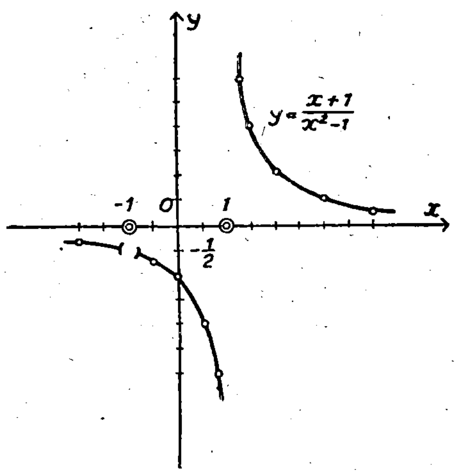
б) Функцијата $y = \dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$ не е дефинирана за $x = \pm 1$. Кога $x \to +1$ и расте на пр. над прогресијата:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

тогаш $y \to -\infty$ над прогресијата:

$-2,\ -3,\ -4, \ldots,\ -(n+1), \ldots$

Симболично пишуваме: $\lim\limits_{x\to +1-0} y = -\infty$ (сл. 30).



Сл. 30

Кога $x \to +1$ опаѓајќи над прогресијата:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}$$

тогаш $y \to +\infty$ над прогресијата

$1, 2, 3, \ldots, n.$

Симболично пишуваме: $\lim\limits_{x \to +1+0} y = +\infty.$

Кога x се стреми кон -1 опаѓајќи (пишуваме: $x \to -1+0$) на пример над прогресијата

$$-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots, -\frac{n}{n+1} \ldots,$$

тогаш y се стреми кон $-\frac{1}{2}$ над прогресијата:

$$-\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, \ldots, -\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}, \ldots$$

Кога x се стреми кон -1 растејќи ($x \to -1-0$) на пр. над прогресијата:

$$-\frac{2}{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \ldots, -\frac{n+1}{n}, \ldots$$

тогаш $y \to -\frac{1}{2}$ над прогресијата:

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, \ldots, -\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$$

Симболично во првиот случјај пишуваме:

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2},$$

а во вториот

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$$ (види ја сликата!)

823. а) $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ за $x \to 0$,

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ не постои,

зашто кога $x \to \infty$, тогаш $\sin x$ не се стреми кон определена вредност, туку прима разни гранични вредности помеѓу — -1 и $+1$.

в) $\frac{1}{x} \to 0$ кога $x \to \infty$ г) $\frac{1}{3}$

824. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{3x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2-10} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{10}{x^2}} = 0$ в) 0; г) $\frac{1}{3}$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-3} = 0$, зашто при константен броител именителот се стреми кон бесконечност

ѓ) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+2}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-(x+2)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = 0$ е) 0 ж) 0.

825. а) Кога $x \to \frac{\pi}{2}$ над вредности кои се помали од $\frac{\pi}{2}$, тогаш $\operatorname{tg} x \to +\infty$; кога $x \to \frac{\pi}{2}$ над вредности кои се поголеми од $\frac{\pi}{2}$, тогаш $\operatorname{tg} x \to -\infty$.

826. Кога $x \to 2$ растејќи, тогаш $y \to -\infty$, а за $x \to 2$ опаѓајќи $y \to +\infty$ (Нацртај го графиконот на таа функција околу точката $x = 2$).

827. Ако е $0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогаш е (сл. 31) површината $\Delta AOB <$ површината на исечокот $AOB <$ површината ΔAOD, т. е.

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{x \cdot 1}{2} < \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}.$$

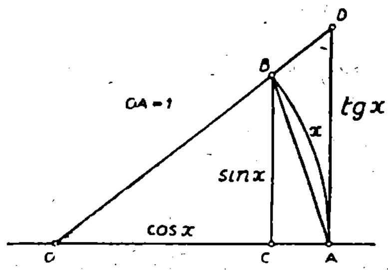
Одовде е

$$1 < \frac{x}{\cos x} < \frac{1}{\cos x}$$

или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Ако $x \to 0$, тогаш $\cos x \to 1$,

па е: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Сл. 31

828. Ако на независната варијабла x и го дадеме прирастот Δx, тогаш прирастот на функцијата е

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x+\Delta x)$$

за $x=1$ и $\Delta x = 2$ е $\Delta y = 8$.

829. а) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - (x^2+5x) = \Delta x(2x+5+\Delta x)$

б) $\Delta y = \Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$

в) $\Delta y = \dfrac{3}{x+\Delta x} - \dfrac{3}{x} = -\dfrac{3\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, $x \neq 0$, $x+\Delta x \neq 0$

г) $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$

д) $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

ѓ) $\Delta y = 2^{x+\Delta x} + 2^x = 2^x(2^{\Delta x} - 1)$

е) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

830. Функцијата $y = 4x+2$ е непрекината на местото $x=3$, зашто за $x=3$ вредноста на функцијата е $4\cdot 3+2 = 14$, а $\lim\limits_{x\to 3} y = \lim\limits_{x\to 3}(4x+2) = 14$, т. е. вредноста на функцијата е рамна на граничната вредност на функцијата на местото на кое ја испитуваме функцијата. — Испитувањето можеме да го извршиме така што да го побараме прирастот на функцијата на местото $x=3$. Тогаш е $\Delta y = 4\Delta x$. На тоа место функцијата е непрекината, зашто е $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(4\Delta x) = 4\cdot 0 = 0$.

831. а) $\Delta y = \Delta x(2x+\Delta x)$; за секое x е $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0\cdot(2x+0) = 0$ така што е за секое x непрекината.

в) $\Delta y = \Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$; функцијата е непрекината за секое x, зашто е $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

832. а) $x=2$ б) $x=-1$ в) $x=1$, $x=-2$ г) $x=\pm 3$

833. а) $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

$$|\Delta y| = 2\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| <$$

$$< 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

Од добиената релација гледаме дека $\Delta y \to 0$ кога $\Delta x \to$ така што е $y = \sin x$ непрекината функција и тоа за секое x.

834. а) $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$

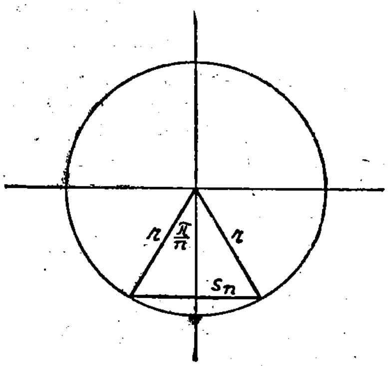
б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{\sin x}{x}\right)=0-1=-1$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}$.

Ако воведеме нова менлива за $ax=u$, тогаш $u\to 0$ кога и $x\to 0$, така што е

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin au}{u}=a\cdot 1=a,$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\frac{3}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$

835. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=0\cdot 1=0$



Сл. 32

836. Да земеме дека правилниот многуаголник има n страни. Тогаш е (сл. 32) страната $s_n=2r\sin\frac{\pi}{n}$.

Обемот на многуаголникот е $O_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}O_n=$

$$=\lim_{n\to\infty}2nr\sin\frac{\pi}{n}=2r\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot$$

Нека е $\frac{1}{n}=x$. Кога $n\to\infty$, тогаш $x\to 0$, така што е

$$\lim_{n\to\infty} O_n=2r\pi\cdot\lim_{n\to 0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}=2r\pi\cdot 1=2r\pi.$$

Кога бројот на страните на правилно впишаниот многуаголник се стреме кон бесконечност, тогаш обемот на многуаголникот се стреми кон обемот на кругот. Според тоа најдената гранична вредност е обем на круг.

837. Површината на правилниот многуаголник е $P_n=n\cdot\frac{r^2\sin\frac{2\pi}{n}}{2}$.

Да земеме дека $\frac{2\pi}{n}=x$, тогаш за $n\to\infty$, $x\to 0$, така што е

$$\lim_{n\to\infty} P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r^2\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2}{n}}=r^2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{x}{\pi}}=r^2\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=r^2\pi.$$

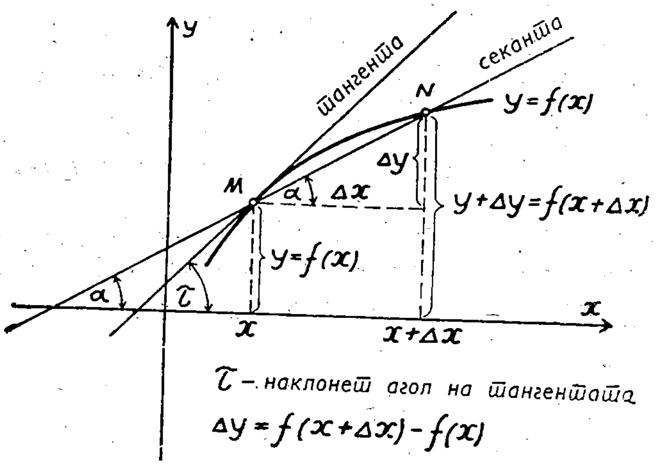
Најдената гранична вредност е површина на круг со полупречник r.

838. а) Функцијата е дефинирана и непрекината во интервалите во кои е $x^2-7x+12\geqslant 0$, а тоа е за $=\infty<x\leqslant 3$ и $4\leqslant x<+\infty$.

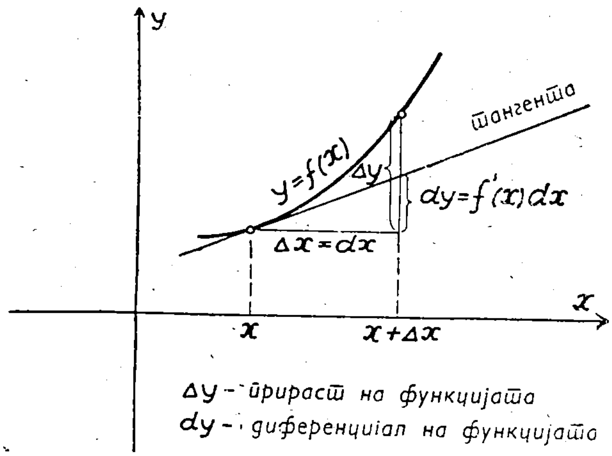
б) $|x|\geqslant 4$ в) $-2<x<3$.

§ 18. ИЗВОД И ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈА

I $\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, среден пораст или пократко пораст на функцијата



Сл. 33



Сл. 34

кога независно менливата се менува од x до $x+\Delta x$ (сл. 33).

II $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

извод или деривација на функцијата $y=f(x)$ во точката x.

Пишуваме:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

III Коефициент на насоката на тангентата на кривата $y=f(x)$ во точката на апсисата x е $\operatorname{tg}\tau=f'(x)$ (сл. 33).

IV Функцијата растејќи поминува низ точката x, ако е $f'(x)>0$, а опаѓајќи ако е $f'(x)<0$.

V Функцијата $y=f(x)$ има максимум во точката x_0, ако е $f'(x_0)=0$, $f'(x_0)<0$, а минимум за $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$.

* *
*

839. а) Средниот пораст е $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\dfrac{6-2}{2}=2.$

б) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3$ в) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\cos(a+h)=\cos a}{h}=-\dfrac{2\sin\left(a+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h}$

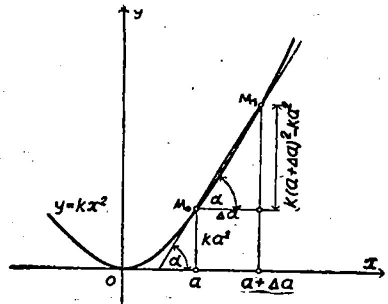
г) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\log\left(1+\dfrac{\Delta a}{a}\right)^{\frac{1}{\Delta a}}$

840. Порастот $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$. На местото $x_1=1$ порастот е 4, а на местото $x_2=10$ е 22. Функцијата $y=x^2$ побрзо расте во околината на точката $x_2=10$ отколку околу точката $x_1=1$.

841. а) Порастот $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ претставува тангенс на аголот што го затвора со позитивната насока на оската x секантата M_0M_1, каде е $M_0\,[a,f(a)]$, а $M_1\,[a+h,f(a+h)]$.

б) Порастот на функцијата $y=kx$ е $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=k$ и ја има вредноста на коефициентот на насоката на правата $y=kx$,

в) $y=kx^2$ има пораст $\dfrac{\Delta y}{\Delta a}=2ka+k\Delta a$ и претставува вредност на тангенсот на аголот што го затвора секантата M_0M_1 (види ја сл. 35) со позитивната насока на оската x; $\operatorname{tg}\alpha=2ka+k\Delta a$.



Сл. 35

842. Порастот е $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{x_1^2-x_0^2}{x_1-x_0}=x_1+x_0=2+\dfrac{1}{n}$.

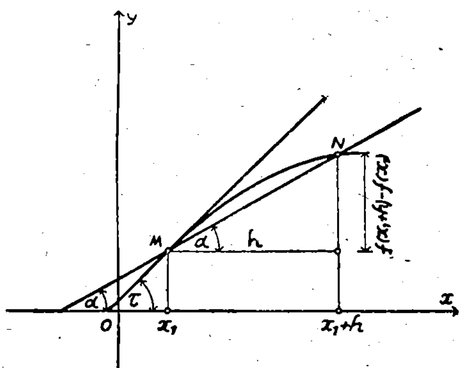
Кога $n \to \infty$, тогаш порастот се стреми кон бројот 2.

843. Порастот на функцијата е нула ако прирастот на функцијата е $\Delta y=0$. Тогаш секантата е паралелна со оската x.

844. Според дефиницијата е $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ (сл. 36) извод или деривација на функцијата $f(x)$ на местото $x=x_1$.

а) Изводот на функцијата $2x-1$ ќе биде:

$$\lim_{h\to 0}\frac{[2(x_1+h)-1]-(2x_1-1)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{x\to 0}2=2,$$



Сл. 36

б) $f'(x_1) = 2x_1$,
в) $f'(x_1) = 4x_1 - 3$, $f'(1) = 1$,
г) $f'(x_1) = 3x_1^2, f'(a) = 3a^2$.

845. а) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; $y' = 1$. б) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x, y' = 2x$

в) $y' = 3x^2$ г) $y' = 0$

846. а) $y' = a$ б) $y' = 2ax$ в) $y' = 3ax^2$

847. а) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$; $y' = u' + v'$ б) $y' = u' - v'$

в) $y' = u'v + uv'$ г) $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

848. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$; $y' = f'(u) \cdot u'(x)$

849. а) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$; $y' = \cos x$

б) $y' = -\sin$ в) $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

г) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$

850. а) $y' = 6x - 5$ б) $y' = 4x^3 - 6x^2 + 5$

851. а) $y = 2x^{-1}$: $y' = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$ б) $y' = -\frac{2}{x^3}$ в) $y' = -\frac{6}{x^5}$

852. а) $y' = \frac{7}{(x+3)^2}$ б) $y' = \frac{-x^2 - 6x + 15}{(x^2 - 5x)^2}$

853. а) $y' = 1 \cdot (3 - x^2) + (2 + x) \cdot (-2x) = -3x^2 - 4x + 3$
б) $y' = 3x^2 + 4x - 3$

854. а) $y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ б) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

г) $y' = -\frac{1}{2\sqrt[4]{x^5}}$

855. а) $y=\sqrt{u},\ u=x^2+3;\ y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

б) $y'=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$ в) $y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

856. а) $y'=\sqrt{1+x^2}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ б) $y'=\frac{a^2x-3x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$

857. а) $y'=\cos x-3\sin x$ б) $y'=\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{2\sin^2 x}$

858. а) $y'=2\cos 2x$ б) $y'=\frac{3}{\cos^2 3x}$

859. а) $y'=3\sin^2 x\cos x$ б) $y'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

860. а) $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ б) $y'=\frac{\sin x\cos^2 x-\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}$

861. а) $y'=e^x$ б) $y'=e^x\sin x+e^x\cos x$ в) $y'=2e^{2x}$

862. а) $y'=\frac{1}{x}$ б) $y'=\operatorname{tg} x$ в) $y'=\frac{2}{x}$

863. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

864. а) $dy=2x\,dx$ б) $dy=3ax^2dx$

в) $dy=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$ г) $dy=(2ax+b)\,dx$

д) $dy=\operatorname{coc} x\,dx$ ѓ) $dy=-3\sin 3x\,dx$

865. а) $y'=3x^2;\ y''=6x;\ y'''=6$

б) $y'=5x^4;\ y''=20x^3;\ y'''=60x^2$ в) $y'''=60bx^2$

г) $y'=\cos x,\ y''=-\sin x,\ y'''=-\cos x$

866. Изводот на непрекинатата функција $y=f(x)$ за определена вредност на варијаблата x е рамен на коефициентот на насоката на тангентата во соодветна точка на кривата, која е слика на функцијата y (сл. 15).

867. а) $y'=2x$; во $x=2$ е $y'=4$

б) -3 в) 1 г) -2

868. $y' = 2x - 2$. За $x = 2$ е $y' = 2$, а вредноста на функцијата $y = 1$. Равенката на бараната тангента е $y - 1 = 2(x - 2)$ или $y = 2x - 3$.

869. а) $y - 8 = 12(x - 2)$ б) $y - 4 = 8(x - 2)$ и $y = 0$

в) $x + 4y + 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$ г) $y - 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 4)$

870. а) Законот на рамномерното движење е даден со равенката $s = s_0 + ct$, каде е s_0 патот изминат во моментот $x = 0$, а c е некаја константа.

Брзината е

$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[s_0 + c(t + \Delta t)] - (s_0 + ct)}{\Delta t} = c$$

б) $s = \frac{g}{2} t^2$, $v = s' = gt$ в) $v = c - gt$

871. $y' = 2x - 2$. За $x_1 = -1$ е $y' = -4 < 0$, така што во околината на точката x_1 функцијата паѓа. За $x_2 = 3$ е $y' = 4 > 0$, така што во околината на точката x_2 функцијата расте.

872. $y' = -2y + 2$.

а) Функцијата расте на $y' > 0$, т.е. $-2x + 2 > 0$, а тоа е за $x < 1$.

б) Функцијата паѓа за $y' < 0$, а тоа е за $x > 1$.

873. а) $y' = 4x + 4$. На местото на екстремите е $y' = 0$, а тоа е за $x = -1$. За таа вредност на x е $y'' = 4 > 0$. Функцијата има $x = -1$ минимум и тој е -2. б) $y_{max} = 5$ за $x = 2$.

в) $y' = 6x^2 + 6x - 12$. Од $y' = 0$ следува $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; $y'' = 12x + 6$, $y''(1) = 18 > 0$, а $y''(-2) = -18 < 0$. За $x = 1$ функцијата има минимум $m = -6$, а за $x = -2$ има максимум $M = 21$.

г) $y_{min} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ за $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $y_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ за $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

874. а) $y' = 2x - 2$; $y' > 0$ за $x > 1$, така што функцијата расте; $y' < 0$ за $x < 1$, така што функцијата опаѓа; $y' = 0$ за $x = 1$, а бидејќи е $y''(1) = 2$, тоа на местото $x = 1$ функцијата има минимум и тоа $y_{min} = y(1) = -4$. Нула функциите се решенија на равенката $x^2 - 2x - 3 = 0$, а тоа се $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$. Текот на функцијата (сл. 37):

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		негативна			0	позитивна			
y	$+\infty$	паѓа	0	паѓа	$y_{min} = -4$	расте	0	расте	$+\infty$

875. а) $y' = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 3$, $y'' = 3x + \frac{3}{2}$,

функцијата расте

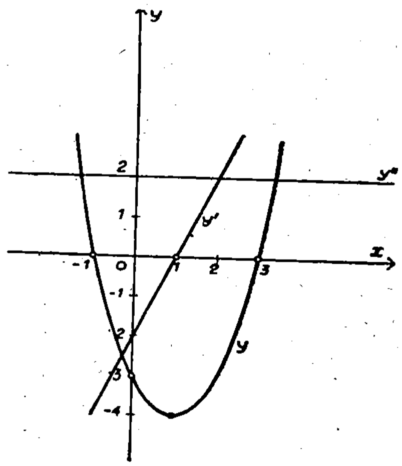
$$y' > 0 \begin{cases} -\infty < x < -2 \\ 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

функцијата опаѓа:

$$y' < 0, \quad -2 < x < 1,$$

функцијата може да има екстрем:

$$y' = 0, \text{ а тоа е за } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -2.$$

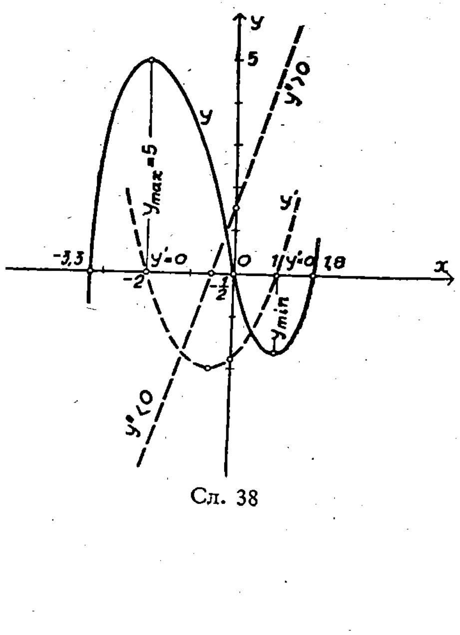


Сл. 37

$y'' = (1) > 0$; на местото $x = 1$ функцијата има минимум и тоа

$$y_{min} = y(1) = -\frac{7}{4},$$

$y''(-2) < 0$; на местото $x = -2$ функцијата има максимум и тоа $y_{max} = y(-2) = 5$.



Сл. 38

Нулточките на функциите се решенија на равенката:

$$\frac{x^3}{2}+\frac{3}{4}x^2-3x=0, \text{ или } 2x^3+3x^2-12x=0$$

Значи е: $x(2x^2+3x-12)=0$ откаде наоѓаме $x_1=0$

$$x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{105}}{4}\approx\frac{-3\pm 10{,}2}{4}, \text{ т. е. } x_2\approx 1{,}8,\ x_2\approx -3{,}3.$$

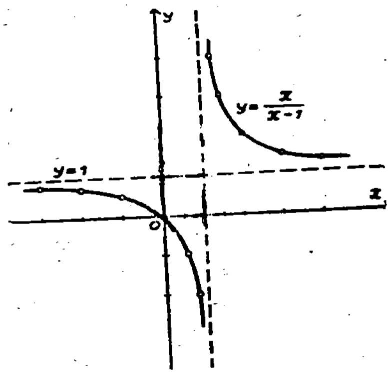
Ако со ↗ го означиме растењето, а со ↘ паѓањето, ќе го имаме овој тек на функцијата (сл. 38):

x	$-\infty$ ↗ $-3{,}3$ ↗ -2 ↗ $-\frac{1}{2}$ ↗ 0 ↗ 1 ↗ $1{,}8$ ↗ $+\infty$
y'	$+$ | $+$ 0 $-$ | $-$ | $-$ 0 $+$ | $+$
y''	$-$ | $-$ | $-$ 0 $+$ | $+$ | $+$ | $+$
y	$-\infty$ ↗ 0 ↗ 5 ↘ | ↘ 0 ↘ $-\frac{7}{4}$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

y_{max} $\qquad$ y_{min}

876. а) $y=\frac{x}{x-1}$, $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$, $y''=\frac{2}{(x-1)^3}$

Изводот y' не е нула за ниедно x, така што функцијата не може да има екстреми. За какво $x\neq 1$ $y'<0$, т. е. функцијата y постојано паѓа, кога x расте; $y=0$ за $x=0$, така што е $x=0$ нулточка на функцијата (сл. 39):



Сл. 39

$y>0$ за $x<0$ и за $x>1$, а $y<0$ за $0<x<1$; $\lim\frac{x}{x-1}=+\infty$ кога x се стреми кон 1 оддесно, а $\lim\frac{x}{x-1}=-\infty$, кога x

се стреми кон 1 одлево. Кривата има асимптота $x=1$. Натаму е $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1$, што значи дека кривата има и асимптота $y=1$.

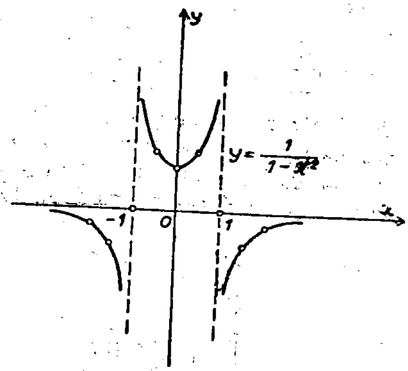
877. a) $y=\frac{1}{1-x^2}$. $y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$. $y''=\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$.

$y'=0$ за $x=0$ и, бидејќи е $y''(0)>0$, функцијата има минимум и тоа $y_{min}=1$; $y'>0$ за $x>0$, така што за таа вредност на x функцијата расте; $y'<0$ за $x<0$, т. е. функцијата опаѓа.

$y>0$ за $-1<x<+1$

$y<0$ за $\begin{cases}-\infty<x<-1\\ +\ 1<x<+\infty\end{cases}$

$\lim y=-\infty$ кога x се стреми кон $+1$ оддесно, а $\lim y=+\infty$ кога $x\to+1$ одлево; $\lim y=+\infty$ кога $x\to-1$ оддесно, а $\lim y=-\infty$ кога $x\to-1$ одлево. Според тоа, кривата има асимптоти $x=\pm1$. Понатаму е $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$, т. е. кривита има и асимптота $y=0$ (сл. 40)



Сл. 40

878. Ако првиот дел е x, вториот е $12-x$. Производот е $y=x(12-x)=-x^2+12x$. Од $y'=-2x+12=0$ е $x=6$ а $y''=-2<0$. Производот y е максимален ако му се деловите еднакви и ако изнесуваат по 6. Тогаш производот е 36.

879. Ако е првиот фактор x, вториот е $\frac{36}{x}$, така што нивниот збир е $y=x+\frac{36}{x}$. Таа функција има минимум за $x=6$ и тој е 12.

880. Бараниот број е x. Зборот $y=x+\frac{1}{x}$ има минимум за $x=1$.

881. Ако страните на правоаголникот се x и z, тогаш е $2x+2z=24$ или $z=12-x$. Површината на правоаголникот е $y=xz=x(12-x)$. Таа функција има максимум за $x=6$. Тоа значи дека правоаголникот со зададениот обем треба да премине во квадрат па површината да му стане максимална.

882. Ако е едната катета x, другата е $k-x$, а хипотенузата е $y=\sqrt{x^2+(k-x)^2}$. Минимумот е за $x=\frac{k}{2}$ и изнесува $\frac{k\sqrt{2}}{2}$.

883. Зафатнината на кутијата е $y=x(a-2x)^2=4x^3-4ax^2+a^2x$. Првиот извод е $y'=12x^2-8ax+a^2=0$ за $x_1=\frac{a}{2}$, $x_2=\frac{a}{6}$.

Максимална зафатнина кутијата ќе има за $x=\frac{a}{6}$, зашто е $y''\left(\frac{a}{6}\right)<0$. Таа кутија има зафатнина $\frac{2a^3}{27}$.

884. Ако полупречникот на базата на валјакот е x, а висината z, тогаш неговата зафатнина е $y=x^2\pi z$. Величините x и z се сврзани со релацијата $2x^2\pi+2x\pi z=18\pi$, од каде е $z=\frac{9-x^2}{x}$. Според тоа зафатнината е $y=-x^3\pi+9x\pi$. Максимумот е за $x=\sqrt{3}$. Тогаш е $z=2\sqrt{3}=2x$. Валјакот е рамностран.

885. Зафатнината на валјакот е $2\pi xy^2$. Од равенката на елипсата е $y^2=\frac{3}{4}(4-x^2)$. Зафатнината е $V=\frac{3\pi}{2}x(4-x^2)$. Го бараме екстремот од $f(x)=x(4-x^2)$. Тој е за $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Максималната зафатнина е $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

886. Ако бараната права е $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, тогаш е $\frac{8}{m}+\frac{6}{n}=1$, а површината на триаголникот е $\frac{mn}{2}=\frac{3m^2}{m-8}$. Минимумот е за $m=16$, $n=12$.

887. Површината на триаголникот е $P=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$. Ако земеме дека е $\alpha=x$, тогаш е $\beta=180°-(x+\gamma)$, а $\sin\beta=\sin[180°-(x+\gamma)]=$ $=\sin(x+y)$. Според тоа површината на триаголникот како функција на аголот x е дадена со изразот $P=\frac{c^2\sin x\sin(x+\gamma)}{2\sin\gamma}$. Оваа функција прима екстрем истовремено кога и $f(x)=\sin x\sin(x+\gamma)$.

Изводот на таа функција е

$$f'(x) = \sin x \cos (x+\gamma) + \cos x \sin (x+\gamma) = 0$$

за

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin (x+\gamma)}{\cos (x+\gamma)}$$

или

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} (x+\gamma).$$

Одовде е

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} [180° - (x+\gamma)]$$

и

$$x = 180° - (x+\gamma).$$

Во случај на максималната површина аглите се $\alpha = x = 90° - \frac{\gamma}{2}$, т. е. триаголникот е рамностран.

§ 19. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, каде е C поволна константа ако е $F'(x) = f(x)$.

* * *

888. а) $x + C$ б) $\frac{x^2}{2} + C$ в) $\frac{x^3}{3} + C$ г) $\frac{x^6}{6} + C$

889. а) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$ б) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + C$

890. а) $\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - x + C$ б) $2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{5x^4}{28} + C$

891. а) $\int (4x - 4x^2 + x^3)\,dx = 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + C$ б) $\frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + C$

892. а) $\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$ б) $-\frac{1}{2x^2} + C$

в) $2\int \frac{dx}{x^4} - 3\int \frac{dx}{x^3} = 2\int x^{-4}\,dx - 3\int x^{-3}\,dx = -\frac{2}{3x^3} + \frac{3}{2x^2} + C$

г) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{5}{4x^4} + C$

893. а) $\int \frac{x^2 + 6x + 9}{x^5}\,dx = \int \frac{dx}{x^3} + 6\int \frac{dx}{x^4} + 9\int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{2x^2} -$
$-\frac{2}{x^3} - \frac{9}{4x^4} + C$

б) $-\frac{9}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{3x^3} + C$ в) $-\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{6x^6} - \frac{1}{21x^7} + C$

894. а) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

б) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$ в) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$ г) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{x^{12}} + C$

895. а) $\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\sqrt{x}+C$ б) $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$

в) $3\sqrt[3]{x}+C$ г) $-\dfrac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$

896. а) $\int\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5}-\dfrac{6}{7}\sqrt{x^7}+\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$

б) $4\sqrt{x}-\dfrac{9}{10}\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}+C$

897. а) $\int\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{6}}\right)dx=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{6}{5}\sqrt[5]{x^5}+C$

б) $\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5}-\dfrac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+C$ в) $4x-\dfrac{8}{3}\sqrt{x^3}+\dfrac{1}{2}x^2+C$

898. а) $-2\cos x+C$ б) $3\sin x+C$ в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$ г) $-3\operatorname{ctg}\alpha+C.$

899. а) $2\sin x+\dfrac{5}{7}\cos x+C$ б) $3\operatorname{tg}x+\dfrac{2}{5}\operatorname{ctg}x+C$

900. а) Вршиме супституција: $x+3=u$, $dx=du$, така што е $\int\sqrt{x+3dx}=$
$=\int\sqrt{u}\,du=\dfrac{2}{3}\sqrt{u^3}+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+C$ б) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x-4)^4}+C$

в) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3}+C$ г) $-\dfrac{1}{6}\sqrt{(3-4x)^3}+C$

901. а) $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+C$ б) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x+3)^8}+C$ в) $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x-a)^5}+C$

902. а) $2\sqrt{x+5}+C$ б) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x-4)^2}+C$

в) $-\dfrac{1}{\sqrt{5+2x}}+C$ г) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2-x}}+C$

903. а) За $2x=u$ е $dx=\dfrac{1}{2}du$, така што е $\int\sin 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\sin u\,du=$
$-\dfrac{1}{2}\operatorname{soc}u+C=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. Може да се работи и на овој начин:

$\int\sin 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\sin 2xd(2x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

б) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$ в) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x+C$ г) $-\frac{1}{8}\operatorname{ctg} 8x+C$

904. а) Бидејќи е $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, имаме:

$$\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

б) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ в) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$

905. а) $-\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}x+\frac{7}{5}\sin\frac{5}{7}x+C$ б) $-\frac{4}{3}\operatorname{ctg}\frac{3}{4}x+C$

906. а) $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$ б) $-\frac{1}{4}\sin(2-4x)+C$

в) $\operatorname{ctg}(1-x)+C$

908. а) За $\sin x=u$ е $\cos x dx=du$, така што интегралот преминува во

$\int u du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\sin^2 x}{2}+C$ б) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

в) $-\frac{\cos^5 x}{5}+C$

§ 20. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ И НЕГОВИТЕ ПРИМЕНИ

I $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, каде е $F(x)$ примитивна функција на функцијата $f(x)$

II $\int_a^b f(x)\,dx$ површина ограничена со линиите $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$, ако е $f(x) \geqslant 0\,(a \leqslant x \leqslant b)$.

III $\pi \int_a^b y^2 dx$ зафатнина на тело настанато со ротација околу оската X на кое површината му е ограничена со линиите $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.

IV $\int_{s_0}^{s} p\,ds$ е дејство што го врши силата p на патот од s_0 до s

V $v = \int_{t_0}^{t} a\,dt + v_0$, каде е: a забрзувањето, v брзината во моментот t, а v_0 брзината во моментот t_0.

VI $s = \int_{t_0}^{t} v\,dt + s_0$, каде е s_0 патот изминат до моментот t_0, а s е патот изминат до моментот t.

* * *

908. а) $\int_2^5 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^5 = \frac{5^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{21}{2}$ б) 1 в) $\frac{1000}{3}$ г) $\frac{65}{64}$

909. а) $2\frac{1}{3}$ б) $\frac{3}{4}$

910. а) $\frac{1}{2}$ б) 4 в) $\frac{14}{3}$ г) 2

911. а) 1 б) 1

912. а) 1 б) $\frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)$

913. $\int\limits_1^5 (x+1)\,dx = 16$

914. а) Кривата $y = -x^2 + 2x$ ја сече оската X во точките $x_1 = 0$ $x_2 = 2$, така што бараната површина е $P = \int\limits_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx - \frac{4}{3}$.

б) $\int\limits_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)\,dx = 10\frac{2}{3}$

в) $P = -\frac{1}{6}$; негативен предзнак, зашто бараната површина е под оската X.

г) $\int\limits_{-1}^{+1} (x^2 - 1)\,dx = 2\int\limits_0^1 (x^2 - 1)\,dx = -\frac{4}{3}$

915. а) Линиите се сечат во точките чии апсциси се $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, така што е

$P = \int\limits_{-1}^2 (x+2)\,dx - \int\limits_{-1}^2 x^2\,dx = 4\frac{1}{2}$ б) $4\frac{1}{2}$

916. а) $y = x^2 + 5$ и $y + 2x^2 + 1$ се сечат во точките со апсциси $x = -2$, $x_2 = +2$.

Бараната површина е $\int\limits_{-2}^2 (x^2 + 5)dx - \int\limits_{-2}^2 (2x^2 + 1)\,dx = 10\frac{2}{3}$,

б) $\int\limits_1^5 (x^2 - 6x + 14)\,dx - \int\limits_1^5 (2x^2 - 12x + 19)\,dx = 10\frac{2}{3}$

917. а) Кривите се сечат во точките чии апсциси се $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Бараната површина е $\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx + \int\limits_0^1 x_2 dx = \frac{1}{3}$.

б) $\int\limits_0^{16} 2\sqrt{x}dx - \int\limits_0^{16} \frac{x^2}{32}\,dx = \frac{128}{3}$

918. Линиите се сечат во точките (8,8) и (2,4). Бараната површина изнесува $\frac{4}{3}$.

919. $V=\pi\int_0 4x\,dx=2\pi$

920. а) $V=\pi\int_1^5 (x+1)^2\,dx=\frac{208\pi}{3}$

б) Кривата ја сече оската X во точките -2 и 0, така што е

$$V=\pi\int_{-2}^{0}(-x^2-2x)^2\,dx=\frac{16}{15}\pi.$$

в) Кривите се сечат во точките $(-1,\ 1)$ и $(2,\ 4)$. Бараната зафатнина е:

$$V=\pi\int_{-1}^{2}(x+2)^2\,dx-\pi\int_{-1}^{2}x^4\,dx=\frac{72\pi}{6},\qquad \text{г) } \frac{3\pi}{10}\qquad \text{д) } \frac{448\pi}{5}$$

ѓ) $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\pi\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$

221. $P=\int_0^x\sqrt{2px}\,dx=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x=\frac{2}{3}\sqrt{2px}\cdot x=\frac{2}{3}xy$

922. Ако правата и параболата се сечат во точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2) тогаш бараната површина е

$$P=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2px}\,dx-\int_{x_1}^{x_2}(ax+b)\,dx$$

Врз основа на формулата од претходната задача првиот интеграл дава $\frac{2}{3}(x_2y_2-x_1y_1)$. Вредноста на вториот интеграл е $\frac{a}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=\frac{x_2-x_1}{2}(ax_2+b+ax_1+b)=\frac{x_2-x_1}{2}(y_2+y_1)$.

Затоа е

$$P=\frac{2}{3}(x_2y_2-x_1y_1)-\frac{1}{2}(x_2y_2-x_2y_1+x_1y_2-x_1y_1)=$$

$=\frac{1}{6}(x_2y_2-x_1y_1)-\frac{1}{2}(x_2y_1-x_1y_2)$. Поради $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$,

$x_2=\frac{y_2^2}{2p}$ излегува $P=\frac{1}{12p}(y_2-y_1)^3$.

923. Четвртината на кругот $x^2+y^2=r^2$ која лежи во првиот квадрант има површина $\frac{P}{4}=\int_0^r y dx$, каде е $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Тој интеграл полесно се пресметува ако координатите на која и да било точка (x, y) на кружната линија се изразат со помошта на поларните координати $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, каде е φ агол што го затвора r со оската X. Со таа супституција е $dx=-r\sin\varphi\, d\varphi$, а границите на интервалот станувaат $\frac{\pi}{2}$ и 0, така што е

$$\frac{P}{4}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r^2\sin^2\varphi\, d\varphi=\frac{r^2\pi}{4}.$$

Според тоа е $P=r^2\pi$

924. Четвртиот дел од површината на елипсата кој лежи во првиот квадрант е

$$\frac{P}{4}=-\int_0^a y dx$$

каде е $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Интегралот полесно се пресметува со помошта на параметарските равенки на елипсата: $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$. Тогаш е $dx=-a\sin\varphi d\varphi$, а границите на интегралот се $\frac{\pi}{2}$ и 0. Така е

$$\frac{P}{4}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\sin^2\varphi\, d\varphi=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos^2\varphi}{2}\, d\varphi=\frac{ab\pi}{4}.$$

Површината на елипсата ќе биде $P=ab\pi$.

925. Бараната површина е $P=\int_a^x y dx=\frac{b}{a}\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}.dx.$

Од една страна е

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\, dx=\int\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx=\int\frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

од друга страна, со парцијална интеграција, ќе добиеме:

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\, dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx$$

Со собирање излегува:

$$2\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Понатаму е (види ја задачата 863)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=ln\,(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

така што, откога ќе поделиме со 2, е:

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\,ln\,(x+\sqrt{x^2-a^2}).$$

Ако го наредиме во изразот со P и со средување изледува:

$$P=\frac{b}{2a}\,x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\,ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

926. а) Ваљакот настанува со ротација на правоаголникот ограничен со линиите: $x=0$, $y=0$, $x=v$, $y=r$ околу оската X. Зафатнината е:

$$V=\pi\int_0^v y^2\,dx=r^2\pi x\int_0^v=r^2\pi v.$$

б) Конусот настанува со ротација на триаголникот ограничен со правите $y=kx$, $y=0$, $x=v$ околу оската X. Тогаш е $V=\pi\int_0^v y^2\,dx=\pi\,k^2\int_0^v x^2\,dx=k^2\pi\cdot\frac{v^3}{3}=k^2\,v^2\cdot\pi\cdot\frac{v}{3}$. Полупречникот на базата на конусот е вредност на y за $x=v$, а тоа е $y=$ $=kv=r$. Според тоа е $V=\frac{r^2\,\pi\,v}{3}$.

в) Пресечениот конус настанува со ротација на трапез чии врвови се A (0,0) B $(v,0)$, C (v,R) D $(0,r)$ околу оската X. Правата CD има равенка

$$y=\frac{R-r}{v}x+r;$$

$V=\pi\int_0^v y^2\,dx$. Кога ќе ја спроведеме постапката до крај, ќе имаме

$$V=\frac{v\pi}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

г) $V=\pi\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\,r^3\,\pi$

д) $\pi \int\limits_{r-v}^{r} (r^2-x^2)\ dx = \frac{\pi v^2}{3}(3r-v)$

ѓ) $\pi \int\limits_{-a}^{+a} \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}\ dx = \frac{4\,ab^2\pi}{2}$

927. Да ја означиме со v брзината, а со s патот. Изводот на брзината по времето дава акцелерација, така што е брзината $v=\int g\ dt = gt + C$. Константата на интеграцијата C може да се определи од условот да е за $t=0$, $v=c$. Изразот v дава $C=c$, така што е $v=c+gt$. Изводот на патот по времето ја дава брзината, т.е. $s'(t)=v=c+gt$. Заради тоа е $s=\int(c+gt)\ dt = ct + \frac{g}{2}\ t^2 + K$. За $t=0$ е $s=0$, така што е константата K интеграција на нулата. Изминатиот пат е $s=ct+\frac{g}{2}\ t^2$.

928. Патот е $s=\int\limits_0^6 (2t^2+3t)\ dt = 198$ cm.

929. Патот е $s=\int\limits_0^{10}\sqrt{1+t}\ dt = \frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3}\Big|_0^{10} \approx 23{,}66$ m.

930. Да го означиме со t времето, со a акцелерацијата (ретардација), со v брзината и со s патот. Ретардацијата е 2 $\frac{m}{s^2}$, т.е. $a=-2$; $v=\int -2dt = 2t + C$. Константата C ја наоѓаме од условот да е за $t=0$, $v=8$.
Од $8 = -2\cdot 0 + C$ е $C=8$. Значи, $v=-2t+8$. Патот $s = = \int v\ dt = \int(-2t+8)\ dt = -t^2+8t+k$. Константата k ја наоѓаме од условот да е за $t=0$ и $s=0$. Тогаш е и $k=0$; $s=-t^2+8t$. Времето на тркалањето можеме да го определиме од $v=0=-2t+8$. Оттука е $t=4$ секунди. За тоа време топката изминала пат $s=-4^2+8\cdot 4-10$ метра.

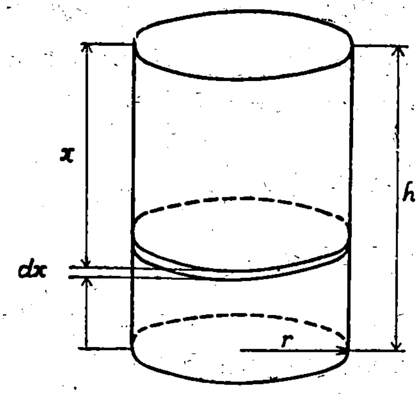
931. Со F да ја означиме силата, со x продолжението, а со R работата. Во извесни граници важи Хуковиот закон: $F=kx$. Од $1=k\cdot 0{,}03$ е $k=\frac{100}{3}$, т.е. $F=\frac{100}{3}\ x$. Работата $R=\int\limits_0^{0{,}03} F\ dx =$
$= \int\limits_0^{0{,}03}\frac{100}{3}\ x\ dx = 0{,}015$ килопондметри (килограмметри).

932. 1 метар коноп тежи 8 kg. Со x да ја означиме должината на веќе намотаниот дел од конопот во извесен момент од дигањето. Во тој момент се дига (совладува) товарот и тежината на уште ненамотаниот коноп, т. е. вкупната тежена $250+8\,(30-x)=$ $=490-8x$. Елементарната работа dR на патот dx ќе биде $dR=(490-8x)\,dx$, а вкупната работа е

$$R=\int_{6}^{24}(490-8x)\,dx=9\,456 \text{ kgm.}$$

933. Елементот на зафатнината е $r^2\,\pi dx$ m³, а неговата тежина е $dF=1\,000\,r^2\pi dx$ kg, ако со x ја означиме висината на која треба да се дигне елементот чија е дебелина dx (сл. 41). Елементарната работа што ќе се изврши за подигнување на тој слој е $dR=$ $=1\,000\,r^2\pi x\,dx$ kgm. Вкупната работа е:

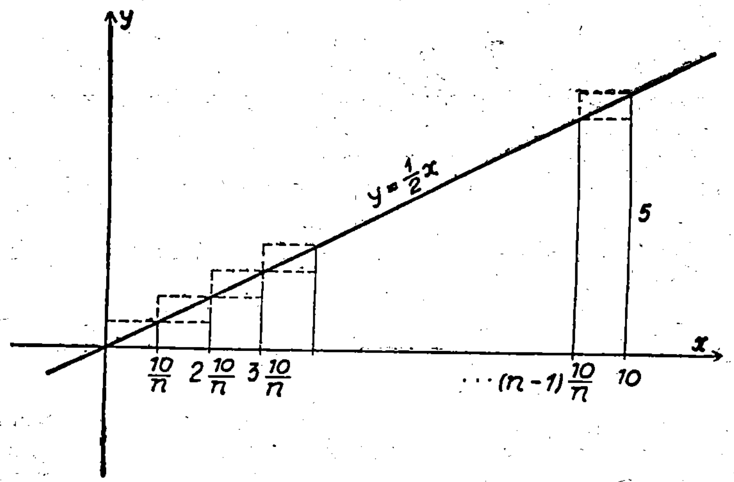
$$R=1\,000\,r^2\pi\int_{0}^{h}x\,dx=500\,\pi r^2 h^2\approx 5\,000 \text{ kgm.}$$



Сл. 41

934. а) Интервалот [0, 10] да го поделиме на n еднакви делови (сл. 42). Секој од настанатите подинтервали има должина $\frac{10}{n}$.

Во поделбените точки:



Сл. 42

$\frac{10}{n}, 2\cdot\frac{10}{n}, 3\cdot\frac{10}{n}, \ldots, (n-1)\cdot\frac{10}{n}$ да повлечеме ординати на функцијата $y=\frac{1}{2}x$ и во секоја од настанатите n пруги да впишеме и опишеме правоаголници како што покажува сликата. Збирот на површините на сите впишани правоаголници ќе биде:

$$P_n=\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{n}\cdot+\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{10}{n}+\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{10}{n}+\ldots+$$

$$+\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}(n-1)\frac{10}{n}=\frac{100}{2n^2}[1+2+3+\ldots+(n-1)]=$$

$$=\frac{50}{n^2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot n=\frac{25(n-1)}{n}=25\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Збирот на површините на сите опишани правоаголници ќе биде:

$$P_\circ=\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{n}+\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{10}{n}+\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{10}{n}+\ldots+$$

$$+\frac{10}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{10}{n}=\frac{100}{2n^2}(1+2+3+\ldots+n)=$$

$$=\frac{50}{n^2}\cdot\frac{n}{2}(1+n)=\frac{25(n+1)}{n}=25\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Да ја побараме разликата:

$$P_0-P_n=50\cdot\frac{1}{n}.$$

Да земеме дека бројот на подинтервалите $n\to\infty$. Тогаш е

$$\lim_{n\to 8}(P_0-P_n)=50\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=50\cdot 0=0.$$

Значи е

$$\lim_{n\to\infty}P_0=\lim_{n\to\infty}P_n.$$

Ако површината на разгледуваниот триаголник ја означиме со P, тогаш е очигледно

$$P_n<P<P_0,$$

а според горното ќе биде:

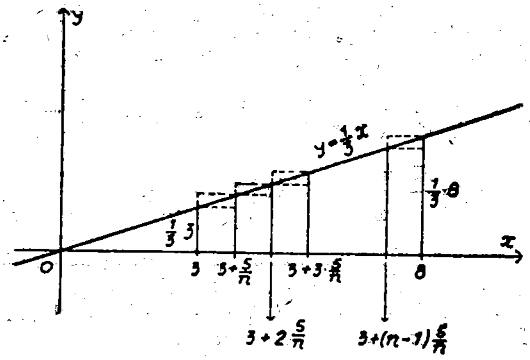
$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}P_0, \text{ т.е.}$$

$$P=\lim_{n\to\infty}\left[25\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=25.$$

Истата површина можеме да ја најдеме според познатата формула-а: $P=\frac{10\cdot 5}{2}=25$, или со помошта на определениот интеграл

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{10} x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{10}=25.$$

935. а) Интервалот $[3{,}8]$ да го поделиме на n еднакви делови (сл. 43).



Сл. 34

Секој од настанатите полуинтервали има должина $\frac{5}{n}$. Ако постапиме како и во претходната задача, за збирот на површините на впишаните правоаголници ќе имаме:

$$P_n=\frac{5}{n}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{5}{n}\cdot\frac{1}{3}\left(3+\frac{5}{n}\right)+$$

$$+\frac{5}{n}\cdot\frac{1}{3}\left(3+2\cdot\frac{5}{n}\right)+\frac{5}{n}\cdot\frac{1}{3}\left(3+3\cdot\frac{5}{n}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{5}{n}\cdot\frac{1}{3}\left[3+(n-1)\frac{5}{n}\right]=$$

$$=\frac{5}{3n}\left\{3+\left(3+\frac{5}{n}\right)+\left(3+2\cdot\frac{5}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(3+3\cdot\frac{5}{n}\right)+\ldots+\left[3+(n-1)\cdot\frac{5}{n}\right]\right\}=$$

$$=\frac{5}{3n}\left\{3n+\frac{5}{n}\,[1+2+3+\ldots+(n-1)]\right\}=$$

$$=\frac{5}{3n}\left[3n+\frac{5}{n}\cdot\frac{n-1}{2}((1+n-1))\right]=$$

$$=\frac{5}{6}\left(11-\frac{5}{n}\right).$$

Со аналогна постапка ќе добиеме

$$P_0 = \frac{5}{6}\left(11 + \frac{5}{n}\right).$$

Поради

$$P_n < P < P_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_0 \text{ е}$$

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_0 = \frac{55}{6}.$$

Директно според формулата за површината на трапезот е

$$P = \frac{\left(1 + \frac{8}{3}\right)\cdot 5}{2} = \frac{55}{6},$$ а со помошта на интегралот

$$P = \frac{1}{3}\int_3^8 x dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_3^8 = \frac{55}{6}.$$

СОДРЖИНА

Страна

Задачи

Упатства и резултати

Страна

ИЗДАВАЧКО ПРЕТПРИЈАТИЕ
„ПРОСВЕТНО ДЕЛО“
СКОПЈЕ

*

Проф. Стјепан Минтаковиќ
ЗБИРКА ЗАДАЧИ ОД АЛГЕБРА
со упатства и резултати
III дел

*

Превод
Цвета Ристова

*

Технички уредник
Трајко Димовски

*

Коректор
Николина Диневска

*

Книгава е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев“ — Скопје (4641) во тираж 3 500 примероци. Печатењето е завршено во март 1969 година.