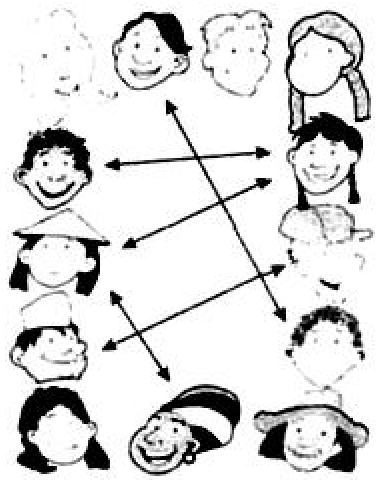
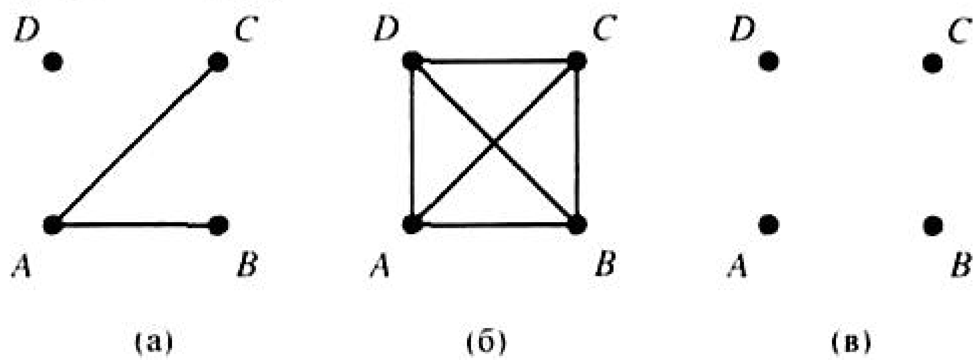
ШТА СУ ТО ГРАФОВИ?

Војислав Петровић, Нови Сад



У једној групи неке особе се међусобно познају, неке не. Та познанства, односно непознанства, можемо прегледније да представимо на следећи начин. Свакој од особа A, B, C ... придружимо по једну тачку у равни. Ако се две особе познају, одговарајуће тачке повежемо са дужи или кривом. На сл. 1(а) представљена је група од четири особе у којој особа A има 2 познаника, особе B и C по једног, док особа D не познаје никог. Уколико се све особе међусобно познају цртеж је као на сл. 1(б), а ако, пак, нико никог не познаје имамо сл. 1 (в).



Сл. 1.

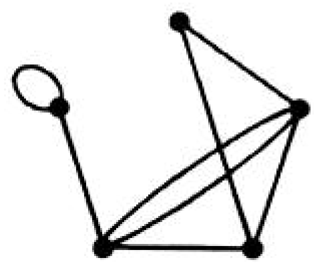
Слично се да представити мрежа путева који повезују поједине градове, мрежа телефонских линија, електрична мрежа итд. Ако се оставе по страни конкретне везе (познанства, путеви, телефонске или електричне линије) ствар у свим случајевима своди геометријске цртеже као на сликама 1. То су управо *графови* и њима се бави и изучава их модерна грана математике која се зове *теорија графова*.

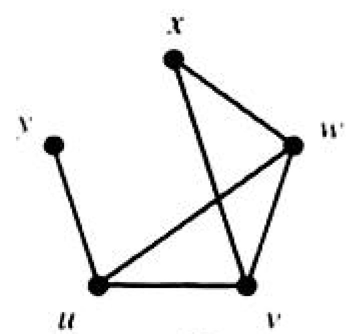
Граф је математички објект који чине два скупа. Један су *чворови* (*врхови* или *темена*), а други *гране* (*ивице* или *спојнице*). Уобичајена ознака за граф је G. Чворови се представљају тачкама у равни, а гране дужима или кривим линијама које повезују поједине парове чворова. Скуп чворова графа G означава се са $V(G)$ или кратко V, ако је јасно о ком је графу реч. V је почетно слово енглеске речи *vertex* која значи врх, теме. Скуп грана обележава се $E(G)$ или само E. Потиче од такође енглеске речи *edge* = ивица, руб.

На први поглед појам графа делује сасвим једноставно са доста сиромашним садржајем. Међутим, није тако. Теорија графова је пребогата и садржајем и могућностима и буквално се из дана у дан шири и развија.

Обично се и чворови и гране обележавају малим латиничним словима. Ако грана e повезује чворове u и v, пишемо $e = \{u, v\}$ или кратко $e = uv$. Притом је uv исто што и vu. Кажемо да су u и v крајеви гране e, да e излази из u, односно из v, да је инцидентна са u и v и сл. За чворове који су повезани граном кажемо да су *суседни*. У противном су *несуседни*. На пример, у графу познанстава на сл. 1(а) чворови A и B су суседни, док су C и D несуседни.

У неким графовима, рецимо путне мреже, могу између два чвора постојати две или више грана. Такве гране зовемо *паралелним*. У неким случајевима може се појавити грана која спаја чвор са самим собом, грана uu.


(а)



(б)

Сл. 2.

Зове се *петља* или *лупа*. На сл. 2(а) приказан је граф са паралелним гранама и петљама. Ми ћемо се искључиво бавити тзв. *простим* графовима (сл. 2(б)). То су они који немају ни паралелних грана, ни петљи.

Скуп суседа чвора u у графу G означавамо са $N_G(u)$ или кратко $N(u)$ ако је јасно на који се граф односи. Чине га сви чворови из G који су суседни са u. Наиме, $N_G(u) = \{v \mid uv \in E(G)\}$. Тако је у графу на сл. 2(б):
$N(u) = \{v, w, y\}$, $N(v) = \{u, w, x\}$, $N(w) = \{u, v, x\}$, $N(x) = \{v, w\}$, $N(y) = \{u\}$.

У теорији графова и комбинаторици са $|A|$ се означава број елемената коначног скупа A. Број чворова суседних чвору u, тј. $|N(u)|$, зове се *степен* чвора u и обележава са $d_G(u)$, односно $d(u)$. То је истовремено број грана које излазе из u. У графу на сл. 2(б) је $d(u) = d(v) = d(w) = 3$, $d(x) = 2$, $d(y) = 1$.

Ако у претходно посматраном графу саберемо степене свих чворова добијамо $d(u) + d(u) + d(v) + d(w) + d(x) + d(y) = 12$, а то је двоструки број грана. Резултат није случајан, јер важи

ТЕОРЕМА 1. *Збир степена чворова сваког графа једнак је двоструком броју грана*

Доказ. Нека је G граф са n, $n \geq 1$, чворова и нека је $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Посматрајмо збир

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n). \qquad (1)$$

Нека је e произвољна грана у G. Узмимо да e спаја чворове v_i и v_j, тј. $e = v_iv_j$. Тада је грана e обрачуната два пута у збиру (1), једанпут у степену чвора v_i и једанпут у степену чвора v_j. То важи за сваку грану, те је

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2\,|E(G)|,$$

што је и требало да се докаже.

■

Управо доказано тврђење познато је као *прва теорема теорије графова*. Иако је сасвим једноставна, има низ последица.

ПОСЛЕДИЦА 1. *У сваком графу је број чворова непарног степена паран.*

Доказ. Следи из теореме 1. Како је збир $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2\,|E(G)|$, дакле паран број, број непарних сабирака мора бити паран.

■

ПОСЛЕДИЦА 2. *Ако су сви чворови графа G непарног степена, тада G има паран број чворова.*

Доказ. Следи директно из последице 1.

■

ПОСЛЕДИЦА 3. *Ако граф G има непаран број чворова, тада је бар један од њих парног степена.*

■

Ево једног примера.

ПРИМЕР 1. *Могу ли се 77 телефона повезати, тако да сваки буде спојен са тачно:* (*а*) 9; (*б*) 11 *других?*

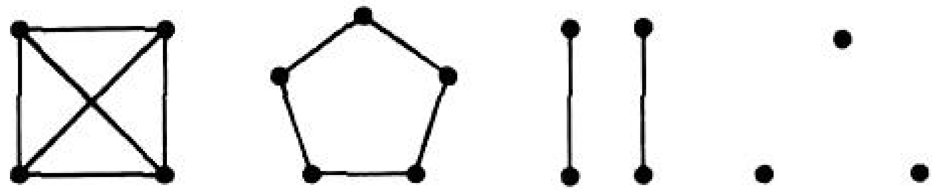
Решење. Не могу ни у једном од случајева. Ако телефоне узмемо за чворове графа, а њихове међусобне везе за гране, проблем се своди на следећи:

"*Да ли постоји граф са* 77 *чворова који су сви степена:* (*а*) 9; (*б*) 11?"

На основу последице 2 или 3, одговор је не.

Важи и општије тврђење. Не постоји граф са 77 чворова који су сви непарног степена.

Граф чији сви чворови имају исти степен зове се *регуларан*. Ако тај степен износи k за граф кажемо да је k-*регуларан*. На сликама 3(а), (б), (в), (г) редом су прикани 3-регуларан, 2-регуларан, 1-регуларан и 0-регуларан граф.

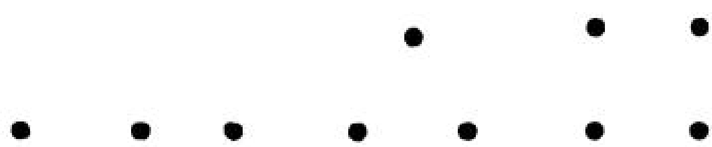


(а) (б) (в) (г)

Сл. 3.

На основу примера 1 следи да не постоји 9-регуларан, односно 11-регуларан, односно k-регуларан граф, где је k непаран број, са 77 чворова. Међутим, шта ако је k паран број? Да ли за свако такво k постоји k-регуларан граф? У случају да постоји, колико све чворова може да има? Покушајмо да одговоримо на ова питања.

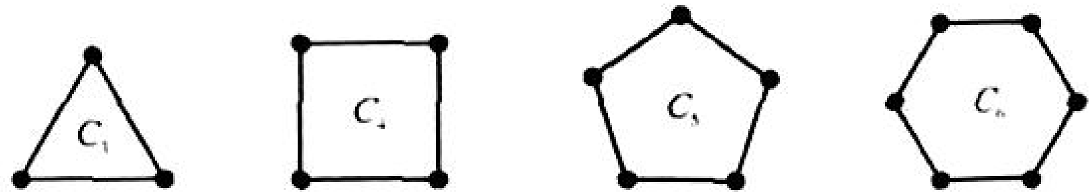
Кренимо са најмањим парним k, тј. $k = 0$. *Лако се види да 0-регуларан* граф постоји. Присетимо се слике 3(г). И не само тај. За свако n, $n \geq 1$, постоји 0-регуларан граф са n чворова. То је граф са n чворова и без грана. Никоја два чвора нису суседна. Зове се *празан граф* и обележава са $\overline{K}_n$. На сл. 4 приказани су празни графови за $n = 1, 2, 3, 4$.



$\overline{K}_1$ $\overline{K}_2$ $\overline{K}_3$ $\overline{K}_4$

Сл. 4.

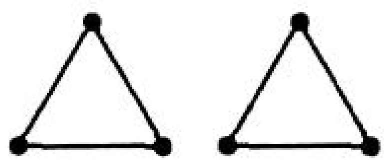
Следеће k је 2. Како сваки чвор треба да је степена 2, граф мора да има бар 3 чвора. Дакле, $n \geq 3$. За $n = 3$ није тешко видети да је граф као на сл. 5(а). За $n = 4$ је онај на сл. 5(б). Користећи исту конструкцију добијамо 2-регуларне графове са 5, 6, ... чворова. Графови који су 2-регуларни и уз то повезани (састоје се из једног дела), зову се *контуре*. Ознака за контуру са n, $n \geq 3$, чворова је C_n.



(а) (б) (в) (г)

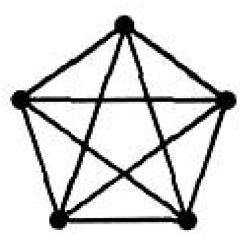
Сл. 5.

Приметимо да 2-регуларан граф са n чворова, за $n = 3, 4, 5$, мора бити контура. За $n \geq 6$ то не мора бити случај. Рецимо граф на сл. 6 је 2-регуларан, а није контура. Као што се види није повезан. Састоји се од две дисјунктне контуре C_3.



Сл. 6.

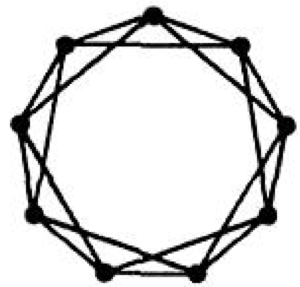
За $k = 4$ неопходно је $n \geq 5$. 4-регуларан граф са 5 чворова добија се просто. Свака два чвора се повежу граном (сл. 7). Граф са n чворова у коме су свака два чвора суседна зове се *комплетан граф* и обележава са K_n. Тако је на сл. 5(а) приказан K_3, док је на сл. 7 K_5.



Сл. 7.

За $n \geq 6$ није сасвим јасно како изгледа 4-регуларан граф са n чворова. Следећа конструкција даје примере таквих графова за свако $n \geq 6$.

Нека је G тражени граф са скупом чворова $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Конструишемо контуру $C_n = v_1v_2 \dots v_nv_1$ (сл. 8) којој додамо v_1v_3, v_2v_4, v_3v_5, ... , $v_{n-1}v_1$, v_nv_2.



Сл. 8.

Ако добијени граф посматрамо као n-угао са повученим "кратким" дијагоналама, тада из сваког темена излазе по две странице и две дијагонале. Преведено на језик графова то значи да је $d(v_i) = 4$ за свако $1 \leq i \leq n$, тј. G је 4-регуларан.

ТЕОРЕМА 2. *За сваки паран број k и сваки природан број n, $n \geq k + 1$, постоји k-регуларан граф са n чворова*

Доказ Препуштамо читаоцу уз упутство да се користи идеја слична оној у последњој конструкцији.

ЗАДАЦИ

1 Докажи да у сваком графу постоје два чвора истог степена.

2 Нека је n природан број и p и q ненегативни цели бројеви, такви да је q паран и $n = p + q$. Докажи да постоји граф са n чворова у којем су p чворова парног, а преосталих q чворова непарног степена.

3 Докажи да за сваки природан број n, $n \geq 4$, постоји граф са $n + 1$ чворова у којем су тачно n чворова степена 3.

4 Одреди све природне бројеве n за које постоји регуларан граф са n чворова и 24 гране.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија