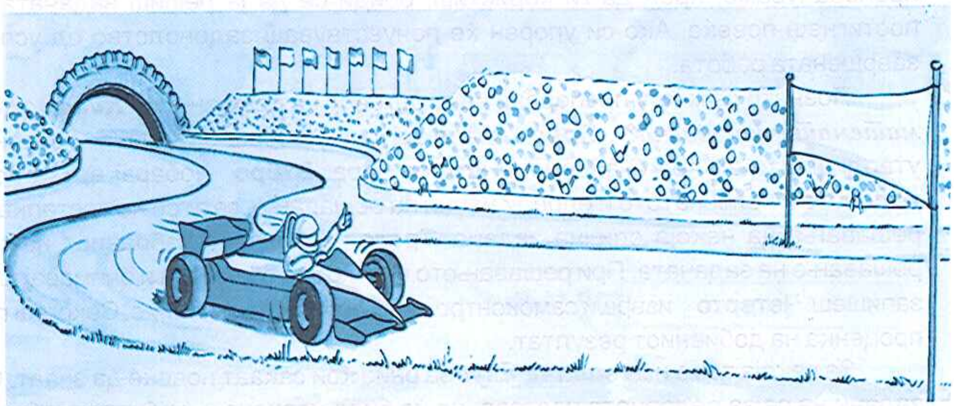
Јово Стефановски
Наум Целакоски
Живко Мадевски

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА

ДЕВЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ



деветгодишно
основно
образование

АЛБИ

2015

Драг ученику!

За подобро да ги разбереш содржините од математика потребно е да решаваш задачи. Преку решавање на голем број различни задачи, ти ќе можеш да ги продлабочиш и примениш знаењата што ги стекнуваш во редовната настава. Во збиркава ќе најдеш занимливи задачи што произлегуваат од секојдневието. Тие може да ти помогнат повеќе да ја засакаш математиката.

За да научиш успешно да решаваш задачи, потребно е искуство кое можеш да го стекнеш ако решаваш задачи од збиркава. Притоа работи самостојно, биди истраен и внимателен, биди краток и прецизен во искажувањата, донесувај правилни заклучоци, врши проценка на резултатот, а потоа и самоконтрола. Запишувањето треба да ти биде рационално, прегледно и естетско.

На почетокот, за секоја од четирите теми се дадени лекции во кои се опфатени содржини на темите што ги изучуваш. Според нив се подредени задачите во темата. Нумерирањето на задачите почнува од еден за секоја тема посебно.

Пред задачите за секоја лекција е даден краток преглед на тоа што треба да знаеш за лекцијата, а тоа ќе ти користи при решавање на задачите.

На крајот од збирката има одговори, упатства и решенија на задачите. Ти препорачуваме, пред да ги користиш, обиди се да ја решиш задачата и ќе постигнеш повеќе. Ако си упорен ќе почувствуваш задоволство од успешно завршената работа.

Познати се многу препораки како одговор на прашањето “*Како да решам математичка задача?*”. **Прво** – треба да ја разбереш задачата, односно да утврдиш што во неа е дадено, а што се бара. **Второ** побарај врска помеѓу даденото и непознатото и одреди начин на решавање, сети се на постапката за решавање на некоја слична задача. **Трето** заврши го избраниот начин за решавање на задачата. При решавањето претходно размисли и внимавај што ќе запишеш. **Четврто** изврши самоконтрола на добиеното решение. Секогаш прави проценка на добиениот резултат.

За секоја тема има *задачи плус* за оние кои сакаат повеќе да знаат. Овие задачи не се за редовната настава, но ќе биде корисно и ќе бидеш побогат со знаење, ако се трудиш и нив да ги решаваш.

Те уверуваме дека секоја задача можеш да ја решиш, ако редовно ја следиш наставата по математика во училиште. Ако наидеш на тешкотии при решавањето на некоја од задачите, потсети се на таа содржина од учебникот или консултирај се со наставникот.

Особено ќе нѐ радува ако оваа книга ти помогне да ја засакаш математиката и се здобиеш со поголеми знаења.

Ти посакуваме успех во работата.

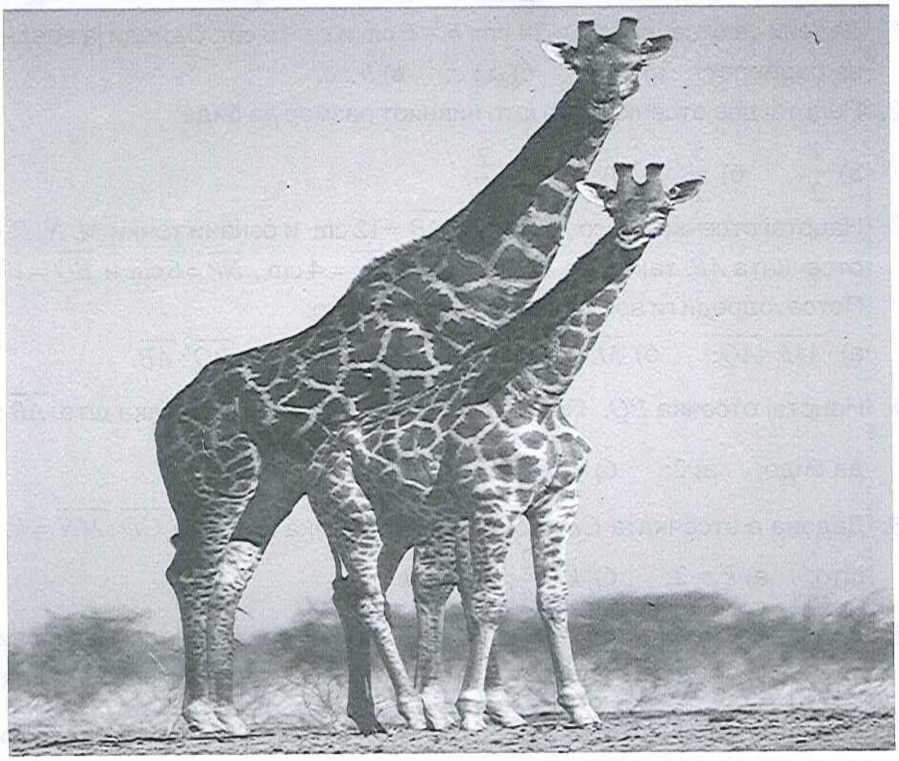
Авторите

ТЕМА 1

СЛИЧНОСТ

Содржина на темата

1 Размер меѓу две отсечки .. 4
2 Пропорционални отсечки .. 6
3 Делење отсечка на еднакви делови 7
4 Талесова теорема за пропорционални отсечки 9
5 Задачи со примена на Талесовата теорема 12
6 Слични фигури. Слични триаголници 15
7 Прв признак за слични триаголници 17
8 Втор и трет признак за слични триаголници 20
9 Однос на периметрите и однос на плоштините на два слични триаголници 22
10 Сличноста во правоаголен триаголник 25
11 Питагорова теорема и нејзина примена 27
12 Задачи плус за тема 1 31



1 РАЗМЕР НА ДВЕ ОТСЕЧКИ

Треба да знаеш

- ***Размер*** или ***однос*** на две отсечки AB и CD е количникот од мерните броеви на нивните должини при иста мерна единица. Запишуваме: $\overline{AB}:\overline{CD}$ (или $a:b$, ако $a=\overline{AB}$ и $b=\overline{CD}$).
- Ако $\overline{AB}:\overline{CD}=k$, тогаш $\overline{AB}=k\cdot\overline{CD}$. (Бројот k се вика ***вредност*** на размерот). Ако $a:b=k$ и $m\neq 0$, тогаш $(am):(bm)=k$ и $(a:m):(b:m)=k$.
- Ако две отсечки се ***сомерливи***, тогаш нивниот размер е рационален број и обратно: ако размерот на две отсечки е рационален број, тогаш тие се сомерливи.
- За две отсечки се вели дека се ***несомерливи***, ако не постои заедничка мера на тие отсечки. Размерот на две несомерливи отсечки е ирационален број.

1. Дадени се отсечките $a=24$ cm, $b=6$ cm и $c=16$ cm. Одреди ја вредноста на размерот: а) $a:b$; б) $a:c$; в) $b:c$.

2. Нацртај две отсечки така што нивниот размер да биде:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{2}$; в) 3; г) $\frac{2}{5}$.

3. Нацртај отсечка AB со должина $\overline{AB}=12$ cm и означи точки M, N, P, Q на отсечката AB, така што $\overline{AM}=9$ cm, $\overline{AN}=4$ cm, $\overline{NP}=6$ cm и $\overline{BQ}=10$ cm. Потоа, одреди ги вредностите на размерите:

а) $\overline{AM}:\overline{AQ}$; б) $\overline{MN}:\overline{AP}$; в) $\overline{NP}:\overline{QN}$; г) $\overline{PQ}:\overline{AB}$.

4. Нацртај отсечка PQ. Потоа, конструирај отсечка AB, така што $\overline{AB}:\overline{PQ}$ да биде: а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{4}$.

5. Дадена е отсечката CD. Конструирај отсечка MN, ако $\overline{CD}:\overline{MN}=k$, при што: а) $k=2$; б) $k=\frac{2}{3}$; в) $k=\frac{4}{7}$.

6. Дадени се отсечките $a=20$ cm и $b=8$ cm. Измери ја поголемата од нив со помош на помалата (т.е. претстави ја a, земајќи ја b за мерна единица).

7. Дадени се отсечките AB и CD, $\overline{AB}=45$ cm, $\overline{CD}=20$ cm. Користејќи нивна заедничка мера, измери ја:

а) поголемата отсечка со помалата; б) помалата отсечка со поголемата.

8. Дадени се отсечките $a = 210$ cm, $b = 126$ cm, $c = 90$ cm. Одреди ја најголемата заедничка мера на отсечките: а) a и b; б) a и c; в) a, b и c.

9. Утврди кои од дадените парови отсечки се сомерливи, а кои се несомерливи:

а) $a = 12$ cm, $b = 3$ cm; б) $c = 11$ cm, $d = 7$ cm;

в) $f = 3\sqrt{2}$, $g = \sqrt{8}$; г) $m = 5$, $n = 5\sqrt{2}$;

д) $p = \sqrt{18}$, $q = 2\sqrt{3}$; ѓ) $r = \sqrt{50}$, $s = \sqrt{12}$.

10. Покажи дека страните на еден правоаголен триаголник, чиишто катети имаат 9 cm и 12 cm, пар по пар се сомерливи. Одреди ја најголемата заедничка мера на страните на тој триаголник.

11. Дали хипотенузата c на правоаголен триаголник е сомерлива со поголемата катета (a и b се катети), ако:

а) $c = 26$ cm, $a = 10$ cm; б) $a = 8$ cm, $b = 15$ cm;

в) $c = 10$ cm, $b = 5$ cm; г) $c = 5\sqrt{3}$ cm, $a = \sqrt{27}$ cm?

12. Дали се сомерливи страните на правоаголен триаголник чијашто хипотенуза има 15 cm, а едната катета има 10 cm?

13. Ако во правоаголен триаголник еден од аглите е 30^0, тогаш хипотенузата е сомерлива со катетата наспроти аголот од 30^0, а е несомерлива со другата катета. Докажи.

14. Утврди кои од следните парови отсечки се сомерливи и за сомерливите парови најди ја нивната најголема заедничка мера (НЗМ):

а) страната a на квадрат и радиусот r на впишаниот круг;

б) страната a на правилен шестаголник и радиусот r на опишаниот круг;

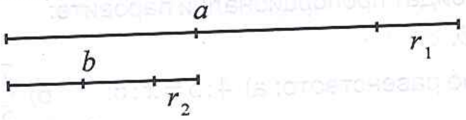
в) дијаметарот на опишаниот и дијаметарот на впишаниот круг на еден квадрат;

г) страната и висината на рамностран триаголник;

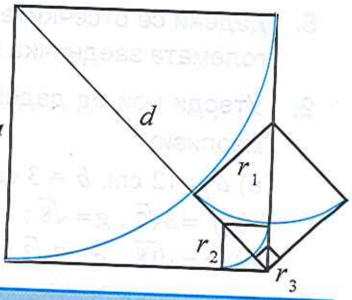
д) хипотенузата на рамнокрак правоаголен триаголник и висината спуштена кон хипотенузата;

ѓ) периметарот и дијаметарот на круг.

15. Ако при мерењето на поголема отсечка a со помала отсечка b се јави остаток r_1, а потоа со мерење на помалата отсечка b со остатокот r_1 се јави нов остаток r_2 итн. до r_k, и ако r_k е мера за r_{k-1}, тогаш r_k е заедничка мера и за отсечките a и b. Дали r_2 е заедничка мера за отсечките a и b, дадени на цртежот? Провери го тоа конструктивно.



16. На цртежот графички е прикажана несомерливоста на дијагоналата и страната на квадратот, до остатокот r_3.
Прикажи ја графички несомерливоста на страната и висината на рамностран триаголник.



2 ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

Треба да знаеш

За два пара отсечки a, b и c, d се вели дека се пропорционални ако нивните должини образуваат пропорција $a:b=c:d$. Во тој случај важат и равенствата:

$$1)\ a\cdot d=b\cdot c; \qquad 2)\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}; \qquad 3)\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

За продолжената пропорција $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ важи: $\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$.

Геометриска средина на две отсечки со должини a и b се вика отсечка со должина x, таква што $a:x=x:b$, т.е. $x=\sqrt{ab}$.

17. Провери дали се пропорционални паровите отсечки a, b и c, d:
а) $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $c = 20$ cm, $d = 12$ dm;
б) $a = 16$ cm, $b = 14$ cm, $c = 12$ cm, $d = 10$ cm;
в) $a = 2{,}5$ cm, $b = 1{,}5$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $d = 3{,}6$ cm;
г) $a = 0{,}9$ cm, $b = 7{,}5$ cm, $c = 0{,}6$ cm, $d = 5$ cm.

18. Состави пропорција (ако е можно) од следниве четири отсечки:
а) 2,5 cm; 3 cm; 5 cm; 1,5 cm; б) 9 cm; 8 cm; 4 cm; 6 cm.

19. Дадени се отсечките a, b, c, d и e. Состави од нив барем две пропорции, ако: $a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $c = 6$ cm, $d = 14$ cm, $e = 16$ cm.

20. Дадени се отсечките: $a = 9$ cm, $b = 15$ cm и $c = 18$ cm. Одреди ја должината на отсечката x така што:
а) $a:b=c:x$; б) $a:b=x:c$.

21. Дадени се отсечките: $a = 6$ cm, $b = 4{,}8$ cm и $c = 10$ cm. Одреди ја должината на отсечката d така што да бидат пропорционални паровите:
а) a, b и c, d; б) a, d и b, c.

22. За која вредност на x е точно равенството: а) $4:5=x:6$; б) $\frac{7}{5}=\frac{14}{x}$?

23. Дали се пропорционални страните на: а) ромб; б) правоаголник; в) рамнокрак трапез со основи a, b и крак c?

24. Пресметај ја геометриската средина на отсечките:
а) $a = 6$ cm, $b = 24$ cm; б) $m = 4$ cm, $n = 12$ cm.

25. Најди број x таков што геометриската средина на x и 4 да е: а) 6; б) $8\sqrt{3}$.

26. Колку е $m:n$, ако $\dfrac{m+n}{n}=\dfrac{7}{3}$?

27. Две места на карта се оддалечени 4,5 cm. Колку се тие меѓусебно оддалечени во природа, ако размерот на картата е 1: 500000?

28. Должината на отсечката AB е 35cm. Одреди го растојанието меѓу средината M на таа отсечка и точката C којашто ја дели отсечката AB во однос 1 : 4.

29. Пресметај ги должините на страните на правоаголник, ако размерот на страните е 7 : 5, а периметарот на правоаголникот е 72 cm.

30. На отсечката $\overline{AB}=9{,}6$ cm е избрана точка M, таква што $\overline{AM}:\overline{MB}=7:5$. Ако N е точка меѓу A и M, таква што $\overline{AN}:\overline{NB}=1:5$, колкава е должината на отсечката MN?

31. Периметарот на триаголник е 72 cm, а неговите страни се однесуваат како 3 : 4 : 5. Пресметај ги должините на страните на тој триаголник.

32. На отсечката $\overline{AB}=25$ cm се дадени точките M и N, такви што $\overline{AM}:\overline{MN}=3:2$ и $\overline{AN}:\overline{NB}=2:3$. Колкаво е растојанието меѓу средините на отсечките AM и NB?

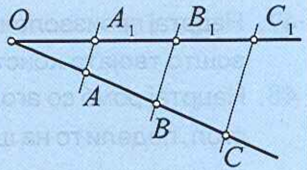
33. Нормалата спуштена од едно теме на некој правоаголник врз дијагоналата ја дели таа дијагонала на два дела во однос 1 : 3. Пресметај го аголот што го формираат дијагоналите.

34. Докажи дека страните a, b, c на (кој било) триаголник се обратно пропорционални на соодветните висини h_a, h_b, h_c, т.е. $a:b:c=h_c:h_b:h_a$.

3 ДЕЛЕЊЕ ОТСЕЧКА НА ЕДНАКВИ ДЕЛОВИ

Треба да знаеш

Ако на едниот крак од даден агол се нанесени од темето еднакви отсечки и низ нивните краеви се повлечени паралелни прави што го сечат другиот крак, тогаш тие прави отсекуваат на другиот крак меѓусебно еднакви отсечки.



Врз основа на оваа теорема можеш да поделиш дадена отсечка:
а) на произволен број еднакви делови;
б) во даден однос $m:n$ (за кои било $m, n \in \mathbb{N}$).

35. Нацртај отсечка $\overline{AB}=8\,cm$ и подели ја на а) три, б) четири еднакви делови.

36. Нацртај отсечка и подели ја на 7 еднакви делови.

37. Нацртај отсечка $\overline{AB}=5\text{ cm}$ и на неа одреди точка C така што $\overline{AC}=\frac{2}{3}\overline{AB}$.

38. Одреди $\frac{3}{7}$ од дадена отсечка $\overline{PQ}=6\,cm$.

39. Отсечката $\overline{AB}=8\,cm$ да се подели со точка C во размер:
а) $1:2$; б) $2:3$; в) $1:4$; г) $5:3$.

40. Нацртај произволна отсечка AB и подели ја со точка C на два дела чијшто однос е $0{,}75$.

41. Конструирај правоаголник $ABCD$, ако $\overline{AB}=6\text{ cm}$ и $\overline{AB}:\overline{AD}=3:2$.

42. Отсечката $\overline{AB}=7\text{ cm}$ подели ја во однос $2:3$. Потоа, конструирај:
а) правоаголник чиишто страни се добиените отсечки;
б) рамнокрак триаголник, ако основата е првата, а кракот е втората од добиените отсечки.

43. Отсечката $\overline{AB}=8\text{ cm}$ подели ја со точките M и N на три дела во однос:
а) $1:2:3$; б) $2:4:3$; в) $5:2:3$.

44. Провери дали дадените парови отсечки се пропорционални:
а) $\overline{AB}=60\text{ mm}$, $\overline{CD}=24\text{ mm}$ и $\overline{MN}=50\text{ mm}$, $\overline{PQ}=20\text{ mm}$;
б) 16 cm, 36 cm, и 25 cm, 65 cm.

45. Отсечка со должина 24 cm е поделена на три дела со размер $5:3:4$.
а) По колку cm има секој од тие делови?
б) Колкава е плоштината на правоаголен трапез чиишто основи се првите два дела, а висината е третиот дел?

46. Точката D е земена на страната AB од ΔABC $\left(\overline{AB}=9\text{ cm}, \overline{AC}=6\text{ cm}\right)$, на растојание 3 cm од темето A. По колку cm имаат деловите на кои е поделена страната AC со правата повлечена низ D паралелна со BC?

47. Нацртај произволен триаголник и одреди $\frac{3}{5}$ од неговата плоштина. Објасни зошто твојата конструкција е правилна.

48. Нацртај ромб со агол од 45^0 и со прави што минуваат низ темето на тапиот агол, подели го на шест дела со еднакви плоштини. Објасни зашто твојата конструкција е правилна.

49. Дадена е отсечка $d = 9$ cm.

а) Конструирај правоаголник со страни $a = \frac{2}{5}d$, $b = \frac{1}{5}d$. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот.

б) Конструирај правоаголник со една страна $a = \frac{3}{5}d$ и со периметар $2d$. Пресметај ја плоштината на правоаголникот.

50. Конструирај рамнокрак триаголник чијшто периметар е еднаков на отсечката $m = 9$ cm, а основата му е $a = \frac{2}{5}m$. Пресметај ги должините на страните.

51. Конструирај рамнокрак триаголник ако неговиот периметар е еднаков на дадена отсечка $\overline{AB} = 13$ cm, а односот на основата и кракот е $3 : 4$.

52. Дадена е отсечката $m = 10$ cm. Конструирај рамностран триаголник и прес-метај ја неговата плоштина, ако:

а) периметарот на триаголникот е еднаков на m;

б) страната на триаголникот е $\frac{3}{7}m$; в) висината на триаголникот е $\frac{2}{5}m$.

53. Дадена е отсечка $\overline{AO_1} = 4$ cm.

а) Конструирај кружници k_1 и k_2 коишто се допираат однатре во точката A, при што точката O_1 е центар на кружницата k_1, а $r_2 = \frac{3}{5}\overline{AO_1}$.

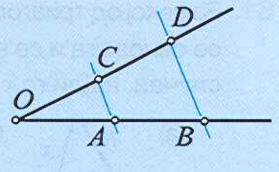
б) Пресметај ја разликата L меѓу периметрите и разликата P меѓу плоштините на круговите k_1 и k_2.

54. Нацртај отсечка $\overline{AB} = 6$ cm и конструирај кружница $k(O;r)$ со радиус $r = \frac{2}{5}\overline{AB}$, така што една тетива да му е отсечката $\overline{AC} = \frac{3}{5}\overline{AB}$, при што точката C е меѓу A и B.

4 ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА ЗА ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

Треба да знаеш

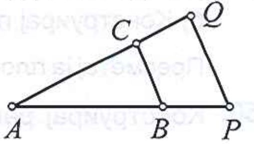
Талесовата теорема за пропорционални отсечки гласи: Ако краците на еден агол се пресечат со две различни паралелни прави, тогаш отсечките што се направени на едниот крак се пропорционални со соодветните отсечки на другиот крак.



Кратко, според цртежот: $AC \parallel BD$; $\overline{OA} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CD}$.

Обратната теорема на Талесовата гласи: Ако две прави, од краците на некој агол, отсекуваат пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни. Кратко, според цртежот: $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{CD}$, $AC \parallel BD$.

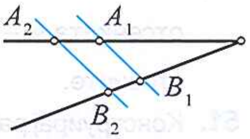
55. Отсечките BC и PQ на цртежот се паралелни. Утврди кои од следните искази се точни.



а) $\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AC}:\overline{AQ}$; б) $\overline{AB}:\overline{BP}=\overline{AQ}:\overline{CQ}$;

в) $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BP}:\overline{PQ}$; г) $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{PQ}:\overline{BC}$.

56. Правите A_1B_1 и A_2B_2 (на цртежот) се паралелни меѓу себе. Запиши неколку (најмалку три) пропорционални меѓу себе отсечки на цртежот.

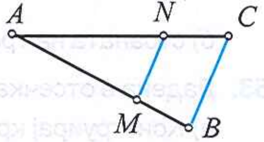


57. Според цртежот од задачата 55, во кој $BC \parallel PQ$, дополни за да биде точно:

а) $\overline{AB}:\overline{AP}=?:\overline{PQ}$; б) $\overline{AC}:?=\overline{AQ}:\overline{QP}$;

в) $\overline{QA}:\overline{PA}=\overline{QC}:?$; г) $\overline{BP}:\overline{AB}=?:\overline{BC}$.

58. Во ΔABC на цртежот правата MN е паралелна со BC. Пресметај ја:



а) $\overline{AN}$, ако $\overline{AB}=8\text{cm}$, $\overline{AC}=12\text{cm}$, $\overline{AM}=6\text{cm}$;

б) $\overline{CN}$, ако $\overline{AB}=18\text{cm}$, $\overline{BM}=3\text{cm}$, $\overline{AC}=24\text{cm}$;

в) $\overline{AN}$, ако $\overline{AM}=4\text{cm}$, $\overline{AB}=10\text{cm}$, $\overline{CN}=3\text{cm}$.

59. Краците на аголот XOY се пресечени со две паралелни прави AB и CD (точките A и C се на кракот OX, а B и D се на кракот OY). Пресметај ја должината на отсечката:

а) OD, ако $\overline{OA}=6\text{cm}$, $\overline{OC}=10\text{cm}$, $\overline{OB}=9\text{cm}$;

б) CD, ако $\overline{OA}=8\text{cm}$, $\overline{AC}=4\text{cm}$, $\overline{AB}=6\text{cm}$;

в) OC, ако $\overline{OB}:\overline{OD}=\frac{3}{5}:0,8$ и $\overline{AC}=4\text{cm}$;

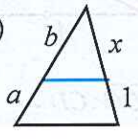
г) OA, ако $\overline{OA}+\overline{OC}=21$, $\overline{OB}=12$, $\overline{OD}=16$;

д) AB и CD ако $\overline{OA}=40$, $\overline{AC}=20$, $\overline{AB}+\overline{CD}=65$.

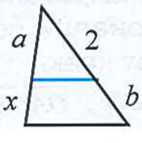
60. Електричен столб на рамен терен има сенка со должина 20 m, а истовремено стап со висина 2 m, поставен вертикално, фрла сенка со должина на $2,5\text{ m}$. Колку е висок столбот?

61. Во секој од триаголниците на цртежите а) - г) е повлечена отсечка паралелна со основата и се назначени должините на некои отсечки. Во секој од тие случаи, најди го x сметајќи дека другите букви се дадени броеви.

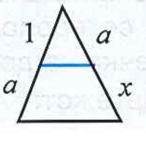
а)



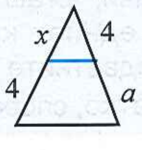
б)



в)



г)



70. Даден е рамностран ΔABC. Со три прави подели го ΔABC на три рамнострани триаголници и еден правилен шестаголник. Докажи дека периметарот на тој шестаголник е $\frac{2}{3}$ од периметарот на триаголникот.

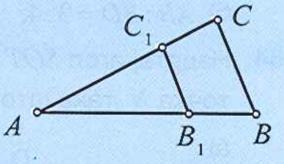
5 ЗАДАЧИ СО ПРИМЕНА НА ТАЛЕСОВАТА ТЕОРЕМА

Треба да знаеш

Талесовата теорема за триаголник гласи:

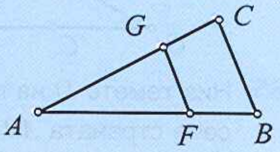
Ако во ΔABC (на цртежот) $B_1C_1 \parallel BC$,

тогаш $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}}$,



т.е. страните a, b, c на ΔABC се пропорционални со страните на ΔAB_1C_1:

$\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$.



Важи и обратното тврдење: Ако во ΔABC (на цртежот) $\overline{AF} : \overline{FB} = \overline{AG} : \overline{GC}$, тогаш $FG \parallel BC$.

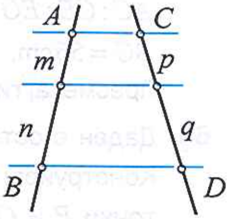
Со помош на Талесовата теорема, за дадени три отсечки a, b и c, може да се конструира отсечка x таква што $a : b = c : x$ или $a : x = b : c$ (k е четврта геометриска пропорционала на a, b и c).

Плоштината P на триаголник со радиус r на впишаната кружница и полупериметар s е $P = r \cdot s$.

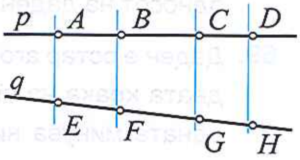
71. На цртежот правите AB и CD се пресечени со три паралелни прави.

а) Најди ја $\overline{CD}$, ако $m = 24$ cm, $n = 32$ cm и $p = 21$ cm.

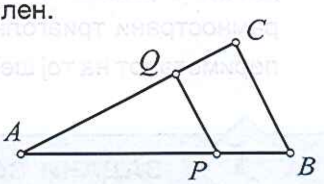
б) Најди ја p, ако $m = a$, $n = a + b$ и $q = a^2 - b^2$ $(a > b)$.



72. На цртежот се прикажани две прави p и q, пресечени со четири меѓусебно паралелни прави, при што $\overline{AB} = 3\text{cm}$, $\overline{BC} = 4\text{cm}$ и $\overline{CD} = 2\text{cm}$. Пресметај ги должините на отсечките EF, FG и FH, ако $\overline{EH} = 12\text{cm}$.



62. Во кои од наведените случаи, според цртежот, правата PQ е паралелна на BC ? Објасни зошто твојот одговор е правилен.



а) $\overline{AB}=18, \quad \overline{PB}=12, \quad \overline{AC}=21, \quad \overline{QC}=14;$

б) $\overline{AB}=15, \quad \overline{AP}=10, \quad \overline{AC}=8, \quad \overline{AQ}=6;$

в) $\overline{BP}=6, \quad \overline{AP}=9, \quad \overline{CQ}=30, \quad \overline{AQ}=45;$

г) $\overline{AP}=8, \quad \overline{AB}=12, \quad \overline{AQ}=12, \quad \overline{QC}=6.$

63. AB и BD се отсечки на еден крак од аголот $\measuredangle A$, а AC и CE се отсечки на другиот негов крак. Дали ќе бидат паралелни правите BC и DE ако:

а) $\overline{AC}:\overline{EC}=2{,}5:3{,}75; \quad \overline{AB}=7{,}5; \quad \overline{BD}=12{,}5;$

б) $\overline{AB}:\overline{BD}=3:4; \quad \overline{AC}=2{,}4; \quad \overline{CE}=3{,}2?$

64. Нацртај агол SOT како на цртежот а) односно б). Потоа, конструирај точка N така што: а) $\overline{OC}:\overline{OM}=\overline{OD}:\overline{ON}$; б) $\overline{MN}:\overline{ON}=\overline{CD}:\overline{OC}$.

а)

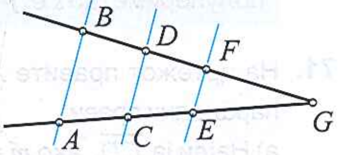
65. Низ темето D на паралелограмот $ABCD$ е повлечена права, којашто ја сече страната AB во точката E, а продолжението на страната BC во точката F. Пресметај ја должината на BF, ако $\overline{BC}=4\text{cm}$ и $\overline{DF}:\overline{EF}=5:3$.

66. Краците AD и BC на трапезот $ABCD$ се продолжени до нивната пресечна точка S.

а) Пресметај ја должината на CS, ако $\overline{BC}=4$ и $\overline{AD}:\overline{SD}=0{,}5:0{,}75$.

б) Пресметај ја должината на BC, ако $\overline{SC}=4{,}5$ и $\overline{AD}:\overline{SD}=\frac{2}{3}:0{,}5$.

67. На цртежот е: $AB \parallel CD \parallel EF$,
$\overline{AC}:\overline{CE}:\overline{EG}=2:3:2; \ \overline{AB}=91\text{cm}, \overline{CG}=40\text{cm},$
$\overline{BG}=56\text{cm}.$
Пресметај ги: $\overline{BD}, \overline{DF}, \overline{FG}, \overline{CD}$ и $\overline{EF}$.



68. Даден е остар агол SOT, точка M во неговата област и отсечки a и b. Конструирај права што ќе минува низ M и ги сече краците на $\measuredangle SOT$ во точки P и Q, такви што односот на отсечките OP и OQ е еднаков со односот на дадените отсечки a и b.

69. Даден е остар агол SOT, точка M на кракот OS и права p којашто ги сече двата крака на аголот. Конструирај две прави паралелни на p, од кои едната минува низ точката M, така што отсечките на тие прави меѓу краците на дадениот агол се однесуваат како броевите 3 и 5.

73. Краците на еден трапез се 15 cm и 20 cm. Права, паралелна со основите го дели кракот од 15 cm во однос 2 : 3. Најди ги должините на отсечките што правата ги отсекува на другиот крак.

74. Точките M и N се средини на страните BC и AD на паралелограмот $ABCD$. Докажи дека правата AM и CN ја делат дијагоналата BD на три еднакви делови.

75. Основите на еден трапез $ABCD$ се $\overline{AB}=13\text{cm}$ и $\overline{CD}=4\text{cm}$. Едниот крак е поделен на три еднакви делови и низ делбените точки се повлечени прави паралелни со основите. Пресметај ги должините на отсечките што од тие прави ги отсекуваат краците на трапезот.

76. Нацртај три отсечки a, b, c и конструирај отсечка x којашто го задоволува равенството:

а) $a : b = c : x;$ б) $a : b = x : c;$ в) $a : x = b : c.$

(x се вика четврта геометриска пропорционала за $a, b, c.$)

77. Конструирај ја четвртата геометриска пропорционала на три дадени отсечки a, b и c ($a : b = c : x$), ако :

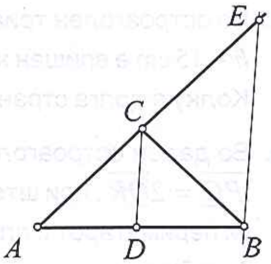
а) $a = 2c;$ б) $b = c;$ в) $c = a + b.$

78. Во ΔABC, CD е симетрала на аголот ACB, а E е пресек на правата AC со правата низ B што е паралелна со DC. Покажи дека:

а) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{CE};$

б) ΔBEC е рамнокрак $\left(\overline{BC}=\overline{CE}\right)$;

в) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{CB}.$



79. Во ΔABC, CD е симетрала на $\sphericalangle ACB$. Најди ги $\overline{AD}$ и $\overline{BD}$, ако:

а) $\overline{CA}=12$, $\overline{CB}=8$ и $\overline{AB}=10$; б) $a = 7, b = 7$ и $c = 10;$

в) $a : b = 5 : 4$ и $c = 18.$

80. Триаголникот ABC има страни $\overline{AC}=6\text{dm}$ и $\overline{BC}=3\text{dm}$ и $\sphericalangle ACB=120^0$. Симетралата на овој агол ја сече страната AB во точката D. Пресметај ја должината на отсечката $\overline{CD}$.

81. Во ΔABC е впишан ромб $ADMN$ така што темињата D, M, N лежат соодветно на страните AB, BC, AC. Најди ги должините на отсечките BM и MC, ако $\overline{AB}=20\text{cm}$, $\overline{BC}=16\text{cm}$ и $\overline{AC}=12\text{cm}$.

82. Избери (т.е. нацртај) три отсечки a, b, c и конструирај отсечка x којашто го задоволува равенството:

а) $x = \frac{ab}{c}$; б) $x = \frac{b^2}{a}$; в) $x = \frac{2a^2}{c}$; г) $x = \frac{a}{bc}$; д) $x = \frac{c}{a^2}$.

83. Дадени се отсечките a и b, $a > b$. Користејќи ги својствата на пропорции. конструирај отсечка x којашто го задоволува условот $(a + x) : (a - x) = a : b$.

84. Конструирај делтоид $ABCD$ $(\sphericalangle A = \sphericalangle C)$ ако $\overline{BD} = 7\,\text{cm}$, $\sphericalangle A = 105^0$, $\overline{AB} : \overline{AD} = 3 : 2$.

85. Конструирај трапез $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ ако $\sphericalangle B = 75^0$, $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 3\,\text{cm}$ и $\overline{BA} : \overline{BC} = 4 : 3$.

86. Крајните точки на дијаметарот од една кружница се оддалечени од некоја тангента на кружницата 3 cm и 13 cm. Пресметај го радиусот на кружницата.

87. Докажи дека правата што минува низ пресекот на продолженијата на краците на еден трапез и средината на едната основа, ја преполовува другата основа.

88. Во остроаголен триаголник со страна $a = 10\,\text{cm}$ и соодветна висина $h = 15\,\text{cm}$ е вишан квадрат така што две темиња му лежат на страната a. Колку е долга страната на вписаниот квадрат?

89. Во даден остроаголен ΔABC е вписан правоаголник $PQRS$, таков што $\overline{PQ} = 2\overline{QR}$, при што точките P и Q припаѓаат на страната AB. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот ако $\overline{AB} = 40\,\text{cm}$ и $h_c = 20$ cm.

90. Докажи дека средната линија на триаголник е паралелна со третата страна и е еднаква на плоштината од таа страна.

91. Тежишните линии на триаголник се сечат во една точка T, наречена тежиште. Докажи дека T ги дели тежишните линии во однос 2 : 1.

92. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник. Подели го со четири прави на три складни квадрати и три складни триаголници.

93. Во рамнокрак триаголник, висината кон основата е 20 cm, а односот на основата и кракот е 4 : 3. Најди го радиусот на впишаната кружница на триаголникот.

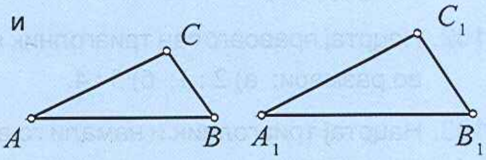
6 СЛИЧНИ ФИГУРИ. СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Треба да знаеш

За два триаголници, ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, се вели дека се слични (запишуваме: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$) ако соодветните агли им се еднакви и соодветните страни им се пропорционални, т.е.

$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ и

$\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = \overline{BC} : \overline{B_1C_1} = \overline{CA} : \overline{C_1A_1}$.



Коефициентот на пропорционалноста на соодветните страни се вика коефициент на сличноста на тие триаголници.

94. Одреди дали може да се слични два триаголници коишто имаат агли:

а) 60^0 и 70^0, односно 50^0 и 80^0; б) 55^0 и 40^0, односно 85^0 и 55^0;

в) 70^0 и 80^0, односно 40^0 и 80^0.

95. Можат ли страните на два слични триаголници да ги имаат следниве должини:

а) 1,5 m; 1,8 m; 2,7 m и 20 cm, 24 cm, 36 cm;

б) 0,6 dm; 0,8 dm; 1,5 dm и 12 dm, 16 dm, 30 dm;

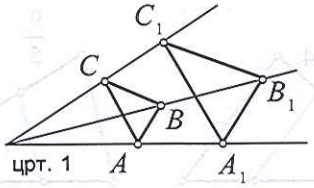
в) 1,2 cm; 1,6 cm; 2,4 cm и 9 m, 12 m, 15 m;

г) 12 cm; 10 cm; 16 cm и 2,5 cm; 3 cm; 4 cm.

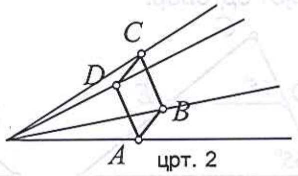
96. Триаголникот $A_1B_1C_1$ е сличен на триаголникот ABC (црт. 1).

а) Нацртај $\Delta A_2B_2C_2$ помал и сличен на ΔABC.

б) Нацртај $\Delta A_3B_3C_3$ поголем и сличен на $\Delta A_1B_1C_1$.



црт. 1



црт. 2

97. Нацртај фигура $A_1B_1C_1D_1$ слична на фигурата $ABCD$ на црт. 2.

98. Нека $\Delta ABC \sim \Delta FGH$. Најди ги:

а) $\overline{AB}$ и $\overline{GH}$, ако $\overline{AC} = 12$, $\overline{FH} = 8$, $\overline{BC} = 15$, $\overline{FG} = 6$;

б) $\overline{BC}$ и $\overline{FH}$, ако $\overline{AB} = 16$, $\overline{FG} = 40$, $\overline{AC} = 12$, $\overline{GH} = 50$.

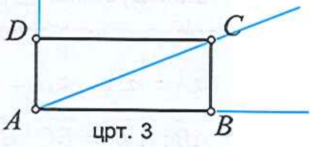
99. Во сличните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ се: $\overline{AB}=6\text{cm}$, $\overline{BC}=10\text{cm}$, $\overline{A_1B_1}=4{,}2\text{cm}$, $\overline{A_1C_1}=9{,}8\text{cm}$. Одреди ги должините на страните AC и B_1C_1.

100. Страните на ΔABC се 6,9 и 7,5, а најголемата страна на $\Delta A_1B_1C_1$, којшто е сличен на ΔABC, е 12. Најди го периметарот на $\Delta A_1B_1C_1$.

101. Даден е правоаголник $ABCD$ (црт. 3). Нацртај сличен правоаголник:

а) $A_1B_1C_1D_1$, помал од $ABCD$;

б) $A_2B_2C_2D_2$, поголем од $ABCD$.



црт. 3

102. Нацртај правоаголен триаголник и зголеми го во размери: а) 2 : 1; б) 5 : 4.

103. Нацртај триаголник и намали го во размер: а) 1 : 3; б) 3 : 5.

104. Дадено е: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Најди ги:

а) c и b_1, ако $a=30$, $b=42$, $a_1=75$, $c_1=60$;

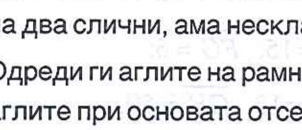
б) c, ако $a=35$, $a_1=21$, $c - c_1=8$.

105. Страните на еден триаголник се однесуваат како 3 : 4 : 6. Најмалата страна на друг, нему сличен триаголник е 9 cm. Најди ги должините на другите две страни на другиот триаголник.

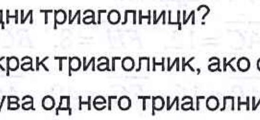
106. Страните на еден триаголник се однесуваат како 5 : 6 : 3, а најмалата страна на друг, нему сличен триаголник е 3,6 cm. Пресметај го периметарот на другиот триаголник.

107. Страните на еден триаголник се 8, 12 и 16, а производот на страните на друг, нему сличен триаголник е 192. Одреди ги страните на другиот триаголник.

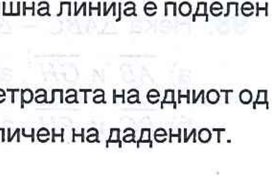
108. Утврди дали се слични триаголниците на црт. 4, црт. 5 и црт. 6. Образложи го твојот одговор.



црт. 4



црт. 5



црт. 6

109. Дали постои триаголник којшто со некоја своја тежишна линија е поделен на два слични, ама нескладни триаголници?

110. Одреди ги аглите на рамнокрак триаголник, ако симетралата на едниот од аглите при основата отсекува од него триаголник сличен на дадениот.

111. Два слични рамнокраки триаголници имаат основи 10 cm, односно 6 cm. Пресметај го периметарот на секој од тие триаголници ако кракот на триаголникот:

а) со поголемата основа е 15 cm;

б) со помалата основа е 15 cm.

112. Даден е ΔABC со страни 3, 5, 6. Конструирај нему сличен триаголник $A_1B_1C_1$, ако: а) најмалата страна му е 4; б) коефициентот на сличноста е $\frac{4}{3}$.

113. Може ли да бидат слични два правоаголни триаголници што не се складни, а имаат еднакви хипотенузи? Објасни го твојот одговор.

114. Ако точките M и N ги делат соодветно страните AC и BC на ΔABC во однос 2 : 3, тогаш $\Delta ABC \sim \Delta MNC$. Докажи!

7 ПРВ ПРИЗНАК ЗА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Треба да знаеш

- За два триаголници да се слични доволно е два агли од едниот триаголник да се еднакви со два агли од другиот триаголник. (Ова е првиот признак за слични триаголници.)
- Според тоа:

☐ За два правоаголни триаголници да се слични доволно е еден остар агол од едниот триаголник да е еднаков на едниот остар агол од другиот триаголник.

☐ За два рамнокраки триаголници да се слични доволно е аголот при врвот на едниот да е еднаков со аголот при врвот на другиот триаголник.

115. Два агли на еден триаголник имаат 80^0 и 65^0, а на друг триаголник имаат 45^0 и 80^0. Провери дали се слични тие два триаголници.

116. Два а) правоаголни; б) рамнокраки триаголници имаат еднакви по еден остар агол. Дали мора да бидат слични? Образложи го твојот одговор.

117. Еден правоаголен триаголник има остар агол 25^0, а друг правоаголен триаголник има агол 65^0. Дали се слични?

118. Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник е 76^0, а аголот при основата на друг рамнокрак триаголник е 52^0. Дали се слични тие триаголници? Објасни го одговорот.

119. Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник е 52^0, а аголот при основата на друг рамнокрак триаголник е 76^0. Дали тие триаголници се слични?

120. Во рамнокрак триаголник ABC се повлечени нееднаквате висини AA_1 и CC_1. Докажи дека $\Delta ABA_1 \sim \Delta CAC_1$.

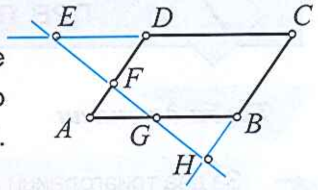
121. Во ΔABC се повлечени висините AA_1 и BB_1; тие се сечат во точката O. Колку триаголници слични меѓу себе се добиени на тој начин? Именувај ги.

122. Во ΔABC се познати страните $\overline{AC} = 12\,\text{cm}$ и $\overline{BC} = 16\,\text{cm}$. На страната AC е избрана точка E, таква што $\overline{EC} = 4{,}8\,\text{cm}$. Низ E е повлечена права паралелна со AB. Таа права ја сече BC во точката F.

а) Објасни зошто $\Delta EFC \sim \Delta ABC$. б) Пресметај го $\overline{CF}$.

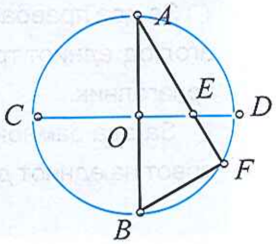
123. Дадена е отсечката AB и внатрешна точка M на отсечката. Докажи дека односот на растојанијата од крајните точки на отсечката AB до која било права што минува низ M е константа.

124. Правата p ги сече страните (или нивните продолженија) на паралелограмот $ABCD$, како на цртежот. Докажи дека $\Delta DEF \sim \Delta AGF \sim \Delta BGH$.



125. Во кружница се повлечени две тетиви, AB и CD, што се сечат во точката S. а) Докажи дека, ако се сврзат краевите на тие тетиви, ќе се добијат два слични триаголници. б) Најди врска меѓу деловите на тетивите AB и CD направени со точката S.

126. На цртежот, дијаметрите AB и CD се заемно нормални. Докажи дека $\Delta ABF \sim \Delta AEO$.



127. Во ΔABC се повлечени средните линии MN, NP и PM. Направи цртеж. Колку триаголници има на цртежот? Кои од нив се слични меѓу себе? Образложи го твојот одговор.

128. Низ темето A на основата AB од рамнокракиот триаголник ABC и средината E на висината CD е повлечена права којашто го сече кракот BC во точката G. Докажи дека $\overline{CG} : \overline{BG} = 1:2$.

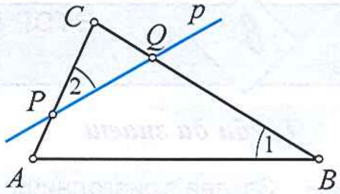
129. Покажи дека оддалеченоста на тежиштето од една страна на триаголникот е еднаква со третина од висината којашто е соодветна на таа страна.

130. Остроаголен ΔABC има висини AD и BE. Докажи дека $\overline{AC} \cdot \overline{CE} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$.

131. Во ΔABC висините AD и BE се сечат во точката H. Покажи дека производот од деловите на едната висина е еднаков со производот од деловите на другата висина, т.е. $\overline{AH}\cdot\overline{HD}=\overline{BH}\cdot\overline{HE}$.

132. Покажи дека дијагоналите на кој било трапез се сечат така што деловите на секоја дијагонала се пропорционални со паралелните страни (т.е. со основите) на трапезот.

133. Даден е ΔABC. Права p што не е паралелна со AB ги сече страните AC и BC во точките P и Q соодветно, така што $\sphericalangle 1=\sphericalangle 2$ (како на цртежот). Докажи дека $\Delta ABC \sim \Delta CPQ$.



134. Нацртај ΔABC и избери точка M на една од неговите страни. Низ точката M повлечи прави коишто од ΔABC отсекуваат триаголници слични на дадениот.

а) Колку такви прави можеш да повлечеш?

б) Колку слични триаголници се добиваат притоа?

(Разгледај ги случаите: ΔABC е 1) разностран, 2) рамнокрак и 3) рамностран, како и некои специјални положби на точката M.)

135. Од темето C во ΔABC е повлечена отсечката CE така што $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACE$ (E е точка на страната AB). Најди ја $\overline{AE}$, ако $\overline{AB}=18\text{cm}$ и $\overline{AC}=12\text{cm}$.

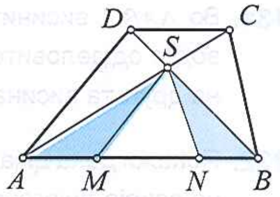
136. Во рамнокрак ΔABC аголот при основата AB е двапати поголем од аголот меѓу краците. Симетралата на $\sphericalangle A$ го сече кракот BC во точката D. Ако $\overline{AC}:\overline{AB}=k$, најди го: а) $\overline{AC}:\overline{AD}$; б) $\overline{CB}:\overline{CD}$ и в) $\overline{BD}:\overline{AB}$.

137. Во правоаголниот трапез $ABCD$ $\left(AB \parallel CD \text{ и } \sphericalangle A=90^0\right)$, повлечена е дијагоналата BD и отсечката AS, нормална на BD. Најди врска меѓу отсечките: AS, BS и DS.

138. Врвот C на еден фабрички оџак BC се гледа од една точка A, оддалечена 80 метри од подножјето B на оџакот, под агол α. Од точката D, којашто е за 60 метри поблиску до подножјето B на оџакот, врвот на оџакот се гледа под агол $90^\circ - \alpha$. Пресметај ја висината на оџакот.

139. Низ темето A на паралелограмот $ABCD$ е конструирана права p, којашто дијагоналата BD ја сече во точката F, страната DC во точката G и продолжението на страната BC во точката H.
Докажи дека $\overline{AF}^2=\overline{FH}\cdot\overline{FG}$.

140. Во нерамнокрак трапез $ABCD$, дијагоналите AC и BD се сечат во точката S. Низ S се повлечени прави, паралелни со краците AD и BC, и тие ја сечат основата AB по ред во точките M и N како на цртежот. Докажи дека ΔAMS и ΔBNS се еднаквоплошни, т.е. $P_{AMS} = P_{BNS}$.



8 ВТОР И ТРЕТ ПРИЗНАК ЗА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Треба да знаеш

- За два триаголници да се слични доволно е две страни од едниот триаголник да се соодветно пропорционални со две страни од другиот триаголник и да се еднакви аглите што ги образуваат тие два пара страни. (Ова е вториот признак за слични триаголници.)

- Третиот признак за слични триаголници гласи: За два триаголници да се слични доволно е трите страни од едниот триаголник да се пропорционални со трите страни од другиот триаголник (т.е. $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$).

141. Дали се слични ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, ако:

а) $\overline{AB}=21, \overline{AC}=35, \sphericalangle A=40^o, \overline{A_1B_1}=33, \overline{A_1C_1}=55, \sphericalangle A_1=40^o$;

б) $\overline{BC}=30, \overline{AC}=78, \sphericalangle C=50^o, \overline{B_1C_1}=20, \overline{A_1C_1}=68, \sphericalangle C_1=50^o$;

в) $\overline{AC}=15, \overline{AB}=25, \sphericalangle B=60^o, \overline{A_1C_1}=12, \overline{A_1B_1}=20, \sphericalangle B_1=60^o$?

142. Два рамнокраки триаголници имаат еднакви агли при врвот. Кракот и основата на едниот триаголник имаат 24 cm и 18 cm соодветно. Одреди го кракот на другиот триаголник ако неговата основа има 15 *cm*.

143. Во триаголниците ABC, EFG и KLM се дадени: $\sphericalangle BAC=75^o$, $\overline{AB}=9$, $\overline{AC}=6$; $\sphericalangle FEG=75^o$, $\overline{EF}=75$, $\overline{EG}=50$; $\sphericalangle KML=75^o$, $\overline{MK}=4{,}5$, $\overline{ML}=6{,}75$.

Одреди кои од тие триаголници се слични меѓу себе.

144. Дали се слични двата триаголници со страни:

а) 9, 12, 15 и 12, 16, 20;   б) 4, 4, 6 и 6, 6, 8;

в) 12, 18, 21 и 4, 7, 6;   в) 50; 20,5; 55 и 20; 8,2; 22 ?

145. Ако секоја страна на еден триаголник се зголеми трипати, ќе се добие "поголем" триаголник. Дали тие два триаголници се слични? Образложи го твојот одговор.

146. Конструирај ΔABC ако $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{AC} = 3\text{cm}$ и аголот $\sphericalangle A = 45^0$. Потоа, конструирај $\Delta A_1B_1C_1$ сличен на дадениот со коефициент на сличноста $k = \dfrac{2}{3}$.

147. Конструирај рамнокрак ΔABC $\left(\overline{AC} = \overline{AB}\right)$, а потоа сличен $\Delta A_1B_1C_1$, ако $\sphericalangle A = 30^0$, $\overline{BC} = 4\text{cm}$ и $k = \dfrac{3}{2}$.

148. Даден е ΔABC со: $\overline{AB} = 5\text{cm}$, $\overline{BC} = 3\text{cm}$ и $\overline{CA} = 4\text{cm}$. Конструирај сличен $\Delta A_1B_1C_1$ ако коефициентот к на сличноста е:

а) $k = \dfrac{1}{2}$; б) $k = \dfrac{2}{3}$; в) $k = 1$; г) $k = \dfrac{5}{3}$.

Пресметај го периметарот на $\Delta A_1B_1C_1$.

149. Даден е правоаголен ΔABC со катета $\overline{BC} = 3\text{cm}$ и хипотенуза $\overline{AB} = 4{,}5\text{cm}$. Конструирај сличен $\Delta A_1B_1C_1$ ако:

а) $k = 1{,}5$; б) $\overline{A_1B_1} = 6\text{cm}$; в) $\overline{A_1C_1} = 4\text{cm}$.

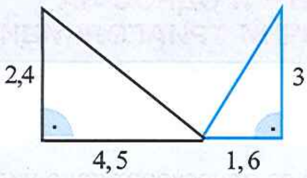
150. Нацртај ΔABC. Конструирај $\Delta A_1B_1C_1$ сличен на ΔABC така што да биде $\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = 3 : 2$. Објасни ја твојата конструкција.

151. Даден е ΔABC со страни $a = 4$ cm, $b = 5$ cm и $c = 7$ cm. Конструирај сличен $\Delta A_1B_1C_1$ и пресметај го неговиот периметар ако:

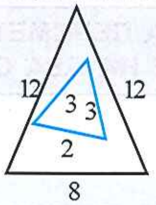
а) $a_1 = 5$ cm; б) $c_1 = 5{,}6$ cm; в) $b_1 = 4{,}5$ cm.

Кој е коефициентот k на сличноста во секој од тие случаи?

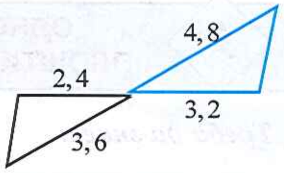
152. Провери дали се слични паровите триаголници на црт. 1; црт. 2; црт. 3, според дадените податоци. Образложи го твојот одговор.



црт. 1



црт. 2



црт. 3

153. Даден е ΔABC. На страната AB е избрана точка M, така што $\overline{AM} = 8{,}4\text{cm}$ и $\overline{MB} = 3{,}5\text{cm}$; на страната AC е избрана точка N, така што $\overline{AN} = 6\text{cm}$, а $\overline{NC} = 2{,}5\text{cm}$.

а) Дали се слични ΔAMN и ΔABC?

б) Какви се меѓу себе отсечките BC и MN?

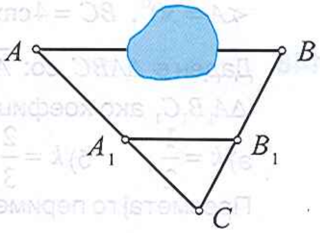
в) Колку е $\overline{BC} : \overline{MN}$? Образложи ги твоите одговори.

154. За ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ се знае дека $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C$ и $\overline{AC} : \overline{A_1C_1} = \overline{BC} : \overline{B_1C_1}$. Пресметај го периметарот на $\Delta A_1B_1C_1$, ако страните на ΔABC се $\overline{BC} = 16$, $\overline{CA} = 24$ и $\overline{AB} = 14$, а $\overline{A_1B_1} = 4,2$.

155. Дали се слични два триаголници од кои првиот има агол со 40° и две страни по $8\ cm$, а другиот има агол со 70^0 и две страни по 12 cm?

156. Дали се слични два рамнокраки триаголници ако:
а) имаат по еден еднаков тап агол;
б) имаат по еден еднаков остар агол;
в) имаат по еден прав агол?

157. Одреди го растојанието AB на цртежот, ако:
$\overline{AC} = 80\text{m}$, $\overline{A_1C} = 12\text{m}$, $\overline{BC} = 60\text{cm}$,
$\overline{B_1C} = 9\text{m}$, $\overline{A_1B_1} = 6\text{m}$.



158. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 10 cm. Ако основата a се продолжи за $1,6$ cm, а кракот b за $1,7$ cm, ќе се добие триаголник сличен на дадениот. Пресметај ги страните на двата триаголници. Одреди го коефициентот k на сличноста.

159. Размерот на соодветните страни на два слични триаголници е 4 : 7, соодветните страни на поголемиот триаголник се за 9 m, 15 m и 18 m поголеми од соодветните страни на помалиот. Пресметај ги периметрите на тие триаголници.

160. Конструирај ромб со страна 6 cm кај кој едната дијагонала е двапати поголема од другата.

9

ОДНОС НА ПЕРИМЕТРИТЕ И ОДНОС НА ПЛОШТИНИТЕ НА ДВА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Треба да знаеш

Периметрите на два слични триаголници се однесуваат како нивните соодветни страни. Уште повеќе, кај два слични триаголници соодветните: висини, тежишни линии, симетрали на агли, радиуси на впишаните и опишаните кружници имаат ист однос како соодветните страни.

Односот, пак, на плоштините на два триаголници е еднаков со односот на квадратите од соодветните страни на тие триаголници.

161. Страните на еден триаголник се 8 cm, 15 cm и 9 cm. Периметарот на друг триаголник, сличен со првиот е L_1=96 cm. Најди ги страните на другиот триаголник.

162. Даден е односот на страните a, b, c на еден ΔABC и периметарот L_1 на сличен со него $\Delta A_1B_1C_1$. Најди ги должините на страните a_1, b_1, c_1 на $\Delta A_1B_1C_1$:

а) $a : b : c = 3 : 5 : 6$ и L_1= 42 cm; б) $a : b : c = 4 : 7 : 5$ и L_1= 48 cm.

163. Страните на еден триаголник се 9 cm, 12 cm и 15 cm. Одреди ги страните на друг триаголник, сличен со него, ако:

а) коефициентот на сличноста е $k = \frac{3}{5}$;

б) најмалата страна на другиот триаголник е 18 cm;

в) периметарот на другиот триаголник е 54 cm.

164. Еден пар соодветни страни на два слични триаголници е a = 15 dm, a_1=18 dm, а висината кон страната a е 20 dm. Најди ја:

а) висината кон страната a_1; б) плоштината на триаголникот со страна a_1.

165. Во ΔABC, на растојание 3 cm од страната AC, повлечена е права $MN \parallel AC$ (M и N се пресечните точки со AB и BC соодветно). Најди ја висината на триаголникот кон страната AC, ако $AB : MB = 12 : 7$.

166. Периметрите на два слични триаголници се 42 cm и 28 cm, а една од висините на помалиот триаголник е 8 cm. Пресметај ја соодветната висина на поголемиот триаголник.

167. Два слични триаголници имаат една еднаква висина. Дали тие триаголници се еднаквоплошни?

168. Периметрите на два слични триаголници се 35 cm и 28 cm. Пресметај го односот меѓу нивните плоштини.

169. Катетите на правоаголен ΔABC се 5 cm и 12 cm, а периметарот на сличен $\Delta A_1B_1C_1$ е 45 cm. Пресметај ги страните на $\Delta A_1B_1C_1$.

170. Катетите на еден правоаголен триаголник имаат должини 9 dm и 8 dm. Пресметај ги должините на катетите од сличен со него триаголник што има плоштина 25 dm^2.

171. Страната на даден триаголник има 6 cm. Колку е должината на соодветната страна кај сличен триаголник чијашто плоштина е:

а) четирипати;

б) петпати поголема од плоштината на дадениот триаголник?

172. Сите страни на еден триаголник се зголемени по три пати. Колку пати ќе се зголеми : а) периметарот, б) плоштината на триаголникот?

173. Во ΔABC со основа $\overline{AB}=8\text{cm}$ и висина $\overline{CC_1}=12\text{cm}$ е повлечена права паралелна со AB, така што отсечката MN што ја отсекуваат од неа страните на триаголникот има 6 cm. Пресметај го растојанието на отсечката MN од темето S.

174. Основата на еден триаголник има 10 cm, а соодветната висина има 5 cm. На кое растојание од врвот на триаголникот треба да се повлече права паралелна со основата, така што нејзиниот дел зафатен во триаголникот да биде еднаков со висината (кон основата)?

175. Во триаголник со основа 20 cm и соодветна висина 15 cm, со права паралелна на основата е отсечен триаголник со плоштина 24 cm^2. Пресметај го растојанието меѓу правата и основата.

176. Плоштините на два слични триаголници се 25 cm^2 и 64 dm^2. Една од висините на првиот триаголник е 5 cm. Пресметај ја соодветната висина на вториот триаголник.

177. Периметарот на еден триаголник е 60 cm. Страната b е за 5 cm поголема од страната a, а страната c е за 5 cm поголема од b. Периметарот на сличен триаголник е 36 cm. Пресметај ги должините на страните на тие триаголници.

178. Плоштините на два слични триаголници се однесуваат како 9 : 16. Основата на поголемиот триаголник е 12 cm, а соодветната висина е 8 cm. Пресметај ги: основата, висината и плоштината на помалиот триаголник.

179. Коефициентот на сличноста на два триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ е 2,5. Одреди ги должините на симетралите на аглите C и C_1 (од темето до спротивната страна), ако нивната разлика е 6 cm.

180. Дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O. Докажи дека за плоштините на триаголниците што имаат едно теме O важи равенството: $P_{ABO} : P_{BCO} = P_{DAO} : P_{CDO}$.

181. Страните на еден триаголник се однесуваат како 4 : 5 : 6. Конструирај го тој триаголник, ако:

а) најдолгата висина му е 7 cm;

б) тежишната линија, којашто одговара на најдолгата страна е 5,5 cm;

в) радиусот на опишаната кружница му е 6 cm.

182. Конструирај триаголник ABC ако се дадени двата агли $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ и е дадена тежишната линијас t_c (повлечена од темето C). Образложи ја твојата конструкција.

183. Во правоаголен ΔABC со катети 45 cm и 60 cm е впишана кружница, а во неа е впишан $\Delta A_1B_1C_1$ сличен со ΔABC . Пресметај ги периметарот и плоштината на $\Delta A_1B_1C_1$.

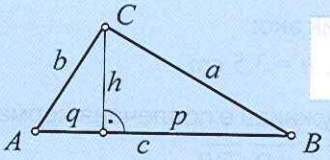
184. Две кружници со радиуси $r_1 = 2$ cm и $r_2 = 3$ cm се допираат однадвор. Правата p е заедничка тангента којашто ги допира кружниците – поголемата во точката A, а помалата во точката B. Ако точката C е пресекот на правите p и S_1S_2 (S_1 и S_2 се центрите на кружниците) пресметај ги:

а) $\overline{CS_2}$ и $\overline{BC}$; б) периметарот и плоштината на ΔCAS_1.

10 СЛИЧНОСТ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Треба да знаеш

Ако триаголникот ABC (на цртежот) е правоаголен, со прав агол во темето C, тогаш:



$$h = \sqrt{pq},\ a = \sqrt{cp},\ b = \sqrt{cq}.$$

Овде и во задачите што следат се употребени следниве ознаки во правоаголен триаголник:

- a и b се катетите, а c е хипотенузата;
- h е висината спуштена кон хипотенузата;
- p и q се ортогоналните проекции на катетите a и b , соодветно, врз хипотенузата.

185. Според дадените два од елементите a, b, c, h, p и q во правоаголен триаголник, пресметај ги преостанатите четири (должините се во cm).

а) $a = 15$, $p = 9$; б) $a = 16$, $c = 20$; в) $b = 10$, $q = 5$; г) $h = 8$, $p = 16$.

186. Пресметај четири од елементите a, b, c, h, p, q, а потоа плоштината и периметарот на правоаголен триаголник ако:

а) $p = 10{,}8$ cm, $q = 19{,}2$ cm; б) $b = 10$ cm, $q = 8$ cm;
в) $a = 13$ cm, $h = 12$ cm; г) $h = 9{,}6$ cm, $p = 12{,}8$ cm.

187. Во правоаголен триаголник пресметај ги:

а) a и c, ако: $b = 8$ и $h = 4{,}8$;   б) a и b, ако: $h = 6$ и $q = 14{,}4$;

в) b и h, ако: $a = 2{,}5$ и $p = 2$;

г) h и r, ако; $b = 16$ и $c = 20$ (r е радиусот на впишаната кружница);

д) a, b и R, ако: $p = 9$ и $q = 16$ (R е радиусот на опишаната кружница).

188. Најди ја плоштината на рамнокрак правоаголен триаголник, ако неговата хипотенуза е: а) 10; б) c.

189. Конструирај отсечка со должина: а) $\sqrt{3}\,\text{cm}$; б) $\sqrt{6}\,\text{cm}$; в) $\sqrt{8}\,\text{cm}$.

190. Конструирај квадрат со плоштина: а) $12\ \text{cm}^2$; б) $20\ \text{cm}^2$; в) $28\ \text{cm}^2$.

191. Нацртај две отсечки, а потоа конструирај нивна геометриска средина.

192. Нацртај разностран триаголник. Потоа, конструирај геометриска средина на отсечките: а) AB и BC; б) AB и AC; в) AC и BC.

193. Конструирај правоаголен триаголник ако:

а) $p = 2$ cm, $q = 3$ cm;   б) $b = 4$ cm, $q = 3$ cm;   в) $a = 5$ cm, $p = 2{,}5$ cm.

194. Конструирај правоаголен триаголник ако е дадено:

а) $c = 7$ cm, $h = 3$ cm;   б) $h = 4$ cm и $p = 3{,}5$ cm.

195. Конструирај правоаголен триаголник ако:

а) $a = 5$ cm, $h = 3$ cm; б) $d = 6$ cm, $h = 3{,}5$ cm.

196. Од произволна точка C на една кружница е повлечена нормалата CD на дијаметарот AB. Докажи дека $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

197. Еден од острите агли на правоаголен триаголник е еднаков на аритметичката средина од другите два. Најди ги неговите катети и плоштината, ако хипотенузата е: а) 8 cm; б) c.

198. Нацртај три отсечки a, b, c. Потоа конструирај отсечка x:

а) $x = \sqrt{2bc}$;   б) $x = \sqrt{\dfrac{ab}{2}}$;   в) $x = \sqrt{(a+b)c}$.

199. Проекциите на катетите врз хипотенузата во еден правоаголен триаголник се 2 и 3.

а) Пресметај ги катетите и висината (кон хипотенузата).

б) Конструирај го тој триаголник.

200. Висината кон хипотенузата има $\sqrt{18}\,(\text{cm})$ и ја дели хипотенузата на отсечоци p и q. Ако p и q се природни броеви пресметај ја плоштината P и периметарот L на тој триаголник. Колку решенија има задачата?

201. Една страна на правоаголник е 16 cm, а дијагоналата е 20 cm. Од едно теме на правоаголникот е повлечена нормала на дијагоналата. Пресметај ја плоштината на правоаголникот и односот на отсечките, на кои нормалата ја дели дијагоналата.

202. Во правоаголникот $ABCD$ страната $a = \overline{AB}$ е двапати поголема од страната $b = \overline{BC}$. Во него е впишана полукружница со дијаметар $\overline{AB}$. Во кој однос полукружницата ја дели дијагоналата AC на правоаголникот?

11 ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

Треба да знаеш

- Ако ΔABC е правоаголен, тогаш квадратот над хипотенузата c е еднаков со збирот од квадратите над катетите a и b, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$ (Питагорова теорема).
- Важи и обратното: Ако за еден триаголник со страни a, b и c важи равенството $a^2 + b^2 = c^2$, тогаш тој триаголник е правоаголен, со хипотенуза c.

203. Најди ја непознатата страна на правоаголниот триаголник со катети a, b и хипотенуза c. а) $a = 20$ cm, $b = 48$ cm, $c = ?$; б) $c = 2{,}9$ cm, $b = 2$ cm, $a = ?$; в) $a = 0{,}3$ cm, $c = 0{,}34$ cm и $b = ?$

204. Најди ја основата на рамнокрак триаголник со висина 3,5 dm и крак 3,7 dm.

205. Периметарот на еден рамнокрак триаголник со крак 41 m изнесува 100 m. Најди ја висината на тој триаголник.

206. Во остроаголен триаголник се дадени две страни и висината што одговара на третата страна. Пресметај ги: третата страна, плоштината и другите две висини на триаголникот.

а) $a = 40$ cm, $c = 25$ cm, $h_b = 24$ cm; б) $b = 53$ cm, $c = 51$ cm, $h_a = 45$ cm.

207. Во остроаголен триаголник се дадени отсечоците m и n што ги прави висината h на една од страните и таа висина. Пресметај ги: страните, периметарот, плоштината и другите две висини на триаголникот.

а) $m = 7$, $n = 10$, $h = 24$; б) $m = 9$, $n = 30$, $h = 40$.

208. Страните на еден триаголник се однесуваат како 7 : 24 : 25. Докажи дека триаголникот е правоаголен.

209. Катетите на правоаголен триаголник се однесуваат како $5:12$, а неговиот периметар изнесува 60 cm. Колку изнесуваат: а) страните; б) радиусот на опишаната кружница; в) радиусот на впишаната кружница на триаголникот?

210. Пресметај ја должината на хипотенузата на правоаголен триаголник ако едната катета е 10 cm и: а) другата катета е за 2 cm покуса од хипотенузата; б) односот на другата катета и хипотенузата е $3:5$.

211. Катетите a, b на правоаголен триаголник се зададени со равенствата:
а) $2a + 6 = 30,\ 18 - b = 2$;
б)$(a-2)^2 - (a+2)\,(a-5) + 16 = 0,\ \ 4b - 74 = b - 2(b-3)$.
Пресметај го радиусот на опишаната кружница на триаголникот.

212. Провери дали се еднаквоплошни два триаголници чиишто мерни броеви на страните се: 10, 10, 12 и 10, 10, 16.

213. Должината на една двојна скала е 10 m. До кој висина ќе стигне скалата ако нејзините краеви се поставени на растојание 4 m еден од друг?

214. Едно дрво, по некоја бура, било прекршено така што неговиот врв ја допрел земјата на оддалеченост 3 m од подножјето на стеблото. На кој висина било прекршено дрвото ако се знае дека неговата висина била 9 m?

215. Праволиниски, наклонет пат, има искачување 20 cm на секои 3 m должина. Колку метри ќе се искачи патот на растојание од 270 m?

216. Дијагоналата на еден правоаголник е 17 dm, а едната страна е 8 dm. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот.

217. Колку треба да биде дијаметарот на круг за да може во него да се впише правоаголник со димензии 8 cm и 15 cm?

218. Периметарот на еден триаголник е 90 cm. Најдолгата страна е за 3 cm подолга од другата и за 24 cm подолга од третата страна. Пресметај ги страните на тој триаголник. Покажи дека тој триаголник е правоаголен.

219. Три шатори на еден извиднички одред се распоредени така што најкусите патишта меѓу нив чинат правоаголен триаголник чиишто катети се 18 m и 24 m. На кое место треба да се постави логорскиот оган за да бидат подеднакво осветлени сите три шатори? Колку е оддалечен огнот од секој шатор?

220. Периметарот на еден правоаголник е 112 m, а едната негова страна е 32 m. Најди ја дијагоналата на правоаголникот.

221. Периметарот на еден правоаголник изнесува 42 cm, а разликата на соседните страни 3 cm. Најди ја дијагоналата и плоштината на правоаголникот.

222. Даден е квадрат $ABCD$ со страна 12 cm. На страната AD е избрана точка M, а на страната BC – точка N, така што $\overline{DM}=3\text{cm}$ и $\overline{BN}=4\text{cm}$. Пресметај ја $\overline{MN}$.

223. Околу квадрат со страна $a\,(=8\,cm)$ е опишана кружница и во него е впишана кружница. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен ограничен со тие кружници.

224. Должината на отсечката чиишто крајни точки се едно теме на квадрат и средината на една од спротивните страни е а) 15 cm; б) c. Пресметај ја плоштината на квадратот.

225. Патник поминал 7 km одејќи на југ, потоа 12 km одејќи на исток и најпосле 16 km на север. Колку километри на крајот од патот бил оддалечен од почетната точка?

226. Кајче и брод почнале да се движат по краците на прав агол почнувајќи од темето на аголот. Кајчето минувало секој час 7 km, а бродот 24 km.

а) Колкаво е нивното меѓусебно растојание по три часа?

б) Колку време треба да измине за нивното растојание да биде $112{,}5km$?

227. Од жица долга 96 cm треба да се направи рамнокрак триаголник со висина кон основата 24 cm. На колку cm од краевите треба да се превитка жицата (т.е. колкави да бидат страните) за да се направи триаголникот?

228. Периметарот на еден ромб изнесува 104 cm, а едната негова дијагонала е 20 cm. Пресметај ги: другата дијагонала; плоштината; радиусот на впишаната кружница, на ромбот.

229. Средната линија на рамнокрак трапез е 24, а основите се однесуваат како 3 : 1. Најди ја плоштината на трапезот, ако кракот е 20.

230. Делтоид се состои од два рамнокраки триаголници, чијашто заедничка основа изнесува 30 cm, а краците 17 cm и 25 cm. Пресметај ја плоштината на делтоидот.

231. Дадени се два концентрични круга со дијаметри 26 cm и 10 cm. Пресметај ја должината на тетивата којашто го допира малиот круг.

232. Две еднакви кружници со радиус $R\,(=6\text{ cm})$ се сечат така што секоја од нив минува низ центарот на другата. Најди ја должината на заедничката тетива.

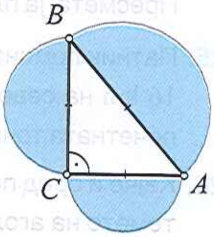
233. Периметарот на правоаголен триаголник е 80 cm. Едната катета е $a = 30$ cm. Најди ја другата катета.

234. Рамностран триаголник со страна 10 cm да се подели со висината на два правоаголни триаголници и во секој од нив да се впише кружница. Пресметај го растојанието меѓу центрите S_1 и S_2 на тие кружници.

235. Најди го односот на: а) радиусите; б) периметрите; в) плоштините на две кружници од кои едната е опишана, а другата е впишана во рамностран триаголник со страна a.

236. Една кружница е конструирана така што секоја страна од еден квадрат ја дели на по 3 еднакви делови. Колку изнесува плоштината на соодветниот круг ако страната на квадратот изнесува 18 cm?

237. Даден е правоаголен ΔABC. Одреди ја зависноста меѓу плоштините на трите полукругови, конструирани над страните на триаголникот, како над дијаметри (види го цртежот). Каков заклучок ќе се добие ако се конструираат правилни триаголници, наместо полукругови?



238. На бројна права одреди ги точките коишто одговараат на броевите $\sqrt{2};\ 3\sqrt{2};\ 2\sqrt{3};\ \sqrt{10};\ \sqrt{24}.$ (За единична отсечка земи 1 cm.)

239. Постојат само три триаголници чијшто мерен број на периметарот е 12 и чиишто мерни броеви на страните се природни броеви.

а) Пронајди ги тие три триаголници. (Покажи дека еден е правоаголен, еден е рамностран и еден е рамнокрак.)

б) Најди ги мерните броеви на нивните плоштини и покажи дека $2P_1^2 = P_2^2 + P_3^2$, каде што P_1 е мерниот број на плоштината на правоаголниот триаголник.

240. Во еден правоаголен триаголник збирот на катетите е 16 dm, а хипотенузата е 12 dm. Пресметај го радиусот на впишаната кружница.

241. Дадена е права и на неа три точки A, B и C, такви што $\overline{AB} = 12\text{cm}$ и $\overline{BC} = 8\text{cm}$ (B е меѓу а A и C). Над отсечките AB и BC како над страни конструирани се рамнострани триаголници ABD и BCE, од иста страна на правата. Пресметај ја: а) плоштината на четириаголникот $ADEC$; б) должината на отсечката DE.

242. Над секоја страна на рамностран триаголник се конструирани квадрати. Слободните темиња на квадратите се сврзани така што е добиен шестаголник. Пресметај ја плоштината на шестаголникот ако страната на триаголникот е a (= 10 cm).

243. Даден е квадрат со страна a (= 5 cm). Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник и слободните темиња на тие триаголници (означи ги со: E, F, G, H) се сврзани по ред, со отсечки.

а) Докажи дека добиениот четириаголник $EFGH$ е квадрат.

б) Пресметај ја дијагоналата $d = \overline{EG}$ и плоштината P на добиениот квадрат.

244. Аглите на подолгата основа на еден трапез се конплементни. Покажи дека страните на тој трапез го задоволуваат равенството $(a-b)^2 = c^2 + d^2$, каде што a и b се основите, а c и d се краците на трапезот.

12 ЗАДАЧИ ПЛУС ЗА ТЕМА 1

245. Отсечка со должина 89,6 cm да се подели на четири делови, така што $\frac{1}{2}$ од првиот дел да е еднаква на $\frac{1}{3}$ од вториот, $\frac{1}{3}$ од вториот да е еднаков на $\frac{1}{4}$ од третиот и $\frac{1}{4}$ од третиот да е еднаков на $\frac{1}{5}$ од четвртиот. По колку cm има секој од тие делови?

246. Меѓу градовите A и B се наоѓаат селата S и T, при што S е меѓу A и T. Растојанието $\overline{AB}$ се однесува кон растојанието $\overline{AS}$ како 5 : 2, а растојанието $\overline{TB}$ кон $\overline{AB}$ – како 1 : 5. Најди го растојанието меѓу A и B, ако се знае дека $\overline{ST} = 16$ km.

247. Три правоаголници имаат еднакви плоштини. Во каков однос се нивните должини a_1, a_2 и a_3, ако ширината b_1 на првиот се однесува кон ширината b_2 на вториот како 3 : 4, а ширината b_3 на третиот е еднаква со збирот од ширините на првите два?

248. Од едно парче жица треба да се направат три квадрати така што нивните периметри да се однесуваат како 7 : 5: 3. Кога жицата би се поделила во однос 5 : 3 : 2, едниот од трите квадрати би имал за 25 cm поголем периметар отколку соодветниот квадрат при првата поделба на жицата. Колку е долга жицата? Колку cm е периметарот на секој од квадратите:

а) при првата поделба; б) при втората поделба?

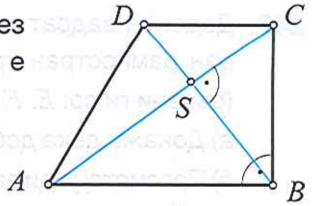
249. Краците на еден трапез се 5 cm и 7 cm, а средната линија го разделува трапезот на два дела, чиишто плоштини се однесуваат како 5 : 3. Најди ги основите на трапезот, ако се знае дека во него може да се впише кружница.

250. Конструирај триаголник ABC, ако $\measuredangle A = 60^0$, $\overline{BC} = 5\text{cm}$ и $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 2$.

251. Дијагоналите AC и BD на правоаголниот трапез $ABCD$ се заемно нормални (црт. 1). Основата е $\overline{AB} = 8\text{cm}$ и висината е $\overline{BC} = 6\text{cm}$.

а) Одреди го односот $\overline{AS} : \overline{SC}$.

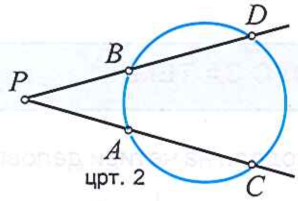
б) Пресметај ги $\overline{CD}$ и $\overline{BD}$.



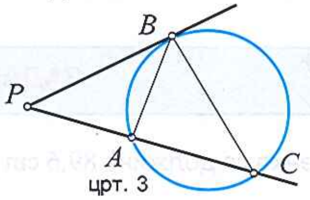
црт. 1

252. Дадена е кружница k и точка P надвор од кружницата.

а) Од P се повлечени две пресечки, PC и PD, што ја сечат кружницата и во точките A и B, соодветно (црт. 2). Докажи дека: $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$.



црт. 2



црт. 3

б) Од точката P е повлечена пресечка PC и тангента PB на кружницата (црт. 3). Докажи дека тетивата AB отсекува од ΔPBC нему сличен ΔPAB и дека $\overline{PB}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PC}$.

253. Две страни на еден триаголник се $\overline{AC} = 12\text{cm}$ и $\overline{BC} = 6\text{cm}$, а аголот меѓу нив е 120°. Колкава е должината на симетралата CD на тој агол?

254. Даден е ΔABC со страни $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\overline{BC} = 8\text{cm}$ и $\overline{AC} = 4\text{cm}$. Симетралата на аголот A ја сече страната BC во точката D. Низ точката D е конструирана права, паралелна со AC, а пресекот со AB е означен со E. Пресметај ги должините на отсечките BD, DC и DE.

255. Даден е ΔABC , чиишто две страни се 20 cm и 30 cm. Во него е вишан ромб, така што еден агол на ромбот се совпаѓа со аголот на триаголникот што го образуваат дадените страни, а четвртото теме на ромбот е на третата страна од триаголникот.

а) Конструирај го ромбот.

б) Пресметај ја должината на страната на ромбот.

256. Во внатрешната област на еден квадрат $ABCD$ е дадена точка S, таква што $\measuredangle ASB = 90^0$ и $\overline{BS} = 12\text{cm}$. Правата BS ја сече отсечката CD во точката T, така што $\overline{DT} : \overline{TC} = 1 : 3$. Пресметај ја плоштината на квадратот.

257. Даден е квадрат $ABCD$ со страна 5 cm. Конструирај права p низ темето B којашто ќе ја сече страната AD во точка M така што $P_{BCDM}:P_{ABM}=4:1.$

258. Во рамнокрак ΔABC со основа $\overline{AB}=24\text{cm}$ и крак $b=\overline{AC}=20\text{cm}$, конструирана е висината $h_b=\overline{BE}$ и таа ја сече висината CD во точката H. Пресметај ја должината $\overline{DH}$.

259. Збирот од должините на катетите на еден правоаголен триаголник е 14 cm, а хипотенузата е 10 cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот без да ги пресметуваш катетите.

260. Во ΔABC точката T е тежиштето. Нека на страните AB, BC, CA се дадени по ред точките F, G и H, такви што $TF\parallel AC,\ TG\parallel AB$ и $TH\parallel BC$. Докажи дека со овие отсечки триаголникот е поделен на три трапези со еднакви плоштини.

261. Висината на еден правоаголен ΔABC, повлечена од темето C на правиот агол кон хипотенузата, го дели правиот агол во однос $1:2.$ Најди го односот $\overline{AD}:\overline{DB},$ каде што D е подножјето на висината спуштена од C.

262. Разликата на хипотенузата и едната катета на правоаголен триаголник е 9 cm, а збирот на тие страни е 25 cm. Пресметај го радиусот на вписаната кружница.

263. Ортоцентарот H на ΔABC ја дели висината AA_1 така што $\overline{AH}:\overline{HA_1}=1:1$ и висината BB_1, така што $\overline{BH}:\overline{HB_1}=2:1.$ Одреди го размерот $\overline{CH}:\overline{HC_1}$, каде што CC_1 е третата висина на ΔABC.

264. Вписаната кружница ја дели едната катета во правоаголен триаголник на делови од 20 cm и 4 cm. Пресметај ја хипотенузата и плоштината на тој триаголник.

265. Даден е трапез $ABCD$ чиишто основи се $\overline{AB}=30\text{cm}, \overline{CD}=20\text{cm}$ и краци $\overline{AD}=10\text{cm}$ и $\overline{BC}=12\text{cm}$. Ако се продолжат краците, ќе се сечат во точка E. Пресметај ги периметарот и плоштината на ΔABE.

266. Висината на рамнокрак трапез е 24 cm, радиусот на опишаната кружница е 25 cm, а центарот се наоѓа на подолгата основа. Пресметај ги плоштината и периметарот на трапезот, и конструирај го намален десетпати.

267. Најди ги радиусите на две кружници, од кои едната е опишана околу рамностран триаголник, а другата вписана во него, ако разликата на тие радиуси е 3 cm.

268. Дијагоналата AC на квадратот $ABCD$, со страна $a=9$ cm, подели ја на три еднакви делови: AM, MN и NC; над MN, како над дијаметар, конструирај кружница. Повлечи тангента AT на кружницата и пресметај ја $\overline{AT}$, T е допирната точка.

269. Основата на еден ΔABC е $c=\overline{AB}=11,2\text{cm}$, соодветната висина $h_c=3\text{cm}$ и тежишната линија t_c=3,4 cm. Пресметај ги страните $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ на триаголникот и конструирај го.

270. Во рамнокрак правоаголен ΔABC, со прав агол во темето C, дадена е точка M, така што $\overline{AM}=6\text{cm}$, $\overline{BM}=3\sqrt{2}$ cm и $\overline{CM}=3\text{cm}$. Покажи дека ΔAMC е правоаголен (со прав агол во темето M). Пресметај ја плоштината на ΔABC.

271. Дијагоналите на еден трапез $ABCD$ се $\overline{AC}=40\text{cm}$ и $\overline{BD}=30\text{cm}$, а висината му е 24 cm. Пресметај ја плоштината P и покажи дека дијагоналите се заемно нормални.

272. Два радиуса, SA и SB на една кружница, при што $\overline{SA}=4\text{cm}$, ја делат тетивата $\overline{CD}=6\text{cm}$, на три еднакви делови. Пресметај ги (приближно, на две децимали):

а) растојанието d_1 на CD од S; б) $\overline{AB}$;

в) плоштината P на трапезот $ABCD$.

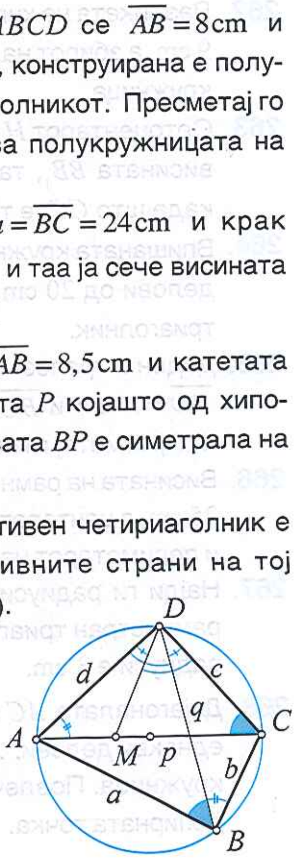
273. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се $\overline{AB}=8\text{cm}$ и $\overline{BC}=4\text{cm}$. Над страната AB, како над дијаметар, конструирана е полукружница којашто ги сече диагоналите на правоаголникот. Пресметај го односот на отсечките AM и MC што ги отсекува полукружницата на дијагоналата AC.

274. Во рамнокрак триаголник ABC со основа $a=\overline{BC}=24\text{cm}$ и крак $b=\overline{AB}=20\text{cm}$, конструирана е висината $h_a=\overline{AD}$ и таа ја сече висината $h=\overline{BE}$ во точка H. Пресметај ја должината $\overline{DH}$.

275. Во правоаголен ΔABC е дадена хипотенузата $\overline{AB}=8,5\text{cm}$ и катетата $\overline{AC}=7,5\text{cm}$. На катетата AC е означена точката P којашто од хипотенузата е оддалечена 2,4 cm. Покажи дека правата BP е симетрала на аголот B.

276. Покажи дека производот на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков со збирот од производите на спротивните страни на тој четириаголник, т.е. $p\cdot q=a\cdot c+b\cdot d$ (црт. зад. 32).

Помош. На цртежот, конструиран е $\measuredangle ADM=\measuredangle BDC$. (Точката M ја дели дијагоналата $\overline{AC}=p$ на два дела, x и $p-x$.) Воочи слични триаголници и пропорционалност на нивните страни.

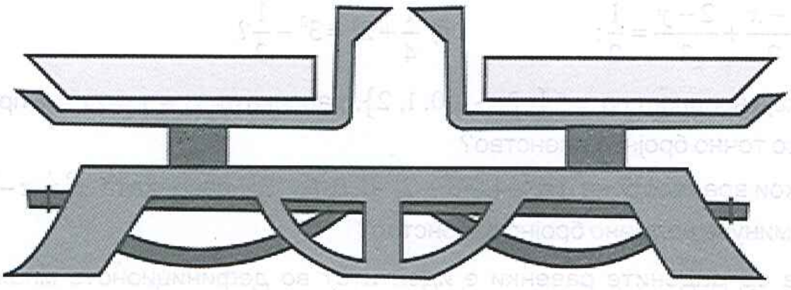


ТЕМА 2

ЛИНЕАРНА РАВЕНКА. ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Содржина на темата

1 Равенство, равенка, идентитет 36
2 Видови равенки 37
3 Решение на равенка. Еквивалентни равенки 39
4 Теореми за еквивалентни равенки - 1 40
5 Теореми за еквивалентни равенки - 2 41
6 Општ вид на линеарна равенка со една непозната 43
7 Примена на линеарни равенки со една непозната 44
8 Поим за неравенство и неравенка 47
9 Решение на неравенка. Интервали 48
10 Теореми за еквивалентни неравенки 49
11 Решавање линеарни неравенки со една непозната 51
12 Решавање на систем линеарни неравенки со една непозната 52
13 Линеарна функција 55
14 Графичко претставување на линеарна функција 56
15 Заемна положба на графиците на некои линеарни функции 58
16 Тек (растење или опаѓање) на линеарна функција 59
17 Графичко решавање на линеарни равенки со една непозната 60
18 Задачи плус за тема 2 62



1 РАВЕНСТВО, РАВЕНКА, ИДЕНТИТЕТ

Треба да знаеш

- Два изрази сврзани со знакот " = " образуваат ***равенство***.
- Равенството во кое левата и десната страна или едната од нив се изрази со променливи се вика ***равенка***.
- Дефиниционо множество на равенка е множеството во кое се менуваат променливите на равенката.
- Равенката што преминува во точно бројно равенство за секоја вредност на променливата во дефиниционото множество се вика ***идентитет***.
- Ако равенката не преминува во точно бројно равенство за ниту една вредност на променливата од дефиниционото множество, се вика ***противречна*** или ***невозможна*** равенка.

1. Кој од знаците <, = или > треба да стои во крукчето меѓу изразите:

а) $5+3\cdot4$ ○ $24:6+13$; б) $3\cdot5-3\cdot(2+1)$ ○ 12;

в) $-4\cdot(-3)$ ○ -12; г) $4-\dfrac{2-\frac{1}{3}}{3}$ ○ $2-\dfrac{1-\frac{1}{3}}{3}$?

2. Кое од следниве тврдења е точно:

а) $3x+17=x+27$, за $x=5$; б) $x^2+x=6$, за $x=-3$;

в) $(x-3)(x+4)=x+1$, за $x=5$; г) $\dfrac{x+1}{2}+1=x^2-6$, за $x=3$?

3. Дали даденото равенство е равенка:

а) $2+20\cdot5+6=28+40\cdot2$; б) $2x-3=4x+2$;

в) $\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{2-y}{3}=\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1}{4}+2^3=3^2-\dfrac{1}{2}$?

4. За која вредност на $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$, равенката $3x+x=2x+4$ преминува во точно бројно равенство?

5. За кои вредности на $x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, равенката $x^2+x-6=0$ преминува во точно бројно равенство?

6. Која од дадените равенки е идентитет во дефиниционото множество $D=\{-2,-1,0,1,2\}$:

а) $4(x+1)=4x+4$; б) $(x+1)^2=x^2+1$;

в) $4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$; г) $(x-1)^3=x^3-1$?

7. Кое од дадените равенства е идентитет, ако дефиниционото множество е $D=\{-1, 0, 1, 2\}$?

а) $3x+2=x$; б) $4x-2x+5=5+2x$; в) $x^2-9=(x-3)(x+3)$;

г) $\frac{x+1}{2}-1=x-\frac{x+1}{2}$; д) $x^2+4x+4=(x+2)^2$; ѓ) $\frac{x^2}{9}-25=\left(\frac{x}{3}-5\right)\left(\frac{x}{3}+5\right)$;

е) $\left(\frac{1}{4}+x\right)^2=\frac{1}{16}+x^2$; ж) $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$; з) $x^5\cdot\frac{1}{x^2}=x^3$;

ѕ) $x^2=(x-2)(x+2)+4$; и) $\frac{x}{x^2-x}=\frac{1}{x-1}$;

ј) $\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{x}{x^2-2x+1}$; к) $\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}$.

8. Провери дали тврдењето е точно:

а) $x(x-3a)+a(a+x)=9$, за $x=a+3$;

б) $x(x-8a)+a(5x+3)=1$, за $x=3a-1$.

9. За која вредност на m и $x=3$, равенката $mx-2m=1+2x$ преминува во точно бројно равенство?

10. За која вредност на a и $x=2$, равенката $(a-3)\cdot x=4$ преминува во точно бројно равенство?

11. Одреди ја вредноста на p, така што равенката $x+3=\frac{4}{p-2}$ за $x=1$ преминува во точно бројно равенство.

12. Ако $A(x)=B(x)$, каде $A(x)=x^2-x$ и $B(x)=15-3x$, провери дали е:

а) $A(-5)=B(-5)$; б) $A(0)=B(0)$; в) $A(3)=B(3)$; г) $A(4)=B(4)$.

13. Која од следните равенки е противречна:

а) $3x-4=3x+1$, $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$; б) $5x+1=x+5$, $x\in\{-1,0,1,2,3\}$;

в) $x^3+\frac{1}{2}=x^3-2\frac{1}{2}$, $x\in\{-2,0,2,4\}$?

2 ВИДОВИ РАВЕНКИ

Треба да знаеш

Според бројот на непознатите, равенките можат да бидат: ***равенки со една непозната***, ***со две***, ***со три*** или ***со повеќе непознати***.

Според членот на равенката што е со највисок степен, равенките можат да бидат: ***равенки од прв степен*** (***линеарни равенки***), ***равенки од втор степен*** (***квадратни равенки***), ***равенки од трет степен*** (***кубни равенки***) итн.

Равенките во кои членовите содржат општи броеви (параметри) се викаат ***параметарски равенки***.

14. Од кој вид е равенката, според бројот на непознатите:

а) $3x+2=x^2+2x+2$; б) $3x-y=5$; в) $xy+z-2yz=-3$;

г) $\frac{3x-5}{x-2}=2x+1$; д) $\frac{2xy}{x-y}=3x-1$; ѓ) $50x+\frac{3}{4}y=z$?

15. Одреди го бројот на непознатите во следните равенки (a, b и p се параметри): а) $ax^2-3x+4=2$; б) $\frac{3px}{x+y}=x-y$; в) $x^4-2by+\frac{z-b}{5}=6xz$.

16. Од кој степен е равенката:

а) $4xy+2x-1=2^3+3x+y$; б) $x^2y^2z-2xyz=5$; в) $2x^2y-y^2+3=x$;

г) $13x^5y^3-x^4+xy^2=4$; д) $x(x-2)^2-4x=3$; ѓ) $(y-2)(y+5)+4y=0$?

17. Од кој вид е равенката според степенот, а од кој според бројот на непознатите:

а) $x^2-6^3=x-6$; б) $xy^2-1=2y$; в) $xy+3=4x-2$;

г) $xyz+xy+yz+xz=1$; д) $\frac{3x-2}{4}=\frac{xy}{2}+3$?

18. Во следниве равенки x, y и z се непознати. Кои од равенките се параметарски?

а) $3x-2y=4$; б) $6z+a=0$; в) $5m-9y+8z=3$;

г) $\frac{2x-a}{b}-\frac{y-3}{a}=5$; д) $\frac{3x-2}{4}=2-\frac{x+1}{3}$.

19. Која од следниве равенки е линеарна:

а) $\frac{x-1}{3}=\frac{x^2+3}{4}$; б) $x-\frac{1}{2}(x+3)=2\frac{1}{2}x+4$;

в) $\frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{3}$; г) $2x-\frac{1}{2x}-1=0$?

20. Која од дадените равенки е линеарна равенка со една непозната:

а) $12x+50=2x^2-1$; б) $6x-2y=2x+10$;

в) $4x-9=5$; г) $x=2$; д) $4x^2=2x+1$; ѓ) $x+9+3x=5x+7$?

21. Изврши ги назначените операции на левата страна во равенката $\frac{x^2-1}{2}+\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{2}-\frac{x^2}{2}=0$. Од кој степен е добиената равенка?

22. Провери дали е невозможна равенката:

а) $\frac{3}{x+2}-\frac{3x-6}{x^2-4}=\frac{4}{x-2}$ во дефиниционото множество $D=\{-1, 0, 1\}$;

б) $\frac{6x+5}{15}+\frac{x-1}{3}-\frac{11x}{15}=1$ во дефиниционото множество $D=\{0, 1, 3\}$.

3 РЕШЕНИЕ НА РАВЕНКА. ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ

Треба да знаеш

- Вредноста на непознатата за која равенката преминува во точно бројно равенство се вика ***решение*** или ***корен*** на равенката.
- Идентитет е равенка за која секоја вредност од дефиниционото множество е нејзино решение.
- Невозможна (противречна) равенка е равнката чиешто множество решенија е празното множество.
- Равенки со исто дефинициона множество што имаат еднакви множествата решенија се викаат ***еквивалентни равенки***.

23. Провери дали има решение равенката:

а) $4x-1=x+8$ во множеството $\{1, 3, 5\}$;

б) $x^2+4x+3=0$ во множеството $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$;

в) $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}=\frac{1}{20}$ во множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

24. Докажи дека бројот 5 е решение на равенката $x(x-1)+\frac{x}{2}=\frac{x+2}{2}+19$.

Провери дали бројот −4 е решение на истата равенка.

25. Одреди го множеството решенија на дадената равенка со дефинициона множество $D=\{-1, 0, 1, 2\}$:

а) $8x-14-26x+6=7x-9-11x-27$;

б) $43-2(3x-5(7x+2))=14-3(2-3x)$;

в) $(9x-2)(8x-11)=(6x-9)(12x-5)$.

26. Одреди го множеството решенија на дадената равенка со дефинициона множество $D=\{-6, -5, -2, -1, 1, 5, 6, 7\}$:

а) $3x-8=7x+16$; б) $\frac{15}{x}+3=\frac{3x+15}{5}$; в) $\frac{x}{7}+4=\frac{x+3}{2}$.

27. Во следните равенки одреди го параметарот a така што:

а) бројот 3 да биде решение на равенката $7x+8a-11x+4a=0$;

б) бројот -2 да биде решение на равенката $ax+x-3a-1+x=0$;

в) бројот -1 да биде решение на равенката $x^2-(a+2)x+5a-1=0$.

28. Дефиниционото множество на равенката $2x-1=x+2$ е $D=\{1, 2, 3\}$. Која од равенките е еквивалентна со дадената:

а) $2(3-4x)+5(6x-7)=37$; б) $6x+5-3x-4=3x-4-5x$;

в) $2(3x-1)-4(2x+3)-5(x-4)=4(x-1)+1$;

г) $\frac{4x-3}{3}-\frac{3x-1}{4}-\frac{5x+1}{8}+1=0$?

29. Дефиниционото множество на равенката $(x-7)(x-2)=0$ е $D=\{2, 5, 7\}$. Која од равенките е еквивалентна со дадената:

а) $x^2-9x+14=0$; б) $x^2-12x+35=0$ в) $3x-4=2x-2$?

30. Ако дефиниционото множество е $D=\{-1, 1, 2, 3\}$, одреди за која вредност на параметарот a нема решение, т.е. е противречна равенката:

а) $\frac{x}{a-3}-x-a=0$; б) $\frac{x+1}{a-1}+\frac{2x}{a+1}=3$.

31. Дадени се линеарни равенки со дефиниционо множество $D=\{-3, 1, 0, 2\}$. Која од нив не е противречна?

а) $3x-2=3x+2$; б) $5x=-3x+8$; в) $4(x+2)-x+3(3-x)-1=6$; г) $2x=\frac{x}{2}$.

32. Докажи дека за секоја вредност на непознатата во равенката $(4x+3)^2-2(2x+1)^2-8x(x+2)=7$ се добива точно бројно равенство. Како се вика ваквата равенка?

33. Докажи дека не постои вредност за a, за која равенката $(a-1)x^2+3x-a+2=0$ има решение -1.

4 ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ - 1

Треба да знаеш

- Секој член на равенката може да се пренесе од едната страна на равенката на другата, но ***со спротивен знак***.
- Еднаквите членови што се на различни страни на равенката можат да ***се изоставаат***.
- Равенката $x=a$ $(a\in\mathbb{R})$ од која може да се прочита решението се вика ***равенка во решена форма***.

34. Објасни зошто е точна еквиваленцијата:

а) $2x+3-5x=3x-15 \Leftrightarrow 2x+3-5x+4x=3x-15+4x$;

б) $x-4+3x=3x-4+5 \Leftrightarrow x=5$.

35. Ако дефиниционото множество е $\mathbb{R}$, провери дали двете равенки се еквивалентни:

а) $2x^2+3x=11+2x^2$ и $3x=11$; б) $4x-2x+1=1-2x+4$ и $x=1$;

в) $x=5$ и $x+\frac{1}{x-5}=5+\frac{1}{x-5}$; г) $x+1=4$ и $x+1+\frac{1}{x-3}=4+\frac{1}{x-3}$.

36. Објасни ја еквиваленцијата:

а) $5x-1=8x^2-7 \Leftrightarrow 5x-1+7x=8x^2-7+7x$;

б) $6x^2-4=9x+5 \Leftrightarrow 6x^2+4x^2-4=4x^2+9x+5$.

37. Во следните равенки изостави ги членовите кои е можно, така што да се добие равенка еквивалентна со дадената:

а) $16x^2+2x-1=-2x+1+16x^2$; б) $6x^3-5x+1=9x^2-5x-2$.

38. Со еквивалентни трансформации покажи дека:

а) $4x-5+3x=2x+4 \Leftrightarrow 5x=9$;

б) $(x-2)^2+(x-3)^2=(x-5)^2+(x-4)^2 \Leftrightarrow 8x=28$.

39. Одреди го a, така што да важи еквиваленцијата:

а) $2x+\frac{1}{2}=3x-1\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+3\frac{1}{2}=3x-1\frac{1}{2}+a$;

б) $4-3x+a=x-7x+2\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-3x=x-7x$.

40. Провери дали се еквивалентни двете равенки. Објасни го заклучокот.

а) $2x+3-5x=3x-15$ и $2x-5x-3x=-3-15$;

б) $3,2x-6,5=4,9x-12,4$ и $12,4-6,5=4,9x-3,2x$;

в) $\frac{x}{3}+3=x-\frac{1}{2}$ и $\frac{x}{3}-x=3-\frac{1}{2}$.

41. Доведи ги во решена форма равенките:

а) $3x-15=2x-5$; б) $5x-1+2x=3+4x+2x$;

в) $10x+8-11x=4-2x$; г) $x-\frac{3}{2}=2x-\frac{1}{2}$.

5 ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ - 2

Треба да знаеш

- Ако сите членови на дадена равенка се помножат со -1, т.е. ако секој член се замени со спротивниот, се добива равенка еквивалентна со дадената.
- Ако во дадена равенка има членови со именители, тогаш од именителите може да се ослободиме со множење на двете страни на равенката со најмалиот заеднички содржател на именителите.

42. Двете страни на равенката:

а) $1\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{4}x-3$ помножи ги со 4;

б) $2{,}1x+3=3{,}2x-\frac{1}{2}x+0{,}6$ помножи ги со 10 и доведи ја равенката во решена форма.

43. Двете страни на равенката $18x-16+8x=24x+12$ подели ги со 4 и доведи ја на равенка во решена форма.

44. Провери дали двете равенки се еквивалентни:

а) $\frac{3}{5}x+2-x=\frac{x+1}{2}-1$ и $6x+20-10x=5x+5-10;$

б) $9y-16=10y-19$ и $16-9y=19-10y;$

в) $13x+17=7x-31$ и $13x-17=-7x+31.$

45. Со еквивалентни трансформации покажи дека:

$$12-\left(3x-\left(5+2x-9\right)\right)=5x-\left(4x+7\right)+11 \Leftrightarrow x=2.$$

46. Ослободи се од именителот и доведи ја равенката во решена форма:

а) $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{2-x}{3};$ б) $x-\frac{2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{9-2x}{3};$

в) $\frac{4x-11}{10}-\frac{x-5}{5}=\frac{7x-26}{25}-\frac{x-17}{20};$ г) $\frac{y+17}{5}+2=\frac{3y-7}{4}.$

47. Со користење на теоремите за еквивалентни равенки и последиците од нив покажи дека:

а) $x-\frac{4(x+2)}{5}=2-\frac{2(x+10)}{6} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2};$

б) $\frac{x+9}{5}-\frac{x-6}{6}+\frac{2(x-9)}{3}=\frac{3(x-12)}{4}+4 \Leftrightarrow x=36;$

в) $(13x-4)(13x+4)-(12x-1)^2-(5x+3)^2=4 \Leftrightarrow x=-5;$

г) $\frac{x}{4}+x(x+3)-(x-2)(x+2)=3x+\frac{21}{4} \Leftrightarrow x=5.$

48. Реши ја равенката: а) $3(y+1)-\frac{10-y}{2}=\frac{4y+11}{5}+12;$

б) $\frac{6x+3}{5}-x=\frac{3x+3}{4}+x-11;$ в) $\frac{3x^2-5x+2}{3}=\frac{5x^2+2x-7}{5}.$

49. Покажи дека $8x-2\left(x+3\left(x-5\left(x-1\right)\right)\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$

50. Доведи ја во решена форма равенката $(2-x)(3-x)-(1-x)(5-x)=0.$

51. Докажи дека равенката $8x+10=7x+12$ и равенката $\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{3}=4$ се еквивалентни.

6 ОПШТ ВИД НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Треба да знаеш

- ***Општ вид*** (или ***нормален вид***) на линеарна равенка со една непозната е $ax+b=0$, каде a е коефициент пред непознатата x, а b е слободен член.
- Равенката се вика ***невозможна*** (***противречна***), т.е. нема решение ако во општиот вид $ax+b=0$, $a=0$, а $b\neq 0$.
- Равенката има бесконечно многу решенија ако во општиот вид
$$ax+b=0,\ a=b=0.$$
- Равенката има единствено решение $x=-\dfrac{b}{a}$, ако во општиот вид
$$ax+b=0,\ a\neq 0.$$

52. Запиши ја во општ вид равенката:

а) $7x-13=5x+3$; б) $13x-x+21-23x=25x-12$;

в) $9-2x=5x+2$; г) $3(2-3x)-4(6x-15)=10-x$;

д) $x-\dfrac{2}{3}=3x+\dfrac{1}{3}$; ѓ) $\dfrac{6x+2}{4}-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{3x+1}{5}+\dfrac{x+1}{2}$.

53. Која од дадените равенки е невозможна:

а) $3x+4-x=2x+6$; б) $2x-6=x-6$; в) $0\cdot x=3$?

Реши ја равенката и изврши проверка на решението (54 - 58):

54. а) $17x-13=8x-67$; б) $6x-4-5x=5-2x$;

в) $5x-1-x=x-7$; г) $3(2-3x)+4(6x-11)=10-x$.

55. а) $4,2x-6,5=4,9x+2,6$; б) $0,6x-4=0,4x-5$;

в) $0,04x+0,86=0,06x+0,68$; г) $0,012x=0,03-0,04x+0,126$;

д) $2,4x+1,8=3,6x-0,6$.

56. а) $\dfrac{4x-8}{12}-\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{2x-1}{3}=x-3$; б) $\dfrac{5x+21}{3}-2x=\dfrac{4-3x}{4}+\dfrac{8x+62}{8}$;

в) $3y-\dfrac{8+2y}{2}=\dfrac{3-4y}{5}+15$; г) $\dfrac{11-5x}{15}-1=3-\dfrac{4x-7}{5}$; д) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=15$;

ѓ) $\dfrac{2x}{5}=\dfrac{3x}{20}+5$; е) $\dfrac{x}{2}-3x=\dfrac{1}{5}-\dfrac{7x}{2}$; ж) $\dfrac{3x+1}{5}+\dfrac{2x}{3}=3x-4-\dfrac{x+1}{4}$;

з) $\dfrac{5x+2}{3}-\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{4-3x}{4}+\dfrac{8x-3}{8}$; ѕ) $x-\dfrac{4(x+2)}{5}=2-\dfrac{5(x+4,01)}{6}$;

и) $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{5x-16}{12}$; ј) $3(1+x)-\dfrac{10-x}{2}=\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{31}{14}$.

57. а) $8-(x-3)(x+3)=10-(x-1)^2$; б) $(2x+1)^2-(2x-3)^2=4(7x-5)$;

в) $(4x-5)^2+20x=8x+17+(4x-3)^2$; г) $(x+2)^2-5x=(3-x)^2-1$;

д) $2(x-1)(x+3)+x(x-7)=3x(5+x)+10$;

ѓ) $(4x+9)^2-1=4(2x+1)^2+10(x+26)$.

58. а) $\left(\frac{x-5}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=2$; б) $\left(\frac{x+3}{5}\right)^2-\left(\frac{x-2}{5}\right)^2=-\frac{7}{5}$; в) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=24-\frac{x}{2}$;

г) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=24+\frac{x}{2}$; д) $\frac{x-1}{3}+\frac{3x+1}{2}=2x+\frac{1-x}{6}$; ѓ) $1-\frac{3x-5}{6}=\frac{3-2x}{4}$;

е) $3x-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x(4-x)$; ж) $(x-1)(2x+3)-2(x-3)^2=12x-\frac{4-5x}{5}$;

з) $(-x-3)^2-\frac{5x+2x^2}{2}=9+3{,}5x$; ѕ) $\frac{x-3}{3}+\frac{x+3}{2}-x=\frac{5(x-1)}{6}-\frac{3x-4}{3}$.

7

ПРИМЕНА НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Треба да знаеш

За секој позитивен број m е точно:

- ☐ бројот $m+a$ е за a поголем од m;
- ☐ бројот $m-a$ е за a помал од m;
- ☐ ако $a>1$, бројот $a\cdot m$ (или am) е a пати поголем од m;
- ☐ ако $a<1$, бројот $\frac{m}{a}$ е a пати помал од m;
- ☐ два пати поголем (двојно) од m е бројот $2m$;
- ☐ два пати помал (половина) од m е бројот $\frac{m}{2}$;
- ☐ 6% од m е $0{,}06m$ или $\frac{6m}{100}$;
- ☐ бројот m зголемен за 24% е $1{,}24m$ или $\frac{124m}{100}$;

Чекори за составување равенка според соодветен текст:

① Разбирање на задачата

② Означување на непознатите

③ Воочување на врските меѓу величините

④ Составување на равенката

⑤ Решавање на равенката

⑥ Одговор на поставеното прашање во текстот и проверка

59. Кој број зголемен за 24 дава збир 68?

60. Кој број намален за 56 дава разлика 29?

61. Од кој број треба да се одземе 86 за да се добие -14?

62. На кој број треба да се додаде 110 за да се добие 618?

63. Кој број треба да се помножи со 17 за да се добие $\frac{1}{4}$?

64. Кој број треба да се подели со 25 за да се добие $2\frac{1}{5}$?

65. Одреди го броителот на дропката со именител 15, ако вредноста на таа дропка е $\frac{1}{4}$.

66. Ако еден број се зголеми 4 пати, добиениот производ се намали 3 пати, се добива број кој е 3 пати поголем од дадениот, намален за 15. Кој е тој број?

67. Збирот на два броја е 89, нивниот количник е 3 и остаток 5. Кои се тие броеви?

68. Даден е еден број. Исто е дали ќе го намалиш за 9 бројот што е 5 пати поголем од дадениот број или, пак, ќе го зголемиш за 5 бројот што е 3 пати поголем од дадениот број. Кој е тој број?

69. Ако некој двоцифрен број на кого збирот на цифрите му е 9, се зголеми за 9, се добива двоцифрен број составен од истите цифри, но во обратен редослед. Кој е тој број?

70. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 14. Ако од тој број се одземе бројот: а) 18; б) 36, се добива обратниот број на дадениот. Кој е тој број?

71. Ако пред некој едноцифрен број се запише 6, тогаш добиениот двоцифрен број е $1\frac{3}{4}$ пати поголем од двоцифрениот број добиен кога зад тој едноцифрен број ќе се допише 6. Кој е тој број?

72. Ако на некој едноцифрен број одлево му допишеш 6, добиениот двоцифрен број го поделиш со 9, на добиениот количник оддесно му допишеш 7 и добиениот број го поделиш со 11, се добива 7. Кој е тој број?

73. Ако на некој број оддесно му допишеш 9, добиениот број го поделиш со 13, на добиениот количник оддесно му допишеш 1 и добиениот број го поделиш со 11, се добива 21. Кој е тој број?

74. Бројот 78 раздели го на два дела, такви што едниот дел да биде 5 пати поголем од другиот.

75. Бројот 140 раздели го на два дела, такви што половината од помалиот дел да е за 4 поголема од четвртината на поголемиот дел.

76. Кој број е за 15 поголем од својата шестина?

77. Острите агли на правоаголен триаголник се разликуваат за 12^0. Колку степени има секој од нив?

78. Аголот при врвот на рамнокрак триаголник е 3 пати поголем од аголот при основата. Одреди ги аглите на тој триаголник.

79. Периметарот на еден триаголник е 135 cm, а неговите страни се последователни:

а) природни броеви;

б) непарни природни броеви.

Пресметај ги страните на триаголникот.

80. Правоаголник и квадрат имаат еднакви периметри, Квадратот има страна 7 cm, а едната страна на правоаголникот е за 4 cm поголема од другата. Одреди ги страните на правоаголникот.

81. Едната страна на правоаголник е за 6 cm поголема од другата страна. Ако помалата страна се зголеми за 3 cm, а поголемата се намали за 4 cm, плоштината на добиениот правоаголник е за 20 cm^2 помала од плоштината на дадениот правоаголник. Одреди ги страните на правоаголникот.

82. Збирот на основата и висината на еден триаголник е 14 cm. Ако основата се зголеми за 4 cm, а висината за толку се намали, плоштината ќе се намали за 16 cm^2. Одреди ги основата и висината.

83. Едната катета на правоаголен триаголник е 6 cm, а хипотенузата е за 2 cm подолга од другата катета. Одреди ги катетата и хипотенузата.

84. Една од висините го дели триаголникот на два дела со плоштини 9 cm^2 и 12 cm^2. Одреди ја страната кон која е спуштена висината, а која со подножјето на висината е поделена на делови што се разликуваат за 1 cm.

85. Двајца работници една работа можат да ја завршат за 10 дена. Ако едниот може да ја заврши истата работа за 15 дена, за колку дена може да ја заврши другиот работник?

86. Еден работник некоја работа може да ја заврши за 9 дена, а друг истата работа може да ја заврши за 12 дена. Ако им се приклучи трет работник, тројцата работата би ја завршиле за 4 дена. За колку дена третиот работник сам би ја завршил работата?

87. Две дактилографки еден материјал можат да го отчукаат за 3 часа. За колку часа секоја од нив може материјалот да отчука сама, ако едната дактилографка пишува 1,5 пати побргу од другата?

88. Од две места тргнале два автомобили, истовремено, еден кон друг. Првиот патот би го поминал за 12 часа, а другиот за 20 часа. По колку часа од тргнувањето тие ќе се сретнат?

89. Илија патувал поминувајќи по 15 km на ден. По 3 дена тргнал Јован, од истото место и во иста насока и по 5 дена го стигнал Илија. По колку километри дневно изминувал Јован?

90. Петар и Кире истовремено тргнале од Кратово за Прилеп со своите автомобили, возејќи со брзина 80 km/h, односно 60 km/h.

а) По колку часа растојанието меѓу нив ќе биде 30 km?

б) Одреди го растојанието меѓу двата града, ако кога Петар пристигнал во Прилеп, Кире требало да вози уште 40 km.

в) Колку часа патувал Петар, а колку Кире од Кратово до Прилеп?

91. Стамен и Диванис истовремено тргнале од Кочани за Виница со своите велосипеди, првиот со брзина 6 m/s, а вториот 4 m/s. Стамен стигнал 16 минути и 40 секунди порано од Дивенис. Колкаво е растојанието од Кочани до Виница?

92. Мајката е 4 пати постара од синот, а 6 години помлада од мажот. Пред 6 години, синот, мајката и таткото заедно имале 69 години. Колку години има сега секој од нив?

93. Кога таткото имал 31 година, синот имал 8 години, а сега таткото е 2 пати постар од синот. Колку години има сега таткото, а колку синот?

94. Синот е 20 години помлад од таткото, а пред 10 години бил 3 пати помлад од таткото. Колку години има синот, а колку таткото?

8 ПОИМ ЗА НЕРАВЕНСТВО И НЕРАВЕНКА

Треба да знаеш

- Два изрази сврзани со знакот $<$ или $>$ образуваат ***неравенство***.
- Ако барем едниот од изразите содржи променлива, тогаш неравенството се вика ***неравенство со променлива*** или ***неравенка***.
- Според бројот на непознатите неравенките можат да бидат: ***неравенки со една непозната, со две, со три*** или ***со повеќе непознати***.
- Според членот на неравенката со највисок степен, неравенките можат да бидат: ***неравенки од прв степен*** (или ***линеарни неравенки***), ***од втор*** (или ***квадратни неравенки***), ***од трет*** (или ***кубни неравенки***) или ***од повисок степен***.

95. Дали даденото неравенство е неравенка:

а) $4^2-40<10^2-100$; б) $\dfrac{8^3-8^2-6}{5}>x$;

в) $x^2-10>x-5$; г) $x+10^3<1000$?

96. Дали е точно бројното неравенство:

а) $15-3\cdot4>3\cdot4-15$; б) $16-2^2:4<3+2^3$; в) $12-3\cdot4>(12-3)\cdot4$;

г) $12\cdot(12-(12-2\cdot3))\leq3\cdot4\cdot6$; д) $4^2-2\cdot6>3^2+2\cdot4$;

ѓ) $2^{300}>4^{100}$; е) $\dfrac{14-3^2}{10}>\dfrac{6-2\cdot3}{4}$; ж) $(2\cdot8-3)^2<(10:2+3)^2$?

97. За кои вредности на $x \in \{-1, 0, 1\}$ е точно неравенството $x+3 > x^2 - 4x$?

98. Провери дали е точно:

а) $4x-10 < 2x-5$, за $x=5$; б) $3x-2y < 4-2x$, за $x=2$, $y=5$;

в) $x^2-2x+3 < 8$, за $x=3$; г) $\frac{1}{2}x+2y < 2y-1$, за $x=8$, $y=\frac{1}{2}$.

99. Од кој вид е неравенката, според бројот на непознатите:

а) $2x-5 < 3x+7$; б) $5x-1+x > -x-3$;

в) $2x-3y+4 > 3x$; г) $xyz-x-y < 4y+3$?

100. Од кој степен е неравенката:

а) $2x+3^2-4 > 7x+2^3$; б) $2x-(1-x)^2-2 < x(x-1)(x+2)$;

в) $x^2-3x < 2-x^2$; г) $2(1-x)(1+x)(1+x^2) > 1-3x^3$;

д) $x^2+3xy^2 > 4x-1$; ѓ) $\frac{x^2-5}{6} < \frac{(x^2+5)^2}{5}$;

е) $x(x+3) > 5x-2$; ж) $2^3x^2y^3-5x^4 < 4-x$?

101. Од кој вид е неравенката според степенот и според бројот на непознатите:

а) $3^4xyz^2-4(x^2y+2xz) < xy+3z-1$;

б) $\frac{x-3^6y^2}{4} < \frac{x^3y^4-3}{2}$; в) $\frac{x}{5} < \frac{2x^3y^2z}{3}$?

9 РЕШЕНИЕ НА НЕРАВЕНКА. ИНТЕРВАЛИ

Треба да знаеш

Множеството реални броеви меѓу два дадени реални броеви a и b се вика ***интервал***, а a и b се викаат ***краеви на интервалот***.

Ако интервалот не ги содржи краевите a и b, тогаш тој се вика ***отворен интервал***. Се означува (a, b), а на бројна права

Ако интервалот ги содржи краевите a и b, тогаш тој се вика ***затворен интервал***. Се означува $[a, b]$, а на бројна права

Неравенките $x > a$, $x < a$ и $0 \cdot x < a$, каде $a \in \mathbb{R}$ се запишани во ***решена форма*** и се викаат ***основни неравенки***.

102. За секоја од неравенките е дадено дефиниционото множество. Одреди го множеството решенија на неравенката:

а) $2x+1>x+2,\ D=\{0,1,2,3,4\}$; б) $4x-1<5x-1,\ D=\{-1,0,1,2\}$;

в) $2(x-3)+1>3(x-1)+x+4,\ D=\{-6,-5,-4,0,1\}$;

г) $x(x+4)>x^2+3x-5,\ D=\{-5,-4,-3,-2\}$.

103. Дефиниционото множество на секоја од дадените неравенки е $D=\{-2,-1,0,1,3,5\}$. Одреди го множеството решенија на неравенките:

а) $\frac{8}{3}x-x-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}<\frac{3x+7}{4}$; б) $\frac{x+1}{4}-\frac{5x+1}{3}<\frac{1}{6}$.

104. Дали дадените неравенки се еквивалентни во множеството $D=\{-7,-5,-3,0,1\}$?

а) $2x+3<x-2$ и $x-8>3x+2$; б) $5x-3<4x-2$ и $3x+1<2x+2$;

в) $\frac{x-3}{2}+\frac{x+3}{3}<x-\frac{x-1}{2}$ и $x+4<5$.

105. Дали $-3x+9>0 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{2x-1}{3}<\frac{x-1}{3}-\frac{x}{4}+3$ во множеството $D=\{1,2,3,4,5\}$?

106. Дали се еквивалентни неравенките:

а) $x\geq 0$ и $x\leq 0$; б) $x<2$ и $\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$; в) $x<-3$ и $2x+6<0$;

г) $x<-3$ и $\frac{1}{x}>\frac{1}{3}$; д) $x>-1$ и $x<1$; ѓ) $x-5>0$ и $10-2x<0$?

107. Претстави го со интервал множеството решенија на неравенката:

а) $x>-3$; б) $x\leq 1$; в) $x<2$; г) $x\geq -4$.

108. Претстави го на бројна права множеството решенија на неравенката:

а) $x>-2$; б) $x<3$; в) $x\leq -2{,}5$; г) $x\geq -1\frac{1}{2}$.

109. Според текстот запиши неравенка и нејзиното множество решенија претстави го со интервал и на бројна права:

а) x е помал од -2; б) x не е помал од -2;

в) x не е поголем од 1; г) x е поголем од -1.

10 ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ НЕРАВЕНКИ

Треба да знаеш

Секој член на неравенката може да се пренесе од едната страна на неравенката на другата, но ***со спротивен знак***.

Еднаквите членови, што се на различни страни на неравенката, можат да *се изоставаат*.

Ако двете страни на дадена неравенка се помножат или се поделат со негативен број, тогаш *се променува знакот на неравенката во спротивен*.

Неравенката $x<a$ (или $x>a$, или $x\leq a$, или $x\geq a$), $a\in\mathbb{R}$ од којашто може да се прочита множеството решенија, се вика неравенка во решена форма.

110. Сведи ги во решена форма неравенките:

а) $3x+2>2x-7$; б) $4x+9<-2x+1$; в) $x-\frac{x+1}{3}\leq x+2$;

г) $2x-3-3(2x-1)>2(2-2x)+x-2$;

д) $1-3(1-3x)-(1-3x)^2>12x-9x^2$;

ѓ) $2+x-\frac{2+x}{3}-4\geq 3+2x-\frac{3+2x}{3}$.

111. Сведи ја на неравенка во решена форма следната неравенка и решението претстави го со интервал:

а) $2x(2x-5)-(2x+1)^2\leq -8$; б) $2(x-3)+1\geq 3(x-1)+x-5$;

в) $\frac{10x+21}{4}\leq\frac{5(x+6)}{6}$; г) $(x+1)^2+\frac{15x+3}{2}<(x-3)^2$;

д) $7x+10,1\geq\frac{x}{5}+\frac{1}{2}(3x-1)$; ѓ) $\frac{3x}{5}-1\frac{1}{2}\geq 2\frac{1}{5}+\frac{x}{2}$.

112. Во дадената неравенка изостави членови, така што да се добие неравенка еквивалентна со дадената:

а) $4x^2-3x+2-x<3-x+2x+4x^2$; б) $\frac{x}{2}+\frac{3-x}{2}+3<3-\frac{x-1}{3}+\frac{x}{2}$.

113. Дадената неравенка трансформирај ја во еквивалентна неравенка, без именител:

а) $\frac{2x+5}{3}-\frac{x+7}{4}>1$; б) $\frac{7x}{6}+x<\frac{4x+1}{3}-\frac{3x-5}{2}$;

в) $1+\frac{x-3}{2}\geq\frac{3x+2}{5}+3x$; г) $\frac{5x+1}{8}-\frac{2-x}{4}>\frac{1+x}{3}-\frac{x+7}{12}$;

д) $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$; ѓ) $1+\frac{2-x}{3}\leq\frac{2x+1}{5}$.

114. Објасни зошто е точна следната еквиваленција:

а) $2x-4<8-3x \Leftrightarrow -2x+4>-8+3x$;

б) $\frac{x}{3}-3-\frac{x}{2}<\frac{x}{7}-6 \Leftrightarrow -\frac{x}{3}+3+\frac{x}{2}>-\frac{x}{7}+6$.

11

РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Треба да знаеш

- Интервалот $(-\infty, 5)$ е решение на неравенката $x<5$, а интервалот $(-\infty, 5]$ е решение на неравенката $x \leq 5$.
- Реченицата “за кои вредности на x изразот $f(x)$ е негативен” е соодветна на неравенката $f(x)<0$.

Реши ја неравенката и решението претстави го со интервал (115 - 117):

115. а) $3x-1>x-5$; б) $5x-3<2x-6$; в) $x-8>3x+2$; г) $2x+1>-5x+8$;
д) $6-2(x-3)\leq x-6$; ѓ) $4(2x-3(6x-4))\geq 3(5x-8(3x-9))$.

116. а) $\frac{x}{4}-\frac{2+7x}{8}>1-\frac{5x}{6}$; б) $\frac{x-3}{2}-1\geq\frac{3x+2}{5}-3x$.

117. а) $6-x(x+6)<5-x(x+5)$; б) $(3x+8)^2>3x(3x+8)$;
в) $2(1-x)(1+x)(1+x^2)<1+2x-2x^4$; г) $(5x+2)^2-(4x-1)^2<(3x+2)^2$;
д) $\frac{3x}{2}+(x-1)^2-x(x+4)>\frac{x-11}{3}+x$.

118. Кој од интервалите $(-\infty, -3)$ или $(-\infty, -3]$ е решение на неравенката $\frac{4x+3}{3}<\frac{x-3}{2}$?

119. Утврди дали дадената неравенка има решение:
а) $4x+5<4x$; б) $(x-2)(x+3)+(x+4)^2\leq 2x(x+4)+x$;
в) $\frac{6-x}{6}>\frac{x+2}{2}-\frac{2x-6}{3}$; г) $\frac{14x}{5}+3(1-x)\leq\frac{2x+3}{2}-\frac{7x}{10}$.

120. Докажи дека секој реален број е решение на неравенката:
а) $x\leq x+1$; б) $\frac{x+6}{2}+\frac{x-4}{2}-1<\frac{x+6}{3}+\frac{2x+9}{3}$.

121. Реши ги дадените неравенки ако нивно дефиниционо множество е $\mathbb{N}$:
а) $(x-2)(3-x)>x-(x-3)^2$; б) $4x<5+3x-\frac{x-1}{2}$.

122. Реши ја дадената неравенка ако дефинционото множество е $\mathbb{Z}$:
а) $(x+3)^2>\frac{15x+3}{2}+(x-1)^2$; б) $\frac{x+1}{4}+1-\frac{7x}{2}<\frac{x+5}{8}$.

123. Одреди го најголемиот цел број што е решение на неравенката

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}(3x-8)>(x+2)^2+5x+3.$$

124. Одреди го множеството цели позитивни решенија на неравенката:

а) $\frac{1}{4}+2(x-3)^2>2x(x+2)-2;$ б) $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{6}<\frac{x}{5}-\frac{x-3}{2}+\frac{x+3}{8}.$

125. За кои вредности на x дадениот израз:

а) $\frac{2x-1}{5}-\frac{4x+1}{3}$ е позитивен; б) $\frac{x}{2}+\frac{5}{12}-\frac{x-4}{3}$ е негативен;

в) $4-\frac{2x-3}{2}$ е поголем од 5; г) $2-\frac{2-x}{5}$ е помал од изразот $3+\frac{3-x}{5}$;

д) $\frac{9-x}{2}-\frac{9+x}{3}$ е поголем од изразот $\frac{x-3}{2}-\frac{x+5}{5}$;

ѓ) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}$ не е негативен?

12 РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Треба да знаеш

- Нормален вид на систем од две неравенки со една непозната е

$$\begin{cases}ax>b\\cx>d\end{cases};\ a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

- Пресекот на множествата решенија на двете неравенки од системот се вика ***множество решенија на системот***.

Ознака: $R_s=R(ax>b)\cap R(cx>d)$.

- Системот нема решение (системот е противречен) ако пресекот на множествата решенија е празно множество.

126. Претстави го со интервал и на бројна права решението на системот:

а) $\begin{cases}x\geq 3\\x<10\end{cases};$ б) $\begin{cases}x<6\\x>1\end{cases};$ в) $\begin{cases}x<2\\x>5\end{cases}.$

Реши го системот неравенки со една непозната (127 - 129):

127. а) $\begin{cases}3x+1>0\\x-2<3\end{cases};$ б) $\begin{cases}2x+2>-4\\2x-1>2-x\end{cases};$ в) $\begin{cases}x+2<-1\\2x-2<1-x\end{cases};$

г) $\begin{cases} 5x-1<2x+8 \\ 1-2x<2-x \end{cases}$; д) $\begin{cases} 2(x-3)-2\geq 4+x \\ 2(x-6)+4<3(x-5)-2 \end{cases}$.

128. а) $\begin{cases} 2x+3\leq 4x+3 \\ \frac{x}{6}+\frac{11}{12}>\frac{x}{5}+\frac{14}{15} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{7-x}{2}-3<\frac{3+4x}{5}-4 \\ \frac{5}{3}x+5(4-x)>2(4-x) \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x-\frac{x-1}{2}>4x-5 \\ x-\frac{1}{2}>4-\frac{x}{2} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \frac{2x-11}{4}-2<\frac{2x-19}{2} \\ \frac{x-1}{5}<\frac{2x+15}{9}-\frac{x}{3} \end{cases}$; д) $\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{x+4}{2}<\frac{x+2}{3} \\ 1-5x\geq\frac{x+24}{2}+\frac{x+2}{3} \end{cases}$.

129. а) $\begin{cases} (x+1)^2-(x-1)^2\leq 6 \\ x\geq 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x+3)(2x-4)\leq(2x+3)(x-4) \\ (x+3)(x-3)<x(x+2)-5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} (x^2+1)(x^2-1)<(x^2-1)^2-x(1-2x) \\ \frac{x^3-6}{4}<\frac{0,5x^3-x+2}{2} \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3(x+2)-(x+1)^2<x(3-x)-2 \\ x(x-2)+\frac{3x-4}{2}<(x+1)^2+x-3 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} (x-2)(x-1)+x(x-2)>(x-1)(2x-5) \\ (x-5)(x-6)>x(x-1) \end{cases}$.

130. Кои природни броеви се елементи на множеството решенија на системот:

а) $\begin{cases} \frac{2x+1}{2}-\frac{5}{3}<x-\frac{x-3}{6} \\ \frac{5x-7}{6}+\frac{x^2}{9}>\frac{2x^2+9}{18}+\frac{2x-1}{3} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \frac{5x}{6}-\frac{3-2x}{2}<\frac{x-6}{2}+2x+1 \\ (x+3)(x-2)+2(3x-1)\leq x(x-3)+2(3x+10) \end{cases}$.

131. Реши го системот неравенки во множеството на целите броеви:

а) $\begin{cases} (x+2)^2+(x-1)^2<(2x+3)(x+2)+2 \\ 2(x-3)(x+3)-(x+2)^2<(x+1)^2+7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \frac{x-3}{5}-\frac{1-2x}{2}<\frac{1+5x}{4}+\frac{x}{10} \\ x(2x-5)+2(x-1)^2<(2x-3)^2+5 \end{cases}$.

132. Докажи дека дадениот систем неравенки нема решение:

а) $\begin{cases} 3x-2>6x+7 \\ 5x+3<6x \end{cases}$;   б) $\begin{cases} \dfrac{5x+10}{3}<3 \\ \dfrac{3x+9}{5}>3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{15}-\dfrac{6x+10}{5}<\dfrac{1}{3}-\dfrac{2x}{5} \\ \dfrac{5}{8}\le\dfrac{8x-9}{24}+\dfrac{2x}{3} \end{cases}$;   г) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{x+1}{2}>1-\dfrac{x}{7} \\ \dfrac{7}{3}+\dfrac{x}{4}<\dfrac{2-x}{3}+4 \end{cases}$.

133. Реши ги неравенките:

а) $(x+3)(x+8)<0$;   б) $(5-x)(x-7)>0$;   в) $\dfrac{4x+1}{3-5x}<0$;   г) $\dfrac{2-x}{x+1}>0$;

д) $\dfrac{x-2}{x+2}>0$;   ѓ) $x+x^2>0$;   е) $\dfrac{x-1}{x+1}>1$;   ж) $\dfrac{x+1}{2x-3}<\dfrac{2}{3}$;

з) $(2x-1)(3x+7)>2(2x-1)$;   ѕ) $(3x-4)(x-3)>(2x+5)(x-3)$.

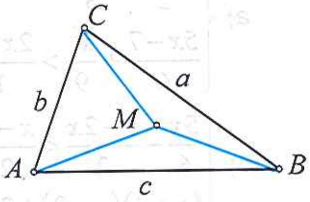
134. Цената на една книга е цел број денари. Вкупната цена за 9 такви книги е поголема од 1100, а помала од 1200 денари, а за 13 книги е поголема од 1500, а помала од 1600 денари. Колку чини една таква книга?

135. Во триаголникот ABC, a, b и c се страни, t_a, t_b и t_c се соодветните тежишни линии. Докажи дека:

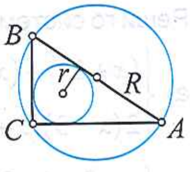
а) $\dfrac{a+b}{2}>t_c$;   б) $a+b+c>t_a+t_b+t_c$;   в) $\dfrac{a+b+c}{2}<t_a+t_b+t_c$.

136. Во триаголникот ABC избрана е произволна точка M. Докажи дека

$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}>\frac{a+b+c}{2}.$$



137. Ако P е плоштина на правоаголниот триаголник ABC $(\measuredangle C=90^0)$, а r и R се радиуси на впишаната, односно опишаната кружница, тогаш докажи дека $R+r\ge\sqrt{2P}$.



138. Одреди ги сите прости броеви x ако $\dfrac{2}{139}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{4}{199}$.

13 ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Треба да знаеш

- Функцијата f што е зададена со формулата $f(x)=kx+n;\ \ k,n\in\mathbb{R}$ се вика ***линеарна функција***.
- k се вика ***коефициент пред аргументот***, а n се вика ***слободен член***.
- ***Нула на функција*** е вредноста на аргументот x за која вредноста на функцијата y е нула.
- Ако доменот на функцијата не е посебно нагласен, тогаш се подразбира дека домен е множеството $\mathbb{R}$.

139. Која од наведените функции е линеарна:

а) $y=3x-2$; б) $y=2x^2-3$; в) $y=1-\frac{3}{x}$; г) $y=\frac{1}{x}+3$; д) $y=0,2+3,5x$;

ѓ) $y=\frac{1}{1+x}$; е) $y=1\frac{1}{2}x$; ж) $y=2^3x+4$; з) $y=2x^2-3$?

140. Во наведените равенства изрази го y како функција од x и одговори дали добиената функција е линеарна:

а) $x+y-4=0$; б) $xy+5=0$; в) $xy+2y+3x=0$;

г) $3x-\frac{2}{y}+3=0$; д) $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-1=0$; ѓ) $\frac{x}{y}-5=0$;

е) $3x-2y=8$; ж) $x-5y=-1$; з) $x+3y=5$.

141. Запиши линеарна функција во која:

а) $k=2,\ n=-1$; б) $k=-\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{4}$; в) $k=0,\ n=2$;

г) $k=-3,\ n=0$; д) $k=0,3,\ n=-2\frac{1}{2}$; ѓ) $k=2^3,\ n=-\frac{1}{2}$.

142. Одреди ги коефициентот пред аргументот и слободниот член во функциите:

а) $y=4x-3$; б) $y=-4$; в) $y=-\frac{3}{4}x$; г) $y=-2\frac{1}{5}x+1$;

д) $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x$; ѓ) $y=\frac{x-5}{3}$; е) $y=2-3x$; ж) $y=-3x$.

143. Едната страна на правоаголник има 6 метри, а другата a метри. Претстави го периметарот на правоаголникот како функција од страните. Дали таа функција е линеарна?

144. Во магацинот има $60t$ хартија, а за печатење секојдневно се трошат по $10t$ хартија. Запиши формула за количината хартија во магацинот во текот на една седмица, ако за тоа време не се нарачува хартија.

145. Определи го множеството вредности V на функцијата:

а) $y=2x+3,$ ако $x\in\{-2,-1,0,1,2\};$

б) $y=-x+2,$ ако $2\leq x\leq 5$ и $x\in\mathbb{N};$

в) $3x+2y-5=0,$ ако $0\leq x<4$ и $x\in\mathbb{Z};$

г) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1,$ ако $-2<x\leq 2$ и $x\in\mathbb{Z}.$

146. Одреди ја нулата на функцијата:

а) $y=5x-10;$ б) $y=2x-\frac{1}{2};$ в) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{4};$ г) $y=-3x.$

147. Ако $x=-3$ е нула на функцијата $y=kx+n$, а слободниот член е 2, одреди го коефициентот пред аргументот.

148. Во функцијата $y=-\frac{1}{2}x+n$ одреди го слободниот член, ако $x=-4$ е нула на функцијата.

149. Одреди ја нулата на функцијата $y=\frac{1}{2}x+n,$ ако слободниот член е 3.

150. Нулата на функцијата $y=kx+n$ е $x=-3,$ а слободниот член е за 4 поголем од коефициентот пред аргументот. Одреди ги k и n.

14 ГРАФИЧКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Треба да знаеш:

- Графикот на линеарната функција $y=kx,\ k\in\mathbb{R}$ е ***права што минува низ координатниот почеток.***
- Графикот на линеарната функција $y=kx+n,\ k,n\in\mathbb{R}$ е ***права паралелна со графикот на функцијата*** $y=kx.$
- Графикот на линеарната функција $y=kx+n$ ја сече ординатната оска во точката (O,n).
- Нула на линеарната функција $y=kx+n;\ k,n\in\mathbb{R}$ и $k\neq 0$ е $x=-\frac{n}{k}.$

151. Дадена е функцијата $y=-x+2.$ Одреди која од точките $A(-1,3),\ B(0,2),$ $C(-2,4), D(1,-1)$ и $E(2,0)$ припаѓа на графикот на дадената функција.

152. Во функцијата $y = 3x + n$, одреди го n, така што нејзиниот график да минува низ точката $M(-2,3)$.

153. Во функцијата $y = kx - \frac{1}{2}$, одреди го k, така што нејзиниот график да минува низ точката $A(-1,-3)$.

154. Во функцијата $y = 4x - 10$ одреди го x, така што точката $M(x,-2)$ да припаѓа на нејзиниот график.

155. Провери дали правата што минува низ точките $A(0,1)$ и $B(-2,7)$ е график на функцијата $y = -3x + 1$.

156. Во функцијата $f(x) = kx - 3$, одреди го k, така што $f(-1) = 5$.

157. Во функцијата $f(x) = (2k-1)x - 1$, одреди го k, така што $f(3) = 6$.

158. Одреди ги непознатите компоненти во точките $M(12, y_1)$, $N(x,2)$, $P(3, y_2)$, така што тие да припаѓаат на графикот на функцијата $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

159. Претстави ги графички функциите:

$y = x$; $y = -\frac{1}{2}x$; $y = -2x + 1$; $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; $y = 2$; $y = -3$.

160. Одреди две точки кои припаѓаат на графикот на дадената функција и нацртај го:

а) $y = 2x - 1$;

б) $x - y + 3 = 0$;

в) $y = kx + n$, за $k = n = -2$;

г) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, за $a = -b = 3$.

161. Одреди ги координатите на точката A во која функцијата $y = -2x + 4$ ја сече: а) апсцисната оска; б) ординатната оска.

162. Одреди во кои точки функцијата $-2x + y + 5 = 0$ ги сече координатните оски.

163. Нацртај права низ точката $P(-2,1)$ и координатниот почеток, а потоа:

а) според цртежот, пополни ја табелата;

x	-4	0	2	6		
y					-2	1

б) запиши ја формулата на функцијата што е претставена графички.

15 ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ГРАФИЦИТЕ НА НЕКОИ ЛИНЕАРНИ ФУНКЦИИ

Треба да знаеш

- Графиците на линеарните функции со ист коефициент пред аргументот се ***паралелни прави***.
- Графиците на линеарните функции со ист слободен член n, ординатната оска ја сечат во точката (O, n).
- Линеарната функција во која $k=0$, т.е. $y=n$, се вика ***константна функција***. Нејзиниот график е права паралелна со x - оската.

164. Дадена е функцијата $y=2x-\frac{1}{6}$. На кои од функциите: $y=2x+1$, $y=2-3x$, $y=\frac{1}{2}x$ и $y-2x+3=0$ графикот е паралелен со графикот на дадена функција?

165. Дадена е функцијата $y=8x-1$. На кои од функциите $2^3x-y-4=0$, $y=\frac{1}{8}x+2$ и $2x-\frac{y}{4}+\frac{1}{2}=0$ графикот е паралелен со графикот на дадената функција?

166. Во функцијата $y=kx-\frac{3}{4}$, одреди го k, така што нејзиниот график да биде паралелен со графикот на функцијата:

а) $y=-x+2$; б) $y=-\frac{x}{2}+3$; в) $x+3y-2=0$.

167. Запиши линеарна функција на која графикот е паралелен со графикот на дадената функција и го исполнува дадениот услов:

а) $y=-5x+2$ и ја сече ординатната оска во точката $A\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$;

б) $y=\frac{x}{4}-4$ и ја сече ординатната оска во точката $B\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$;

в) $y=x+1$ и ја сече ординатната оска во точката $C(0,\ -1)$;

г) што има нула $x=3$, а ординатната оска ја сече во точката $P(0,\ 1)$.

168. Запиши линеарна функција чиј график е паралелен со графикот на функцијата $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ и минува низ точката :

а) $A(-1,1)$; б) $B(0,-6)$; в) $C(0,0)$; г) $D(4,3)$.

169. Определи линеарна функција чиј график минува низ дадените точки. Утврди дали од нив имаат паралелни графици.

а) $A(0, 3),\ B(1, 0)$; б) $A(0,\ 0),\ B(-2, -1)$;

в) $A(-2, 0),\ B(3,\ 5)$; г) $A(2, -1),\ B(0,\ 3)$.

170. Одреди го m, така што графиците на функциите да бидат паралелни:

а) $y=(3m-5)x-2$ и $y=(m+3)x+m-1$;

б) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ и $y=(m+2)x+5$.

171. Во функцијата: а) $y=(3m+2)x-5$; б) $y=(2m-6)x+2m+1$, одреди го m, така што нејзиниот график да биде паралелен со графикот на функцијата $2x-y-8=0$.

172. Во функцијата: а) $y=(a-3)x-2a+1$; б) $y=(3a+4)x+a+1$, одреди го a, така што нејзиниот график да ја сече ординатната оска во точката $(0, 5)$.

173. Запиши формула на линеарна функција чиј график е симетричен со графикот на функцијата $y=x-1$, во однос на:

а) ординатната оска; б) апсцисната оска.

174. Следните функции претстави ги графички во ист координатен систем:

а) $y=-2$; б) $3y=-4$; в) $\frac{y}{2}+\frac{1}{4}=1$; г) $2y=5$; д) $-2y=5$.

16 ТЕК (РАСТЕЊЕ ИЛИ ОПАЃАЊЕ) НА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Треба да знаеш

- Линеарната функција $y=kx+n$ е растечка ако со зголемувањето на аргументот x ***се зголемува*** и вредноста y на функцијата.
- Линеарната функција $y=kx+n$ е опаднувачка ако со зголемувањето на аргументот x вредноста y на функцијата се ***намалува***.
- Линеарната функција $y=kx+n$ е растечка ако $k>0$, а опаднувачка ако $k<0$. За $k=0$ линеарната функција е константна.

175. Одреди го текот на линеарната функција:

а) $y=3x-4$; б) $x+y+5=0$; в) $y=-px-1$ за $p<0$; г) $x-2y=2$;

д) $x-y=0$; ѓ) $\frac{x}{4}-\frac{y}{a}=1$ за $a>0$; е) $y=3$; ж) $\frac{x-y}{2}-0{,}5x=1$.

176. Нацртај го графикот и согледај го текот на функцијата $y=(a-2)x-1$, ако: а) $a=-1$; б) $a=2$.

177. Нацртај го графикот и согледај го текот на функцијата $y=3(2-m)x-1$, ако: а) $m=1$; б) $m=2$; в) $m=3$.

178. Нацртај го графикот на линеарната функција $y=kx+n$, ако тој минува низ точката: а) $P(3,-2)$ и $k=1$; б) $P(3,-4)$ и $k=-2$;
в) $P(-3,4)$ и $n=-1$; г) $P(2,-2)$ и $n=2$.

179. Одреди за кои вредности на $k\in\left\{-3,-\frac{1}{3},0,2,3\frac{1}{2}\right\}$ функцијата $y=kx+2$ е растечка.

180. Според вредностите во табелата одреди го текот на линеарната функција $y=kx+n$.

а)

x	0	1	2	3
y	–4	–1	2	5

б)

x	0	2	4	6
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

181. Дадена е линеарната функција $y=(3a-4)x+a-2$. Одреди ги вредностите на a за кои функцијата е растечка.

182. Дадена е линеарната функција $y=\left(\frac{a}{2}-\frac{a-3}{3}\right)x-5$. Одреди ги вредностите на a за кои функцијата е: а) опаднувачка; б) константна.

183. Графикот на функцијата $y=kx+n$ ја сече ординатната оска во точката $M\,(0,-1)$ и минува низ точката $A(2,-2)$. Одреди го текот на функцијата.

184. Функцијата $y=kx+n$ има нула во $x=-2$, а нејзиниот график минува низ точката $A(-1,1)$. Одреди го текот на функцијата.

185. Графикот на линеарната функција минува низ точките:
а) $A(0,0), B(2,-1)$; б) $M(-4,0), N(0,2)$. Одреди го текот на функцијата.

186. Линеарната функција $y=kx+n$ има нула $x=2$, а нејзиниот график ја сече ординатната оска во точката $P(0,3)$. Нацртај го графикот на функцијата и одреди дали таа е растечка.

17 ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Треба да знаеш

- Решение на равенката $ax+b=0, a\neq 0$ е $x=-\frac{b}{a}$, т.е. апсцисата на пресечната точка на графикот на функцијата $y=ax+b$ со x - оската.
- Решение на равенката $ax+b=cx+d$, $a\neq 0, c\neq 0$ е првата координата (апсцисата) на пресечната точка на графиците на функциите $y=ax+b$ и $y=cx+d$.

Реши ги графички следните равенки (187 - 190):

187. а) $x-3=0$; б) $2x+4=0$; в) $x+\frac{3}{2}=0$;

г) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$; д) $x=0$; ѓ) $\frac{1}{2}x-1=0$.

188. а) $x+3=4$; б) $-3x+5=-1$; в) $2x-2=\frac{1}{2}$; г) $4-3x=-\frac{1}{3}$.

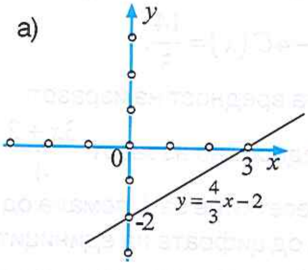
189. а) $\frac{1}{2}x-2=x$; б) $x-4=2x$; в) $\frac{x-2}{3}=x$.

190. а) $x-1=2x+1$; б) $x-1=x+3$; в) $-2x+1=-2x-2$;

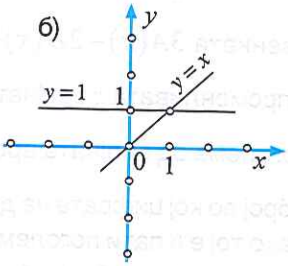
г) $3(x-1)=2(x-2)+4$; д) $5(x+1)+3=7(x-1)+7$; ѓ) $\frac{x}{2}-\frac{x-1}{2}=\frac{x}{3}+1$.

191. Запиши ја линеарната равенка чие графичко решение е дадено на цртежот:

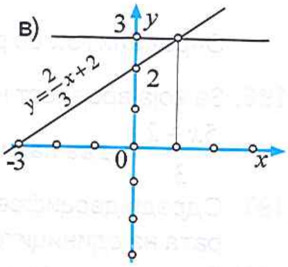
а)



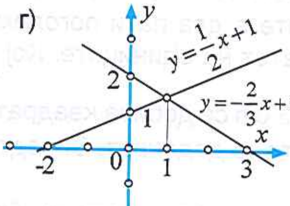
б)



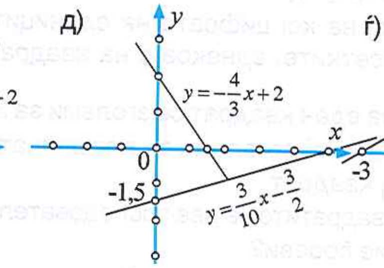
в)



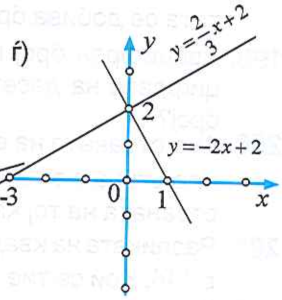
г)



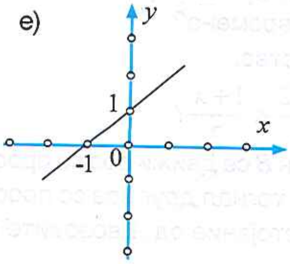
д)



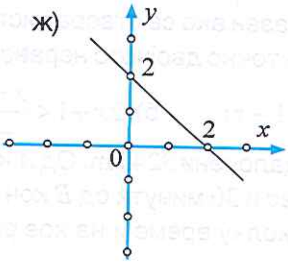
ѓ)



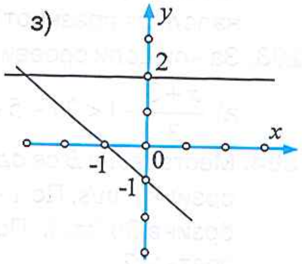
е)



ж)



з)



18 ЗАДАЧИ ПЛУС ЗА ТЕМА 2

192. Реши ги равенките: а) $\frac{x(x-2)}{3}-\frac{x(x-3)}{2}=\frac{(2+x)(1-x)}{6}$;

б) $(x+5)(x-2)-2(3x-1)=(x-3)^2+1$;

в) $(x-3)(x+3)-2(3x-2)=(x-4)^2$.

193. Пресметај го x од равенката $(a-3)x-(a+1)(x-3)=a+x+8$, ако a е корен на равенката $\frac{a-5}{3}-\frac{a-2}{2}=a-3$.

194. Пресметај го x од равенката $ax+4=5x-a+18$, ако a е корен на равенката $2a-3(a-1)=9-2(a+5)$.

195. Дадени се изразите: $A(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}$, $B(x)=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}x$ и $C(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}$.

Определи го x во равенката $3A(x)-2B(x)-4C(x)=\frac{14}{3}$.

196. За која вредност на променливата x бројната вредност на изразот $\frac{5x+2}{3}$ е два пати поголема од бројната вредност на изразот $\frac{3x+2}{4}$?

197. Одреди двоцифрен број во кој цифрата на десеткит е за 4 помала од цифрата на единиците, ако тој е 6 пати поголем од цифрата на единиците.

198. Збирот на цифрите на двоцифрен број е 8. Ако цифрите ги променат местата се добива број кој е за 18 поголем од дадениот. Кој е тој број?

199. Двоцифрен број на кој цифрата на единиците е два пати поголема од цифрата на десетките, еднаков е на квадратот на единиците. Кој е тој број?

200. Ако страната на еден квадрат се зголеми за 3 cm се добива квадрат чија плоштина е за 39 cm^2 поголема од плоштината на дадениот. Определи ја страната на тој квадрат.

201. Разликата на квадратите на два последователни непарни природни броеви е 144. Кои се тие броеви?

202. Еден базен се полни од две цевки. Првата цевка сама може да го наполни базенот за 6 часа, а втората за 4 часа. За колку часа двете цевки ќе го наполнат празниот базен ако се отворат истовремено?

203. За кои цели броеви е точно двојното неравенство:

а) $\frac{x+3}{3}-1<2x+5<1-x$; б) $2x+1<\frac{x+2}{-3}<\frac{1+x}{2}$?

204. Местата A и B се оддалечени 324 km. Од A кон B се движи воз со просечна брзина 8 m/s. По 1 час и 30 минути од B кон A тргнал друг воз со просечна брзина 36 km/h. По колку време и на кое растојание од A возовите ќе се сретнат?

205. Четворица работници треба да завршат една работа. Ако првиот работи сам работата би ја завршил за 15 дена, вториот за 20 дена, третиот за 24 дена, а четвртиот за 30 дена. По еден ден отсуствувале само првиот и вториот работник, а третиот и четвртиот работник отсуствувале по 3 дена. За колку дена работата била завршена?

206. Која од дадените равенки има корен 3:

а) $x-1=2x-4$; б) $2x-1=x+5$; в) $x^2-6x+9=0$; г) $x^2-3=0$?

207. Реши ја равенката:

а) $3x+1,2=2x+3,6$; б) $8(3x-1)-9(5x-11)=30-2(7-2x)$;

в) $\frac{2x-3}{5}-\frac{3x-4}{3}=\frac{1-14x}{15}$; г) $\frac{5(x+1)}{2}+\frac{2(2x+1)}{3}=7$;

д) $\frac{2x}{3}-\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{6}\right)=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$.

208. За која вредност на променливата x, изразите $A(x)=3-(2x+5)$ и $B(x)=2(x-1)-6$ имаат иста бројна вредност?

209. Збирот на два броја е 30, а нивниот размер е $3:7$. Одреди ги тие броеви.

210. Збирот на два броја е 54. Кога поголемиот ќе се подели со помалиот се добива количник 3 и остаток 6. Одреди ги тие броеви.

211. Разликата на два броја е 46. Кога поголемиот ќе се подели со помалиот се добива количник 4 и остаток 7. Одреди ги тие броеви.

212. Еден курир патува од местото A до местото B во одредено време. Ако се движи со брзина 35 km/h ќе задоцни 2 часа, а ако се движи со брзина 50 km/h ќе стигне 1 час порано. Одреди го растојанието меѓу местата A и B.

213. Еден автомобил го поминал растојанието од местото A до местото B со брзина 60 km/h, а од местото B до местото A со брзина од 40 km/h. Одреди ја средната брзина на движење на автомобилот.

214. Еден базен може да се наполни од една цевка за 8 часа, а од друга за 12 часа. Откако празниот базен се полнел од првата цевка 3 часа, отворена е и втората цевка. За колку време двете цевки ќе го наполнат базенот?

215. Мимоза има 20 монети од по 2 денари и 5 денари или вкупно 82 денари. Колку монети биле од 2 денари, а колку од 5 денари?

216. (Стара руска задача). Еден човек најмил работник за 1 година и се договориле да му даде 12 рубли и кафтан (старинско палто од чоја). Но, работникот по 7 месеци посакал да си оди и побарал да му се плати за работата, но да го задржи кафтанот. Човекот му го дал кафтанот и 5 рубли. Колку чинел кафтанот?

217. (Стара руска задача). Атаменот на едно село го прашал учителот дали собрал 100 ученици. Учителот одговорил: “Ако дојдат уште толку колку што имам, и половината од нив и четвртината од нив и ти ако го пратиш твојот син, тогаш ќе бидат 100. Колку ученици имал учителот?

218. (Задача од учебникот на М. Штифел, 1553 год.). “Продадов 12 грла добиток: 3 коњи, 4 магариња и 5 мазги. Коњите ги продадов 3 шилинзи поскапо од мазгите, а мазгите 5 шилинзи поскапо од магарињата. Така стекнав 805 шилинзи”. Колку шилинзи чинело секое грло?

219. (Стара индиска задача). Од еден рој пчели $\frac{1}{5}$ застанале на цветот на јасминот, $\frac{1}{3}$ на зумбулот, утроената разлика на тие два броја слетале на цветот на трендафилот, а една пчела останала да лета наоколу. Колку вкупно пчели имало во ројот?

220. (Од старокинеската збирка “Математика во 9 книги”). Неколку трговци сакале заедно да купат стока. Ако секој даде по 9 јуана (кинеска пара) ќе им преостанат 11 јуана, ако, пак, секој даде по 6 јуана ќе им недостасуваат 16 јуана. Колку трговци биле и колку чинела стоката?

221. Во функцијата $y = 2x - 5$, одреди го x, така што точката $M(x, -1)$ да му припаѓа на графикот на функцијата.

222. Во функцијата $y = -2x + n$, одреди го n, така што нејзиниот график да минува низ точката $P(1, 3)$.

223. Графикот на линеарната функција $y = kx + n$ минува низ точката $A(2, 3)$. Претстави ја функцијата графички и одреди дали таа е растечка или опаднувачка ако $k = 1$.

224. Претстави ја со формула линеарната функција чиј график е права симетрична на графикот на функцијата $y = 2x - 1$, во однос на:

а) ординатната оска; б) апсцисната оска; в) координатниот почеток.

225. Со помош на неравенството $(a-b)^2 > 0$ докажи дека збирот на квадратите на два различни броја е поголем од двократниот производ на истите броеви.

226. Половината од периметарот на кој било триаголник е секогаш поголем од која било страна на истиот триаголник. Докажи.

227. За кои вредности на a дропката:

а) $\frac{2a-3}{3a-2}$ е позитивна; б) $\frac{2a+3}{3a-5}$ е негативна; в) $\frac{a-1}{a-2}$ е негативна?

228. За кои вредности на a производот:

а) $(3a+2)(2a-6)$ е позитивен; б) $(a-4)(0,5a+2)$ е негативен;

в) $(a+5)(a-2)$ е позитивен?

ТЕМА 3

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Содржина на темата

1 Линеарна равенка со две непознати 66

2 Еквивалентни линеарни равенки со две непознати 67

3 Систем од две линеарни равенки со две непознати 70

4 Графичко решавање на систем линеарни равенки со две непознати 71

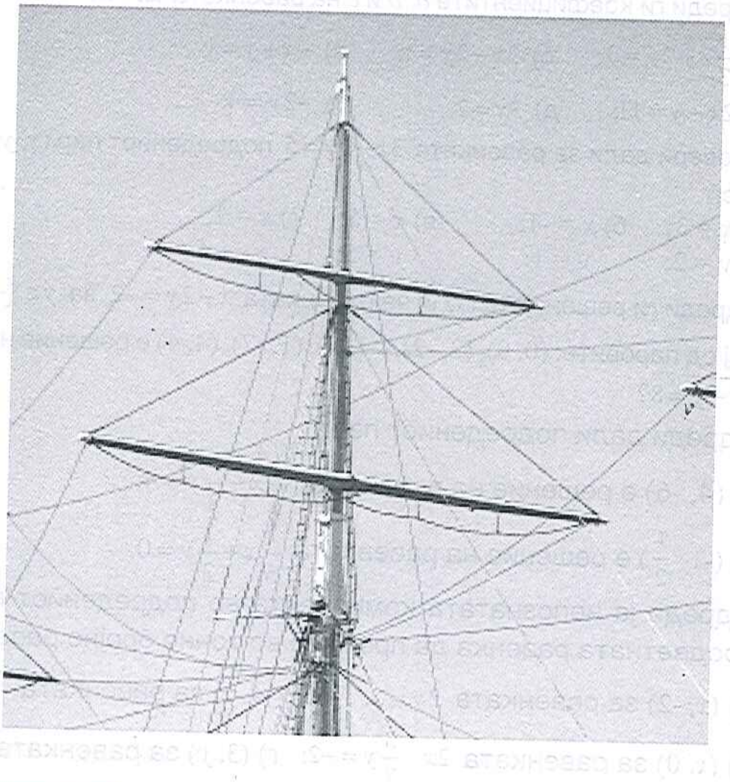
5 Решавање систем линеарни равенки со две непознати со метод на замена 72

6 Решавање систем линеарни равенки со две непознати со метод на спротивни коефициенти 74

7 Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати 76

8 Аритметичка средина. Ранг. Медијана и мода 80

9 Задачи плус за тема 3 82



1 ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Треба да знаеш

Равенката од видот $ax + by = c$, каде $a,b,c \in \mathbb{R}$ и x, y се реални непознати, се вика линеарна равенка со две непознати;

Подредениот пар (m, n) е решение на равенката $ax+by=c$, ако важи бројното равенство $am+bn=c$.

Множеството $M=\{(x,y) \mid x,y \in R$ и $5x+3y=8\}$ претставува множество решенија на равенката $5x+3y=8$.

1. Напиши линеарна равенка $ax+by=c$ ако е:

а) $a=4$, $b=2$ и $c=3$; б) $a=2{,}5$, $b=0{,}3$ и $c=1{,}1$;

в) $a=\frac{2}{3}$; $b=\frac{1}{2}$ и $c=0$; г) $a=-1$; $b=1$ и $c=2$;

д) $a=0$; $b=3$ и $c=\frac{3}{4}$; ѓ) $a=\frac{2}{5}$; $b=0$ и $c=1\frac{1}{2}$.

2. Одреди ги коефициентите a, b и c на равенката $ax+by=c$ ако е:

а) $\frac{1}{3}x+2y=3$; б) $3x-2y=1$; в) $-x+y=1$;

г) $2x-y=11$; д) $3x=2$; ѓ) $-2y=4$.

3. Провери дали за равенката $3x-2y=5$ подредениот пар (x, y) е решение ако:

а) $x=3$; $y=2$; б) $x=-1$; $y=1$; в) $x=5$; $y=5$; г) $x=1$; $y=-4$.

4. Одреди ги решенијата (x, y) на равенката $x-2y=-2$ за $y \in \{-1,0,1\}$.

5. Кој од паровите: $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(-1, 5)$, $(1, -7)$, $(4, 4)$ е решение на равенката $3x-y=8$?

6. Одреди дали подредениот пар:

а) $(4, -6)$ е решение на равенката $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=4$;

б) $(-1, \frac{1}{2})$ е решение на равенката $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y=0$.

7. Одреди ја непознатата компонента во подредениот пар (x, y) за соодветната равенка да премине во точно бројно равенство.

а) $(x, -2)$ за равенката $2y=x$, б) $(-4, y)$ за равенката $x+\frac{1}{2y}=-1$;

в) $(x, 0)$ за равенката $2x-\frac{3}{7}y=-2$; г) $(3, y)$ за равенката $x+\frac{1}{2}y=5$.

8. Одреди ја вредноста на параметарот m така што подредениот пар (-2, 2) да е решение на равенката $2x+3my=2$.

9. Одреди ја вредноста на параметарот p за подредениот пар:

а) (2, -1) да биде решение на равенката $px-2y=3p$;

б) (0, -2) да биде решение на равенката $(p-5)x-(3p-1)y=5-p$.

10. Најди две решенија на равенката:

а) $3x+y=5$; б) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=1$; в) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)-3(y-1)=0$.

11. Одреди три решенија на равенката:

а) $0\cdot x+y=8$; б) $3x+0\cdot y=9$.

12. Реши ја равенката $x+y=5$ во множеството: а) $\mathbb{N}$; б) $\mathbb{N}_0$.

13. Определи со колку метални пари од 2 ден. и од 5 ден. можат да се купат предмети кои чинат:

а) 41 ден; б) 19 ден; в) 13 ден.

14. Запиши ги во форма на линеарна равенка со две непознати следниве реченици:

а) Иван и Марко имаат заедно 27 денари.

б) Разликата на два броја е 8.

в) Периметарот на рамнокрак триаголник е 15 cm.

15. Одреди ги сите правоаголници на кои мерните броеви на страните се природни броеви и имаат периметар 14.

16. Одреди ги сите рамнокраки триаголници на кои мерните броеви на страните се природни броеви и имаат периметар 12.

17. Во една цистерна има 440 l нафта. Колку буриња од 60 l и 80 l можат да се наполнат со нафтата од цистерната?

18. За покривање на подот на една просторија широка 3 m има штици со ширина 11cm и штици со ширина 13 cm (штиците и просторијата имаат еднакви должини). Колку цели штици од секој вид се потребни за подот?

2 ЕКВИВАЛЕНТНИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Треба да знаеш

- Две линеарни равенки со две непознати во исто дефинициони множество се еквивалентни ако нивните множества решенија се еднакви.
- Линеарна равенка со две непознати со трансформации може да се доведе во форма $ax+by=c$.

Множеството решенија на равенката $ax+by=c$ е: за $x=k$, $y=\frac{c-ak}{b}, b\neq 0$; т.е. $\left\{\left(k, \frac{c-ak}{b}\right) | k\in R\right\}$.

Од равенката $ax+by=c$ може да се запише функцијата $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. Графикот на оваа функција се вика график на равенката.

19. Покажи дека равенката $x + 2y = 4$ и равенката $\frac{1}{2}x+y=2$ за $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ имаат исти решенија.

20. Определи го решението на равенката $3x+2y=7$ за:

а) $x = 1$; б) $x = -3$; в) $x = 0$; г) $y = 2$; д) $y = -1$; ѓ) $y = 0$.

21. Запиши ја во форма $ax+by=c$ равенката:

а) $3(x - 2) + y = 2x - 5$; б) $(3x - 1)(2y+3) + 2 = 6xy$;

в) $\frac{x+y}{3}+x=-2$; г) $\frac{x+2y}{3}=\frac{4y-3x}{4}-1$.

22. Доведи ја во форма $ax+by=c$ равенката:

а) $2(5x-6)(y+1)=(2x-3)(5y+7)$; б) $x-\frac{2y-5}{5}=y+2-\frac{4y-3x}{2}$;

в) $3(x+2)(y-3(x+1))=3x(y-3x)$; г) $(3x-1)^2+(y+2)^2=9(x-1)^2+(y+1)^2$.

23. Запиши ја во форма $ax+by=c$ равенката и одреди ја вредноста на a, b и c:

а) $1-(2x-3y-4)-2(3-2x+8y)=3(2x-y)-2(y-3x+1)$;

б) $0{,}5(4-x)-\frac{3}{5}(1-5y)=1\frac{1}{2}\left(2x-4y+\frac{4}{3}\right)$;

в) $(x-2)(y+1)=3+(x-1)(y+2)$: г) $(x+2)^2-(y+2)^2=(x-y)(x+y)-3$.

24. Дали равенките $x-2y=1$ и $x-2(1-y)=4y-1$ за $x\in\{-2,-1,0\}$ имаат исти решенија?

25. Покажи дека равенките се еквивалентни:

а) $4x+12y=4$ и $x+3y=1$; б) $0{,}3x-1{,}2y=3$ и $x-4y=10$;

в) $3x-4y=18$ и $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=3$; г) $15x+2y=16$ и $1\frac{1}{8}x+0{,}15y=1\frac{1}{5}$.

26. Запиши ја равенката во форма $y=f(x)$:

а) $2x+3y=6$; б) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$; в) $3x+y=2$; г) $\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{3}=1$.

27. Запиши ја равенката во форма на $x=f(y)$:

а) $x-y=2$; б) $5x-3y=10$; в) $\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}y=2$; г) $-2x+y=4$.

28. Покажи дека подредениот пар $(n, 3 - n)$, $n\in R$ е решение на равенката:

а) $y=3-x$; б) $x+y=3$; в) $x+y-3=0$; г) $2x+2y=6$.

29. Покажи дека множеството на подредените парови $\left(n, \frac{5-2n}{3}\right), n \in \mathbb{R}$ е множество решенија на равенката $2x+3y=5$.

30. Одреди ја вредноста на k, така што подредениот пар $(k, 3)$ е решение на равенката $4x+3y=5$.

31. Одреди ја вредноста на a и b, така што подредените парови $(a, -2)$ и $(1, b)$ да бидат решенија на равенката:

а) $3x+4y=1$; б) $5x+\frac{1}{2}y=8$; в) $x-y=-1$.

32. Одреди ја вредноста на n во равенката $(2n-5)x-(3n+1)y=1-n$, така што решението на равенката да биде подредениот пар:

а) $(1, 0)$; б) $(0,-1)$; в) $\left(\frac{4}{9}, \frac{3}{4}\right)$; г) $(2,2)$.

33. Провери дали графикот на равенката $2x-3y=1$ минува низ точката:

а) $(2, 1)$; б) $(2, -1)$; в) $(0, -3)$; г) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

34. Одреди го бројот k, така што графикот на равенката $3x-2y=5$ минува низ точката: а) $M(-3, k)$; б) $N(k, 2)$.

35. Одреди ја вредноста на k во равенката $3x-ky=5$ ако нејзиниот график минува низ точката: а) $A(2, 1)$; б) $B(0, -1)$.

36. Претстави го графички множеството решенија на равенката:

а) $2x+y+3=0$; б) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$;

в) $0\cdot x+y-2=0$; г) $3x+0\cdot y==-6$.

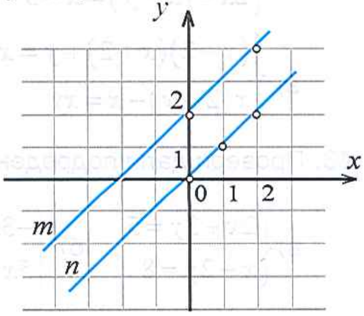
37. Дадена е равенката $x-y=y+2$.

а) Запиши го множеството решенија на равенката.

б) Претстави го графички множеството решенија на равенката.

в) Од графикот на равенката одреди ја вредноста на k, така што подредениот пар $(0, k)$, односно $(k, 1)$ да биде нејзино решение.

38. Во координатната рамнина на цртежот се дадени паралелните прави m и n. Одреди ги равенките за кои правите m и n се нивни графици.



3 СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Треба да знаеш

- Две линеарни равенки со две непознати образуваат систем ако за тие равенки се бара пресекот на нивните множества решенија.
- Решение на систем линеарни равенки со две непознати е подреден пар од реални броеви којшто е заедничко решение за двете равенки.
- Два системи равенки се еквивалентни ако имаат еднакви множества решенија.
- Со трансформации даден систем може да се трансформира во еквивалентен систем од видот $\begin{cases} x=a \\ y=b, \end{cases}$ каде што подредениот пар $(x, y)=(a, b)$ е решение на системот.

39. Покажи дека системот $\begin{cases} x+2y=1+2y \\ 2x-y=-1+2x \end{cases}$ е еквивалентен на системот $\begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

40. Објасни зошто системот $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ не е еквивалентен на системот $\begin{cases} 2x+y=y+2 \\ x+3y=x+6. \end{cases}$

41. Покажи дека подредениот пар $(2, 3)$ е решение на системот $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1. \end{cases}$

42. Изврши еквивалентни трансформации и покажи дека за системот:

а) $\begin{cases} x-2y=2(1-y) \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{x+4}{2} \end{cases}$ решение е подредениот пар $(2, 8)$;

б) $\begin{cases} 3x-2(4+y)=1-2y \\ 2x-(x-y)=x-5 \end{cases}$ решение е подредениот пар $(3, -5)$;

в) $\begin{cases} (x-2)(x+2)+y=x^2-3 \\ x(2+y)-x=xy \end{cases}$ решение е подредениот пар $(0, 1)$.

43. Провери дали подредениот пар $(-2, 3)$ е решение на системот:

а) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -3x+y=9 \\ 5x+4y=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}y=1 \\ x-\dfrac{1}{3}y=-3. \end{cases}$.

44. Кои од подредените парови $(-1, 4)$, $(2, 5)$ и $(0, 3)$ припаѓаат на множеството решенија на системот равенки:

а) $\begin{cases} 5x+y=3 \\ x-2y=-6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -x+y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 5x-2y=0 \\ 4x+7y=43 \end{cases}$?

45. Дали подредениот пар $(1, -1)$ е решение на системот:

а) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 0{,}1x+0{,}2y=0{,}3 \end{cases}$?

46. Покажи дека се еквивалентни системите равенки:

а) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x=1-2y \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=2 \\ 2y+3x=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 6x-3y=3 \\ \frac{x}{2}+y=1{,}5 \end{cases}$.

47. Покажи дека системот равенки $\begin{cases} 2x+4y=-1 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$ е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \\ (x+1)^2-(y-2)^2=(x-2)(x+2)-y^2. \end{cases}$$

48. Реши го системот: а) $\begin{cases} 3x+2y=2(y-3) \\ y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x-2(2-y)=2y-9 \\ y=-4 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=1 \\ 3(y-x+1)=1-3x \end{cases}$; г) $\begin{cases} x=-5 \\ y-2(3-2x)=4\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$.

49. Провери низ која точка минуваат графиците на равенките од системот

$\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ $A(1, 1)$; $B(2, 0)$; $C(-3, 2)$; $D(0, 1)$; $E(-2, -6)$.

4 ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Треба да знаеш

Ако решението $(x, y)=(a, b)$ на системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ се бара со помош на графиците на равенките на системот, тогаш велиме дека системот на линеарни равенки со две непознати се решава графички.

- Системот има едно решение ако графиците на равенките се сечат.
- Системот има бесконечно многу решенија ако графиците на равенките се совпаѓаат.
- Системот нема решение ако графиците на равенките се паралелни.

50. Нацртај го графикот на линеарната функција:

а) $y=2x-3$; б) $y=-x+5$; в) $y=\frac{1}{2}x-1$; г) $y=-3x+2$.

51. Претстави ја графички линеарната равенка $2x-y=2$ и провери која од точките $M(2,2)$, $N(-1,1)$ или $P(1,0)$ лежи на нејзиниот график.

52. Покажи дека точката $M(2,3)$ припаѓа на графикот на секоја од равенките:

а) $y=\frac{3}{2}x$ и $y=-x+5$; б) $2x+y=7$ и $y=2x-1$;

в) $x-y=-1$ и $3x-5y=-9$.

53. Покажи со цртеж дека графиците на равенките $2x+y=5$ и $3x-y=5$ се сечат во точката $M(2,1)$.

54. Определи ја графички точката во којашто се сечат графиците на линеарните равенки: а) $x-y=2$ и $x+3y=2$; б) $2x-y=5$ и $x+2y=5$.

55. Реши го графички системот:

а) $\begin{cases} y=2x \\ y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ y-1=0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x=5 \\ y=2x-5 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x=-3 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$; ѓ) $\begin{cases} x=-2 \\ y=3. \end{cases}$

56. Реши го графички системот:

а) $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=-x-3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=x-5 \\ y=\frac{x}{2}-1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-3y=6 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

57. Реши го графички системот:

а) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0 \\ x+2y=-4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{2y}{3}=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1. \end{cases}$

58. Реши го графички системот:

а) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 6x-2y=-5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=2, \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

59. Равенките во дадените системи доведи ги во форма $y = kx + n$, а потоа определи го решението на системот графички.

а) $\begin{cases} x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0 \\ 1-x+y=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(y+3) \\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)-y=0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x-3(1-y)=2(2y-3)+5 \\ 2(3-x)-3=y-(x+1). \end{cases}$

60. Запиши ги равенките на системот во видот $y = f(x)$, спореди ги коефициентите и според тоа одреди колку решенија има системот:

а) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+\frac{1}{2}y=1\frac{1}{2} \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-2y=4 \\ 0{,}5x-y=1. \end{cases}$

61. Дадена е равенката $y=\frac{3}{2}x-1$. Запиши уште една равенка така што со дадената да формира систем на равенки кој ќе: а) има едно решение; б) има бесконечно многу решенија; в) нема решенија.

5 РЕШАВАЊЕ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ СО МЕТОД НА ЗАМЕНА

Треба да знаеш

Ако во едната равенка на системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ се изрази едната непозната преку другата и истата непозната се замени со добиениот израз во другата равенка, се добива нов систем еквивалентен со дадениот. Овој начин на решавање систем линеарни равенки со две непознати се вика метод на замена. На пример: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x+2(1-2x)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-1 \end{cases}$. $R_S=(x,y)=(-1,3)$.

Со метод на замена реши ги системите равенки (62 - 67).

62. а) $\begin{cases} x+y=4 \\ y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ y=-2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x=2 \\ x+2y=4 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x=0 \\ x-3y=6. \end{cases}$

63. а) $\begin{cases} y=x+2 \\ 3x+y=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=-y+4 \\ x+2y=5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ x=2y-1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x-5y=4 \\ y=-\frac{2}{5}x+1. \end{cases}$

64. а) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x+y=17 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 5x-4y=7. \end{cases}$

65. а) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6} \\ \frac{2}{5}x-\frac{1}{4}y=\frac{3}{20} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1\frac{1}{3} \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 1{,}5x-2y=3 \\ 0{,}2x+0{,}6y=0{,}4 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 0{,}8x+0{,}1y=1{,}7 \\ 0{,}6x+0{,}4y=-1 \end{cases}$.

66. а) $\begin{cases} 4(x+2y)-2y=8-3(y-x) \\ 1-2(6y+x)=3(x-2) \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x-2)(x+2)+2y=1+x(x-3) \\ x-3y=9 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 5x+2y=20 \\ \frac{x+3}{2}-\frac{2x+y-3}{12}=2 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5}-\frac{2x+y}{10}=2 \\ 2-\frac{x-2y}{4}=\frac{7y-5x+4}{12} \end{cases}$.

67. а) $\begin{cases} (x-2)^2-2y=(x-3)^2 \\ (y-1)^2+3x=(y+2)^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3y+4x^2=(2x-1)^2+1 \\ (3y-2)^2-2x=(3y-2)(3y+2). \end{cases}$

68. Реши го системот графички и со метод на замена и спореди ги решенијата:

а) $\begin{cases} y=3x \\ x-y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-3y=1. \end{cases}$

69. Определи ја вредноста на параметарот m и n така што системот $\begin{cases} mx+y=n \\ 2x+my=n \end{cases}$ има решение: а) $(2, 3)$; б) $(0, -9)$; в) $\left(\frac{9}{14}, -\frac{3}{5}\right)$.

70. Определи ја вредноста на параметрите p и q така што системот $\begin{cases} (p-3)\cdot x+(q+2)\cdot y=3 \\ (q+2)\cdot x-(p-1)\cdot y=1 \end{cases}$ има решение: а) $(2, 1)$; б) $(-1, 3)$; в) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

6 РЕШАВАЊЕ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ СО МЕТОД НА СПРОТИВНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Треба да знаеш

Ако во системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ коефициентите a_1 и a_2 или b_1 и b_2 се спротивни броеви, тогаш едната равенка на системот може да се замени со збирот на двете равенки и тој систем е еквивалентен со дадениот. Оваа трансформација се вика својство на собирање на равенките со спротивни коефициенти. На пример:

$$\begin{cases}3x+2y=5\\x-2y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3x+2y)+(x-2y)=5+7\\x-2y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\x-2y=7\end{cases}\text{ итн.}$$

71. Реши го системот со метод на спротивни коефициенти:

а) $\begin{cases}x+y=55\\x-y=17\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x-3y=19\\2x+3y=-5\end{cases}$; в) $\begin{cases}-2x+7y=19\\2x+3y=11\end{cases}$; г) $\begin{cases}3x+5y=95\\3y-3x=9.\end{cases}$

72. Реши го системот со метод на спротивни коефициенти:

а) $\begin{cases}6x+5y=105\\4x+5y=85\end{cases}$; б) $\begin{cases}7x-2y=44\\7x+5y=-5\end{cases}$; в) $\begin{cases}5x-6y=-11\\2x+3y=20\end{cases}$; г) $\begin{cases}2x-9y=25\\6y-4x=-13.\end{cases}$

73. Реши го системот со метод на спротивни коефициенти:

а) $\begin{cases}3x+2y=42\\4x-3y=5\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x+7y=10\\-5x+6y=17\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x-5y=13\\5x-7y=16\end{cases}$; г) $\begin{cases}11x-6y=17\\9x-4y=8.\end{cases}$

74. Доведи ја секоја равенка на системот во форма $ax+by=c$ и потоа реши ги со метод на спротивни коефициенти:

а) $\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y-4=0\\\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}x-5=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2(4x+y)-(4x+3y)=1\\6(x-y)-2(y-x)=8\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=15-\frac{x+y}{3}\\y-\frac{y-x}{5}=\frac{6}{5}\end{cases}$;

г) $\begin{cases}(x+2)^2-(x-3)(x+3)=3(y+6)\\(y-3)^2-(y-2)(y+3)=2(5-3x)\end{cases}$; д) $\begin{cases}2y-x(x+2)=5+x\left(\frac{3}{2}-x\right)\\(y-1)y-5\cdot\left(x+\frac{1}{5}\right)=1+y^2\end{cases}$.

75. Реши го системот графички и со метод на спротивни коефициенти спореди ги решенијата:

а) $\begin{cases}2x-y=0\\3x+y=5\end{cases}$; б) $\begin{cases}-3x+y=1\\4x-y=3\end{cases}$; в) $\begin{cases}3x-2y=1\\3x-y=2\end{cases}$; г) $\begin{cases}2x+y=7\\x+3y=6.\end{cases}$

76. За кои вредности на параметрите m и n системот $\begin{cases}mx+ny=3\\mx-ny=-11\end{cases}$ има решение $(2,3)$?

77. Определи ја вредноста параметрите p и q во системот $\begin{cases}(3p-1)\cdot x+q\cdot y=5\\px+(q+2)\cdot y=11\end{cases}$ така што подредениот пар (-2, 1) е решение на системот.

78. Одреди ја вредноста на b и c во равенката $2x+by=c$ така што графикот на равенката да минува низ точките:а) $(2,2)$ и $(-1,-1)$; б) $(0,3)$ и $(-3,2)$.

79. Одреди ја вредноста на a и b во равенката $ax+by=-5$ така што графикот на равенката да минува низ точките: а) $(-2,1)$ и $(3,-4)$; б) $(1,-3)$ и $(5,5)$.

80. Реши го системот со најпогодниот метод за решавање:

а) $\begin{cases} x+3(1-y)=0 \\ 3y-2(6-x)=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3(x-2)-(y+x)=3y \\ 3(y-2)=3(x+1)-12 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{1}{4}(x+y)=1-\frac{1}{2}(x-y) \\ \frac{2}{3}(2x-y)-\frac{1}{4}(3x-y)=3 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} (x+5)(y-2)=(x+3)(y-1) \\ (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \end{cases}$; д) $\begin{cases} (x-1):(y+2)=3:2 \\ y:x=4:3 \end{cases}$;

ѓ) $\begin{cases} \frac{x+7}{5}-\frac{2x-y}{4}=y-5 \\ \frac{4x-3}{6}+5x=18-\frac{5y-7}{2} \end{cases}$; е) $\begin{cases} \frac{x-2}{4}:\frac{y+16}{5}=5:8 \\ (3x-2y-13):(x-y+4)=2:1{,}5. \end{cases}$

7 ПРИМЕНА НА СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Треба да знаеш

За решавање на ваков вид задачи погодно е да ги користиш следните постапки:

- Почеток: внимателно се чита задачата и се определува што е познато, а што непознато.
- Означување. Непознатите се означуваат со букви (x, y, ..., a, b, ...) и се воочуваат нивните карактеристики.
- Заемни врски. Се воочуваат и запишуваат заемните врски помеѓу непознатите и познатите величини.
- Составување и решавање. Се формираат равенките, потоа се составува системот и тој се решава со погоден метод.

81. Кои два броја имаат збир 37, а разлика 7?

82. Збирот од третината на еден број и петтината на друг број е 8, а збирот од петтината на првиот и половината од третината на другиот број е 2. Кои се тие броеви?

83. Разликата на два броја е 37, а збирот на првиот број и трикратната вредност на вториот број е 121. Кои се тие броеви?

84. Третината од збирот на два броја е 10, а половината од нивната разлика е 7. Пресметај ги броевите.

85. Збирот на два броја е 48, а нивниот количник е 5. Кои се тие броеви?

86. Разликата на два броја е 261. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива количник 7 и остаток 3. Кои се тие броеви?

87. Збирот од еден број и трикратната вредност на друг број е 112. Ако вториот број се подели со првиот се добива количник 2 и остаток 7. Кои се тие броеви?

88. Ако еден број се подели со друг се добива количник 2 и остаток 3, ако пак збирот на тие броеви се подели со нивната разлика се добива количник 2 и остаток 19. Кои се тие броеви?

89. Ако половината на еден број се намали за 2 се добива другиот број зголемен за 2. При делење на првиот со вториот број се добива количник 3 и остаток 3. Кои се тие броеви?

90. Бруто тежината на еден пакет е 55,7 kg а самиот сандак со петтина од стоката тежи 19,3 kg. Колку тежи стоката а колку сандакот?

91. Збирот на годините на братот и сестрата е 47. Колку години има братот а колку сестрата ако братот има 7 години повеќе од сестрата?

92. Пред три години таткото бил 4 пати постар од ќерката, а после 7 години тој ќе биде 2,5 пати постар од неа. Колку години имал секој од нив?

93. Во две буриња има 45 ℓ течност. Ако од првото буре се потроши $\frac{1}{6}$ од течноста, а од второто $\frac{1}{3}$ од течноста, тогаш во двете буриња ќе има иста количина течност. По колку литри течност имало во секое буре?

94. Во една каса имало 56 банкноти од по 500 ден. и по 100 ден., со вкупна вредност од 10000 ден. Колку има во касата од секоја банкнота?

95. На натпреварот по математика имало 13 задачи. За секоја точно решена задача се добивале 7 поени, а за секоја нерешена задача се губеле 3 поени. Колку точни задачи решил ученикот ако освоил 51 поен?

96. Во еден двор има јагниња и кокошки. Вкупно има 25 глави и 64 нозе. Колку има јагниња, а колку кокошки?

97. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 9. Ако цифрите си ги заменат местата првиот број ќе биде $\frac{3}{8}$ од вториот. Кој е тој број?

98. Ако еден двоцифрен број се подели со збирот на своите цифри се добива количник 6 и остаток 6, ако бројот напишан со исти цифри, но во обратен ред се подели со разликата на тие цифри се добива количник 23. Кој е тој број?

99. Една работа двајца работници можат да ја завршат за 24 часа. После 10 часа заедничко работење едниот работник се разболел, а другиот преостанатиот дел од работата го завршил за 35 часа. За колку часа би ја завршил работата секој работник сам?

100. Треба да се измеша ракија 60% и ракија од 40% , така што да се добијат 40 ℓ ракија од 47,5%. По колку литри ракија треба да се земе од секој вид?

101. Со мешање на 5 ℓ од еден и 4 ℓ од друг вид се добива ракија со јачина од 62%. Ако 3 ℓ од првата и 6 ℓ од втората се измешаат се добива ракија со јачина 65%. Од колку проценти се мешаните ракии?

102. Трговец има кафе со цена од 168 ден. за 1 kg и кафе од 108 ден. за 1 kg. Колку kg кафе треба да се земе од првиот, а колку од вториот вид за да се добие 160 kg кафе од 120 ден за 1 kg?

103. Ако се измеша 9 ℓ шпиритус со одредена јачина и 6 ℓ шпиритус со друга јачина се добива шпиритус со 80% јачина. Ако се измешаат 6 ℓ шпиритус од првиот и 9 ℓ од вториот вид ќе се добие шпиритус од 85%. По колку литри шпиритус треба да се земе од секој вид?

104. Еден винар сака да измеша два вида грозје: од 30 денари за 1 kg и 22 ден. за 1 kg, за да добие 100 kg грозје по цена од 25 ден за 1 *kg*. По колку kg грозје ќе треба да се земе од секој вид?

105. Ако се измеша извесна количина вода и извесна количина ракија од 70% ќе се добие 24 ℓ ракија од 56%. Колку литри вода , а колку литри ракија ќе треба?

106. Раствор од 65% алкохол и раствор од 55% треба да се измешаат.По колку литри алкохол треба да се земе од секој вид за да се добие 20 ℓ алкохол од 60%?

107. Средната брзина на еден атлетичар во насока на ветрот е 27 m/min, а спроти ветрот е 21 m/min. Колкава е брзината на атлетичарот во мирно време, а колку е на ветрот?

108. Растојанието помеѓу два автомобила е 810 m. Ако се движат еден спроти друг ќе се сретнат после 30 sek. Ако, пак, автомобилите се движат во иста насока, побрзиот ќе го стигне поспориот после 270 sek. Пресметај ги брзините на автомобилите.

109. Еден автомобил тргнал 30 min после друг од исто место и после 2,5 часа возење го стигнал и заедно продолжиле, а после 1,5 час побрзиот автомобил бил 24 km пред првиот. Одреди ги средните брзини на автомобилите.

110. Еден моторист наместо за 2 часа и 20 min патот го поминал за 3,8 часа зашто моторот му се расипал, па останатиот пат го поминал пешки. Брзината на мотористот била 60 km/h кога го возел моторот, а 5 km/h кога одел пешки. Колку km мотористот поминал возејќи го моторот, а колку поминал пешки?

111. Патникот пресметал дека ако поминува по 1 km/h помалку ќе мора да патува 2 часа повеќе од предвиденото време, а ако поминува по 2 km/h повеќе ќе патува 2,5 часа помалку од предвиденото време. Пресметај со која брзина треба да патува и за кое време ќе го помине тој пат.

112. Двајца атлетичари трчаат по кружна патека со должина 660 m. Кога трчаат по иста насока тие се стигнуваат после секои 11 min, а кога трчаат во спротивна насока тие се сретнуваат секоја минута. Одреди ја брзината на секој атлетичар.

113. Ако брзината на еден воз се зголеми за 30 km/h тој ќе стигне 2 часа порано од планираното време. Ако брзината се намали за 20 km/h, тогаш ќе задоцни 3 часа. Колкава е брзината на возот и колку пат треба да помине?

114. Еден внатрешен агол на триаголник е 43^0, а количникот на другите два е 2. Пресметај ги аглите на триаголникот.

115. Периметарот на рамнокрак триаголник е 36 cm, а разликата од основата и половината на кракот е 11 cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

116. Ако хипотенузата се зголеми за 3 m, а нејзината висина се намали за 2 cm плоштината на правоаголниот триаголник ќе се зголеми за 9 cm^2. Ако, пак, хипотенузата се намалува за 4 cm, а соодветната висина се зголеми за 3 cm плоштината на триаголникот ќе се намали за 6 cm^2. Пресметај ги хипотенузата и висината на триаголникот.

117. Една градина има форма на правоаголник. Ако должината на градината се зголеми за 3 m , а ширината за 2 m, плоштината на градината ќе се зголеми за 66 m^2. Ако, пак, должината се зголеми за 2 m, а ширината за 3 m, плоштината ќе се зголеми за 71 m^2. Колку изнесува плоштината на градината?

118. Ако основата на еден триаголник се зголеми за 6 cm, а соодветната висина за 2 cm, плоштината ќе се зголеми за 40 cm^2. Ако се намалат основата и висината за по 2 cm плоштината на триаголникот ќе се намали за 16 cm^2. Пресметај ги основата и висината на триаголникот.

119. Ако дијагоналите на рамбот се зголемат за по 2 cm, плоштината ќе се зголеми за 30 cm^2. Ако поголемата дијагонала се намали за 3 cm, а помалата дијагонала се зголеми за 3 cm, тогаш плоштината не се менува. Пресметај ги должините на дијагоналите на ромбот.

120. Средната линија на трапез е 20 cm. Пресметај ги основите на трапезот ако: а) разликата на основите е 4 cm; б) односот на основите е 3 : 7.

8 АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА. РАНГ. МЕДИЈАНА И МОДА

Треба да знаеш

- Аритметичка средина (A_n) на n податоци е количник од збирот на бројната вредност на сите податоци (S_n) и бројот на тие податоци (n) т.е. $A_n = \frac{S_n}{n}$.
- Разликата на најголемата и најмалата бројна вредност на податоците се вика *ранг*.
- ***Медијана*** на множество бројни податоци е средниот податок откако тие ќе се подредат по големина. Ако во средината се два броја тогаш аритметичката средина на тие два броја е медијана.
- ***Мода*** за множество броеви (податоци) е бројот што најчесто се појавува.

121. Постигнатите кошеви на еден кошаркарски натпревар на 8 кошаркари се дадени во табелата.

а) Колку кошеви просечно постигнал секој кошаркар?

б) Определи го рангот.

в) Определи ја медијаната и модата.

г) Кој кошаркар постигнал повеќе кошеви од просекот?

Кошаркар	Кошеви
Петров	18
Колевски	11
Кичевски	19
Велков	15
Гордиќ	16
Марковски	21
Алимовски	13
Гаврилов	15

122. На тестот по македонски јазик на општинскиот натпревар учествувале 7 ученици од едно училиште. Бројот на освоените поени од можни 100 поени за секој ученик е даден во табелата.

а) Пресметај го просекот на освоени поени на секој натпреварувач.

б) Кои натпреварувачи имаат еднаков резултат со просечниот?

в) Определи го модот и медијаната.

г) Претстави ги податоците со столбест дијаграм.

Ученик	Освоени поени
Ана	80
Митре	100
Зоран	90
Марга	50
Тања	70
Иван	45
Горан	55

123. Средниот успех на неколку ученици е:

а) 4,20; б) 3,50; в) 2,10; г) 3,00.

Определи го бројот на учениците, ако збирот на оценките на учениците е 21.

124. Температурата на воздухот во 13 часот во поголемите градови на Македонија била: Скопје 16 ^{0}C, Битола 15 ^{0}C, Струмица 15 ^{0}C, Гевгелија 18 ^{0}C, Тетово 11 ^{0}C, Прилеп 14 ^{0}C, Охрид 15 ^{0}C, Штип 14 ^{0}C, Куманово 15 ^{0}C и Берово 10 ^{0}C.

а) Определи ја просечната температура.

б) Определи го модот, медијаната и рангот.

125. Еден ученик на трите претходни теста по математика освоил 94, 96 и 88 поени. Колку најмалку поени треба да освои ученикот на четвртиот тест за да добие годишна оценка 5 ако за петка во просек треба да има најмалку 91 поен.

126. Во едно VII одделение од 32 ученика 8 се одлични, 6 многу добри, 10 добри, 5 доволни и останатите слаби.

а) Пресметај го просечниот успех на одделението.

б) Определи ги рангот и медијаната на овие податоци.

127. Од 12 наставни предмети (од 1 – 12) еден ученик на крајот на годината ги добил следниве оценки во табелата.

Наставен предмет	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Успех	5	5	4	4	4	2	5	4	3	4	5	3

а) Пресметај го просечниот успех на ученикот.

б) Која оценка е модот? Кој е рангот?

в) Определи ја медијаната.

128. Во табелата е дадена староста на играчите на еден фудбалски тим.

Играч	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Старост	23	24	27	21	19	20	28	30	26	25	27

а) Определи ја просечната старост на играчите.

б) Определи ја медијаната, модот и рангот.

129. Во текот на една недела цената на 1 kg грозје на пазарот била: 72; 75; 65; 65; 80; 70; 45 денари.

а) Пресметај ја просечната цена на грозјето.

б) За колку проценти просечната цена е поголема од најмалата и за колку проценти просечната цена е помала од најголемата?

в) Која цена е модот, која е медијаната и колку е рангот?

130. Во првите 10 дена на месец август оваа година дневната температура на воздухот во ^{0}C во Скопје, Битола и Штип е дадена во следната табела:

Ден	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Скопје	28	30	29	26	28	25	30	33	31	30
Битола	24	25	29	27	27	26	28	30	27	29
Штип	27	28	30	25	26	29	31	30	27	29

а) Пресметај ја просечната температура во секој град за тие 10 дена.

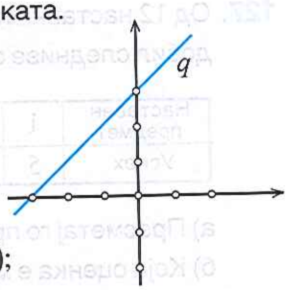
б) Одреди го рангот на температурите во Скопје.

в) Одреди ја медијаната на температурата во Штип.

г) Одреди го модот на температурата во Битола.

9 ЗАДАЧИ ПЛУС ЗА ТЕМА 3

131. Определи го параметарот m во равенката $(2-m)x-(3m-1)y=4-m$ така што подредениот пар (-1, 1) биде решение на равенката.



132. Определи ги параметрите t и p во равенката $2x+ty=p$ така што графикот на равенката е правата q на цртежот.

133. Определи равенка од видот $ax+by=c$ еквивалентна на равенката:

а) $5-(2x-3y-1)-2(3-2x-3y)=3(2x-y)-2(y-3x)$;

б) $\dfrac{2(x-2y)}{3}-1=2-\dfrac{3(y-2x)}{2}$;

в) $(x-3)^2-(y+2)^2=(x-y)(x+y)+7$.

134. Еден ученик за 15 ден. сака да купи пенкала и гуми. Колку пенкала и колку гуми може да купи за тие пари ако едно пенкало чини 3 ден., а една гума 2 ден.?

135. Графикот на равенката $ax-2y=3$ минува низ точката $M(3, 6)$. Во множеството решенија определи го она решение чии координати се еднакви.

136. Најди ги целите позитивни решенија на равенката:

а) $3x+2y=10$; б) $18x+11y=13$; в) $5x-11y=17$; г) $7x+5y=40$.

137. Графикот на равенката $kx+3y=12$ минува низ точката $M\left(1\frac{1}{2},2\right)$ и со координатните оски зафаќа правоаголен триаголник. Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот.

138. Реши го со погоден метод системот равенки:

а) $\begin{cases} \dfrac{3x+0{,}5y}{30}+\dfrac{x-y}{5}=\dfrac{0{,}2x+0{,}1y}{2}-\dfrac{4x-y}{10} \\ 3-\dfrac{8x-5y}{40}=\dfrac{3x+2y-1{,}6}{8} \end{cases}$; б) $\begin{cases} (2x+2)^2-(y-3)^2=(2x+y)(2x-y)+1 \\ 2xy-(x+y)^2=5-(x-3)^2-y(y-2) \end{cases}$.

139. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} (x-4):(y-3)=(x-1):y \\ (x-6):(x+2)=(y-1):(y+5) \end{cases}$; б) $\begin{cases} (9+3y+2x):(1+y+3x)=4:3 \\ (2+2y-3x):(3+y+2x)=3:2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x:(y-2)=2:3 \\ 3x-2y+4=0 \end{cases}$; г) $(x-2y):(4x-5):(2x+3y)=2:3:4$.

140. Реши го системот:

а) $\begin{cases} \left(\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{y+2}{3}\right):\left(1-\dfrac{y+x}{4}\right)=1 \\ \left(1-\dfrac{x-1}{3}\right):\left(\dfrac{y-1}{3}-\dfrac{x+2}{2}\right)=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y+2}{6}\right):\left(1-\dfrac{y-1}{3}\right)=1:4 \\ \left(\dfrac{y-3}{2}-\dfrac{2-x}{3}\right):\left(1-\dfrac{x+4}{4}\right)=1:3. \end{cases}$

141. Определи ги параметрите m и n во системот $\begin{cases} 3x-(m-1)\cdot y=-3 \\ (2-m)\cdot x+3\cdot(n-4)y=-10 \end{cases}$ така што подредениот пар $(x, y) = (-2, 3)$ да биде решение на системот.

142. Реши го графички системот равенки: а) $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+y-3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y+3=0. \end{cases}$

143. Доведи го системот $\begin{cases} (x-4)(y+3)-x=(x-3)(y-1)-11 \\ (4x-3y-2)(x-y)+15xy=(2x+y)(2x+3y) \end{cases}$ во форма $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$, а потоа одреди го решението со графички метод.

144. Одреди го параметарот k во системот $\begin{cases} 2x+ky=6 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ така што тој:

а) да има едно решение; б) да нема решение.

145. Во системот $\begin{cases} 8x+6y=10 \\ kx+3y=5 \end{cases}$ определи го k така што тој да има:

а) едно решение; б) бесконечно многу решенија.

146. Реши го системот со воведување на нова променлива и погоден метод на решавање:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=15 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=13 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=10 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=7 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-4}=5 \\ \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{4-y}=3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \dfrac{15}{2x+y-3}-\dfrac{7}{2x-3y-3}=11 \\ \dfrac{5}{2x+y-3}+\dfrac{3}{2x-3y-3}=1 \end{cases}$

147. Даден е системот $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$:

а) Определи го графички решението на системот.

б) Определи ја плоштината на четириаголникот зафатен со координатните оски и графиците на равенките од системот.

148. Нацртај ги правите кои се сечат во точката $M(3, 4)$ ако едната минува низ координатниот почеток и ако таа со другата права и оската x зафаќаат триаголник чија плоштина е 10 единици квадратни.

149. Дадени се равенките: $y=2, x+y=5$ и $y-x=1$. Определи ја плоштината и периметарот на триаголникот чии темиња се пресечните точки на правите на дадените равенки.

150. Ако едната страна на правоаголникот се намали за 3, а другата се зголеми за 1, ќе се добие правоаголник чиј периметар е 20 cm, а плоштина за 3 cm^2 поголема од дадениот. Пресметај ги страните на правоаголникот.

151. Ако едната страна на правоаголник се намали за 2 cm, тогаш неговата плоштина ќе се намали за 18 cm^2. Ако, пак, двете страни се продолжат за 3 cm, тогаш плоштината ќе се зголеми за 54 cm^2. Пресметај ги страните на правоаголникот.

152. Разликата на периметрите на две кружници е $32\pi\,\mathrm{cm}$ а нивниот однос е 9 : 5. Пресметај ги радиусите на кружниците.

153. Во рамнокрак трапез со периметар 40 cm вписан е круг чија плоштина е $16\pi\,\mathrm{cm}^2$. Одреди ги должините на основите на трапезот.

154. Полн базен се празни од две цевки за 20 мин. Волумените на водата која истекува од двете цевки на базенот се однесуваат како 2 : 5. За кое време секоја цевка може да го испразни полниот базен?

155. Една работа можат да ја завршат двајца работници вака: Ако првиот работи 18 дена, а вториот 16 дена или ако првиот работи 21 ден, а вториот 12 дена. За колку дена секој од нив може сам да ја заврши работата?

156. Еден камион растојанието од 120 km требало да го помине за 2 часа. Бидејќи еден дел од патот бил во лоша состојба тој ја намалил брзината за 30 km/h, а за да стигне на време тој ја зголемил брзината на подобриот дел од патот на 70 km/h. Колку km биле должините на подобриот дел и на полошиот дел од патот?

157. Сточар одгледувал крави и волови. На прашањето колку има крави, а колку волови, тој одговорил: Ако продадам две крави тогаш бројот на кравите и воловите ќе биде еднаков, а ако продадам два вола, крави ќе имам двапати повеќе од волови. Колку имал крави, а колку волови сточарот?

158. Едно тело се движи рамномерно од местото A кон местото B оддалечени 630 m и веднаш се враќа назад. Друго тело после 14 секунди од тргнувањето на првото тргнало од B кон A и веднаш се враќа назад. Движејќи се рамномерно, второто тело се сретнува со првото двапати: после 10 секунди и после 46 секунди од тргнувањето.Одреди ја брзината на секое тело.

159. На кружна патека долга 900 m возат велосипедист и моторист. Кога возат во спротивна насока тие се сретнуваат на секои 2 минути, а кога возат во иста насока мотористот го престигнува велосипедистот на секои 18 min. Колкава е брзината на мотористот, а колкава е на велосипедистот?

160. Еден селанец продава два вида компири, поквалитетниот по 13 ден. за килограм и понеквалитетниот по 8 ден за kg. Количините од двата вида компири ги измешал и ги спакувал во 25 вреќички од по 10 kg, така што приходот кога ги продавал поединечно бил ист со приходот кога ги продавал измешани. По колку kg компир имал од двата вида, ако 1 вреќичка чинела 100 ден?

161. Со неколку камиони еднакви по носивост се превезува извесна количина стока. Ако се 2 камиони помалку, превозот на стоката би бил завршен 2 часа подоцна, а ако се 4 камиони повеќе, тогаш превозот на стоката би бил завршен 2 часа порано од предвиденото време. Колку камиони биле потребни и колку време требало за превоз на стоката?

162. Во два сада има вода. Ако од првиот сад се пресипат во другиот онолку литри вода колку што има во другиот ,а потоа од другиот се пресипе во првиот толку вода колку што останало во првиот, тогаш во секој сад ќе има по 48 ℓ вода. По колку литри вода имало на почетокот во секој сад?

163. Основите на рамнокрак трапез се $a = 24$ cm и $b = 15,6$ cm и висината $h = 15,4$ cm. Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу трапезот.

164. Растојанието помеѓу населените места A и B е 20 km. Еден рибар со својот чамец тоа растојание и назад го поминал за 10 h. Пресметај ја брзината на чамецот и брзината на реката ако се знае дека времето потребно за 2 km спроти течението е исто со 3 km по течението на реката.

165. Прстен составен од злато и бакар тежи 18 g. Ако се извади 40% од златото и 25% од бакарот ќе останат еднакви количини на злато и бакар во накитот. По колку грама злато и бакар има во прстенот?

166. „Јас имам двапати помалку сестри од браќа", му рекла сестрата на братот, а, пак, „Јас имам толку браќа колку и сестри" рекол братот на сестрата. Колку се браќа, а колку сестри?

167. Збирот на дијагоналите на еден делтоид е 37 cm. Ако помалата дијагонала се зголеми за 1 cm, плоштината ќе се зголеми за 12 cm^2. Најди ги дијагоналите на делтоидот.

168. Основата на ромбоид е за 4 cm поголема од соодветната висина. Ако основата се намали за 2 cm, а висината се зголеми за 1 cm плоштината ќе се зголеми за 10 cm^2. Пресметај ги основата и висината на ромбоидот.

169. На еден фудбалски натпревар присуствувале 4400 гледачи. Учениците и студентите плаќале по 5 ден., а останатите по 15 ден за билет. Колку биле ученици и студенти, а колку други гледачи на натпреварот, ако вкупниот приход бил 54000 денари?

170. На прашањето колку години има ќерката, мајката одговорила: " Пред пет години бев пет пати постара, а после три години ќе бидам три пати постара од неа". Колку години имала ќерката а колку мајката?

171. Пет девојчиња и шест момчиња посадиле 83 млади дрвја. По колку дрвца посадило секое девојче, односно момче ако се знае дека посадените дрвца на секое девојче, односно момче биле повеќе од 5?

172. Нека е дадено $f(x)=ax+b;\ f(1)=-2$ и $f(2)=1$. Одреди ги a и b.

173. Нацртај го графикот на линеарната равенка $4x + 3y = 12$ и определи го растојанието од координатниот почеток до правата на равенката.

174. Треба да се добие 3,6 kg сумпурна киселина со јачина 80%, од киселините со јачина 90% и 60%. По колку *kg* ќе се земе од секој вид киселина?

175. Ако бројот на работниците се зголеми за 6, тогаш бројот на деновите за извршување на работата ќе се намали за 7 дена. Ако, пак, бројот на работниците се намали за 2, тогаш бројот на деновите за извршување на истата работа ќе се зголеми за 7 дена. Одреди ги бројот на работниците и бројот на деновите за завршување на таа работа.

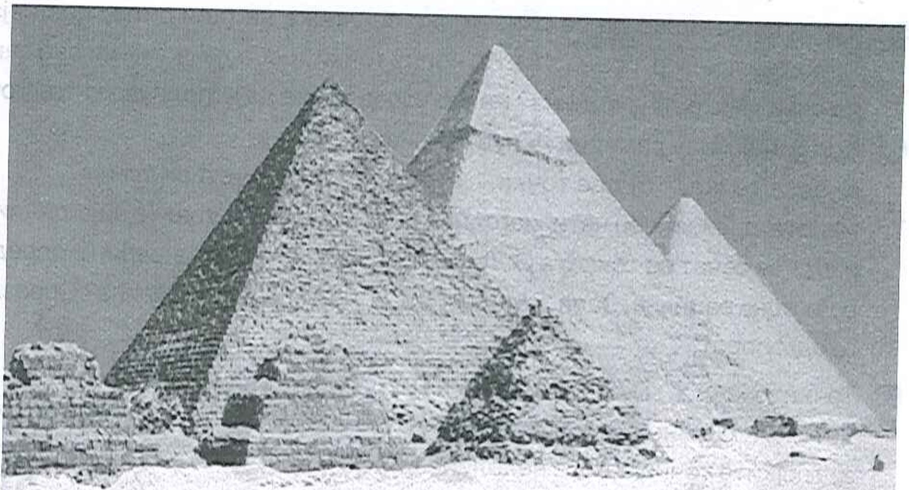
176. Две кружници се допираат однадвор. Низ допирната точка е повлечена права која на кружниците отсекува тетиви чии должини се однесуваат како 7 : 5. Најди ги радиусите на кружниците, ако растојанието помеѓу нивните центри е 24 cm.

ТЕМА 4

ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

Содржина на темата

1 Точка, права и рамнина 88
2 Две прави 89
3 Две рамнини 90
4 Паралелно проектирање. Ортогонална проекција 92
5 Претставување на геометриско тело со цртеж 93
6 Призма. Видови. Дијагонални пресеци 94
7 Паралелопипед. Мрежа и плоштина на призма 95
8 Волумен на полиедар. Волумен на квадар и коцка 97
9 Волумен на права призма 98
10 Пирамида. Плоштина на пирамида 100
11 Волумен на пирамида 102
12 Цилиндар. Плоштина и волумен 103
13 Конус. Плоштина и волумен
14 Топка. Плоштина и волумен 106
15 Задачи плус за тема 4 107



1 ТОЧКА, ПРАВА И РАМНИНА

Треба да знаеш

- Точките, правите и рамнините се основни геометриски фигури коишто ги поврзуваат (договорени) основни својства.
- Една права a и една рамнина Σ може:
  - да немаат заеднички точки, т.е. a е паралелна со Σ (ознака: $a \parallel \Sigma$);
  - да имаат само една заедничка точка, т.е. правата a ја прободува рамнината Σ во точката P; P е пробод на a во Σ;
  - правата a да лежи на рамнината Σ, т.е. $a \subset \Sigma$; и во тој случај се вели дека a е паралелна со Σ.

1. За кои три точки се вели дека се:
а) колинеарни; б) неколинеарни?

2. За кои четири точки се вели дека се:
а) компланарни; б) некомпланарни?

3. Дали во просторот постојат:
а) три неколинеарни точки; б) три колинеарни точки;
в) бесконечно многу колинеарни точки? Образложи го твојот одговор.

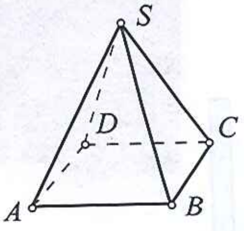
4. Со колку најмалку точки во просторот е определена една рамнина? Кој услов треба да го исполнуваат тие точки?

5. Една права може да се означи ако се укаже на (кои било) две нејзини точки (на пример: права AB). На колку точки треба да укажеме ако сакаме да означиме една рамнина? Каков услов треба да исполнуваат тие точки?

6. Колку најмногу рамнини минуваат низ:
а) една точка, б) две точки, в) три точки, г) четири точки?

7. Нацртај произволен четириаголник $ABCD$ и нека неговите дијагонали AC и BD се сечат во точката О. Точките A, B, O не се колинеарни и определуваат една рамнина. Дали точките C и D лежат на таа рамнина? Образложи го одговорот.

8. Точките A, B, C, D, S се темиња на пирамидата на цртежот. Од множеството $\{A, B, C, D, S\}$ определи ги:
а) тројките точки што се неколинеарни;
б) четворките точки што се некомланарни.



9. Нацртај коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и определи барем три четворки некомпланарни точки.

10. Нацртај фигура во просторот од четири некомпланарни точки.

11. Неколинеарните точки A, B, C лежат во рамнината Σ_1. Тие точки лежат и во рамнината Σ_2. Дали може да се заклучи дека Σ_1 и Σ_2 се совпаѓаат? Зошто?

12. Колку најмногу рамнини може да се определат со точките A, B, C, D, E, ако кои било четири од нив не се компланарни? Запиши ги тие рамнини.

13. Колку најмногу прави може да се определат со точките A, B, C, D, E, ако кои било три од нив не се колинеарни?

14. Покажи со цртеж дека со четири различни точки се определени една, четири или шест прави.

2 ДВЕ ПРАВИ

Треба да знаеш

Две прави во просторот:
- или имаат само една заедничка точка (тогаш велиме дека тие ***се сечат***);
- или немаат заеднички точки; во тој случај тие или ***се паралелни*** (ако лежат во иста рамнина) или ***се разминуваат*** (ако не лежат на иста рамнина).

Две паралелни прави секогаш лежат во иста рамнина.

Една рамнина е ***наполно определена*** во просторот:
- со три неколинеарни точки;
- со права и точка што не лежи на таа права;
- со две различни паралелни прави;
- со две прави што се сечат.

15. Дали може две прави да имаат само две заеднички (различни) точки?

16. Правите a и b не се сечат. Дали тие може да лежат во иста рамнина?

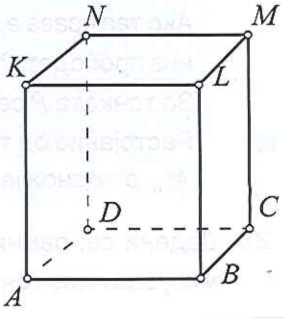
17. Каква е заемната положба на две прави што не можат да определат една рамнина?

18. На цртежот е претставен квадар $ABCDKLMN$, а правата KL го содржи работ KL.

а) Кои прави на цртежот се паралелни со KL?

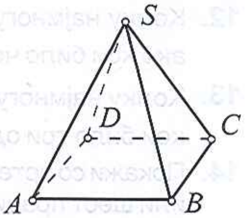
б) Кои прави се сечат со KL?

в) Кои прави се разминувачки со KL?



19. На цртежот од претходната задача именувај ги рабовите на квадарот со кои работ (правата) AB нема заедничка точка и образложи го твојот одговор.

20. На цртежот од задача 18 воочи ги дијагоналите на еден пар спротивни ѕидови. Каква е заемната положба на две по две од тие (четири) дијагонали?



21. Основата на пирамидата на цртежот е паралелограм.

а) Колку прави во просторот определуваат темињата на тоа тело?

б) Дали помеѓу нив има некој пар разминувачки прави?

22. Искажи ги сите можни начини на коишто може наполно да биде определена една рамнина во просторот.

23. Колку рамнини може да определат една права a и две точки B, C што не лежат на правата?

24. Правите a и b и рамнината Σ се такви што $a \notin \Sigma, a \parallel \Sigma$, а $b \in \Sigma$. Дали правите a и b може да се сечат? Каква е нивната заемна положба?

25. Колку рамнини може да определат три различни паралелни прави?

26. Колку рамнини може да определат четири различни паралелни прави?

27. Нека a е права од една рамнина π и M е точка што не ѝ припаѓа на π. Докажи дека низ M минува точно една права, паралелна на правата a.

3 ДВЕ РАМНИНИ

Треба да знаеш

Две различни рамнини Σ_1 и Σ_2:
- или немаат заеднички точки, т.е. $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$;
- или имаат заедничка права, т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

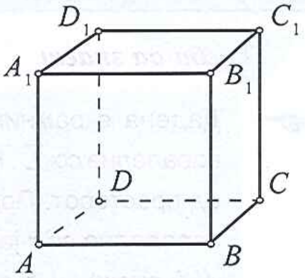
Нека правата a ја прободува рамнината Σ во точката P наречена прободод. Ако таа права е нормална барем на две прави од рамнината што минуваат низ прободот P, таа е нормална на рамнината, т.е. $a \perp \Sigma$.
За точката P се вели дека е подножје на таа нормала.

Растојание од точката M до рамнината Σ е должината $\overline{MM_0}$, каде што M_0 е подножјето на нормалата спуштена од M кон Σ.

28. Дадени се: рамнина Σ и точка M, $M \notin \Sigma$. Колку а) прави, б) рамнини минуваат низ точката M и се паралелни на рамнината Σ?

29. Дадени се: рамнина Σ и точка $M, M \notin \Sigma$. Колку а) прави, б) рамнини минуваат низ точката M и се нормални на рамнината Σ ?

30. Разгледај го квадарот на цртежот и одговори на следниве прашања.
а) Кои рабови (односно прави) се нормални на неговиот ѕид (односно на рамнината) BCC_1B_1 ?
б) Кои ѕидови се нормални на работ A_1B_1 ?
в) Дали рамнините BDD_1 и ACC_1 се нормални меѓу себе?



31. Дали може две а) непаралелни прави, б) паралелни прави да се нормални на една иста рамнина?

32. Ако правата a е паралелна на рамнините Σ_1 и Σ_2, дали мора $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$?

33. Дадени се две различни паралелни рамнини Σ_1 и Σ_2 и права a што лежи во Σ_1. Каква е заемната положба на правата a и рамнината Σ_2 ?

34. Рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат, а правата a е паралелна и со Σ_1 и со Σ_2. Каква е заемната положба на правата a и пресечната права p на Σ_1 и Σ_2 ?

35. Дадени се рамнините Σ_1 и Σ_2 што се сечат и една права што е паралелна со пресечната права на рамнините. Каква е заемната положба на дадената права спрема Σ_1, односно спрема Σ_2 ?

36. Дадени се прави a и b и една рамнина Σ_1 во просторот. Утврди дали е точен исказот:

а) Ако $a \parallel \Sigma$ и $b \perp a$, тогаш $b \perp \Sigma$. б) Ако $a \parallel \Sigma$ и $b \perp \Sigma$, тогаш $b \perp a$.

37. Точката M лежи надвор од двете рамнини Σ_1 и Σ_2 што се сечат во права p. Колку прави минуваат низ M што се паралелни и на Σ_1 и на Σ_2 ?

38. Ако $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ и ако правата a лежи во Σ_1, а правата b во Σ_2, каков е заемниот однос на правите a и b? Дали a и b може да се сечат?

39. Што претставува геометриското место на точките од просторот што се еднакво оддалечени од две фиксни точки A и B?

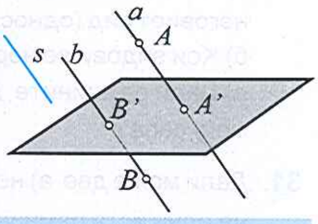
40. Од точката M, што е на растојание $\overline{MO} = 4\text{cm}$ од рамнината Σ (O - подножје на нормалата низ M кон Σ), се спуштени коси отсечки MA, MB, MC на Σ така што $\measuredangle OMA = 30^0$, $\measuredangle OMB = 45^0$, $\measuredangle OMC = 60^0$. Да се најдат должините $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}$.

41. Во пресекот O на дијагоналите на еден правоаголник $ABCD$ е повлечена права нормално на рамнината на правоаголникот. Покажи дека која било точка X од таа нормала е еднакво оддалечена од темињата A, B, C и D.

4 ПАРАЛЕЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ. ОРТОГОНАЛНА ПРОЕКЦИЈА

Треба да знаеш

Дадена е рамнина Σ и права s што не е паралелна со Σ. Нека A е произволна точка од просторот. Правата a што минува низ A паралелно со s ја прободува Σ во точката A' (цртеж). На тој начин, целиот простор "може да се преслика" на рамнината Σ.



Точката A' се вика проекција на A врз рамнината Σ во правец на s; за правата a се вели дека е проектирачка права на A, а за рамнината Σ дека е проекциона рамнина.

Такво пресликување на просторот врз една рамнина Σ се вика паралелно проектирање со проектирачки правец s.

Ако притоа, $s \perp \Sigma$, тогаш имаме ортогонално проектирање.

Проекција на една фигура врз дадена рамнина е множеството точки од Σ што се проекции на точките од фигурата.

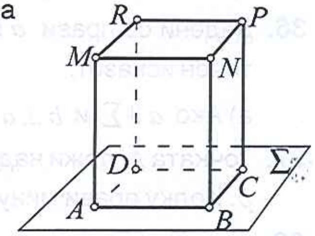
42. На цртежот е претставен еден квадар, со основа $ABCD$ во рамнината Σ. Со помош на цртежот, одреди ги ортогоналните проекции врз Σ на:

а) точките M, P, B, D;

б) рабовите AM, AB, MN, NP;

в) отсечките BR, BM, DN;

г) триаголниците MNP, BDM, MNC, MNB.



43. Нека проекцијата на отсечката AB е точка, т.е. $A' \equiv B'$. Каква е положбата на отсечката спрема проекционата рамнина Σ?

44. Дали проекцијата на една права a е секогаш права? Каков е меѓусебниот однос на една права a и нејзината проекција a'?

45. Проекциите на точките A и B се совпаѓаат, т.е. $A' \equiv B'$. Ако се промени само: а)проектирачкиот правец, б)проекционата рамнина, дали и тогаш проекциите на точките A и B ќе се совпаѓаат?

46. Точките A и B се од иста страна и на различно растојание од проекционата рамнина Σ, а A' и B' се нивни паралелни проекции врз Σ. Зошто четириаголникот $AA'B'B$ е трапез? Што се основи, а што краци на тој трапез?

47. Нека растојанието на точката A до рамнината Σ е 12cm и нека B е точка од Σ таква што $\overline{AB} = 20\text{cm}$. Пресметај го $\overline{A'B}$, ако A' е ортогоналната проекција на A врз Σ.

48. Нека се зададени: проектирање врз рамнината Σ во правец на s_1 и проектирање врз рамнината Σ во правец на s_2. Дали постои точка M таква што при двете проектирања да има иста слика, т.е. $M' \equiv M''$?

49. Проекциите a' и b' на правите a и b врз рамнината а) се паралелни, б) се сечат, в) се совпаѓаат. Каков е меѓусебниот однос на правите a и b?

50. Нека A и B се точки од иста страна од рамнината Σ и нека A' и B' се нивни ортогонални проекции врз рамнината Σ. Покажи дека правите AB' и $A'B$ се сечат.

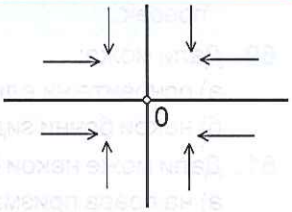
51. Нека A и B се точки од различни страни на рамнината Σ и се еднакво оддалечени од неа; нека A' и B' се нивни ортогонални проекции врз рамнината Σ. Да се покаже дека отсечките AB и $A'B'$ се сечат и дека се преполовуваат со таа пресечна точка.

52. Точките A и B лежат во рамнината Σ, а точката C е надвор од рамнината, при што $\overline{AC} = 20cm$, $\overline{BC} = 15cm$. Ортогоналната проекција на едната од овие отсечки е 16 cm. Колкава е проекцијата на другата отсечка?

53. Точката M е надвор од рамнината Σ. Од точката M кон рамнината Σ се спуштени три наведнати отсечки $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = s$. Да се покаже дека A, B, C се точки од една кружница од Σ чијшто центар е ортогоналната проекција M' на точката M врз рамнината Σ.

5 ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО СО ЦРТЕЖ

54. Подели го листот од тетратката на “квадранти” и во секој од нив нацртај коцка што се гледа одозгора или одоздола, одлево или оддесно (како што укажуваат стрелките на цртежот).



55. Нацртај еден Декартов правоаголен координатен систем и претстави ги точките: (0, 0), (5, 0), (2, 2), (7, 2), (0, 8), (2, 10), (5, 8) и (7, 10); овие точки се темиња на еден квадар. Нацртај го квадарот така што тој да се гледа:

а) одозгора и оддесно, б) (направи нов цртеж) одоздола и одлево.

56. Во координатен систем претстави ги точките (2, 0), (7, 0), (0, 2), (5, 2), (0, 10), (2, 8), (5, 10) и (7, 8); овие точки се темиња на еден квадар. Нацртај го квадарот така што тој да се гледа: а) одоздола и оддесно; б) (направи нов цртеж) одозгора и одлево.

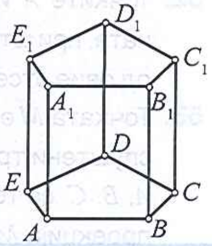
57. Во координатен систем OXY претстави ги точките $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(7,3)$, $D(3,3)$, $M(4,6)$. Нацртај ги отсечките AD, CD, DM со испрекината линија, а AB, BC, AM, BM и CM со полна линија. Кое геометриско тело го нацрта и како се гледа?

58. Во OXY претстави ги точките од претходната задача, а потоа нацртај ги отсечките AB, BC, CD, DA, AM, MC, MD со полна линија, а само BM со испрекината. Кое геометриско тело го нацрта и од кои страни се гледа?

59. Во OXY претстави ги точките $A(1,1)$, $B(6,1)$, $C(4,2)$, $A_1(1,6)$, $B_1(6,6)$, $C_1(4,7)$ и нацртај ги отсечките а) AB, AA_1, BB_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 со полна линија, а AC, BC, CC_1 со испрекината; б)(нов цртеж) AB, BC, CA, AA_1, BB_1, CC_1, A_1C_1, B_1C_1 со полна линија, а само A_1B_1 со испрекината. Какво геометриско тело е на цртежот?

6 ПРИЗМА. ВИДОВИ. ДИЈАГОНАЛНИ ПРЕСЕЦИ

Треба да знаеш



- На цртежот е претставена петаголна призма. Нејзините основи се два складни петаголници, складно (соодветно) поставени во две различни паралелни рамнини.
- Ако бочните рабови на некоја призма се нормални на основите, за неа се вели дека е права призма. Ако основите на некоја права призма се правилни многуаголници, за неа се вели дека е правилна призма.
- Секоја рамнина што минува низ кои било две соодветни дијагонали на основите (и секако низ двата придружни бочни раба) ја сече призмата по еден четириаголник (паралелограм – зошто?); тоа е нејзин дијагонален пресек.

60. Дали може:
а) основите на една призма да не се складни многуаголници;
б) некои бочни ѕидови на една призма да не се паралелограми?

61. Дали може некои бочни ѕидови:
а) на права призма да не се правоаголници;
б) на коса призма да се правоаголници?

62. Ако еден од бочните ѕидови на призмата е правоаголник, дали од тоа следува дека сите нејзини бочни ѕидови се правоаголници?

63. Ако два соседни бочни ѕидови на една призма се правоаголници, дали од тоа следува дека сите нејзини бочни рабови се нормални на основите, т.е. дали призмата е права призма?

64. Бочната површина на една призма е составена од складни правоаголници; дали мора таа да е правилна призма?

65. Која призма се вика:

а) паралелопипед; б) правоаголен паралелопипед; в) квадар?

66. Кои призми немаат дијагонални пресеци?

67. Колку дијагонални пресеци може да се направат низ еден бочен раб кај:

а) триаголна; б) четириаголна; в) петаголна; г) n - аголна призма?

68. Колку дијагонални пресеци има една:

а) триаголна; б) четириаголна; в) петаголна; г) шестаголна призма?

69. Нацртај правилна шестаголна призма, па со дијагонални пресеци низ еден нејзин бочен раб, подели ја на составни триаголни призми. Колку има такви триаголни призми? Има ли складни меѓу нив (со складни основи)?

70. Во која правилна призма сите дијагонални пресеци се складни правоаголници?

71. Низ дијагоналата на основата на една коцка се поставува рамнина. Вртејќи ја рамнината околу дијагоналата на (долната) основа, да се проследи какви фигури се пресеците на коцката со таа рамнина.

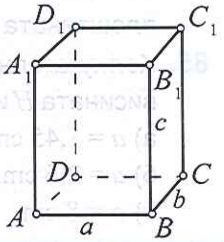
72. Дијагоналниот пресек на една коцка минува низ два спротивни бочни рабови. Колку се оддалечени другите два бочни раба од пресекот, ако работ на коцката е 1dm?

73. Правилна триаголна призма чиишто рабови се по 12 cm се сече со рамнина што минува низ еден основен раб и низ средината на спротивниот бочен раб. Каква фигура е пресекот? Да се пресмета неговата плоштина.

74. Да се пресмета висината (должината на бочен раб) на правилна четириаголна призма, ако нејзината просторна дијагонала е 13 cm, а дијагоналата на основата е 5 cm.

7 ПАРАЛЕЛОПИПЕД. МРЕЖА И ПЛОШТИНА НА ПРИЗМА

Треба да знаеш



- На цртежот е претставен правоаголен паралелопипед (квадар) $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Должините a, b, c на (кои било) три негови рабови што имаат заедничко теме (на пример, од B) се викаат ***димензии на квадарот***.
- За должината d на просторната дијагонала важи $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- Плоштината на квадар: $P = 2(ab + ac + bc)$.
- Плоштината на (која било) призма: $P = 2B + M$ (B е плоштина на основата; M е плоштината на бочната површина).

Само за прави призми: $M = L \cdot H$ (L е периметарот на основата; H е висината на призмата).

75. Во врска со еден квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ одговори на следните прашања.

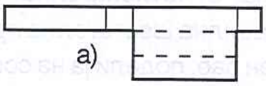
а) Од кој вид се четириаголниците што се ѕидови на квадарот?

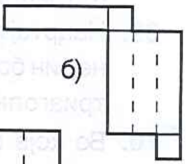
б) Какви се меѓу себе основите, а какви бочните ѕидови?

в) Колку дијагонални пресеци има квадарот и какви четириаголници се тие?

г) Што претставуваат дијагоналите на дијагоналните пресеци на квадарот? Колку просторни дијагонали има квадарот? Именувај ги.

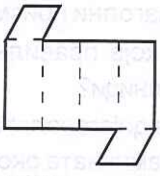
76. Која од фигурите а), б) на цртежот е мрежа на правилна четириаголна призма?





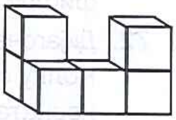
77. На цртежот е претставена мрежа на четириаголна призма. Од кој вид е призмата:

а) правилна; б) права; в) коса?



78. Шест еднакви коцки со раб 1 cm се наредени како на цртежот. Така е добиено едно тело. Колкава е плоштината на тоа тело:

а) 6 cm^2; б) 40 cm^2; в) 26 cm^2; г) 36 cm^2?



79. Плоштината на коцката е 54 cm^2. Пресметај ја дијагоналата.

80. Колку е висок правоаголниот паралелопипед со плоштина 61,6 cm^2, ако другите две димензии се 4 cm и 1,2 cm?

81. Да се најде плоштината на правоаголен паралелопипед, ако три негови ѕида со заедничко теме имаат, соодветно плоштина 80 cm^2, 120 cm^2, 96 cm^2.

82. Да се најде плоштината M на бочната површина на права четириаголна призма со основни рабови 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm и бочен раб 10 cm.

83. Да се најде плоштината на права триаголна призма со висина 10 cm и основа правоаголен триаголник со катети 6 cm и 8 cm.

84. Основата на правилна триаголна призма има $\sqrt{3}\,cm^2$. Да се најде плоштината на призмата, ако нејзината висина е 10 cm.

85. Колку аголна е правилната призма ако се зададени: основниот раб a, висината H и плоштината M на бочната површина:

а) $a = 1{,}45$ cm, $H = 5$ cm, $M = 58$ cm^2;

б) $a = 2{,}6$ cm, $H = 1{,}2$ cm, $M = 15{,}6$ cm^2;

в) $a = 8$ cm, $H = 2{,}1$ dm, $M = 10{,}08$ dm^2?

86. Да се пресмета просторната дијагонала на еден правоаголен паралелопипед ако дијагоналите на трите различни ѕидови се $d_1 = 15$ cm, $d_2 = 13$ cm, $d_3 = \sqrt{106}$ cm.

87. Да се пресмета плоштината на коцка, ако дијагоналата на еден нејзин ѕид е 0,32 cm.

88. Димензиите на еден квадар се 4 dm, 50 cm, 8 dm. Кои од ѕидовите на квадарот да се изберат за основи така што бочната површина да има:
а) најмала; б) најголема плоштина?

89. Меѓу величините a, H, B, M, P кај правилна призма, да се најдат непознатите, ако се дадени:
1) триаголна призма: а) $H=6\text{cm}, M=72\text{cm}^2$; б) $B=25\sqrt{3}, P=50\left(9+\sqrt{3}\right)$;
2) шестаголна призма: а) $P\approx 819\text{cm}^2, M=300\text{cm}^2$; б) $M=168\text{cm}^2, a=3{,}5\text{cm}$

90. Да се пресмета просторната дијагонала на правилна четриаголна призма, ако дијагоналата на основата е 8 cm, а дијагоналата на еден бочен ѕид е 7 cm.

91. Да се најде плоштината на правилна триаголна призма со основа $B=9\sqrt{3}$ и дијагонала на еден бочен ѕид $d_1=6\sqrt{5}$.

92. Основата на една права четириаголна призма е рамнокрак трапез со основи 21 cm и 11 cm и крак 13 cm. Одреди ја плоштината на призмата, ако се знае дека најмалиот бочен ѕид е квадрат.

8 ВОЛУМЕН НА ПОЛИЕДАР. ВОЛУМЕН НА КВАДАР И КОЦКА

Треба да знаеш

Волуменот на правоаголен паралелопипед со димензии a, b и c се пресметува со формулата $V=abc$. Волуменот на коцка со раб a: $V=a^3$.

93. Кај некоја коцка плоштината на бочната површина во cm^2 и волуменот во cm^3 се изразени со ист број. Најди ги: работ, плоштината и волуменот на коцката.

94. Колку литри вода може да собере коцка со раб:
а) 8 cm; б) 0,8 dm; в) 0,08 m ?

95. Да се пресмета висината и плоштината на квадар со основни рабови 0,7dm и 80 mm, ако неговиот волумен е 224 cm^3.

96. Најди го волуменот на квадар со основа квадрат и основен раб 4 cm, ако бочната површина има 240 cm^2.

97. Да се пресмета волуменот на еден квадар со основни рабови 5 cm и 6 cm и плоштина $P=214\text{cm}^2$.

98. Резервоар во форма на квадар има димензии 9 m, 4 m, 2,5 m. За колку време тој ќе се наполни ако во него се влеваат по 5 литри вода во секоја секунда?

99. Волуменот на квадар е 336 cm^3. Должините на неговите рабови се изразуваат со три последователни цели броеви. Да се најде плоштината на квадарот.

100. Дали може волуменот на еден квадар да се пресмета како производ од плоштината на еден бочен ѕид и должината на еден основен раб? Образложи го твојот одговор.

101. Еден квадар е расечен на помали еднакви меѓу себе квадри со димензии четирипати помали од димензиите на дадениот квадар. Колку мали квадри се добиени?

102. Едно дете има парен број дрвени правоаголни паралелопипеди со димензии $1\text{cm}\times1\text{cm}\times2\text{cm}$ и две кутии со димензии $3\text{cm}\times5\text{cm}\times2\text{cm}$ и $3\text{cm}\times4\text{cm}\times3\text{cm}$. Првата кутија не може да ги собере сите, а втората (ако сите се добро подредени) останува недополнета. Колку дрвени паралелопипеди биле?

103. Да се пресмета плоштината и волуменот на квадар со основни рабови 6 cm и 8 cm, ако неговиот дијагонален пресек има 50 cm^2.

104. Пресметај го волуменот на правоаголниот паралелопипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ако плоштината на ѕидот BCC_1B_1 е 24 cm^2, а работ AB има должина 10,5 cm.

105. Од оловна коцка со раб 30 cm е направена (претопена во) правоаголна плоча со димензии $2\text{m}\times3\text{m}$. Колку е дебела плочата?

106. Еден потпорен ѕид во форма на правоаголен паралелопипед е изграден од бетонски блокови со димензии $20\text{cm}\times25\text{cm}\times30\text{cm}$. Колку бетонски блокови се вградени во ѕидот, ако неговиот волумен е 43,2 m^3?

107. Еден железен сандак има форма на квадар. Сумата на плоштините на два негови соседни бочни ѕидови (еден од нив е квадрат) е 126 dm^2, а нивниот заеднички раб е 60 cm. Да се пресмета со колку литри вода ќе се наполни половина од сандакот.

108. Рабовите на еден квадар се во размер 3 : 4 : 5. Да се пресмета волуменот на квадарот, ако неговата плоштина е 94 cm^2.

9 ВОЛУМЕН НА ПРАВА ПРИЗМА

Треба да знаеш

- Општата формула за пресметување волумен на права призма е $V=B\cdot H$.
- Формули за волумен на некои правилни призми:

а) правилна триаголна призма $V=\dfrac{a^2H\sqrt{3}}{4}$;

б) правилна четириаголна призма $V=a^2H$;

в) правилна шестаголна призма $V=\dfrac{3a^2H\sqrt{3}}{2}$.

109. Од три метални коцки со рабови: 3 cm, 4 cm и 5 cm излиена е една коцка. Најди го работ на таа коцка.

110. Да се пресмета плоштината и волуменот на правилна триаголна призма со основен раб 1 dm и висина 4 dm.

111. За правилна четириаголна призма се знае: $B = 16\ cm^2$, $M = 96\ cm^2$. Да се пресмета P и V на призмата.

112. Права призма со висина 25 cm има за основа правоаголен триаголник со хипотенуза 7,8 cm и катета 7,2 cm. Да се пресмета плоштината и волуменот на таа призма.

113. Плоштината на бочната површина на една правилна четириаголна призма е 164 cm^2. Да се пресмета плоштината и волуменот на призмата ако нејзината висина е 8,2 cm.

114. Дадена е права призма со висина 15 cm. Да се пресмета нејзиниот волумен ако основата на призмата: а) има плоштина 60 cm^2; б) е триаголник со страна $a = 18$ cm и соодветна висина $h_a = 10$ cm; в) е ромб со дијагонали $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 6$ cm.

115. Дадена е една права триаголна призма со основни рабови 1,5 cm, 2 cm, и 2,5 cm и бочен раб 3 cm. Да се пресметаат B, M, P и V.

116. Две канти имаат еднакви висини, а дното на едната е квадрат со страна 3 *dm* и на другата правоаголник со димензии 25 cm и 36 cm. Која од нив собира повеќе вода?

117. Да се пресмета волуменот на правилна шестаголна призма со основен раб 3 *cm*, ако плоштината на поголемиот дијагонален пресек е 72 cm^2.

118. Основата на права призма е рамнокрак трапез со основи 10 cm и 6 cm и висина 1,5 cm. Да се пресмета плоштината на призмата ако нејзиниот волумен е 120 cm^3.

119. Да се пресмета волуменот на правилна триаголна призма чијашто бочна површина (развиена во мрежа) е квадрат со плоштина 324 cm^2.

120. Плоштината на една права еднаквоработна триаголна призма е 61,84 cm^2. Да се пресмета волуменот.

121. Основата на една права четириаголна призма е ромб со периметар 52 cm и една дијагонала 10 cm. Поголемиот дијагонален пресек е квадрат. Да се пресмета P и V на призмата.

122. Плоштината M на бочната површина на една права четириаголна призма е 432 dm^2. Основата на призмата е паралелограм со една страна 5 dm, а висината кон поголемата страна е 1,4 dm. Да се пресмета а) непознатиот основен раб, б) плоштината и в) волуменот на призмата, ако нејзината висина H е 24 dm.

123. Еден правоаголен златен лист со димензии $4,7\,\text{cm} \times 6,2\,\text{cm}$ е тежок 6,3 gr. Да се пресмета дебелината на листот, ако специфичната тежина на златото е $19,3\ \text{gr}/\text{cm}^3$.

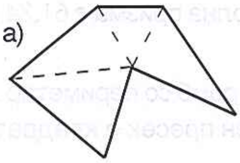
10 ПИРАМИДА. ПЛОШТИНА НА ПИРАМИДА

Треба да знаеш

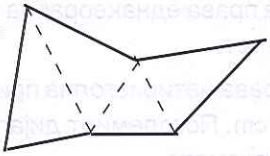
- Општата формула за пресметување плоштина на пирамида е $P = B + M$. Овде и во задачите што следуваат, B е плоштината на основата, а M е плоштината на бочната површина на пирамидата. За правилна n - аголна пирамида бочната плоштина M се пресметува со $M = n \cdot \dfrac{a \cdot h}{2}$.
- Ако околу основата на една пирамида може да се опише кружница и ако подножјето на висината е во центарот O на таа кружница, тогаш бочните рабови на пирамидата се еднакви меѓу себе. Тоа е случај кога основата е: триаголник, тетивен четириаголник (квадрат, правоаголник, рамнокрак трапез), секој правилен многуаголник итн.
- Ако во основата на една пирамида може да се впише кружница и ако подножјето на висината е во центарот O_1 на таа кружница, тогаш сите бочни триаголници имаат еднакви висини; за секоја од нив се вели дека е апотема на пирамидата. Тоа е случај кога основата е: триаголник, тангентен четириаголник (квадрат, ромб, делтоид), секој правилен многуаголник итн.
- Воочи дека само кај правилна пирамида: и бочните рабови се еднакви меѓу себе, и висините на бочните ѕидови се еднакви меѓу себе.

124. Дали фигурата на цртежот: а), б), в) е мрежа на пирамида?

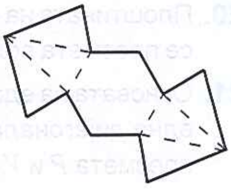
а)



б)



в)



125. Да се пресмета :

а) P на пирамидата, ако $M = 112\ \text{cm}^2$ и $B = 3600\ \text{mm}^2$;

б) B на пирамидата, ако $P = 136\ \text{cm}^2$ и $M = 1\ \text{dm}^2$;

в) M на правилна пирамида ако периметарот на основата е 30 cm и апотемата е $h = 7$ cm.

126. Да се пресмета плоштината на правилна триаголна пирамида со основен раб 10 cm и бочен раб 13 cm.

127. Да се пресмета плоштината на правилна четириаголна пирамида со основен раб 12 cm и бочен раб 10 cm.

128. Да се пресмета плоштината на правилна шестаголна пирамида со основен раб 14 cm и бочен раб 2,5 dm.

129. Бочните рабови на правилна четириаголна пирамида се еднакви со основниот раб a. Да се најде формула за плоштината на таква пирамида и да се примени на пирамида со $a = 7{,}5$ cm.

130. Бочната плоштина на правилна петаголна пирамида е 22,5 cm^2, а апотемата е 6 cm. Да се најде основниот раб.

131. Апотемата на правилна четириаголна пирамида е еднаква на основниот раб a. Да се најде формула за плоштината на таква пирамида и да се примени на пирамида со $a = 12$ cm.

132. Утврди кој од следните искази а), б) или в) е точен. За плоштината B на основата и бочната плоштина M на секоја пирамида важи:
а) $B > M$, б) $B = M$; в) $B < M$.

133. Дали може да биде квадрат фигурата со која е претставена мрежата:
а) на една триаголна пирамида со основа рамнокрак триаголник;
б) на правилна четириаголна пирамида?

134. Дадени се $P = 90$ cm^2 и $M = 65$ cm^2 на една правилна четириаголна пирамида. Да се најде основниот раб и апотемата на таа пирамида.

135. Плоштината на бочната површина на правилна четириаголна пирамида е 14,76 dm^2, а плоштината на пирамидата е 18 dm^2. Да се пресмета висината H на пирамидата.

136. Основниот раб на правилна четириаголна пирамида е 14 cm, а плоштината на нејзиниот дијагонален пресек е 14 cm^2. Да се пресмета бочниот раб s и плоштината на пирамидата.

137. Основниот раб на правилна шестаголна пирамида е 10 cm. Да се пресмета бочната плоштина M, ако плоштините на основата и на еден бочен ѕид се во размер $3\sqrt{3} : 2$.

138. Да се пресмета плоштината на правилна шестаголна пирамида ако е зададено:
а) висината $H = 2\sqrt{69}$ cm и бочниот раб $s = 26$ cm;
б) висината $H = 3$ cm и апотемата $h = 6$ cm.

139. Основниот раб на правилна триаголна пирамида е a и тој со бочниот раб зафаќа агол 45^0. Да се најде плоштината на пирамидата, ако $a = 10$ dm.

11

ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

Треба да знаеш

Општата формула за пресметување волумен на пирамида е $V = \frac{1}{3}BH$ (B - плоштината на основата, H - висината на пирамидата).

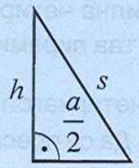
За некои правилни пирамиди (со раб a и висина H) таа формула е во обликот:

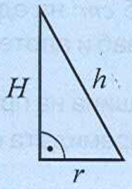
а) правилна триаголна пирамида: $V = \frac{a^2H\sqrt{3}}{12}$;

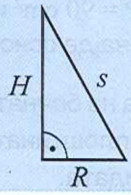
б) правилна четириаголна пирамида: $V = \frac{a^2H}{3}$;

в) правилна шестаголна пирамида: $V = \frac{a^2H\sqrt{3}}{2}$.

Кај правилна пирамида често се користат во задачи овие три правоаголни триаголници, што ги поврзуваат следниве елементи на пирамидата: a - основен раб; H - висина на пирамида; s - бочен раб; R - радиус на опишаната кружница на основата; h - апотема; r - радиус на впишаната кружница на основата.







140. Да се најде волуменот на:

а) правилна четириаголна пирамида со основен раб 12 cm и висина 13 cm;

б) шестаголна пирамида со висина 3 cm и основа правилен шестаголник со страна 1 cm и апотема (висина на карактеристичниот триаголник) 0,87 cm;

в) правилна n - аголна пирамида со основен раб a, апотема на основата b и висина H.

141. Волуменот на една правилна четириаголна пирамида е 1296 cm^3, а нејзината висина е 12 cm. Да се пресмета плоштината на пирамидата.

142. Да се пресмета волуменот на правилна четириаголна пирамида со висина 3 cm и бочен раб 5 cm.

143. Правилна четириаголна пирамида со висина 15 cm има волумен 1280 cm^3. Да се пресмета плоштината на пирамидата.

144. Основниот раб на правилна шестаголна пирамида е 1 cm, а волуменот на пирамидата е 6 cm^3. Колкав е бочниот раб?

145. Големиот дијагонален пресек на правилна шестаголна пирамида е рамностран триаголник со страна 2 dm. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

146. Да се пресмета волуменот на пирамидата со основа правоаголен триаголник со катети 9 cm и 4 cm, ако нејзината висина е 3 dm.

147. Бочните рабови на триаголна пирамида се нормални меѓу себе и секој од нив е долг 12 cm. Да се пресмета волуменот и бочната плоштина.

148. Да се пресмета волуменот на правилна четириаголна пирамида со висина 17 cm и дијагонален пресек $204\ \text{cm}^2$.

149. Да се пресмета волуменот на правилна триаголна пирамида со $B=162\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, ако висината е двапати поголема од основниот раб.

150. Да се пресмета волуменот на правилна триаголна пирамида со плоштина $P=36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, ако бочниот раб е еднаков со основниот раб.

151. Да се пресмета волуменот на правилна четириаголна пирамида со:
а) $H = 6$ cm, $h = 6{,}5$ cm;
б) дијагонален пресек рамностран триаголник со плоштина $9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$;
в) $h=3\sqrt{3}$ cm и сите рабови се еднакви т.е. $a = s$;
г) $h=25\text{cm},\ M=7\text{dm}^2$.

152. Основата на една пирамида е правоаголник со страни 9 cm и 12 cm, а секој бочен раб има 12,5 cm. Пресметај ги волуменот и плоштината на пирамидата.

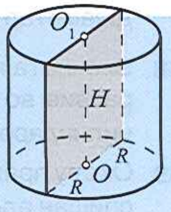
153. Бочните рабови на триаголна пирамида се 5 cm, 6 cm, 7 cm; тие рабови се заемно нормални (секој од нив е нормален на другите два). Да се пресмета волуменот.

154. Плоштината на правилен тетраедер (т.е. на исторабна правилна триаголна пирамида) е $\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Да се пресмета волуменот.

155. Да се пресмета волуменот на триаголна пирамида со основни рабови $a=6\text{cm},\ b=6\text{cm},\ c=8\text{cm}$, , ако трите бочни рабови се по 9 cm.

12 ЦИЛИНДАР. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН

Треба да знаеш



На цртежот е претставен еден цилиндар со радиус R на основата и висина $H=\overline{OO_1}$.

Секоја рамнина што минува низ оската го сече цилиндарот по еден правоаголник со страни $2R$ и H; тој е осен пресек на цилиндарот.

Општите формули за плоштина и волумен на цилиндар се (како кај призмата): $P=2B+M$, $V=B\cdot H$ (каде што $B=R^2\pi$ е плоштина на основата и $M=2RH\pi$ е плоштина на бочната површина), односно

$$P=2R\left(R+H\right)\pi,\ V=R^2H\pi.$$

Ако осниот пресек на некој цилиндар е квадрат, т.е $H=2R$, тогаш за цилиндарот се вели дека е рамностран и $P=6R^2\pi,\ V=2R^3\pi.$

156. Да се пресмета P и V на цилиндар, ако:
а) $R=4\text{cm}, H=8\text{cm};$ б) $R=H=10\text{cm};$ в) $2R=H=16\text{cm}.$

157. Да се пресмета P и V на цилиндар, ако плоштината на еден негов осен пресек е $3\ \text{dm}^3$ и $H=1{,}5R.$

158. Да се пресмета P и V на цилиндар со $M=660\pi\,\text{cm}^2$, $H=15\text{cm}.$

159. Периметарот на осниот пресек во cm и неговата плоштина во cm^2 на еден рамностран цилиндар се изразува со ист број. Да се најде плоштината и волуменот на тој цилиндар.

160. Осниот пресек на еден цилиндар е квадрат со дијагонала 4 cm. Да се пресмета P и V на цилиндарот.

161. Плоштината на еден цилиндар е $28\pi\,\text{cm}^2$, а висината и радиусот се во размер $5:2$. Да се пресмета волуменот на цилиндарот.

162. За колку ќе се зголеми волуменот на еден цилиндар, ако:
а) $B=17\ \text{cm}^2$, а висината H се зголеми од 10 cm на 12 cm;
б) B се зголеми од $10\ \text{cm}^2$ на $12\ \text{cm}^2$, а висината $H=17$ cm?

163. Една бакарна жица со дијаметер на пресекот 2,5 mm има маса 4,5 kg. Да се најде должината на жицата. $\left(s=9\,\text{gr}/\text{cm}^3\right).$

164. Еден резервоар има форма на цилиндар. Внатрешниот дијаметар на резервоарот е 4 m, а длабочината е 3,5 m. Колку литри вода може да собере?

165. Ако во еден празен цилиндричен сад со дијаметар на основата 1,4 dm се налее 3,5 литри вода, до која висина ќе се наполни садот?

166. Да се пресмета волуменот на цилиндар со $R=12$ cm, ако бочната плоштина M е еднаква со плоштината на основата B.

167. Да се најде масата на една челична цевка долга 4 *m,* ако надворешниот дијаметар на цевката е 5 cm, а внатрешниот е 3 cm $\left(s=9\,\text{gr}/\text{cm}^3\right)$.

168. Висината на цилиндарот е 6 cm, а неговата бочна површина може да се развие во правоаголник со дијагонала 10 cm. Да се пресмета P и V на цилиндарот.

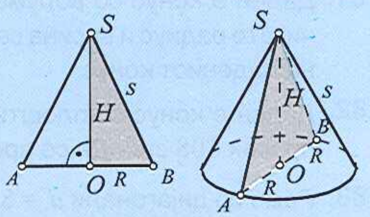
169. Околу правилна четириаголна призма со основен раб 6 cm и висина 1 dm е опишан еден цилиндар. Да се најде волуменот на цилиндарот.

170. Во коцка со раб a се впишува и се опишува цилиндар, така што неговите основи да се вишани, односно опишани кругови на два спротивни ѕида на коцката. Да се најдат односите (размерите) на волумените Vо : Vв, односно плоштините Pо : Pв на добиените цилиндри.

13 КОНУС. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН

Треба да знаеш

- На цртежот е претставен еден конус со радиус R на основата и висина $H=\overline{SO}$.
- Секоја рамнина што минува низ оската го сече конусот по еден рамнокрак триаголник со основа $2R$ и крак s. Тоа е осен пресек на конусот (види цртеж).



- Општите формули за плоштина и волумен на конусот се (како кај пирамидата):
$$P=B+M,\ V=\frac{B\cdot H}{3};\ \text{овде: } B=R^2\pi,\ M=Rs\pi,\ \text{па } P=R(R+s)\pi,\ V=\frac{R^2H\pi}{3}.$$
- Ако осниот пресек е рамностран триаголник, т.е. $s=2R$, тогаш $P=3R^2\pi,\ V=\dfrac{R^3\sqrt{3}\pi}{3}$.

171. Да се пресмета P и V на конусот зададен со:
а) $R=6\text{cm},\ s=10\text{cm}$; б) $R=3\text{dm},\ H=4\text{dm}$.

172. Периметарот на основата на еден конус е 628 mm, а генератрисата $s=30$ cm. Да се пресмета плоштината P на конусот (во dm^2).

173. Плоштината на основата на еден конус е $9\pi\,\text{cm}^2$ а периметарот на еден негов осен пресек е 16 cm. Да се пресмета P и V на конусот.

174. Да се најде плоштината на конусот ако:
а) $R=0{,}5$ dm, а бочната површина е трипати поголема од основата;
б) $M=21\ \text{cm}^2$, а плоштината P е трипати поголема од плоштината на основата.

175. Да се пресмета P и V на конусот, ако за него се знае:
а) $B:M=3:5$ и $R+s=16\text{cm}$;
б) $M=175\pi\,\text{cm}^2$ и $R=7\text{cm}$.

176. Да се пресмета P и V на конусот, ако се знае дека дијаметарот на основата е 24 cm и дека е двапати поголем од висината.

177. Да се пресмета волуменот на еден рамностран конус, ако неговата плоштина е 113,04 cm^2.

178. Правоаголен триаголник со катети 5 cm и 12 cm ротира (се врти) околу поголемата катета. Да се пресмета P и V на добиеното тело.

179. Осниот пресек на еден конус е рамнокрак правоаголен триаголник со плоштина 9 m^2. Да се пресмета плоштината и волуменот на конусот.

180. Периметарот на основата на еден конус е 314 mm, а генератрисата 13 cm. Да се најде P и V на конусот.

181. Даден е конус со волумен 40 dm^3. Да се најде волуменот на друг конус чијшто радиус и висина се два пати помали од радиусот, односно висината на дадениот конус.

182. Даден е конус со плоштина на основата $81\pi \text{cm}^2$ и плоштина на осниот пресек 108 cm^2. Да се пресмета P и V на конусот.

183. Ромб со дијагонали $d_1 = 8$ cm и $d_2 = 6$ cm, ротира околу поголемата дијагонала. Да се пресмета P и V на добиеното тело.

184. Рамностран триаголник со страна a, ротира околу една негова страна. Да се најдат плоштината и волуменот на добиеното тело.

185. Во конус со генератриса 20 cm е впишана триаголна пирамида со основни рабови 13 cm, 12 cm, 5 cm. Да се најде бочната плоштина M на конусот.

186. Квадрат со страна a ротира околу својата дијагонала. Да се најде плоштината и волуменот на добиеното тело.

14 ТОПКА. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН

Треба да знаеш

- Општите формули за пресметување плоштина и волумен на топка се: $P = 4R^2\pi, \quad V = \frac{4}{3}R^3\pi.$

- Пресек на топка и рамнина секогаш е круг. Ако рамнината минува низ центарот на топката, тогаш за пресекот се вели дека е голем круг на топката.

187. Пресметај го волуменот на една топка, ако нејзината плоштина е 314 cm^2.

188. Пресметај ја плоштината на топката со волумен $V \approx 113 \text{cm}^3$.

189. Големиот круг на една топка има $9\pi \text{cm}^2$. Да се најде плоштината на топката.

190. Плоштината на топка во cm^2 и нејзиниот волумен во cm^3 се изразени со ист број. Колкав е радиусот на топката?

191. Од дрвена коцка со раб a е изделкана најголема можна топка. Колку од материјалот отпаѓа на отпадокот?

192. Околу квадар со димензии $4\ \mathrm{cm}$, $5\ \mathrm{cm}$, $12\ \mathrm{cm}$ е опишана топка. Да се пресмета P и V на топката.

193. Да се најде плоштината и волуменот на една полутопка со радиус $21\ \mathrm{cm}$.

194. Плоштините на две топки се во размер $1 : 2$. Во каков размер се нивните а) радиуси; б) волумени?

195. Пет метални топки со дијаметар $3\ \mathrm{cm}$, $4\ \mathrm{cm}$, $5\ \mathrm{cm}$, $8\ \mathrm{cm}$ и $10\ \mathrm{cm}$ се претопени во една топка. Колкав е дијаметарот на таа топка?

196. Во цилиндричен сад со внатрешен дијаметар $12\ \mathrm{cm}$ има вода до некоја висина. Во садот се потопува метална топка, поради што водата во него се покачила за $1\ \mathrm{cm}$. Колкав е радиусот на потопената топка?

197. Плоштината на една полутопка е $157\ \mathrm{cm}^2$. Колкав е волуменот на топката?

198. Ако радиусот на една топка се зголеми за $3\ \mathrm{cm}$ нејзината плоштина се зголемува за $108\pi\,\mathrm{cm}^2$. За колку се зголемил волуменот?

199. Збирот на волумените на две топки е еднаков на волуменот на коцка со раб $3\ \mathrm{cm}$. Да се најдат волумените на овие две топки ако нивните радиуси се во размер $1 : 2$.

200. Плоштината на една коцка и на една топка се еднакви. Кое тело во тој случај има поголем волумен?

201. Одреди го односот на плоштините на топка и рамностран цилиндар впишан во неа.

202. Даден е рамностран цилиндар со радиус R. Во цилиндарот е впишана и околу цилиндарот е опишана топка. Да се најде размерот на:
а) плоштините; б) волумените на двете топки.

15 ЗАДАЧИ ПЛУС ЗА ТЕМА 4

203. Зададени се две (различни) паралелни рамнини Σ_1 и Σ_2 и точка M, при што $M \notin \Sigma_1$ и $M \notin \Sigma_2$. Низ точката M се повлечени правите a и b коишто ја прободуваат Σ_1 во точката A_1, односно B_1, а Σ_2 - во A_2, односно B_2 и притоа $\overline{MA_1} = 8cm$, $\overline{A_1A_2} = 12cm$, $\overline{A_2B_2} = 25cm$. Да се најде $\overline{A_1B_1}$.

204. Темињата на паралелограмот $ABCD$ се од иста страна на рамнината $\sum$. Растојанијата на темињата A, B, C, D до рамнината $\sum$ се, соодветно, еднакви на a, b, c, d. Да се покаже дека $a + c = b + d$.

205. Страните на еден триаголник се 10 cm, 17 cm и 21 cm. Во темето на најголемиот агол од овој триаголник е подигната нормала (долга 15 cm) на рамнината на триаголникот. Да се најдат растојанијата од крајните точки на нормалата до најголемата страна на триаголникот.

206. Мрежата на коцката може да се претстави со 12 складни квадрати. Обиди се да ја нацрташ.

207. Во две канти во форма на квадар (без капаци) има 40 литри вода. Ако од едната канта се префрлат 10 литри во другата, тогаш во двете канти ќе има по еднакво количество вода. Да се пресмета плоштината на првата канта, ако нејзината должина е 30 cm и ширина 20 cm и ако се знае дека таа била полна со вода.

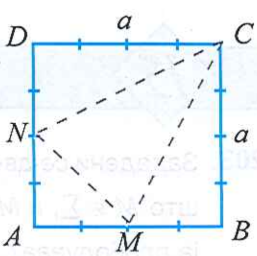
208. На 1 април ученичката Марија започнала да употребува нов сапун во форма на квадар. На 30 април (значи, по 29 дена) забележала дека должината, ширината и дебелината на сапунот се намалени, соодветно, 2, 3 и 5 пати. Да се најде до која дата (уште колку дена) Марија ќе го употребува сапунот, ако тој се троши рамномерно.

209. Периметрите на три ѕида на еден квадар се 12 cm, 10 cm, 18 cm.. Да се најде волуменот на квадарот.

210. а) Плоштините на три ѕида на еден квадар се 18 dm^2, 6 dm^2, 12 dm^2. Да се најде волуменот на квадарот.

б) Покажи: ако Q_1, Q_2, Q_3 се плоштините на 3 ѕида (со заедничко теме) на еден квадар, тогаш неговиот волумен може да се пресмета со формулата $V = \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}$.

211. Околу квадар со димензии 6 cm, 15 cm, 8 cm може да се опишат три различни цилиндри. Да се најдат односите на нивните бочни плоштини и нивните волумени.



212. Четириаголникот $ABCD$ е квадрат и тој е мрежа на пирамида со основа. а) ΔAMN, б) ΔCNM. Најди го размерот $B:M$, каде што B е основа, а M бочна плоштина на пирамидата.

213. Во триаголна пирамида еден основен раб е 16 cm, а спротивниот бочен раб е 18 cm. Останатите 4 раба се по 17 cm. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

214. Бочната плоштина на една правилна триаголна пирамида е двапати поголема од плоштината на основата. Да се пресмета волуменот на пирамидата, ако се знае дека: плоштината на впишаниот круг во основата во cm^2 и радиусот на тој круг во cm се изразуваат со ист број.

215. Центарот на горната основа и средините на основните рабови на коцка со раб a се темиња на една пирамида. Да се пресмета P и V на пирамидата.

216. Дијагонален пресек на една правилна шестаголна пирамида што минува низ висината на пирамидата е рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза c. Да се најде волуменот на пирамидата.

217. Основата на една пирамида е триаголник со страни 39 cm, 17 cm и 28 cm; сите нејзини бочни робови се по 22,9 cm. Да се најде волуменот на пирамидата.

218. Основата на прав паралелопипед е ромб; плоштините на неговите дијагонални пресеци се еднакви на Q_1 и Q_2. Да се најде плоштината M на бочната површина на паралелопипедот.

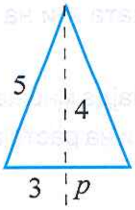
219. Основата на една четириаголна пирамида е правоаголен трапез кој има должина на поголемиот крак 12 cm и најмалиот од аглите е 30°. Сите четири бочни ѕидови (триаголници) се наведнати кон основата под ист агол. Плоштината на бочната површина на пирамидата е $M = 90\ cm^2$. Да се најде волуменот на пирамидата.

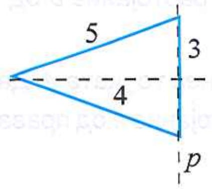
220. На коцката со раб a е отсечено секое од осумте трирабни ќошиња со рамнина што минува низ средините на трите раба на тоа ќоше. Да се најдат плоштината и волуменот на добиениот полиедар.

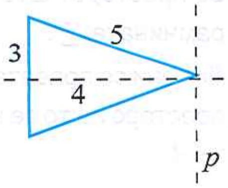
221. Во правилна четириаголна пирамида со висина 3,6 cm и основен раб 4,2 cm е впишана коцка така што нејзините 4 темиња да лежат во основата, а другите 4 на бочните рабови на пирамидата. Да се најде работ на коцката.

222. Триаголник со страни $a > b > c$ ротира околу страната a. Да се најдат плоштината и волуменот на добиеното тело.

223. Да се најдат плоштината и волуменот на телото што се добива со ротација на рамнокрак триаголник околу оската p (види го цртежот).







224. а) Во еден цилиндар е впишана правилна триаголна призма со волумен V. Да се најде волуменот $V_ч$ на цилиндарот.

б) Правилна четириаголна призма е опишана околу цилиндар со волумен V. Да се најде волуменот $V_п$ на призмата.

225. Во каков меѓусебен однос се плоштините, односно волумените на три топки такви што: првата да ги допира сите ѕидови, втората да ги допира сите рабови, а третата да минува низ сите темиња на една коцка?

226. Во каков меѓусебен однос се плоштините, односно волумените на три топки такви што: првата да ги допира сите ѕидови, втората да ги допира сите рабови, а третата да минува низ темињата на еден правилен тетраедер?

227. Во триаголна пирамида со основа $\Delta ABC: \overline{AB}=13, \overline{BC}=14, \overline{AC}=15$ и апотема $h=5$ е впишана топка. Да се најде радиусот на топката.

228. Во еден конус се вметнати две топки со радиус $1\ \mathrm{cm}$ и со $2\ \mathrm{cm}$. Помалата топка ја допира само бочната површина на конусот и другата топка. Поголемата топка ја допира основата и бочната површина на конусот и помалата топка. Колкав е волуменот на конусот?

229. Во правилна триаголна призма којашто е впишана во топка со радиус R, е впишана топка со радиус r, $r < R$. Да се најде односот на плоштините на овие топки.

230. Во топката е впишан цилиндар; во цилиндарот е впишана топка. Во каков однос се плоштините и волумените на двете топки?

231. Во каков однос се волумените и плоштините на цилиндар, полутопка и конус со иста основа (круг со радиус R) и со иста висина $H = R$?

232. Да се најде множеството точки во просторот што се на растојание a од дадена точка A и на растојание b од дадена точка B (во просторот).

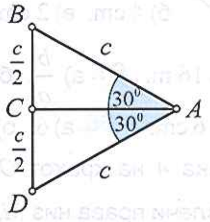
233. Дадена е рамнината $\sum$ и на неа точката A. Да се најде множеството точки во просторот што се на растојание a од точката A и на растојание b од рамнината $\sum$.

234. Дадени се правата l и на неа точката A. Да се најде множеството точки во просторот што се на растојание h од правата l и на растојание d од точката A.

ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА

ТЕМА 1 СЛИЧНОСТ

1 **1.** а) 4. б) $\frac{3}{2}$. в) $\frac{3}{8}$. **3.** а) $\frac{9}{2}$. б) $\frac{1}{2}$. в) 3. г) $\frac{2}{3}$. **6.** $a=\frac{5}{2}b$. **7.** а) $\overline{AB}=\frac{9}{4}\overline{CD}$. б) $\overline{CD}=\frac{4}{9}\overline{AB}$. **8.** а) 42. б) 30. в) 6. **9.** Сомерливи се отсечките под а) и в), а несомерливи - под г), д) и ѓ). **10.** Страните имаат: 9 cm, 12 cm и 15 cm. Размерите 9 : 12, 12 : 15 и 9 : 15 се рационални броеви, па страните се сомерливи. Нивната најголема заедничка мера е 3. **11.** а) Да; $b=24$ и $c:b=\frac{13}{12}$. б) Да; $c=17$ и $c:b=\frac{17}{15}$. в) Не; $a=5\sqrt{3}$ cm е поголемата катета и $c:a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ е ирационален број, г) не.**12.** Не; третата страна има $5\sqrt{5}$ cm. **13.** **Решение**. Нека должината на хипотенузата е c. Тогаш должината на катетата спроти аголот е 30^0 е $\frac{c}{2}$. (Зошто? Види го цртежот.)



Така, $c:\frac{c}{2}=2$, па хипотенузата AB и катетата BC се сомерливи. Другата катета AC е висина на рамностраниот триаголник ABD: $\overline{AC}=\frac{c\sqrt{3}}{2}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}(=\frac{c\sqrt{3}}{2}:c)$ е ирационален број.

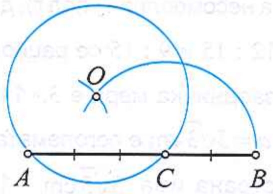
14. а) Сомерливи; $r=\frac{a}{2}$, па $\frac{a}{2}$ е нивната НЗМ. б) Сомерливи; $r=a$, па a е НЗМ. в) Несомерливи ($d_1=a\sqrt{2},\ d_2=a$). г) Несомерливи (види задача 13). д) Сомерливи; половината од хипотенузата е НЗМ. ѓ) Несомерливи; $L:d=\pi$, а бројот π е ирациоонален.

2 **17.** а) Да. б) Не. в) Не. г) Да. **18.** а) На пример, 2,5 : 5 =1,5 : 3. б) Не е можно. **19.** На пример: 1) $a:e=b:d$; 2) $b:a=d:e$. **20.** а) 30 cm. б) 10,8 cm. **21.** а) 8 cm, б) 12,5 cm. **22.** а) 4,8. б) 10. **23.** а) Да; $a:a=a:a$. б) Да; $a:b=a:b$. в) Да, ако $c^2=ab$ $(a:c=c:b)$; не, ако $c^2\neq ab$. **24.** а) 12 cm. б) $4\sqrt{3}$ cm. **25.** а) 9. б) 48.**26.** $\frac{4}{3}$. **27.** 22,5 km. **28.** 10,5 cm. **29.** 21 cm и 15 cm. **30.** $\overline{MN}=4$ cm. **31.** 18 cm, 24 cm, 30 cm. **32.** 14,5 cm. **33.** 60^0. **34.** ***Упатство***. Од формулите $P=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b(=\frac{1}{2}c\cdot h_c)$ добиваме $a\cdot h_a=b\cdot h_b(=c\cdot h_c)$, а оттука, $a:b=h_b:h_a$, како и $b:c=h_c:h_b$, што значи дека $a:b:c=h_c:h_b:h_a$.

3 **40.** ***Упатство***. Отсечката AB подели ја во однос 3 : 4.**41.** ***Упатство***. $\overline{AD}=4$ cm. **44.** а) Да. б) Не.**45.** а) 10 cm, 6 cm, 8 cm; б) $P=64$ cm². **46.** 2 cm и 4 cm. **47.** ***Упатство***. Подели ја основата на триаголникот на 5 еднакви делови и нивните

краеви сврзи ги со спротивното теме. Добиените 5 триаголници имаат еднакви основи и еднакви висини, а значи имаат еднакви плоштини. **48.** ***Упатство.*** Две страни што се краци на едниот тап агол на ромбот подели ги на по три еднакви делови и повлечи ги споменатите прави. Добиените триаголници имаат еднакви основи и еднакви висини (согледај дека двете висини кај ромб со агол од 45^0 се еднакви меѓу себе), па според тоа, имаат еднакви плоштини.

49. а) $L=10,8$ cm; $P=6,48$ cm². б) $a=5,4$ cm, $b=3,6$ cm; $P=19,44$ cm². **50.** Основата има 3,6 *cm*, а кракот има 2,7 cm. **51.** Отсечката AB подели ја со точки M и N во однос 3 : 4 : 4, па конструирај рамнокрак триаголник со основа еднаква на $\overline{AM}$ и крак $\overline{MN}$. **52.** а) $\frac{25\sqrt{3}}{9}\text{cm}^2$. б) $\frac{225\sqrt{3}}{49}\text{cm}^2$. в) $\frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2$. **53.** а) $r_1=4$ cm, $r_2=2,4$ cm; $L=3,2\pi$ cm; $P=10,24$ cm². **54.** **Решение.** Види го цртежот.



4 **55.** а) Да. б) Не. в) Не. г) Да. **57.** а) $\overline{BC}$. б) $\overline{BC}$. в) $\overline{PB}$. г) $\overline{PQ}-\overline{BC}$. **58.** а) 9 cm. б) 4 cm. в) 2 cm. **59.** а) 15 cm. б) 9 cm. в) 16 cm. г) 9 cm. д) $\overline{AB}=26$, $\overline{CD}=39$.

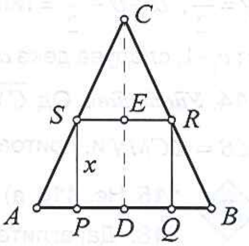
60. 16 m. **61.** а) $\frac{b}{a}$. б) $\frac{ab}{2}$. в) a^2. г) $\frac{16}{a}$. **62.** а) Да. б) Не. в) Да. г) Да. **63.** а) Не. б) Да. **65.** 6 cm. **66.** а) 6. б) 6. **67.** 16 cm; 24 cm; 16 cm; 65 cm; 26 cm. **68.** ***Упатство.*** Означи точка A на кракот OS и точка B на кракот OT такви што $\overline{OA}=a$ и $\overline{OB}=b$. Потоа повлечи права низ M, паралелна на правата AB. **69.** ***Упатство.*** Подели ја отсечката OM на три еднакви делови, т.е. $\overline{OM}=3n$, и означи точка N на кракот OS, таква што $\overline{ON}=5n$. Отсечките меѓу краците што ги прават правите повлечени низ M и N, паралелно со p се однесуваат како 3 : 5. **70.** ***Упатство.*** Секоја од страните на триаголникот подели ја на три еднакви делови.

5 **71.** а) 49 cm. б) a^2-ab . **72.** $\overline{EF}=4\,\text{cm}$, $\overline{FG}=5\frac{1}{3}$, $\overline{FH}=8\,\text{cm}$. **73.** 8 cm, 12 cm. **74.** ***Упатство.*** Означи ги со P и Q пресечните точки на AM и CN соодветно, со дијагоналата BD. Потоа, примени ја Талесовата теорема, прво на соодветни отсечки од $\measuredangle CBD$, а потоа на $\measuredangle ABD$ ($\overline{BM}:\overline{MC}=\overline{BP}:\overline{PQ}$, и $\overline{BM}=\overline{MC}$ повлекува $\overline{BP}=\overline{PQ}$; итн.). **75.** 10 cm; 7 cm. ***Упатство.*** Повлечи ја правата CM паралелно со кракот AD (M е на AB) и разгледај го ΔBCM. **79.** а) 6; 4; б) 5; 5; в) 10; 8. ***Упатство.*** Искористи го в) од претходната задача. **80.** $\overline{CD}=2\,\text{dm}$. ***Упатство.*** Користи го цртежот на задачата 78 и согледај дека $\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{BE}$, како и тоа дека ΔBCE е рамностран. **81.** $\overline{BM}=10\,cm$; $\overline{MC}=6\,\text{cm}$. ***Упатство.*** $\overline{BM}:\overline{BC}=\overline{BD}:\overline{AB}$, $\overline{CM}:\overline{CB}=\overline{CN}:\overline{CA}$, па $\overline{BM}=\frac{16}{20}(20-a)...(1)$, $CM=\frac{16}{20}(12-a)...(2)$, каде што $a=\overline{AD}$. Од $\overline{BD}:\overline{DM}=\overline{BA}:\overline{AC}$, т.е. $(20-a):a=20:12$, добиваме $a=\frac{15}{2}$, па заменувајќи во (1) и (2) се добива одговорот. **82.** ***Упатство.*** Прво, состави ја пропорцијата: а) $c : a= b : x$; б) $a : b = b : x$; в) $c : a = (2a):x$; потоа конструирај ја x. г) Прво стави $d = bc$ и конструирај ја отсечката d (на пример, од пропорцијата $b : 1 = d : c$); потоа, конструирај ја x (од $d : a = 1 : x$). д) Прво стави $d = a^2$ и конструирај ја d (од $1 : a = a : d$); потоа постапи како во г).

83. ***Упатство.*** Од $(a+x):(a-x)=a:b$ се добива $(a+x+a-x):(a+b)=(a+x):a$, т.е. $2a:(a+b)=(a+x):a$. Потоа, конструктивно најди ја $a + x$ итн.

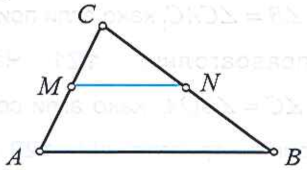
84. ***Упатство.*** Нацртај $\measuredangle XAY = 105^0$ и избери точки B_1 на AX и точка D_1 на AY, такви што $\overline{AB_1}=3(\text{cm})$, $\overline{AD_1}=2(\text{cm})$, а на полуправата B_1D_1 - точка D_2 таква што $\overline{B_1D_2}=7\,\text{cm}$. Правата низ D_2, паралелна со AX, го сече кракот AY во точка D, а правата низ D паралелна со B_1D_1, го сече AX во точка B. На правата низ A што е нормална на BD, конструирај точка C, таква што $\overline{DC}=\overline{DA}$. Тогаш $ABCD$ е бараниот делтоид.

85. ***Упатство.*** Нацртај агол $\measuredangle B = 75^0$ и искористи ја идејата од решението на претходната задача. **86.** 8 cm. ***Упатство.*** Нека AB е дијаметарот, $\overline{AC}=3\,\text{cm}$ и $\overline{BD}=13\,\text{cm}$ се растојанијата од крајните точки на дијаметарот до тангентата, а T е допирната точка (направи цртеж). Тогаш четириаголникот $ABCD$ е правоаголен трапез (објасни), радиусот $r = OT$ е неговата средна линија, па r = 8 cm. **87.** ***Упатство.*** Направи скица - трапез $ABCD$, $(AB \parallel CD)$, точка $S = AD \cap BC$, точка M на AB таква што $\overline{AM}=\overline{MB}$ и означи го со N пресекот на SM и DC. Тогаш $\overline{SN}:\overline{ND}=\overline{SM}:\overline{MA}$ и $\overline{SN}:\overline{NC}=\overline{SM}:\overline{MB}$, а оттука, поради $\overline{MA}=\overline{MB}$, се добива дека $\overline{ND}=\overline{NC}$.



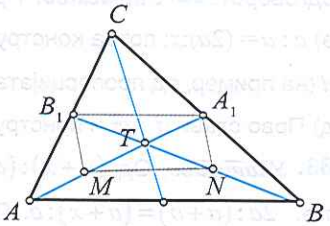
88. 6 cm. ***Упатство.*** Во ΔABC (на цртежот) е впишан квадратот $PQRS$. Бидејќи $SR \parallel AB$, имаме $\overline{AB}:\overline{SR}=\overline{CD}:\overline{CE}$, т.е. $10:x=15:(15-x)$, па $x = 6$ cm. **89.** 60 cm; 200 cm^2.

Упатство. Постапи како во претходната задача.



90. **Решение.** Нека M и N се средините по ред на страните AC и BC на ΔABC (на цртежот), т.е. $\overline{AM}=\overline{MC}$ и $\overline{BN}=\overline{NC}$. Тогаш, според Талесовата теорема, $\overline{AM}:\overline{AC}=\overline{BN}:\overline{BC}$, а тоа според обратната теорема на Талесовата повлекува дека $MN \parallel AB$. Исто така, имаме $\overline{CM}:\overline{CA}=\overline{MN}:\overline{AB}$, т.е. $1:2=\overline{MN}:\overline{AB}$, од каде што добиваме $\overline{MN}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}$.

91. **Решение.** Нека B_1A_1 е средна линија на ΔABC и MN е средна линија на ΔABT (на цртежот). Тогаш $\overline{A_1B_1} = \overline{MN}$ и $A_1B_1 \parallel MN$ (објасни зошто!), што значи дека четириаголникот MNA_1B_1 е паралелограм. Бидејќи дијагоналите во паралелограм се преполовуваат, имаме $\overline{MT} = \overline{TA_1}$, а од $\overline{AM} = \overline{MT}$ следува дека $\overline{AM} = \overline{MT} = \overline{TA_1}$, т.е. $\overline{AT} : \overline{TA_1} = 2:1$. Слично се покажува за тежишните линии BB_1 и CC_1.



92. ***Упатство***. Секоја од катетите подели ја на три еднакви делови; низ двете делбени точки на едната катета повлечи прави паралелни со другата катета, а потоа направи го истото и кај втората катета. Објасни зошто добиените триаголници, односно квадрати се складни меѓу себе. **93.** 8 cm. ***Упатство.*** $P = r \cdot s$.

6

94. а) Не. б) Да. в) Не. **95.** а) Да. б) Не, со дадените отсечки не може да се конструира триаголник. в) Не: $1{,}2 : 1{,}6 : 2{,}4 = 3 : 4 : 6 \neq 3 : 4 : 5 = 9 : 12 : 15$. г) Да. **98.** а) $\overline{AB} = 9$; $\overline{GH} = 10$. б) $\overline{BC} = 20$; $\overline{FH} = 30$. **99.** $\overline{AC} = 14\,\text{cm}$; $\overline{B_1C_1} = 7\,\text{cm}$. **100.** 30. **104.** а) $c = 24$; $b_1 = 105$; б) $c = 20$ $(c_1 = 12)$. **105.** 12 cm, 18 cm. **106.** 16, 8 cm. **107.** 4, 6 и 8. **108.** а) Да, од тоа што $\measuredangle A = \measuredangle EDC$ следува дека $DE \parallel AB$, па соодветните агли се еднакви и според Талесовата теорема, соодветните парови отсечки се пропорционални. б) Не, $6 : 4 \neq 3{,}2 : 2{,}4$. в) Да. **109.** Не, зашто во спротивно, двата триаголници би биле тапоаголни, што е невозможно. **110.** 72^0, 72^0, 36^0. ***Упатство.*** $\beta = \alpha$, $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$; $\alpha + \alpha + \dfrac{\alpha}{2} = 180^0$. **111.** а) 40 cm, 24 cm; б) 60 cm, 36 cm. **113.** Не. Бидејќи $c = c_1$, т.е. $c : c_1 = 1$, следува дека $a : a_1 = 1$ и $b : b_1 = 1$, т.е. $a = a_1$ и $b = b_1$, па триаголниците се складни. **114.** ***Упатство***. Од $\overline{CM} : \overline{CA} = 2 : 3 = \overline{CN} : \overline{CB}$ следува дека $MN \parallel AB$, па $\measuredangle A = \measuredangle CMN$, $\measuredangle B = \measuredangle CMN$ и, притоа $\overline{MN} : \overline{AB} = 2 : 3$ (според Талесовата теорема).

7

115. Не. **116.** а) Мора. б) Може, но не мора. **117.** Да; остриte агли им се еднакви. **118.** Да; аглите при нивните врвови се еднакви. **119.** Не. **120.** ***Упатство.*** $\measuredangle B = \measuredangle CAC_1$ како агли при основата на рамнокрак триаголник, а ΔABA_1 и ΔCAC_1 се правоаголни. **121.** Четири: $\Delta AOB_1 \sim \Delta BOA_1 \sim \Delta ACA_1 \sim \Delta BCB_1$. ***Упатство.*** $\measuredangle C = \measuredangle BOA_1$ како агли со заемно нормални краци. Примени го првиот признак за слични триаголници. **122.** б) 6,4 cm. **123.** ***Упатство***. Нека $\overline{AM} : \overline{MB} = k$. Ако p е која било права низ M, а $x = \overline{AC}$ и $y = \overline{BD}$ се растојанијата на p од A и B соодветно, тогаш од $\Delta AMC \sim \Delta BMD$ се добива $x : y = k\left(= \overline{AM} : \overline{MB}\right)$. **125.** а) ***Упатство.*** $\measuredangle A = \measuredangle C$ (односно $\measuredangle A = \measuredangle D$). како периферни агли над ист лак. **127.** 5; сите.

б) $\overline{AS} : \overline{SB} = \overline{SC} : \overline{SD}$.

128. ***Упатство***. Повлечи ја отсечката $DF \parallel AG$. **129.** ***Упатство***. Нека T е тежиштето на ΔABC, S е ортогоналната проекција на T врз AB, CD е висината кон AB и CC_1 е тежишната линија. Тогаш $\Delta CDC_1 \sim \Delta TSC_1$ и бидејќи $\overline{TC_1} = \frac{1}{3}\overline{CC_1}$, се добива дека $\overline{TS} = \frac{1}{3}\overline{CD}$. **130.** **Решение**. Правоаголните триаголници ACD и BCE имаат заеднички остар агол, $\measuredangle C$ (направи цртеж). Затоа, според првиот признак, тие се слични, па важи $\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{BC} : \overline{CE}$, т.е. $\overline{AC} \cdot \overline{CE} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$. **132.** ***Упатство***. Нека S е пресекот на дијагоналите AC и BD на трапезот $ABCD$. Од $\Delta ABS \sim \Delta CDS$ се добива: $\overline{BS} : \overline{SD} = \overline{AB} : \overline{CD}$ и $\overline{AS} : \overline{SC} = \overline{AB} : \overline{CD}$. **133.** ***Упатство***. $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, $\measuredangle C$ е заеднички, па триаголниците се слични според првиот признак. **135.** $8\,cm$. **136.** а) k. б) k. в) $\frac{1}{k}$. **137.** $\overline{AS} : \overline{DS} = \overline{BS} : \overline{AS}$. ***Упатство***. $\Delta ABS \sim \Delta DAS$. **138.** 40 m. ***Упатство***. Нека $h = \overline{BC}$ е бараната висина и $\alpha = \measuredangle CAB$. (Направи цртеж.) Бидејќи $\measuredangle BDC = 90^0 - \alpha$, следува дека $\measuredangle BCD = \alpha$. Од $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ имаме $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{BD}$, т.е. $80 : h = h : 20$, од каде што $h^2 = 1600$ и $h = 40$ m. **139.** ***Упатство***. $\Delta ABF \sim \Delta GDF$, па $\overline{AF} : \overline{FG} = \overline{BF} : \overline{FD}$; $\Delta ADF \sim \Delta HBF$, па $\overline{BF} \cdot \overline{FD} = \overline{FH} : \overline{AF}$; така, $\overline{AF} : \overline{FG} = \overline{FH} : \overline{AF}$. **140.** **Решение**. Триаголниците AMS и BNS имаат еднакви висини (кон основите AM, BN), па доволно е да докажеме дека $\overline{AM} = \overline{BN}$. Од $\Delta ABS \sim \Delta CDS$ имаме $\overline{CS} : \overline{SA} = \overline{DS} : \overline{SB}$, па $\overline{AC} : \overline{AS} = \overline{BD} : \overline{BS}$, а од $\Delta BMS \sim \Delta BAD$ имаме $\overline{BA} : \overline{BM} = \overline{BD} : \overline{BS}$. Според тоа, $\overline{AC} : \overline{AS} = \overline{BA} : \overline{BM}$ (1). Од $\Delta ABC \sim \Delta ANS$ имаме $\overline{AB} : \overline{AN} = \overline{AC} : \overline{AS}$ (2). Од (1) и (2) добиваме $\overline{AB} : \overline{AN} = \overline{AB} : \overline{BM}$, па $\overline{AN} = \overline{BM}$. Поради $\overline{AN} - \overline{MN} = \overline{BM} - \overline{MN}$, добиваме и $\overline{AM} = \overline{BN}$.

8 **141.** а) Да, според вториот признак. б) Не. в) Може, но не мора; вториот признак не може да се примени. **142.** 20 cm. **143.** Сите три. **144.** а) Да. б) Не. в) Да. г) Да. **145.** Да, зашто страните им се пропорционални, па триаголниците се слични според третиот признак. **148.** а) 24 cm; б) 18 cm; в) 12 cm; г) 7,2 cm. **151.** а) 20 cm; $k = \frac{4}{5}$; б) 12, 8 cm; $k = \frac{5}{4}$; в) 14,4; $k = \frac{10}{9}$. **152.** Црт. 1: да, според вториот признак. Црт.2: да, според третиот признак. Црт. 3: да, според вториот признак. **153.** Да, според вториот признак. б) $MN \parallel BC$, според обратната теорема од Талесовата. в) $\frac{17}{12}$. **154.** 16,2; $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ според првиот признак. **155.** (1) Да, ако аголот од 40^0 кај првиот триаголник е образуван од краците, а кај вториот - аголот од 70^0 е при основата (јасно, триаголниците се рамнокраки). (2) Не, ако и аголот од 40^0 кај првиот триаголник, и аголот од 70^0 кај вториот триаголник се при врвот.

156. а) Да, тапиот агол мора да е формиран од краците. б) Не мора, на пример: 40^0 $(70^0, 70^0)$ и $40^0(40^0, 100^0)$. в) Да. **157.** 40 m. **158.** $a=3{,}2$ cm, $b=3{,}4$ cm; $a_1=4{,}8$ cm, $b_1=5{,}1$ cm; $k=\frac{3}{2}$. **159.** $L=56$ m; L_1=98 m. **160.** ***Упатство.*** На две заемно нормални прави p и q, коишто се сечат во точката O, избери точки $A_1 \in p$ и $B_1 \in q$, така што $\overline{OA_1}=2\overline{OB_1}$. На полуправата A_1B_1 означи ја со B_2 точката што го задоволува условот $\overline{A_1B_2}=6\,\text{cm}$ и повлечи права низ B_2, паралелна со p. Низ пресечната точка B на таа права со правата q повлечи права паралелна со A_1B_1 и означи ја со A нејзината пресечна точка со правата p. Тогаш $\overline{AB}=6\,cm$ е страна на бараниот ромб.

9

161. 24 cm, 45 cm, 27 cm. **162.** а) 9 cm, 15 cm, 18 cm; б) 12 dm, 21 dm; 15 dm. **163.** а) 15 cm, 20 cm, 25 cm; б) 18 cm, 24 cm, 30 cm; в) 13,5 cm, 18 *cm*, 22,5 cm. **164.** а) 24 dm; б) 216 dm². **165.** 7,2 cm. **166.** 12 cm. **167.** Да, ако еднаквите висини се соодветни; не мора, ако тие висини не се соодветни.

168. $\frac{25}{16}$. **169.** 7,5 cm; 18 cm; 19,5 cm. **170.** 7,5 dm; $\frac{20}{3}$ dm. **171.** а) 12 cm; б) $6\sqrt{5}\,cm$. **172.** а) 3 пати; б) 9 пати. **173.** 9 cm. **174.** 2,5 cm. **175.** 9 cm. **176.** 8 dm. **177.** $a=15$ cm, $b=20$ cm, $c=25$ cm; $a_1=9$ cm, $b_1=12$ cm, $c_1=15$ cm. **178.** 9 cm, 6 cm; 27 cm².

179. 10 cm, 4 *cm*. **180.** ***Упатство.*** Повлечи ги нормалите од темињата B и D кон дијагоналата AC. **182.** ***Упатство.*** Нацртај агол $\alpha=\measuredangle XAY$, избери точка B_1 на кракот AX и пренеси го аголот $\beta=\measuredangle AB_1C_1$, каде што C_1 е пресечната точка со кракот AY. Во ΔAB_1C_1 повлечи ја тежишната линија C_1D_1 (D_1 е средината на отсечката AB_1) и, на полуправата D_1C_1, означи точка C_2 таква што $\overline{D_1C_2}=t_c$. Правата низ C_2 паралелна со AB_1, го сече кракот AY во точка C. Низ C повлечи права паралелна со B_1C_1. Така ќе го добиеш бараниот ΔABC. **183.** 72 cm; 216 cm². **Решение.** Хипотенузата на ΔABC е 75 cm, па радиусот на впишаната кружница е $r\left(=\frac{P_\Delta}{s}\right)=\frac{1350}{90}=15, r=15\,\text{cm}$. Хипотенузата на впишаниот триаголник претставува дијаметар на кружницата (направи цртеж), па $\overline{A_1B_1}=30\,\text{cm}$. Според тоа, коефициентот на сличноста е $k=30:75=0{,}4$. Според тоа, $L_1=0{,}4\cdot L=0{,}4\cdot 180=72\,\text{cm}$, а за плоштината имаме $P_1=R^2\cdot P=0{,}16\cdot 1350=216\,\text{cm}^2$. **184.** а) $\overline{CS_2}=15\,\text{cm}$; $\overline{BC}\approx 9{,}8\,\text{cm}$; б) $L\approx 21{,}8\,\text{cm}$; $P\approx 22{,}05\,\text{cm}^2$.

10

185. а) $c=25$; $b=20$ (со помош на Питагоровата теорема); $q=16$; $h=12$. б) $b=12$; $p=12{,}8$; $q=7{,}2$; $h=9{,}6$. в) $c=20$; $a=10\sqrt{3}$; $p=15$; $h=5\sqrt{3}$. г) $q=4$; $a=8\sqrt{5}$; $b=4\sqrt{5}$; $c=20$. **186.** а) $c=30$ cm; $h=14{,}4$ cm; $a=18$ cm; $b=24$ cm;

$P=216\text{ cm}^2$; L=72 cm. б) $c=12,5$ cm; $a=7,5$ cm; $p=4,5$ cm; $h=6$ cm; $P=37,5\text{ cm}^2$; L=30 cm. в) $p=5$ cm; $q=28,8$ cm; $c=33,8$ cm; $b=31,2$ cm; $P=202,8\text{ cm}^2$; L=78 cm. г) a=16 cm; q=7,2 cm; b=12 cm; c=20 cm; $P=96\text{ cm}^2$; $L=48$ cm. **187.** а) $a=6$; $c=10$. б) $a=6,5$; $b=15,6$. в) $b=1,875$; $h=1,5$. г) $h=9,6$; $r=4$. д) $a=15$; $b=20$; $R=\frac{c}{2}=12,5$.

188. а) 25; б) $\frac{c^2}{4}$. **189.** ***Упатство***. Конструирај “соодветна” отсечка AB и на неа, како над дијаметар, конструирај полукружница. а) Отсечката AB подели ја со точка D на два дела: $q=\overline{AD}=3$, $p=\overline{DB}=1$. Нормалата на AB низ D ќе ја пресече кружницата во точка C. ΔABC е правоаголен; тогаш $h=\overline{CD}=\sqrt{3}$. б) $p=2$, $q=3$, $h=\sqrt{6}$. в) $p=2$, $q=4$, $h=\sqrt{8}$. **196.** ***Упатство***. Од $\Delta ADB \sim \Delta CDB$ се добива $\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{DB}$. **197.** а) $4\sqrt{3}$ cm; 4 cm; $8\sqrt{3}\text{ cm}^2$; б) $\frac{c}{2}\sqrt{3}$; $\frac{c}{2}$; $\frac{c^2}{8}\sqrt{3}$. ***Упатство***. $\alpha=\frac{90^0+\beta}{2}$; $\beta=30^0$; $\alpha=60^0$, па $b=\frac{c}{2}$; потоа: $q=\frac{c}{4}$, $p=c-q=\frac{3}{4}c$, па $a=\frac{c}{2}\sqrt{3}$. **198.** ***Упатство***. x е геометриска средина од: а) $2b$ и c; б) $\frac{a}{2}$ и b; б) $a+b$ и c. **199.** $h^2=2\cdot 3$; $c=5$; $a^2=5p$; $b^2=5q$.
200. $P\in\left\{\frac{19\sqrt{18}}{2}, \frac{11\sqrt{18}}{2}, \frac{9\sqrt{18}}{2}\right\}$, $L\in\left\{\sqrt{19}+\sqrt{18\cdot 19}+19, \sqrt{2\cdot 11}+\sqrt{9\cdot 11}+11, \sqrt{3\cdot 9}+\sqrt{6\cdot 9}+9\right\}$:
Задачата има три решенија. **Решение.** Од $h=\sqrt{18}$ се добива $pq=18$, па p и q се делители на бројот 18; значи, $(p,q)\in\{(1,18),(2,9),(3,6),(18,1),(9,2),(6,3)\}$. Можеме да ги земеме само првите три парови (другите три се “симетрични”).
Од $c=p+q$, $a=\sqrt{pc}$, $b=\sqrt{qc}$ добиваме по ред: $c\in\{19, 11, 9\}$, $a\in\left\{\sqrt{19}, \sqrt{2\cdot 11}, \sqrt{3\cdot 9}\right\}$, $b\in\left\{\sqrt{18\cdot 19}, \sqrt{9\cdot 11}, \sqrt{6\cdot 9}\right\}$ (притоа, a и b може “да си ги разменат “ местата). Тогаш за $P=\frac{ch}{2}$ и $L=a+b+c$ ги добиваме горните резултати. **201.** $P=192\text{ cm}^2$; 9 : 16 (=7,2 : 12,8). **202.** 4 : 1. ***Упатство***. $a=2b$; $d=p+q=b\sqrt{5}$; во ΔABC, висината кон хипотенузата AC е $h=\frac{2b}{5}\sqrt{5}$; $p=\frac{4}{5}b\sqrt{5}$; $q=\frac{b}{5}\sqrt{5}$; па $p:q=4:1$.

11 **203.** а) 52 cm; б) 2,1 cm; б) 0,16 cm. **204.** 2,4 dm. **205.** 40 m. **206.** а) $m=32$ cm; $n=7$ cm; $b=39$ cm (m и n се отсечоците што ги прави висината h_b на страната b); $P=468\text{ cm}^2$; h_a=23,4 cm; $h_c=37\frac{11}{25}$ cm; б) $m=24$ cm; n=28 cm; a=52 cm (m и n се отсечоците што ги прави висината h_a на страната a); $P=1170\text{ cm}^2$; $h_c=45\frac{15}{17}$ cm, $h_b=44\frac{8}{53}$ cm. **207.** а) $c=17$; $a=25$; $b=26$; $L=68$; $P=204$; h_a= 16,32; h_b=15$\frac{9}{13}$; б) $c=39$; $a=41$; $b=50$; $L=130$; $P=780$; $h_a=38\frac{2}{41}$; h_b=31,2.

208. ***Упатство***. $a = 7k,\ b = 24k,\ c = 25k$. **209.** а) 10 cm; 24 cm; 26 cm. б) 13 cm. в) 4 cm. ***Упатство***. Стави: $a=5k,\ b=12\,k,\ c^2 = (pk)^2+(12k)^2$. **210.** а) 26 cm; б) 12,5 cm. **211.** а) $R=10\,\text{cm}\left(R=\frac{c}{2};\ a=12;\ b=16;\ c=20\right)$; б) $R=17$ ($a=30,\ b=16,\ c=34$).

212. Да, основата на првиот е 12 и висината е 8, а основата на вториот е 16 и висината е 6, па имаат иста плоштина 48. **213.** $\approx 4{,}6\,\text{m}$. **214.** 4 m. **215.** 18 m.

216. 46 dm; 120 dm^2. **217.** 17 cm. **218.** 15 cm; 36 cm; 39 cm. **219.** На средината од хипотенузата; растојанието до секој шатор е 15 метри. **220.** 40 m. **221.** 15 cm; 108 cm^2.

222. 13 cm. **223.** $P=\frac{a^2\pi}{4}\left(=16\pi\,\text{cm}^2\right)$. **224.** а) 180 cm^2. б) $\frac{4}{5}c^2$.

225. 15 km. **226.** а) 75 km. б) 4,5 часови. **227.** На 30 cm; кракот: $b=30$ cm, основата $a=36$ cm. ***Упатство***. Од $a+2b=96$ имаме $\frac{a}{2}=48-b$, па $b^2-(48-b)^2=24^2$. **228.** 48 cm; 480 cm^2; $\approx 9{,}23\,\text{cm}$. **229.** $P=384$ ($h=16$). **230.** 420 cm^2. **231.** 24 cm.

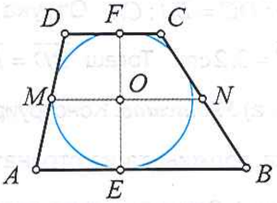
232. $R\sqrt{3}\left(=6\sqrt{3}\,\text{cm}\right)$. **233.** 34 cm. ***Упатство***. Од $c^2-b^2=a^2$ се добива $(c-b)(c+b)=900$, а бидејќи $c+b+a=80$, т.е. $c+b=50$, следува дека $c-b=18$. Од $c+b=50$ и $c-b=18$ се добива c = 34 cm, $b=16$ cm. **234.** $5\left(\sqrt{3}-1\right)\text{cm}$. ***Упатство***. $\overline{S_1S_2}=2r$, каде што r е радиусот на впишаната кружница на правоаголниот триаголник; $P=r\cdot s$, т.е. $\frac{1}{2}\cdot 25\sqrt{3}=r\left(10+5+5\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$. **235.** а) 2 : 1; б) 2 : 1; в) 4 : 1. ***Упатство***. Радиусот на опишаната кружница е $\frac{2}{3}$ од висината, а на впишаната е $\frac{1}{3}$ од висината.

236. $P=90\pi\,\text{cm}^2\left(r=3\sqrt{10}\,\text{cm}\right)$. **237.** $P_3=P_1+P_2$, каде што P_3 е плоштината на полукругот над хипотенузата, а P_1 и P_2 – над катетите. Аналогно важи за правилните триаголници.

239. а) 3, 4, 5 – правоаголен; 4, 4, 4 – рамностран; 2, 5, 5 – рамнокрак; б) $P_1=6,\ P_2=4\sqrt{3}$; $P_3=\sqrt{24}$; $P_2^2+P_3^2=48+24=72=2P_1^2$. **240.** 2 dm. ***Упатство***. $r=\frac{P}{s}$; $s=14$; $a+b=16$; $b=16-a$; $P=\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}\left(16a-a^2\right)$; од $a^2+b^2=c^2$: $a^2+\left(256-32a+a^2\right)=144$, $16a-a^2=56$, па $P=\frac{1}{2}\cdot 56=28$; така, $r=\frac{28}{14}=2$. **241.** а) $76\sqrt{3}\ \text{cm}^2\ \left(\approx 131{,}6\,\text{cm}^2\right)$; б) $4\sqrt{7}\ \text{cm}\approx 10{,}56\,\text{cm}$. **242.** $P=\left(3+\sqrt{3}\right)a^2$; за $a=10\,\text{cm}$, $P\approx 473\,\text{cm}^2$. **243.** а) ***Упатство***. Дијагоналите на добиениот четириаголник $EFGH$ лежат на симетралите на страните од дадениот квадрат. Нека нивната пресечна точка е означена со O; тогаш правоаголните триаголници (на пример) EOF и EOH се складни и рамнокраки, $\measuredangle HEF$ е прав; на тој начин се заклучува дека се прави и аглите EFG и FGH, што значи дека $EFGH$ е квадрат. б) $d=\left(1+\sqrt{3}\right)a\approx 13{,}65\,\text{cm}$; $P=\frac{d^2}{2}=\left(2+\sqrt{3}\right)a^2\approx 93{,}25\,\text{cm}^2$.

244. ***Упатство.*** Нацртај трапез $ABCD$ (со AB и CD како основи). Правата низ C паралелна со AD ја сече AB во точката F. Тогаш $\measuredangle A = \measuredangle BFC = \alpha$. Бидејќи $\alpha + \beta = 90^0$ (од условот), следува дека ΔBFC е правоаголен, па $(a-b)^2 = \overline{FB}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{BC}^2 = c^2 + d^2$.

12 **245.** 12,8 cm; 19,2 cm; 25,6 cm; 32 cm. ***Упатство.*** Означи ги деловите соодветно со x_1, x_2, x_3, x_4. Тогаш $\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{4}x_3 = \frac{1}{5}x_4 = k$, т.е. $x_1 = 2k$, $x_2 = 3k$, $x_3 = 4k$ и $x_4 = 5k$. Следствено, $2k+3k+4k+5k = 89,6$, па $k = 6,4$. **246.** 40 km. ***Упатство.*** Стави $\overline{AB} = x$ и покажи дека $\overline{AS} = \frac{2}{5}x$, $\overline{TB} = \frac{1}{5}x$. Потоа, искористи го податокот: $\overline{AB} = \overline{AS} + \overline{ST} + \overline{TB}$ и $\overline{ST} = 16\,\text{km}$, т.е. $x = \frac{2}{5}x + 16 + \frac{1}{5}x$. **247.** $a_1 : a_2 : a_3 = 28 : 21 : 12$. **Решение.** Стави $b_1 = 3\,k$, $b_2 = 4\,k$ и тогаш $b_3 = 7k$. Бидејќи $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3$, следува дека $3ka_1 = 4ka_2 = 7ka_3$, т.е. $3a_1 = 4a_2 = 7a_3$. Според тоа, $a_1 : a_2 = 4 : 3$ и $a_2 : a_3 = 7 : 4$, т.е. $a_1 : a_2 = 28 : 21$ и
$a_2 : a_3 = 21 : 12$. Значи, $a_1 : a_2 : a_3 = 28 : 21 : 12$. **248.** 750 cm. а) 350 cm, 250 cm, 150 cm. б) 375 cm, 225 cm, 150 cm. **Решение.** Да ја означиме со x должината на жицата. За периметрите на квадратите при првата поделба на жицата можеме да запишеме, по ред: $7k$, $5k$ и $3k$, а $x = 15k$, што значи дека периметрите, по ред се: $\frac{7}{15}x$, $\frac{5}{15}x$ и $\frac{3}{15}x$. При втората поделба на жицата, за периметрите можеме да запишеме по ред: $5n$, $3n$ и $2n$, а $x = 10n$, што значи дека периметрите, по ред се: $\frac{5}{10}x$, $\frac{3}{10}x$ и $\frac{2}{10}x$. Ги проверуваме разликите: $\left(\frac{5}{10} - \frac{7}{15}\right)x$, $\left(\frac{3}{10} - \frac{5}{15}\right)x$ и $\left(\frac{2}{10} - \frac{3}{15}\right)x$. Бидејќи само првата е позитивна, заклучуваме дека само првиот квадрат се зголемил при втората поделба и, притоа, $\left(\frac{5}{10} - \frac{7}{15}\right)x = 25$ т.е. $\frac{1}{30}x = 25$. Значи должината на жицата е $x = 750$ cm. Од тоа, лесно се добиваат резултатите под а) и под б).



249. **Решение.** Нека $ABCD$ е дадениот трапез, EF е дијаметарот на впишаната кружница, нормален на основите, а MN е права низ центарот O на кружницата, паралелна со основите на трапезот. Според Талесовата теорема имаме: $\overline{DM} : \overline{MA} = \overline{FO} : \overline{OE} = \overline{CN} = \overline{NB}$, а бидејќи $\overline{FO} = \overline{OE}$, следува дека $\overline{DM} = \overline{MA}$ и $\overline{CN} = \overline{NB}$. Значи, $\overline{MN}$ е средната линија на трапезот $ABCD$. Да ставиме $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{EF} = h$. Од условот дека $ABCD$ е опишан околу кружница, следува дека $a+b\ =12\ (1)$. Од условот пак $P_{ABNM}:P_{MNCD}=5:3$, следува дека $\left(a+\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{h}{2}:\left(b+\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{h}{2}=5:3$, од каде што $3\cdot(3a+b)=5\cdot(3b+a)\ (2)$. Од (1) и (2) добиваме $a=9$ cm, $b=3$ cm. **250.** ***Упатство***. Нацртај $\measuredangle XOY=60^0$ и на кракот AX избери точка M таква што $\overline{AM}=3\ (\mathrm{cm})$, а на кракот $AY-$точка N таква што $\overline{AN}=2\ (\mathrm{cm})$. На полуправата MN означи точка P таква што $\overline{MP}=5\,\mathrm{cm}$ и низ точката P повлечи права паралелна со кракот AX; таа права го сече кракот AY во точка C. На крајот повлечи права низ точката C, паралелно со MN; таа се сече со AX во точка B. Според Талесовата теорема е јасно дека ΔABC е бараниот. **251.** а) 16 : 9; б) $\overline{CD}=4{,}5\,\mathrm{cm}$; $\overline{BD}=7{,}5\,\mathrm{cm}$. ***Упатство***. а) $\overline{AC}^2=8^2+6^2$, $\overline{AC}=10\,\mathrm{cm}$.

Од $\Delta ABC\sim\Delta BCS$ имаме $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{BS}$, од каде што $\overline{BS}=4{,}8\,\mathrm{cm}$; тогаш $\overline{CS}^2=6^2-4{,}8^2$., $\overline{CS}=3{,}6\,\mathrm{cm}$ и $\overline{AS}=10-\overline{CS}=6{,}4\,\mathrm{cm}$, па $\overline{AS}:\overline{SC}=6{,}4:3{,}6=16:9$.

б) $\Delta ABC\sim\Delta CSD$; $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{SC}:\overline{CD}$, т.е. $8:10=3{,}6:\overline{CD}$, па $\overline{CD}=4{,}5\,\mathrm{cm}$; тогаш $\overline{BD}^2=6^2+4{,}5^2$; $\overline{BD}=7{,}5\,\mathrm{cm}$. **252.** ***Упатство***. Повлечи ги тетивите AD, BC и согледај дека $\Delta PAD\sim\Delta PBC$, според првиот признак ($\measuredangle P$ е заеднички, а $\measuredangle ADP=\measuredangle BCP$, како периферни агли), па $\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{PD}:\overline{PC}$. б) $\Delta PAB\sim\Delta PBC$ ($\measuredangle P$ е заеднички, а $\measuredangle ACB=\measuredangle APB$, како "периферни" агли над ист лак), па $\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{PB}:\overline{PC}$.

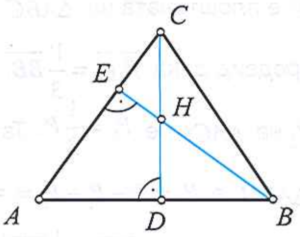
253. 4 cm. ***Упатство***. Низ темето B повлечи права паралелна со симетралата CD и нејзиниот пресек со правата AC означи го со E. Тогаш $\Delta ABE\sim\Delta ADC$ и ΔBCE е рамностран (аглите му се по 60°), па $\overline{BE}=\overline{EC}=6\,\mathrm{cm}$ и $\overline{CD}:6=12:18$.

254. $\overline{DC}=3{,}2\,\mathrm{cm}$; $\overline{BD}=4{,}8\,\mathrm{cm}$; $\overline{DE}=2{,}4\,\mathrm{cm}$. ***Упатство***. Искористи го својството: симетралата на (кој било) агол во триаголникот ја дели спротивната страна на отсечки чијшто однос е ист како односот на другите две страни (направи цртеж), т.е. $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{CA}$. Оттука, $\left(\overline{BD}+\overline{DC}\right):\overline{DC}=\left(\overline{BA}+\overline{CA}\right):\overline{CA}$, т.е. $8:\overline{DC}=10:4$, па $\overline{DC}=3{,}2\,\mathrm{cm}$. Тогаш $\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=8-3{,}2=4{,}8$; $\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{CA}$, па $\overline{DE}=2{,}4$.

255. а) ***Упатство***. Конструирај ја симетралата на $\measuredangle A$. б) 12 cm. **256.** 400 cm². **Решение**. Нека должината на страната на квадратот е $4a$. Тогаш $\overline{DT}=a$ и $\overline{TC}=3a$. (Направи цртеж.) Според првиот признак, $\Delta ABS\sim\Delta BTC$, па $\overline{AS}:\overline{BS}=\overline{BC}:\overline{CT}=4:3$. Оттука $\overline{AS}:12=4:3$, па $\overline{AS}=16\,\mathrm{cm}$. Страната AB е хипотенуза на ΔASB, па $\overline{AB}^2=16^2+12^2$, $\overline{AB}=20\,\mathrm{cm}$. Значи, плоштината на квадратот е 400 cm². **257.** **Решение**. Нека $x=\overline{DM}$ (направи скица). Тогаш за плоштината на трапезот $BCDM$ и на триаголникот ABM

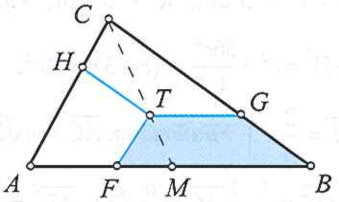
имаме $P_{BCDM}=\frac{1}{2}(x+5)\cdot 5$, $P_{ABM}=\frac{1}{2}(5-x)\cdot 5$, па од условот $P_{BCDM}:P_{ABM}=4:1$ добиваме $\frac{1}{2}(x+5)\cdot 5=\frac{1}{2}(5-x)\cdot 5\cdot 4$, $x+5=20-4x$, $x=3$. Значи, M е на растојание 2 cm од A.

258. 9 cm. **Решение.** Од ΔADC (на цртежот) според Питагоровата теорема, $\overline{CD}^2=20^2-12^2=256$, т.е. $\overline{CD}=16\text{cm}$. Од $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BE}(=P)$ добиваме $24\cdot 16=20\cdot\overline{BE}$, т.е. $\overline{BE}=19,2$ cm. Од правоаголниот $\Delta BCE:\overline{CE}^2=20^2-19,2^2$, $\overline{CE}=5,6$ cm, па $\overline{AE}=14,4$ cm. Од $\Delta ADC\sim\Delta HEC$ ($\measuredangle EHC=\measuredangle DAC$, како агли со заемно нормални краци) добиваме $\overline{CH}:\overline{AC}=\overline{EC}:\overline{CD}$, $\overline{CH}:20=5,6:16$, $\overline{CH}=7\text{cm}$. Така, $\overline{DH}=\overline{CD}-\overline{CH}=16-7$, $\overline{DH}=9$ cm.



259. 24 cm². *Упатство*. Квадрирај го збирот на катетите: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, т.е. $14^2=10^2+2ab$.

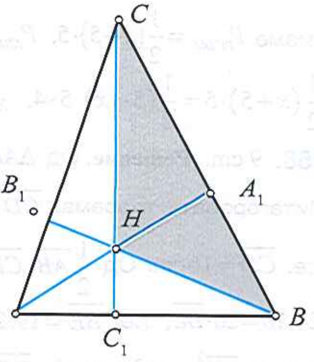
260. **Решение.** Нека CM е тежишната линија како на цртежот. Знаеме дека $\overline{CT}=2\overline{TM}$. Да ја пресметаме плоштината на трапезот $FBGT$. Од тоа што $\Delta BMC\sim\Delta GTC$ следува дека $\overline{CM}:\overline{CT}=\overline{BM}:\overline{GT}$, односно $3:2=\frac{c}{2}:\overline{TG}$, па $\overline{TG}=\frac{c}{3}$. Потоа, $\overline{BF}=\overline{BM}+\overline{MF}$. Бидејќи $TF\parallel AC$ имаме $\Delta AMC\sim\Delta FMT$, од каде што $\overline{FM}:\overline{AM}=\overline{TM}:\overline{CM}$, т.е. $\overline{FM}:\frac{c}{2}=1:3$, па $\overline{FM}=\frac{c}{6}$. Според тоа, $\overline{BF}=\frac{c}{2}+\frac{c}{6}=\frac{2c}{3}$.



Исто така, лесно се уверуваме дека и висината на трапезот $FBGT$ е еднаква на $\frac{1}{3}h_c$. Така, плоштината на трапезот $FBGT$ е: $\frac{1}{2}\left(\overline{FB}+\overline{TG}\right)\cdot\frac{1}{3}h_c=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}c+\frac{c}{3}\right)\frac{1}{3}h_c=$ $=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}ch_c\right)=\frac{1}{3}P_{\Delta}$. Слично се покажува и за другите два трапеза.

261. 1 : 3. **Решение.** $\measuredangle ACD=30^0\left(=\frac{1}{3}\cdot 90^0\right)$, па $\overline{AC}=2\overline{AD}$. (Направи цртеж!) Од $\Delta ADC\sim\Delta CDB$ следува $\overline{AD}:\overline{AC}=\overline{CD}:\overline{BC}$, односно $1:2=\overline{CD}:\overline{BC}$, па $\overline{BC}=2\overline{CD}$. Исто така, $\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BD}$, односно $\overline{CD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BD}$. Во ΔADC: $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$; $\overline{AD}^2=4\overline{AD}^2-\overline{AD}\cdot\overline{BD}$, од каде што $\overline{DB}=3\overline{AD}$. Така, $\overline{AD}:\overline{DB}=1:3$.

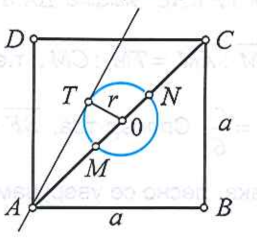
262. $r=3\text{cm}$. *Упатство*. $c-a=9, c+a=25$, од каде што $c=17$, $a=8$, а потоа и $b=15$; $L=40$ cm, $P=60$ cm², па $r=\frac{P}{s}=\frac{60}{20}=3$.



263. 5 : 1. **Решение**. Плоштината P_1 на ΔBCH (на цртежот) е $P_1=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{A_1H}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\frac{1}{2}\overline{AA_1}=\frac{1}{2}P$ (P е плоштината на ΔABC). На сличен начин, имајќи предвид дека $\overline{B_1H}=\frac{1}{3}\overline{BB_1}$, добиваме дека плоштината P_2 на ΔACH е $P_2=\frac{1}{3}P$. Така, плоштината P_3 на ΔABH е $P_3=P-P_1-P_2==P-\frac{1}{2}P-\frac{1}{3}P,\ P_3=\frac{1}{6}P.$

Според тоа, $\overline{HC_1}=\frac{1}{6}\overline{CC_1},\ \overline{CH}=\frac{5}{6}\overline{CC_1}$, па $\overline{CH}:\overline{HC_1}=5:1$. **264.** 26 cm; 120 cm². ***Упатство***. Воочи дека $b=24\,(=20+4)$, $c=20+x$, $a=4+x$ (направи цртеж). Од $c^2=a^2+b^2$, т.е. од $(20+x)^2=(4+x)^2+24^2$, се добива $x=6$. **265.** 96 cm; 432 cm². ***Упатство***. (Направи цртеж.) $\overline{DE}:\left(\overline{DE}+10\right)=20:30$, $\overline{DE}=20\text{cm}$; $\overline{CE}=24\text{cm}$; $\overline{AB}=30\text{cm}$, $\overline{BE}=36\text{cm}$. Триаголникот ABE е рамнокрак, со основа $\overline{BE}=36\text{cm}$, крак 30 cm и висина (кон основата) 24 cm. **266.** 768 cm²; 124 cm. ($a=50$ cm, $b=14$ cm, $c=30$ cm).

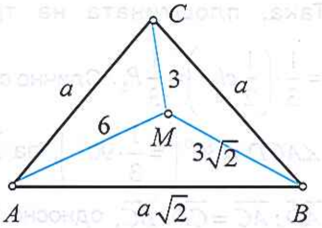
267. $r=3$ cm; $R=6$ cm. ***Упатство***. $R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $a=\frac{6r}{\sqrt{3}}$ и $R=r+3$ дава $(r+3)^2=r^2+\frac{36r^2}{4\cdot 3}$, $(r+3)^2=4r^2$, $r+3=2r$, па $r=3\text{cm}$, $R=6\text{cm}$.. **268.** $\overline{AT}=6\text{cm}$, $\left(\overline{AT}=\frac{2}{3}a\right)$. ***Упатство***. $\overline{AC}=a\sqrt{2}$; $\overline{AO}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$;



$r=\overline{OT}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{a}{6}\sqrt{2}$; $\overline{AT}^2=\overline{AO}^2+r^2=\frac{4}{9}a^2$;

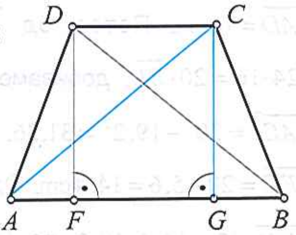
$\overline{AT}=\frac{2}{3}a$; за $a=9$: $\overline{AT}=6\text{cm}$ (види цртеж).

269. $\overline{AC}=5$ cm, $\overline{BC}=7{,}8$ cm. **270.** P=22,5 cm². **Решение.** Нека катетата е $\overline{AC}=\overline{BC}=a$; тогаш хипотенузата $\overline{AB}=a\sqrt{2}$. На цртежот да ги разгледаме триаголниците ABM и BCM. Можеме да забележиме дека: $\overline{BC}:\overline{AB}=a:a\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$; $\overline{BM}:\overline{AM}=3\sqrt{2}:6=\sqrt{2}:2=1:\sqrt{2}$; $\overline{CM}:\overline{BM}=3:3\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$, па според третиот признак, $\Delta BCM\sim\Delta ABM$. Соодветните агли на слични триаголници се еднакви, па: $\measuredangle ABM=\measuredangle BCM$ (тогаш: $\measuredangle BCM+\measuredangle CBM=45^0$), $\measuredangle AMB=\measuredangle BMC=135^0$ и $\measuredangle AMC=360^0-135^0-135^0=90^0$. Значи, ΔAMC е правоаголен, па поради тоа имаме:

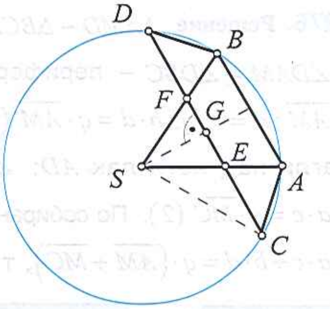


$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2=6^2+3^2=45$. Така, плоштината на ΔABC е

$P=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\frac{45}{2}$, $P=22{,}5\text{cm}^2$. **271.** $P=600\ \text{cm}^2$. **Решение.** На цртежот, ΔAGC и ΔBFD се правоаголни, па: $\overline{AG}^2=40^2-24^2=1024$; $\overline{AG}=32\text{cm}$; $\overline{BF}^2=30^2-24^2=324$; $\overline{BF}=18\text{cm}$. Значи, $\overline{AG}+\overline{BF}=50\text{cm}$. Ако $a=\overline{AB}$ и $b=\overline{DC}$, тогаш $a=\overline{AF}+b+\overline{GB}$, т.е. $\overline{AF}+\overline{GB}=a-b$ (1). Од $\overline{AG}+\overline{FB}=50$, т.е. $(\overline{AF}+b)+(b+\overline{GB})=50$, добиваме $\overline{AF}+\overline{GB}=50-2b$ (2).



Од (1) и (2): $a-b=50-2b$, т.е $a+b=50$. Така, $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{50}{2}\cdot 24=600$. За да покажеме дека $AC\perp BD$, доволно е да утврдиме дека ΔACH е правоаголен, каде што H е пресекот на правата AB и правата низ C, паралелна на BD. Имаме: $\overline{AC}^2+\overline{CH}^2=40^2+30^2=2500=50^2=(a+b)^2=\overline{AH}^2$.



272. а) $d_1=\sqrt{7}\ \text{cm}\approx 2{,}64\text{cm}$. б) $\overline{AB}=\sqrt{8}\ \text{cm}\approx 2{,}82\text{cm}$.

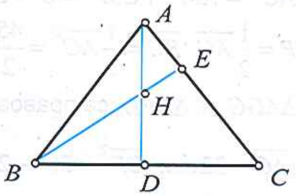
в) $P\approx 4{,}85\text{cm}^2$. **Решение.** а) За растојанието $d_1=\overline{SG}$ на тетивата CD (на цртежот) имаме:

$d_1^2=\overline{SD}^2-\overline{DG}^2=4^2-3^2$, односно $d_1=\sqrt{7}\ \text{cm}\approx 2{,}64\text{cm}$.

б) Нека радиусите SA и SB ја сечат тетивата CD во точките E и F, соодветно. Тогаш (бидејќи $\overline{CE}=\overline{EF}=\overline{FD}=2\text{cm}$, $\overline{EG}=1\text{cm}$) имаме: $\overline{SE}^2=\overline{EG}^2+\overline{SG}^2=1^2+7=8$, односно $\overline{SE}=\sqrt{8}\ \text{cm}$. Од $\Delta SEF\sim\Delta SAB$ следува дека $\overline{SE}:\overline{SA}=\overline{EF}:\overline{AB}$, т.е. $\sqrt{8}:4=2:\overline{AB}$, па $\overline{AB}=\sqrt{8}\ \text{cm}\approx 2{,}82\text{cm}$. в) Плоштината на трапезот $ABCD$ е $P=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot(d-d_1)$, каде што d е растојанието на тетивата AB од S: $d^2=\overline{SA}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2=4^2-\frac{1}{4}\cdot 8=14$; $d=\sqrt{14}\ \text{cm}\approx 3{,}74\text{cm}$; $P\approx\frac{1}{2}(2{,}82+6)\cdot(3{,}74-2{,}64)$, $P\approx 4{,}85\text{cm}^2$.

273. 4 : 1. ***Упатство.*** $\measuredangle AMB=90^0$; $\Delta ABM\sim\Delta BCM\sim\Delta ACB$ (според првиот признак), па $\overline{AM}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$, т.е. $\overline{AM}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}}$; слично, $\overline{CM}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}$; така,

$\overline{AM}:\overline{MC}=\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=\ 8^2:4^2=4:1$.



274. $\overline{DH}=9\text{cm}$. **Решение**. Прво ќе ја пресметаме висината AD (на цртежот): $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=20^2-12^2=256$, $\overline{AD}=16\text{cm}$. Потоа, од $\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BE}$, односно од $24\cdot16=20\cdot\overline{BE}$, добиваме $\overline{BE}=19,2\text{cm}$, а од $\overline{AE}^2=20^2-19,2^2=31,36$, добиваме $\overline{AE}=5,6\text{cm}$, па $\overline{EC}=20-5,6=14,4\text{cm}$. Од $\Delta BHD\sim\Delta BCE$ следува дека $\overline{DH}:\overline{DB}=\overline{EC}:\overline{BE}$, односно $\overline{DH}:12=14,4:19,2$, па $\overline{DH}=9\text{cm}$. **275.** ***Упатство.*** Ако Q е пресекот на хипотенузата и нејзината нормала, повлечена низ точката P (направи цртеж), тогаш $\Delta AQP\sim\Delta ACB$, па $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{PQ}:\overline{BC}$, т.е. $\overline{AP}:8,5=2,4:4$; $\overline{AP}=5,1\text{cm}$; $\overline{PC}=7,5-5,1=2,4=\overline{PQ}$. Спорд тоа, точката P е еднакво оддалечена од краците на $\measuredangle B$, а тоа значи дека лежи на симетралата од $\measuredangle B$, т.е. BP е симетрала на $\measuredangle B$.

276. **Решение**. $\Delta AMD\sim\Delta BCD$ ($\measuredangle ADM=\measuredangle BDC$ – по конструкција; $\measuredangle DAM=\measuredangle DBC$ – периферискi агли, над ист лак CD), па $\overline{AM}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{BD}$, $\overline{AM}:d=b:q$, $b\cdot d=q\cdot\overline{AM}$ (1). $\Delta MCD\sim\Delta ABD$ ($\measuredangle MCD=\measuredangle ABD$ – периферискi агли над исти лак AD; $\measuredangle MDC=\measuredangle ADB$), па $\overline{MC}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{BD}$, $\overline{MC}:c=a:q$, $a\cdot c=q\cdot\overline{MC}$ (2). По собирањето на равенствата (2) и (1), добиваме: $a\cdot c+b\cdot d=q\cdot\left(\overline{AM}+\overline{MC}\right)$, т.е $a\cdot c+b\cdot d=q\cdot p$.

ТЕМА 2

ЛИНЕАРНА РАВЕНКА, ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА, ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

1 **1.** а) =; б) <; в) >; г) >. **2.** а), б), г). **3.** а) не; б) да; в) да; г) не. **4.** За $x=2$. **5.** За $x=-3$ и $x=2$. **6.** а), в). **7.** б), в), д), ѓ), ж), ѕ), ј), к), з).

8. а) **Решение**. $(a+3)(a+3-3a)+a(a+a+3)=9$, $(a+3)(3-2a)+a(2a+3)=9$, $3a+9-2a^2-6a+2a^2+3a=9$. Следува $9=9$, точно е. **9.** ***Упатство***. Се добива $3m-2m=1+6$, т.е. $m=7$. **10.** $a=5$. **11.** ***Упатство***. Од $4=\dfrac{4}{p-2}$ следува $p-2=1$, т.е. $p=3$. **12.** а) да; б) не; в) да; г) не. **13.** а), в).

2 **14.** а) квадратна со 1 непозната; б) линеарна со 2 непознати; в) квадратна со 2 непознати; г) квадратна со 1 непозната; д) квадратна со 2 непознати; ѓ) линеарна со 3 непознати. **15.** а) една; б) две; в) три. **16.** а) втор; б) петти; в) трети; г) осми; д) трети; ѓ) втор. **18.** б), в), г). **19.** б), в). **20.** в), г), ѓ).

21. ***Упатство***. $\dfrac{x^2-1+x-1+x+1-x^2}{2}=0$. Од прв степен. **22.** а) Да. б) Да.

3 **23.** а) да, $\{3\}$; б) да, $\{-3,-1\}$; в) да, $\{4\}$. **24.** ***Упатство***. $5(5-1)+\frac{5}{2}=\frac{5+2}{2}19$, $20+2,5=3,5+19$. Решение е: $\{-4,5\}$. **25.** а) $\{2\}$; б) $\{-1\}$; в) $\{1\}$. **26.** а) $\{-6\}$; б) $\{-5,5\}$; в) $\{7\}$. **27.** **Решение.** $7\cdot 3+8a-11\cdot 3+4a=0$, $21+8a-33+4a=0$, $8a+4a+2a-33=0$, $12a-12=0$, т.е. $a=1$; б) $a=-1$; в) $a=-\frac{1}{3}$. **28.** а) да; б) не; в) не; г) да. **29.** а) да; б) не; в) не. **30.** а) $a=3$; б) $a=-1$ и $a=1$. **31.** б), г).
32. **Решение.** $16x^2+24x+9-2\left(4x^2+4x+1\right)-8x^2-16x=7$,

$$16x^2+24x+9-8x^2-8x-2-8x^2-16x-7=0,$$

$\left(16x^2-8x^2-8x^2\right)+\left(24x-8x-16x\right)+\left(9-2-7\right)=0$. Ваквата равенка се вика идентична равенка (идентитет). **33.** $(a-1)\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-a+2=0$, $a-1-3-a+2=0$, т.е. $0\cdot a=2$, нема решение.

4 **34.** а) ***Упатство***. Додаден е членот $4x$ на двете страни. б) Упатство: Изоставен е членот $3x$ на двете страни. **35.** а) да; б) ***Упатство***. Изостави го изразот $1-2x$ на двете страни и подели ги двете страни со 4. **36.** а) ***Упатство***. Додаден е на двете страни членот $7x$; б) ***Упатство***. Додаден е на две страни членот $4x^2$.
37. а) Изостави го членот $16x^2$; б) Изостави го членот $-5x$. **38.** **Решение.**
$4x+3x-2x=4+5 \Leftrightarrow (4+3-2)x=9 \Leftrightarrow 5x=9$. **39.** а) $a=3$; б) $a=2\frac{1}{2}$. **40.** а) да; б) да; в) не. **41.** а) $x=10$; б) $x=4$; в) $x=-4$; г) $x=-1$.

5 **42.** а) $6x+4=x-12$; б) **Решение.** $21x+30=32x-5x+6 \Leftrightarrow 21x+30=27x+6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 21x-27x=6-30 \Leftrightarrow -6x=-24 \Leftrightarrow x=4$.
43. **Решение.** $4,5x-4+2x=6x+3 \Leftrightarrow x=14$. **44.** а) ***Упатство***. Првата равенка подели ја со 10; б) да; в) не. **46.** а) $x=1$; б) $x=4$; в) $x=3$; г) $y=13$. **47.** а) **Решение.**
$30x-24(x+2)=60-10(x+10) \Leftrightarrow 30x-24x+10x=60-100+48 \Leftrightarrow 16x=8 \Leftrightarrow x=0,5$.
48. а) **Решение.** $30(y+1)-50+5y=8y+22+120 \Leftrightarrow 30y+5y-8y=22+120-30+50 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 27y=162 \Leftrightarrow y=6$; $R=\{6\}$; б) $R=\{7\}$; в) $R=\{1\}$. **50.** $x=-1$. **51.** **Доказ.**
$8x-7x=12-10 \Leftrightarrow x=2$, $R(8x+10=7x+12)=\{2\}$; $4x+3x+10=24 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=2$, $R\left(\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{3}\right)=\{2\}$. Имаат еднакви множества решенија, т.е. се еквивалентни.

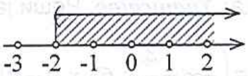
6 **52.** а) $x-8=0$; б) $12x-11=0$; в) $x-1=0$; г) $4x-7=0$; д) $2x+1=0$; ѓ) $x-3=0$.
53. а) и в). **54.** а) **Решение.** $17x-8x=-67+13 \Leftrightarrow 9x=-54 \Leftrightarrow x=-6$, $R=\{-6\}$.
Проверка: $17\cdot(-6)-13=-115$; $8\cdot(-6)-67=-115$, т.е. $17\cdot(-6)-13=8\cdot(-6)-67$.
б) $R=\{3\}$; в) $R=\{-2\}$; г) $R=\{3\}$. **55.** а) $R=\{-13\}$; б) $R=\{-5\}$; в) $R=\{9\}$; г) $R=\{3\}$; д) $R=\{2\}$. **56.** а) $R=\{5\}$; б) $R=\{-3\}$; в) $R=\{7\}$; г) $R=\{10\}$; д) $R=\{18\}$; ѓ) $R=\{20\}$; е) $R=\left\{\frac{1}{5}\right\}$; ж) $R=\{3\}$; з) $R=\left\{-\frac{1}{6}\right\}$; ѕ) $R=\left\{\frac{1}{4}\right\}$; и) $R=\{12\}$; ј) $R=\left\{\frac{1}{7}\right\}$.

57. а) **Решение.** $8-\left(x^2-9\right)=10-\left(x^2-2x+1\right)\Leftrightarrow 8-x^2+9=10-x^2+2x-1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x=17-9\Leftrightarrow x=4,\ R=\{4\}$. Проверка: $8-(4-3)(4+3)=8-7=1;$ $10-(4-1)^2=10-9=1$, т.е. $8-(4-3)(4+3)=10-(4-1)^2$. б) $R=\{1\}$; в) $R=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$; г) $R=\left\{\frac{4}{5}\right\}$; д) $R=\left\{-\frac{8}{9}\right\}$; ѓ) $R=\{4\}$. **58.** а) $R=\{2\}$; б) $R=\{-4\}$; в) $R=\{24\}$; г) Решение: $2x+x=144+3x\Leftrightarrow 0\cdot x=144$, нема решение; д), ѓ), е), ж), з) и ѕ) нема решение.

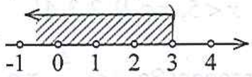
7 **59.** 44. **60.** 85. **61.** 72. **62.** 508. **63.** $\frac{1}{68}$. **64.** 55. **65.** $\frac{15}{4}$. **66.** **Решение.** Нека x биде бараниот број. Тогаш $\frac{4x}{3}=3x-15\Leftrightarrow x=9$. **67.** Упатство: Ако едниот број е x, тогаш другиот е $89-x$, па од $x=(89-x)\cdot 3+5$ следува $x=68$. **68.** 7. **69.** ***Упатство.*** Ако едната цифра на бројот е x, тогаш другата е $9-x$. Следува $10x+(9-x)+9=10(9-x)+x$. Бараниот број е 45. **70.** а) 86; б) 95. **71.** 3. Броевите се 63 и 36. **72.** 3. **73.** 29. **74.** ***Упатство.*** Ако едниот дел е x, другиот е $5x$, т.е. $x+5x=78$. Деловите се 13 и 65. **75.** 52 и 88. **76.** 18. **77.** 51^0 и 39^0. **78.** $108^0, 36^0, 36^0$. **79.** а) 44cm, 45cm, 46cm; б) 43cm, 45cm, 47cm. **80.** 5cm и 9cm. **81.** 26cm и 32cm. **82.** ***Упатство.*** Ако основата е a, висината е $14-a$. $\frac{(a+4)(14-a-4)}{2}=\frac{a(14-a)}{2}-16,\ a=9\,\text{cm}$; висината е $14-a=5\,\text{cm}$. **83.** 8cm и 10cm. **84.** 7cm. **85.** ***Упатство.*** Нека другиот работник може да ја заврши работата за x дена. $\frac{1}{15}+\frac{1}{x}=\frac{1}{10}$, т.е. $x=30$ дена. **86.** 18 дена. **87.** ***Упатство.*** Ако едната дактилографка може да го отчука материјалот за x часа, тогаш другата (поспората) за $1{,}5x$ часа. Одговор: првата за 5 часа, втората за 7,5 часа. **88.** ***Упатство.*** Нека се сретнат по x часа. $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}\right)\cdot x=1$. Одговор: по 7,5 часа. **89.** ***Упатство.*** Илија патувал 8 дена и поминал $8\cdot 15=120\,\text{km}$. Јован поминувал по 24km дневно. **90.** а) 1h 30min; б) 160km; в) Петар патувал 2h, а Кире 2h 40min. **91.** ***Упатство.*** Нека x (во метри) е растојанието од Кочани до Виница. $\frac{x}{60}+1000=\frac{x}{4}$, $(1000=16\,\text{min}\,40\text{s})$, $x=12000\,\text{m}=12\,\text{km}$. **92.** ***Упатство.*** Нека x бидат годините на синот.Сега сите заедно имаат $69+3\cdot 6=87$, $x+4x+(4x+6)=87$, синот има $x=9$ години, мајката $4\cdot 9=36$ години, а таткото 42 години. **93.** 46 год. и 23 год. **94.** 40 год. и 20 год.

8 **95.** а) не; б) да; в) да; г) да. **96.** а) да; б не; в) не; г) да; д) не; ѓ) да; е) да; ж) не. **97.** За $x=0$ и $x=1$. **98.** а) не; б) да; в) да; г) не. **100.** а) прв; б) трет; в) втор; г) четврти; д) трет; ѓ) четврти; е) втор; ж) петти. **101.** а) Четврти степен со 3 непознати; б) седми степен со 2 непознати; в) шести степен со 3 непознати.

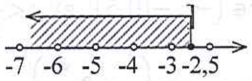
9 **102.** а) $R=\{2,3,4\}$; б) $R=\{1,2\}$; в) $R=\{-6,-5,-4\}$; г) $R=\{-4,-3,-2\}$. **103.** а) $R=\{0,1,3,5\}$; б) $R=\{0,1,3,5\}$. **104.** а) да; б) да; в) не. **105.** не. **106.** а) не; б) ***Упатство.*** $R(x<2)$ е множество реални броеви помали од 2; $R\left(\frac{1}{x}>\frac{1}{2}\right)$ е множество реални броеви помали од 2 освен бројот 0. Одговор: не. в) ***Упатство***. Неравенката $2x+6<0 \Leftrightarrow 2x<-6 \Leftrightarrow x<-3$. Одговор: да. г) не; д) не; ѓ) ***Упатство***. Решението $R(x-5>0)$ е множество реални броеви поголеми од 5. Од $10-2x<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10<2x$ следува $x>5$. Одговор: да. **107.** а) $x\in(-3,+\infty)$; б) $x\in(-\infty,1]$; в) $x\in(-\infty,2)$; г) $[-4,+\infty)$. **108.** а)



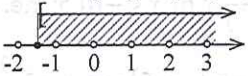
б)



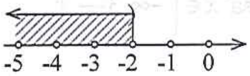
в)



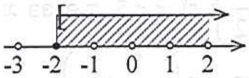
г)



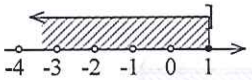
109. а) $x<-2$; $x\in(-\infty,-2)$;



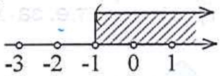
б) $x\geq-2$; $x\in[-2,+\infty)$;



в) $x\leq1$; $x\in(-\infty,1]$;



г) $x>-1$; $x\in(-1,+\infty)$;

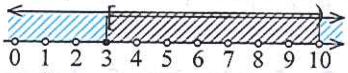


10 **110.** а) **Решение**. $3x+2>2x-7 \Leftrightarrow 3x-2x>-7-2 \Leftrightarrow x>-9$; б) $x<-1\frac{1}{3}$; в) $x\geq-7$; г) ***Упатство***. $2x-3-3(2x-1)>2(2-2x)+x-2 \Leftrightarrow 2x-3-6x+3>4-4x+x-2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0>4+x-2 \Leftrightarrow x<-2$; д) $x>1$; ѓ) $x\leq-7$. **111.** а) $x\geq\frac{1}{2}$, $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$; б) $x\leq1\frac{1}{2}$, $x\in\left(-\infty,1\frac{1}{2}\right]$; в) $x\leq-\frac{3}{20}$, $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$; г) $x<\frac{13}{31}$, $x\in\left(-\infty,\frac{13}{31}\right)$; д) $x\geq-2$, $x\in[-2,+\infty)$; ѓ) $x\geq37$, $x\in[37,+\infty)$. **112.** а) ***Упатство***. Изостави ги членовите $4x^2$ и $-x$. Одговор: $-3x+2<3+2x$; б) $\frac{3-x}{2}<-\frac{x-1}{3}$. **113.** а) $8x+20-3x-21>12$; б) $7x+6x<8x+2-9x+15$; в) $10+5x-15\geq6x+4+30x$; г) $15x+3-12+6x>8+8x-2x-14$; д) $42x-14-35x-35<70-10x$; ѓ) $15+10-5x\leq6x+3$. **114.** а) и б). Неравенките се помножени со -1.

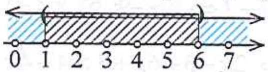
11 **115.** а) **Решение**. $3x-1>x-5 \Leftrightarrow 3x-x>-5+1 \Leftrightarrow 2x>-4 \Leftrightarrow x>-2$, $x\in(-2,+\infty)$; б) $x<-1$, $x\in(-\infty,-1)$; в) $x<-5$, $x\in(-\infty,-5)$; г) $x>1$, $x\in(1,+\infty)$; д) $x\geq6$, $x\in[6,+\infty)$; ѓ) $x\leq-24$, $x\in(-\infty,-24]$. **116.** а) $x>6$, $x\in(6,+\infty)$; б) $x\geq1, x\in[1,+\infty)$. **117.** а) $x>1, x\in(1,+\infty)$; б) $x>-2\frac{2}{3}, x\in\left(-2\frac{2}{3},+\infty\right)$; в) ***Упатство***. Стави $(1-x)(1+x)=1-x^2$ и $(1-x^2)(1+x^2)=1-x^4$. Одговор: $x>\frac{1}{2}, x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$; г) $x<\frac{1}{16}, x\in\left(-\infty,\frac{1}{16}\right)$; д) $x<\frac{4}{5}, x\in\left(-\infty,\frac{4}{5}\right)$. 118. $(-\infty,-3)$. **119.** а), б) и в) нема решение; г) има $x\in[3,+\infty)$. **120.** а) Доказ: $x\leq x+1 \Leftrightarrow x-x\leq1 \Leftrightarrow 0\cdot x\leq1$, а ова е исполнето за секое $x\in\mathbb{R}$. б) $3x+18+3x-12-6<2x+12+4x+18 \Leftrightarrow (3+3-2-4)x<12+18-18+12+6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0\cdot x<30$, а ова е исполнето за секое $x\in\mathbb{R}$.

121. а) $x < \frac{3}{2}$, т.е. $x \in \{1\}$; б) $x < 3\frac{2}{3}$, т.е. $x \in \{1,2,3\}$. **122.** а) $x > -13$, $x \in (-13, +\infty)$;
б) $x > \frac{5}{27}$, $x \in \left(\frac{5}{27}, +\infty\right)$. **123.** $x < -\frac{3}{5}$. Бараниот број е -1. **124.** а) $x < \frac{81}{64}$, $x \in \{1\}$;
б) $x < 5$, $x \in \{1,2,3,4\}$. **125.** а) ***Упатство***. Реши ја неравенката $\frac{2x-1}{5} - \frac{4x+1}{3} > 0$.
Одговор: За $x < -\frac{4}{7}$, т.е. за $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{7}\right)$; б) $x < -10,5$; т.е. за $x \in (-\infty, -10,5)$; в) $x < \frac{1}{2}$,
т.е. за $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; г) $x < 5$, т.е. за $x \in (-\infty, 5)$; д) $x < 3\frac{9}{17}$, т.е. за $x \in \left(-\infty, 3\frac{9}{17}\right)$;
ѓ) $x > -\frac{1}{2}$, т.е. за $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

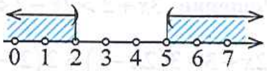
12 **126.** а) $x \in [3,10)$;



б) $x \in (1,6)$;

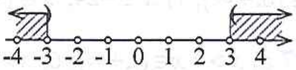


в) $x \in \varnothing$;



127. а) **Решение**. $\begin{cases} 3x > -1 \\ x < 3+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x < 5 \end{cases}$; $x \in \left(-\frac{1}{3}, 5\right)$; б) $x > -3$ и $x > 1$, $x \in (1, +\infty)$;
в) $x < -3$ и $x < 1$, $x \in (-\infty, -3)$; г) $x < 3$ и $x > -1$, $x \in (-1,3)$; д) $x \geq 12$ и $x < 9$, $x \in [12, \infty)$.
128. а) $x \geq 0$ и $x < -\frac{1}{2}$, $x \in \varnothing$; б) $x > 3$ и $x < 9$, $x \in (3,9)$; в) $x > 3$ и $x < 3\frac{2}{3}$, $x \in \left(3, 3\frac{2}{3}\right)$,
г) $x > 9,5$ и $x < 6$, $x \in \varnothing$; д) $x > -4$ и $x \leq -2$, $x \in (-4, -2]$.
129. а) $x \leq 1\frac{1}{2}$ и $x \geq 1$, $x \in \left[1, 1\frac{1}{2}\right]$; б) $x \leq 0$ и $x > -2$, $x \in (-2, 0]$; в) $x < 2$ и $x < 5$, $x \in (-\infty, 2)$;
г) $x > 3,5$ и $x > 0$, $x \in (3,5; \infty)$; д) $x > 1\frac{1}{2}$ и $x < 3$, $x \in \left(1\frac{1}{2}; 3\right)$. **130.** а) $x \in (8,10), x \in \{9\}$;
б) $x \in \left(\frac{3}{4}, 7\right], x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$; 131. $x > -\frac{3}{5}$, $x \in$ Nо; б) $x \in (-9, 4)$, Одговор:
$x \in \{-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

132. а) Доказ: $\begin{cases} 3x-2 > 6x+7 \\ 5x+3 < 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 9 \\ -x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 3 \end{cases}$;

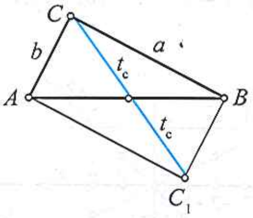


$x \in \varnothing$; б) $x < -\frac{1}{5}, x > 2, x \in \varnothing$; в) $x > -3\frac{1}{3}, x \geq 1, x \in [1, +\infty)$; г) $x > 7$, $x < 4, x \in \varnothing$.
133. ***Упатство***. Изразот $(x+3)(x+8)$ е негативен, ако множителите $x+3$ и $x+8$ имаат различни знаци. Затоа, реши ги следните системи неравенки и одреди ја унијата на нивните решенија:
$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+8 < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3 < 0 \\ x+8 > 0 \end{cases}$; Одговор: $R\left(\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+8 < 0 \end{cases}\right) \cup R\left(\begin{cases} x+3 < 0 \\ x+8 > 0 \end{cases}\right) = \varnothing \cup (-8,-3) = (-8,-3)$;

б) $x \in (5,7)$; в) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$; г) $x \in (-1,2)$; д) $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$;

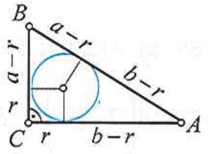
ѓ) ***Упатство.*** $x + x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1+x) > 0$. Реши ги системите $\begin{cases} x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x < 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ и одреди ја унијата на нивните решенија. Одговор: $x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$; е) $x \in (-\infty,-1)$; ж) $x \in \left(-\infty, 1\frac{1}{2}\right) \cup (9,+\infty)$; з) $x \in \left(-\infty, -1\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; ѕ) $x \in (-\infty, 3) \cup (9,+\infty)$.

134. Нека x е цената на книгата. Од $1100 < 9x$ следи $x > 122$. Од $9x < 1200$ следи $x < 134$. Од $13x > 1500$ следи $x > 115$ и од $13x < 1600$ следи $x < 124$. Одговор: $x = 123$, т.е. една книга чини 123 денари. **135.** а) **Доказ.** Одреди точка C_1, така што AC_1BC да биде паралелограм. Во ΔAC_1C страните се $\overline{CC_1} = 2t_c$, $\overline{AC_1} = a$ и $\overline{AC} = b$. Од $2t_c < a+b$ следува $\frac{a+b}{2} > t_c$.



136. ***Упатство.*** $\overline{MA} + \overline{MB} > c$, $\overline{MB} + \overline{MC} > a$, $\overline{MA} + \overline{MC} > b$. Следува $2\left(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\right) > a+b+c$.

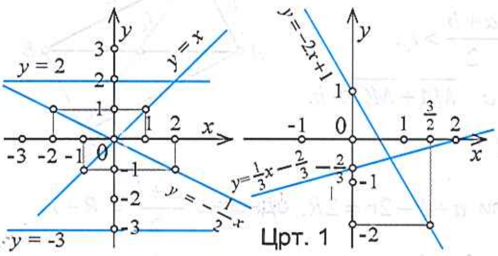
137. Доказ: Од цртежот: $a - r + b - r = c$ или $a + b - 2r = 2R$, односно $\frac{a+b}{2} = R + r$. Од $(a-b)^2 \geq 0$ следува $a^2 + b^2 \geq 2ab$ или $(a+b)^2 - 2ab \geq 2ab$, па $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Бидејќи $ab = 2P$, следува $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{2P}$. **138.** 53, 59, 61, 67.



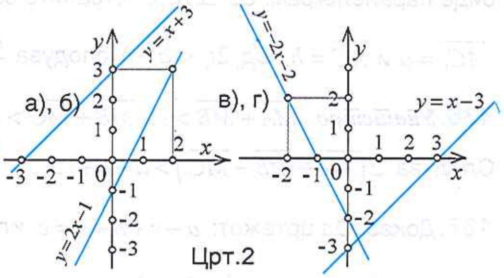
13 **139.** а), д), е), ж). **140.** а) $y = -x + 4$; да; б) $y = -\frac{5}{x}$; не; в) $y = -\frac{3x}{x+2}$; не; г) $y = \frac{2}{3x+3}$; не; д) $y = \frac{4x}{x-3}$; не; ѓ) $y = \frac{x}{5}$; да за $x \neq 0$.; е) $y = \frac{3x-8}{2}$; да; ж) $y = \frac{x+1}{5}$; да; з) $y = \frac{5-x}{3}$; да. **141.** а) $y = 2x - 1$; б) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$; в) $y = 2$; г) $y = -3x$; д) $y = 0{,}3x - 2\frac{1}{2}$; ѓ) $y = 2^3 x - \frac{1}{2}$. **142.** а) $k = 4, n = -3$; б) $k = 0, n = -4$; в) $k = -\frac{3}{4}, n = 0$; г) $k = -2\frac{1}{5}, n = 1$; д) $k = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{2}$; ѓ) $k = \frac{1}{3}, n = -\frac{5}{3}$; е) $k = -3, n = 2$; ж) $k = -3, n = 0$. **143.** $L = 2a + 12$, да. **144.** ***Упатство.*** Нека k е количината хартија во магацинот, а n денови во седмицата, по ред. Одговор: $k = 60 - 10 \cdot n$. **145.** а) ***Упатство.*** За $x = -2$, $y = 2 \cdot (-2) + 3$, т.е. $y = -1$. Одговор: $V = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$; б) $V = \{0, -1, -2, -3\}$; в) $V = \left\{\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -2\right\}$; г) $V = \left\{-2\frac{2}{3}, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

146. а) $x=2$; б) $x=\frac{1}{4}$; в) $x=\frac{3}{4}$; г) $x=0$. **147.** $k=\frac{2}{3}$. **148.** $n=-2$. **149.** $x=-6$.
150. $k=2,\ n=4$.

14 **151.** A, B, C и E. **152.** ***Упатство***. Замени ги координатите на M во формулата и одреди го n. Одговор: $n=9$. **153.** $k=2{,}5$. **154.** $x=2$. **155.** ***Упатство***. Провери дали точките A и B припаѓаат на графикот на функцијата $y=-3x+1$. Одговор: Да.
156. **Решение**. $k(-1)-3=5 \Leftrightarrow -k-3=5 \Leftrightarrow -k=8 \Leftrightarrow k=-8$. **157.** $k=\frac{5}{3}$.
158. $y_1=-2; x=0; y_2=1$. **159.** (црт. 1). **160.** (црт. 2). а) $y=2x-1,\ A(0,-1), B(2,3)$;
б) $y=x+3,\ A(0,3), B(-3,0)$; в) $y=-2x-2,\ A(0,-2), B(-2,2)$;
г) $y=x-3,\ A(0,-3), B(3,0)$.



Црт. 1



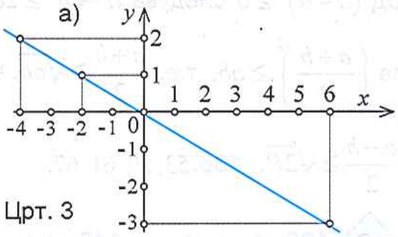
Црт.2

161. а) $A(2,0)$; б) $A(0,4)$. **163.** (црт. 3).

162. $A\left(2\frac{1}{2},0\right)$ и $B(0,-5)$.

x	-4	0	2	6	4	-2
y	2	0	-1	-3	-2	1

б) $y=-\frac{1}{2}x$.



Црт. 3

15 **164.** $y=2x+1,\ y-2x+3=0$. **165.** $2^3x-y-4=0,\ 2x-\frac{y}{4}+\frac{1}{2}=0$.

166. а) $k=-1$; б) $k=-\frac{1}{2}$; в) $k=-\frac{1}{3}$. **167.** а) ***Упатство***. Коефициент пред аргументот е -5. Слободниот член е еднаков на ординатата на точката, т.е. $n=\frac{1}{2}$. Одговор: $y=-5x+\frac{1}{2}$; б) $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$; в) $y=x-1$; г) $y=-\frac{1}{3}x+1$. **168.** а) ***Упатство***. Коефициент е $\frac{2}{3}$. Во равенката $y=\frac{2}{3}x+n$ замени ги координатите на точката A, соодветно.

Одговор: $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$; б) $y=\frac{2}{3}x-6$; в) $y=\frac{2}{3}x$; г) $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$. **169.** ***Упатство***. а) Нека бараната функција е $y=kx+n$. Точката A припаѓа на графикот, т.е. $3=k\cdot 0+n$, па $n=3$. Точката B припаѓа на графикот, т.е. $0=k\cdot 1+3$, па $k=-3$. Одговор: $y=-3x+3$;

б) $y=\frac{1}{2}x$; в) $y=x+2$; г) $y=-2x+3$.

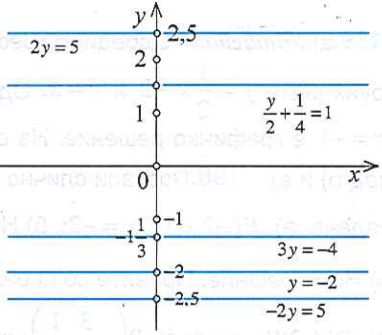
170. а) ***Упатство***. Реши ја равенката $3m-5=m+3$. Одговор: $m=4$; б) $m=-\frac{1}{2}$.

171. а) $m=0$; б) $m=4$.

172. а) $a=-2$; б) $a=4$.

173. а) $y=-x-1$; б) $y=-x+1$.

174.



16 **175.** Растечки се функциите под а), в), г), д) и ѓ); опаднувачка е функцијата под б); а константни се функциите под е) и ж). **176.** а) $y=-3x-1$ е опаднувачка; б) $y=-1$ е константна. **177.** а) $y=3x-1$ е растечка; б) $y=-1$ е константна; в) $y=-3x-1$ е опаднувачка. **178.** а) ***Упатство***. Во равенката $y=x+n$ замени ги коориднатите на точката $P(3,-2)$ и одреди го n. Одговор: $n=-5$, т.е. $y=x-5$; б) $n=2, y=-2x+2$; в) $k=-1\frac{2}{3}$, $y=-1\frac{2}{3}x-1$; г) $k=-2$, $y=-2x+2$.

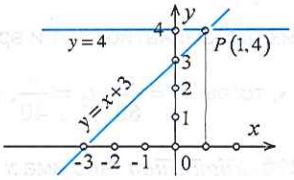
179. За $k=2$ и $k=3\frac{1}{2}$. **180.** а) растечка; б) опаднувачка. **181.** ***Упатство***. Реши ја неравенката $3a-4>0$. Одговор: $a>1\frac{1}{3}$. **182.** а) $a<-6$; б) $a=-6$. **183.** **Решение.** Слободниот член на функцијата претставува ордината на пресекот на функцијата со y-оска, т.е. $n=-1$. Во функцијата $y=kx-1$ замени ги координатите на точката $A(2,-2)$, $-2=k\cdot 2-1$, од каде $k=-\frac{1}{2}<0$, функцијата е опаднувачка.

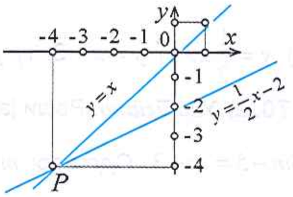
184. $k=1>0$, растечка. **185.** а) $k=-\frac{1}{2}<0$, опаднувачка; б) $k=\frac{1}{2}>0$, растечка.

186. $n=3$, $k=-\frac{3}{2}$, $y=-\frac{3}{2}x+3$, опаднувачка.

17 **187.** ***Упатство***. а) Нацртај график на $y=x-3$. Нула на оваа функција е $x=3$, а тоа е апсцисата на пресекот со x-оската; б) Нацртај график на функцијата $y=2x+4$; $x=-2$; в) $y=x+\frac{3}{2}$, $x=-\frac{3}{2}$; г) $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$, $x=2$; д) $y=x$, $x=0$; ѓ) $y=\frac{1}{2}x-1$, $x=2$.

188. а) **Решение.** Нацртај ги графиците на функциите $y=x+3$ и $y=4$. Нивниот пресек е во точката P. Апсцисата на точката P, т.е. $x=1$ е бараното решение. На сличен начин постапи во задачите под б), в) и г).





189. а) ***Упатство.*** Одреди го пресекот на графиците на функциите $y=\frac{1}{2}x-2$ и $y=x$. Одговор: $P(-4,-4)$, т.е. $x=-4$ е графичко решение. На сличен начин постапи под б) и в). **190.** Постапи слично како во претходната задача. а) $P(-2,-3)$, $x=-2$; б) Нема решение. Правите се паралелни, $k_1=k_2=1$; в) Нема решние. Правите се паралелни, $k_1=k_2=-2$; г) $P(3,6)$, $x=3$; д) $P(4,28)$, $x=4$; ѓ) $P\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, $x=-\frac{3}{2}$. **191.** а) $\frac{4}{3}x-2=0$; б) $x=1$; в) $\frac{2}{3}x+2=3$; г) $\frac{1}{2}x+1=-\frac{2}{3}x+2$; д) $\frac{-4}{3}x+2=\frac{3}{10}x-\frac{3}{2}$; ѓ) $\frac{2}{3}x+2=-2x+2$; е) $x+1=0$; ж) $-x+2=0$; з) $-x-1=2$;

18 **192.** а) $x\in\left\{\frac{1}{3}\right\}$; б) $x\in\{6\}$; в) $x\in\left\{10\frac{1}{2}\right\}$. **193.** $a=2$; $x\in\left\{-\frac{1}{5}\right\}$. **194.** $a=-4$; $x\in\{-2\}$. **195.** $x\in\{3\}$. **196.** $x\in\{2\}$. **197.** 48. **198.** 35. **199.** 36. **200.** 5cm. **201.** 35 и 37. **202.** 2h 24min. **203.** а) ***Упатство.*** Реши го системот $\begin{cases}\frac{x+3}{3}-1<2x+5\\ 2x+5<1-x.\end{cases}$ Одговор: $x\in\{-2\}$; б) $x\in\{-1\}$. **204.** ***Упатство.*** $8\,\mathrm{m/s}=28{,}8\,\mathrm{km/h}$. Ако x е времето до средбата, тогаш $28{,}8\cdot(x+1{,}5)+36\cdot x=324$; $x=4\mathrm{h}\,20\,\mathrm{min}$. Се сретнале на 168 km од местото A. **205.** ***Упатство.*** За 1 ден првиот работник ќе сработи $\frac{1}{15}$ од работата, вториот $\frac{1}{20}$, третиот $\frac{1}{24}$, а четвртиот $\frac{1}{30}$. Нека работата е завршена за x дена. $\frac{1}{15}(x-1)+\frac{1}{20}(x-1)+\frac{1}{24}(x-3)+\frac{1}{30}(x-3)=1$. Одговор: $x=7$ дена. **206.** а), в). **207.** а) $x\in\left\{2\frac{2}{5}\right\}$; б) $x\in\{3\}$; в) $x\in\{-2\}$; г) $x\in\{1\}$; д) $x\in\{18\}$. **208.** $x\in\left\{1\frac{1}{2}\right\}$. **209.** ***Упатство.*** Ако едниот број е x, другиот е $30-x$. Од $x:(30-x)=3:7$ следува $x\in\{9\}$. **210.** 42 и 12. **211.** 59 и 13. **212.** 350 km. **213.** ***Упатство.*** Средна брзина е количник од изминатиот пат и времето за кое стигнал од A до B. Ако растојанието од A до B е s, тогаш $t_1=\frac{s}{60}$, $t_2=\frac{s}{40}$, $V_{\text{ср}}=\frac{s+s}{t_1+t_2}$. Одговор: $V_{\text{ср}}=48\,\mathrm{km/h}$. **214.** 3 часа.

215. ***Упатство.*** Ако има x монети по 2 денари, тогаш има $20-x$ монети по 5 денари. Одговор: 6 монети по 2 денари и 14 монети по 5 денари.

216. 4,8 рубли. **217.** 36 ученици. **218.** Магарињата по 63 шилинзи, мазгите по 68 шилинзи, а коњите по 71 шилинг. **219.** 15. **220.** 70 јуани. **221.** $x=2$. **222.** $n=5$.

223. $y=x+1$, растечка. **224.** а) $y=-2x-1$; б) $y=-2x+1$; в) $y=2x+1$.

225. **Решение**. Од $a^2-2ab+b^2>0$ следува $a^2+b^2>2ab$.

226. ***Упатство***: Од $a+b>c$ следува $a+b+c>2c$ или $\frac{a+b+c}{2}>c$.

227. а) $a\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ б) $a\in\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right)$; в) $a\in(1,2)$. **228.** ***Упатство***. а) Реши го системот $\begin{cases}3a+2>0\\2a-6>0\end{cases}$ и $\begin{cases}3a+2<0\\2a-6<0\end{cases}$; Под б) и в) постапи слично.

ТЕМА 3

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1 **1.** а) $4x+2y=3$; б) $2,5x+0,3y=1,1$; в) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=0$; г) $-x+y=2$; д) $3y=\frac{3}{4}$; ѓ) $\frac{2}{5}x=\frac{3}{2}$. **2.** а) $a=\frac{1}{3}$, $b=2$; $c=3$; б) $a=3$, $b=-2$; $c=1$; в) $a=-1$, $b=1$; $c=1$; г) $a=2$, $b=-1$; $c=11$; д) $a=3$, $b=0$; $c=2$; ѓ) $a=0$, $b=-2$; $c=4$. **3.** а) $3\cdot3-2\cdot2=5$, $5=5$, да; б) не; в) да; г) не. **4.** а) $\left(-1,\frac{1}{2}\right);(0,1);\left(1,1\frac{1}{2}\right)$. **5.** $(2,-2);(4,4)$. **6.** а) да; б) да. **7.** а) $x=-4$; б) $y=\frac{1}{6}$; в) $x=-1$; г) $y=4$. **8.** $m=1$. **9.** а) $p=2$; б) $p=1$. **10.** а) $(1,2),(0,5)$; б) $(0,3),(-2,6)$; в) $\left(-\frac{1}{2},1\right);\left(0,1\frac{1}{3}\right)$. **11.** а) $(0,8),(3,8),(-2,8)$; б) $(3,2),(3,-5),(3,0)$.

12. а) $\{(1,4),(2,3)(3,2),(4,1)\}$; б) $\{(0,5),(1,4)(2,3),(4,1)(5,0)\}$. **13.** а) $2x+5y=41$, $(x,y)\in\{(3,7),(8,5),(13,3),(18,1)\}$; б) $2x+5y=19$; $(x,y)\in\{(2,3),(7,1)\}$; в) $2x+5y=13$, $(x,y)\in\{(4,1)\}$. **14.** а) $x+y=27$; б) $x-y=8$; в) $x+2y=15$.

15. а) $x+y=7$, $(x,y)\in\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. **16.** $x+2y=12$, $\{(2,5),(4,4)\}$.

17. $60\cdot x+80\cdot y=440$; $(x,y)\in\{(2,4)(6,1)\}$. **18.** $11\cdot x+13\cdot y=300$, $\{(6,18),(19,7)\}$.

2 **19.** Решенија на $x+2y=4$ се: $\left\{(-2,3),\left(-1,2\frac{1}{2}\right),(0,2),\left(1,1\frac{1}{2}\right),(2,1)\right\}$. Истите се за $\frac{1}{2}x+y=2$. **20.** а) $(1,2)$; б) $(-3,8)$; в) $\left(0,\frac{7}{2}\right)$; г) $(1,2)$; д) $(3,-1)$; ѓ) $\left(\frac{7}{3},0\right)$.

21. а) $x+y=1$; б) $9x-2y=1$; в) $4x+y=-6$; г) $13x-4y=-12$.

22. а) $4x-3y=9$; б) $-5x+6y=10$; в) $-9x+2y=6$; г) $12x+2y=5$.

23. а) $a=10$, $b=8$, $c=1$; б) $a=-3,5$; $b=9$, $c=0,6$; в) $a=-1$, $b=-1$, $c=3$;

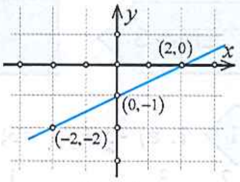
г) $a=4,\ b=-4,\ c=-3$. **24.** Да, тие се еквивалентни. **25.** Едната или двете равенки со помош на теоремите за еквивалентна трансформација се трансформираат во еднакви равенки. Така на пример: в) равенката $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=3 \Rightarrow 3x-4y=18$. **26.** а) $y=-\frac{2x}{3}+2$; б) $y=\frac{3}{2}x-3$; в) $y=-3x+2$; г) $y=\frac{1}{5}x-1\frac{1}{5}$. **27.** а) $x=y+2$; б) $x=\frac{3}{5}y+2$; в) $x=3\frac{1}{3}y+2\frac{2}{3}$; г) $x=\frac{1}{2}y-2$. **28.** а) $3-n=3-n$; б) $n+3-n=3$; в) $n+3-n-3=0$; г) $2n+6-2n=6$. **29.** $2n+3\cdot\frac{5-2n}{3}=5 \Leftrightarrow 2n+5-2n=5$. **30.** $k=-1$.

31. а) $a=3$; $b=-\frac{1}{2}$; б) $a=\frac{9}{5}$, $b=6$; в) $a=-3$, $b=+2$.

32. а) $n=2$; б) $n=0$; в) $n=-11$; г) $n=-13$.

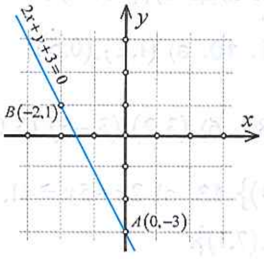
33. а) Да. б) Не. в) Не. г) Да. **34.** а) $k=-7$; б) $k=3$.

35. а) $k=+1$; б) $k=5$. **36.** а) $\{(k,-2k-3)\}$; (црт. 2) б) $\left\{\left(k,-\frac{3k}{2}+3\right)\right\}$; (црт. 3) в) $\{(k,2)\}$; (црт. 4) г) $\{(-2,k)\}$. (црт. 4)

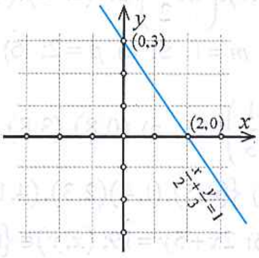


црт. 1

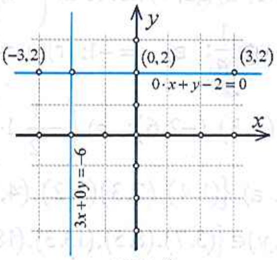
37. а) $\left\{\left(k,\frac{k-2}{2}\right)\right\}$; б) црт. 1; в) $k=-1$; $k=4$. **38.** За правата $m: y=x+2$; за $n: y=x$.



црт. 2



црт. 3



црт. 4

3 **39.** $\begin{cases}x+2y-2y=1\\2x-2x-y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\-y=-1|(-1)\end{cases}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$. **40.** Решение на $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ е $(-1,2)$, на $\begin{cases}2x+y=y+2\\x+3y=x+6\end{cases}$, е $(1,2)$, т.е. $(-1,2)\neq(1,2)$. **41.** а) $\begin{cases}2+3=5\\4-3=1\end{cases}$; **42.** а) $\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=3\\y=-5\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$. **43.** а),б)не;в), г)да. **44.** а) $(0,3)$; б) $(-1,4)$; в) $(2,5)$.

45. Не е решение на ниту еден систем. **46.** Трансформирај ги во форма $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ и ќе видиш дека се еквивалентни. **47.** Исто како задача **46.**

48. а) $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=1\\y=-\frac{2}{3}\end{cases}$; г) $\begin{cases}x=-5\\y=4\end{cases}$. **49.** Низ B.

50. а) црт. 5

x	0	1
y	−3	−1

б) црт. 6

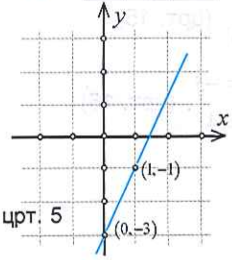
x	2	3
y	3	2

в) црт. 7

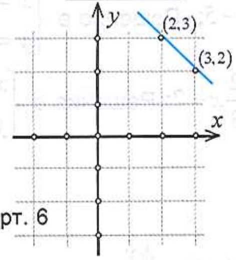
x	0	2
y	−1	0

г) (црт. 8)

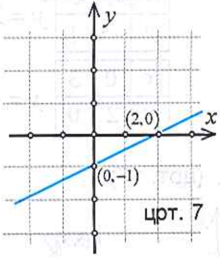
x	0	1
y	2	−1



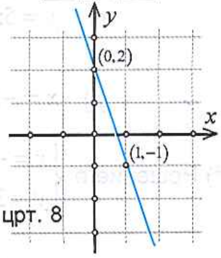
црт. 5



црт. 6



црт. 7



црт. 8

51. а)

x	0	3
y	−2	4

$y=2x-2$; лежат точките M и P. (црт. 9)

52. а) $3=\frac{3}{2}\cdot 2,\ 3=3,$ и $3=-2+5,\ 3=3$; б) $2\cdot 2+3=7,\ 7=7$ и $3=2\cdot 2-1,\ 3=3$; в) $2-3=-1,\ -1=-1$ и $6-5\cdot 3=-9,\ -9=-9$.

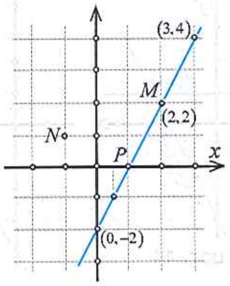
53. $y=-2x+5$

x	0	1
y	5	3

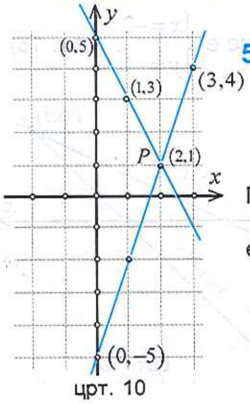
$y=3x-5$

x	0	3
y	−5	4

Пресечната точка е $P(2,1)$. Тврдењето е точно. (црт. 10)



црт. 9



црт. 10

54. а) $y=x-2$

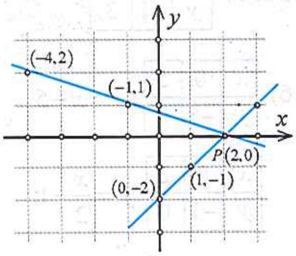
x	0	1
y	−2	−1

$y=-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$

x	−4	−1
y	2	1

Пресечната точка на двата графика е точката $P(2,0)$ што значи $x=2$; $y=0$ е решение на системот. (црт. 11)

б) $P(3, 1)$.



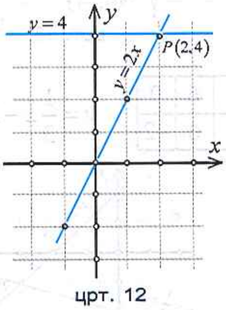
црт. 11

55. а) $y=2x$

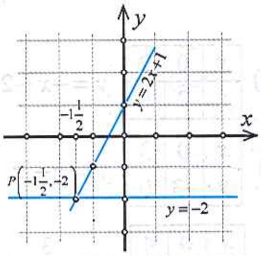
x	0	1	-1
y	0	2	-2

$y=4$

(црт. 12) Решение: $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$.



црт. 12



црт. 13

б) $y=2x+1$

x	0	1
y	1	3

$y=-2$

Решение. (црт. 13) $\begin{cases}x=-1\frac{1}{2}.\\y=-2\end{cases}$

в)

x	0	2
y	-3	1

$y=2x-3;$ $y=1;$ Решение е $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$. (црт. 14)

г) $y=5;$

x	0	3
y	-5	1

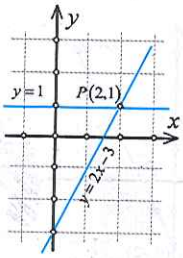
$y=2x-5;$ Решение е $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$. (црт. 15)

д) $x=-3;$

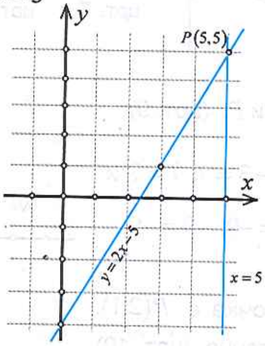
x	0	3
y	2	0

$y=-\frac{2}{3}x+2;$ Решение е $\begin{cases}x=-3\\y=4\end{cases}$. (црт. 16)

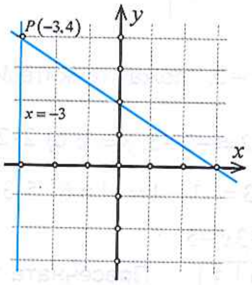
ѓ) Решение е $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$. (црт. 17)



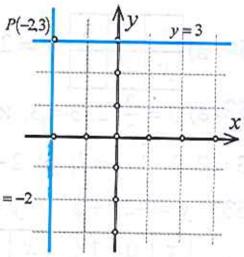
црт. 14



црт. 15



црт. 16



црт. 17

56. а)

x	-2	6
y	-1	3

$y=\frac{1}{2}x;$

x	0	1
y	-3	-4

$y=-x-3;$ Решение е $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$. (црт. 18)

б)

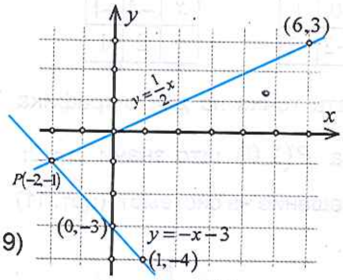
x	0	5
y	-5	0

$y=x-5$

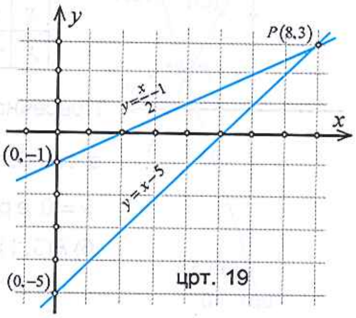
x	0	2
y	-1	0

$y=\frac{x}{2}-1;$

Решение е $\begin{cases}x=8\\y=3\end{cases}$. (црт. 19)



црт. 18



црт. 19

в)

x	0	2
y	2	0

$y=-x+2;$

x	6	0
y	0	-2

$y=\frac{1}{3}x-2;$ Решение е $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$. (црт. 20)

г)

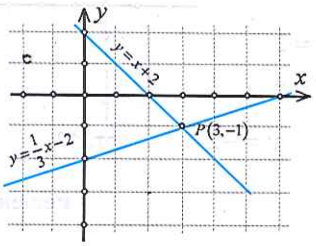
x	0	3
y	-3	0

$y=x-3;$

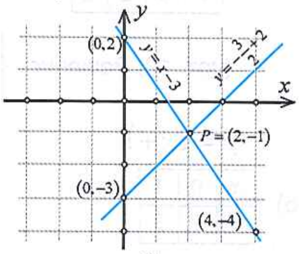
x	0	4
y	2	-4

$y=-\frac{3}{2}x+2;$

Решение е $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$. (црт. 21)



црт. 20



црт. 21

57. а) $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}x \\ y=-\dfrac{x}{2}-2 \end{cases}$;

x	0	-2
y	0	3

x	0	-4
y	-2	0

Решение: $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$; (црт. 22)

б) $\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{x}{2}+1 \end{cases}$;

x	0	-2
y	$^{-3}/_{2}$	-3

x	0	-2
y	1	2

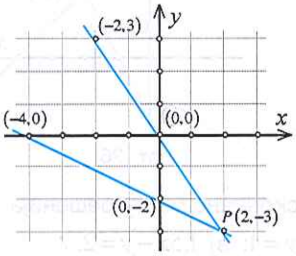
Решение: $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$; (црт. 23)

в) $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}x+3 \\ y=-2x+4 \end{cases}$;

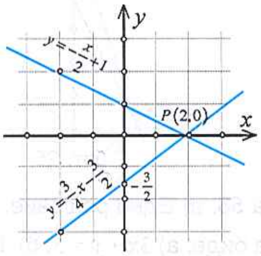
x	0	2
y	3	0

x	0	2
y	4	0

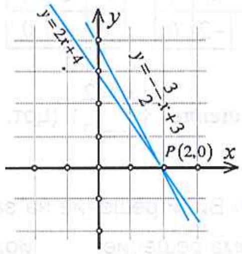
Решение: $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$; (црт. 24)



црт. 22



црт. 23



црт. 24

58. а) $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=3x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$;

x	0	2
y	-2	4

x	0	-1,5
y	2,5	-2

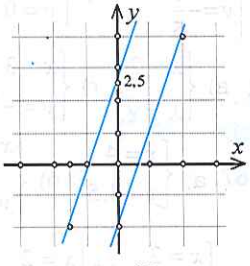
Правите се паралелни. Системот нема решение. (црт. 25)

б) $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=-x+2 \end{cases}$;

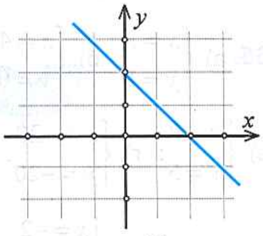
x	0	2
y	2	0

x	0	2
y	2	0

Правите се совпаѓаат. Системот има многу решенија. (црт. 26)



црт. 25



црт. 26

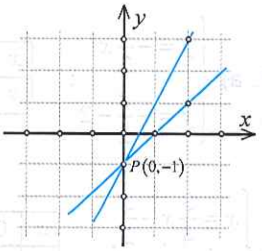
в) $\begin{cases} y=x-5 \\ y=x-5 \end{cases}$; Исто како под б); г) $\begin{cases} y=-2x+2 \\ y=-2x+1 \end{cases}$; Исто како под а).

59. а) $\begin{cases}2x-y=1\\x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\y=x-1\end{cases}$;

x	0	2
y	−1	3

x	0	2
y	−1	1

Решение. $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$; (црт. 24)



црт. 24

б) $\begin{cases}2x-y=3\\3x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-3\\y=3x-1\end{cases}$;

x	0	3
y	−3	3

x	0	1
y	−1	2

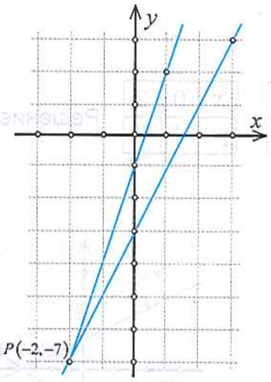
Решение. $\begin{cases}x=-2\\y=-7\end{cases}$; (црт. 25)

в) $\begin{cases}2x-y=2\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-2\\y=-x+4\end{cases}$;

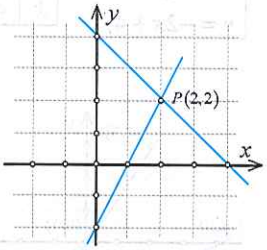
x	0	1
y	−2	0

x	0	4
y	4	0

Решение. $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$; (црт. 26)



црт. 25



црт. 26

60. Види решение на задача **58**. а) Едно решение. б) Бесконечно многу решенија. в) Нема решение. **61.** Може да биде; а) $3x+y=5$; б) $1,5x-y=1$; в) $1,5x-y=2$.

5 **62.** а) $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$; г) $\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$. **63.** а) $\begin{cases}y=x+2\\3x+(x+2)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\x=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}y=1\\x=3\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$; г) $\begin{cases}x=3\\y=-\frac{1}{5}\end{cases}$. **64.** а) $\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=3\\y=-7\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$; г) $\begin{cases}x=1\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

65. а) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$; г) $\begin{cases}x=3\\y=-7\end{cases}$. **66.** а) $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$; г) $\begin{cases}x=-20\\y=-20\end{cases}$. **67.** а) $\begin{cases}x=4\\y=1,5\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=0\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$. **68.** Решенијата и во двата случаи се исти т.е. а) $\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$; б) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$; в) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$. **69.** Со замена на решението се добива:

а) $\begin{cases}2m+3=n\\4+3m=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}m=1\\n=-9\end{cases}$; в) $\begin{cases}m=1\frac{3}{5}\\n=\frac{3}{5}\end{cases}$. **70.** а) $\begin{cases}p=\frac{18}{5}\\q=-\frac{1}{5}\end{cases}$; б) $\begin{cases}p=0,6\\q=-1,8\end{cases}$; в) $\begin{cases}p=6\\q=-5.\end{cases}$

6 **71.** а) $(36,19)$; б) $(2,-3)$; в) $(1,3)$; г) $(10,13)$. **72.** а) $(10,9)$; б) $\left(4\frac{2}{7},-7\right)$; в) $\left(\frac{29}{9},\frac{122}{27}\right)$; г) $\left(-\frac{11}{8},-\frac{37}{12}\right)$. **73.** а) $(8,9)$; б) $(-1,2)$; в) $(-1,-3)$ г) $\left(-2,-6\frac{1}{2}\right)$. **74.** а) $(-3,8)$; б) $(0,-1)$; в) $\left(\frac{58}{5},-\frac{7}{5}\right)$; г) $(5, 5)$; д) $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. **75.** а) $(1,2)$; б) $(4,13)$; в) $(1,1)$; г) $(3,1)$.

76. $m=-2,\ n=\frac{7}{3}$. **77.** $p=1{,}5,\ q=12$. **78.** а) $b=-2,\ c=0$; б) $b=-6,\ c=-18$.

79. а) $a=5,\ b=5$; б) $a=-2,\ b=1$. **80.** а) $(3,2)$; б) $(-1,-2)$; в) $(-2,-10)$; г) $(7{,}8;7{,}4)$; д) $\left(-4,-\frac{16}{3}\right)$; ѓ) $\left(\frac{1}{7},\frac{178}{21}\right)$; е) $(15,10)$.

7 **81.** (22 и 15). **82.** $(60,-60)$. **83.** $(58,21)$. **84.** $(22,8)$. **85.** $(40,8)$. **86.** $(304,43)$. **87.** $(13,33)$. **88.** $(47,22)$. **89.** $(18,5)$. **90.** $(45{,}5;10{,}2)$. **91.** 27 год., 20 год. **92.** 43 години, 13 години. **93.** 20ℓ и 25ℓ. **94.** $(11,45)$. **95.** $(9,4)$. **96.** $(7,18)$. **97.** 27.

98. Ако $x>y$; $\overline{xy}=96$. **99.** За 40 h, 60 h $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}\text{ и }1-\frac{10}{24}=\frac{35}{y}\right)$.

100. 15ℓ, 25ℓ. **101.** 56% и 69,5%. **102.** 32 kg и 128 kg. **103.** 70ℓ и 95ℓ.

104. 37,5 kg; 62,5 kg. **105.** $4{,}8\ell$ и $19{,}2\ell$. **106.** 10ℓ и 10ℓ. **107.** 24 m/min; 3 m/min.

108. 12 m/s и 15 m/s. **109.** $\begin{cases}2{,}5\cdot x=3\cdot y\\1{,}5x-1{,}5y=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=96\text{ km/h}\\y=80\text{ km/h}\end{cases}$.

110. $\begin{cases}60x+5y=140\\x+y=3{,}8\end{cases}$. $\begin{matrix}s_1=132\text{ km}\\s_2=8\text{ km}.\end{matrix}$ **111.** $\begin{cases}(x-1)\cdot(y+2)=x\cdot y\\(x+2)(y-2{,}5)=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=V=6\text{ km/h}\\y=t=10\text{ h}\end{cases}$.

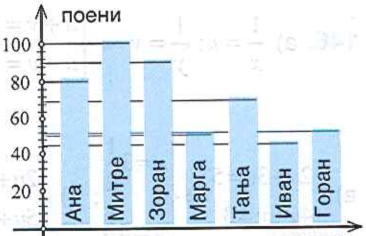
112. $\begin{cases}\dfrac{660}{x+y}=1\\[2mm]\dfrac{660}{x-y}=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=360\text{ m/min}\\y=300\text{ m/min}\end{cases}$. **113.** $V=60\text{ km/h},\ S=360\text{ km}$. **114.** $45^0 40'$ и $91^0 20'$.

115. $a=16\text{ cm},\ b=10\text{ cm},\ P=48\text{ cm}^2$. **116.** $x=c=96\text{ cm},\ h=y=72\text{ cm}$.

117. $a=15\text{ m},\ b=10\text{ m}.\ P=150\text{ m}2$. **118.** $a=10\text{ cm},\ h=8\text{ cm}$.

119. $d_1=15{,}5\text{ cm},\ d_2=12{,}5\text{ cm}$. **120.** а) 22 cm и 18 cm; б) 12 cm и 28 cm;

8 **121.** а) 16; б) 10; в) 15,5; 15. г) Петров, Кичевски и Марковски. **122.** а) 70. б) Тања. в) Нема, 70; г) Види црт. 27. **123.** а) 5 ученици; б) 6 ученици; в) 10 ученици; г) 7 ученици. **124.** а) 14,3°C; б) 15; 15; 8. **125.** 86 поени. **126.** а) 3,34; б) 7; 6. **127.** а) 4,00; б) 4; 3; в) 4. **128.** а) 24,5 год; б) 25; 27 и 11.



црт. 27

129. а) 67,43 ден; б) 49,84% поголема; 15,71% помала; в) 65; 70; 35. **130.** а) Скопје 29°C; Битола 27,2°C; Штип 28,2°C; б) 7; в) 28,5; г) 27, 29 и 30.

9 **131.** $m=-5$. **132.** $p=-6,\ t=-2$. **133.** а) $5x-7y=0$; б) $-14x+y=18$; в) $3x+2y=-1$. **134.** 1 пенкало и 6 гуми или 3 пенкала и 3 гуми. **135.** $x=y=1$.

136. а) $(2,2)$; б) нема; в) има многу. Некои од нив се $(10,3),(21,8),(32,13)...$; г) $(5,1)$.

137. $k=4$, $L=3+4+5=12$ единици. $P=6$ кв. единици. **138.** а) $(4;7,2)$; б) $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

139. а) $(-10,-11)$; б) $\left(-\frac{8}{9},-\frac{17}{3}\right)$; в) системот има многу решенија; г) $(2,0)$.

140. а) $(4,10)$; б) $(-26,26)$. **141.** $m=0$; $n=3\frac{1}{3}$.

142. а) $x+y-2=0$; $y=-x+2$;

x	0	2
y	2	0

и $2x+y-3=0$; $y=-2x+3$;

x	0	$1\frac{1}{2}$
y	3	1

Решение е $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$. (црт. 28)

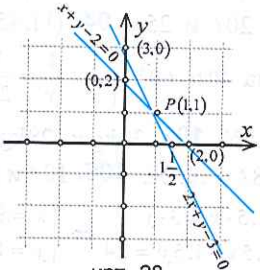
б) $x-y-1=0$; $y=x-1$

x	0	1
y	-1	0

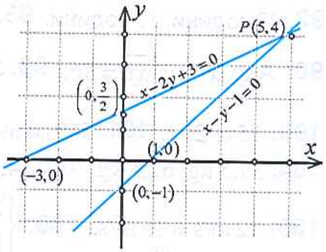
$x-2y+3=0$; $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$.

x	0	-3
y	$\frac{3}{2}$	0

(црт. 29)



црт. 28



црт. 29

143. $\begin{cases}3x-y=4\\x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$. **144.** $\begin{cases}y=-\frac{2x}{k}+\frac{6}{k};\\y==-3x+2\end{cases}$

а) Системот има едно решение (графиците се сечат) ако $-\frac{2}{k}\neq-3$, односно $k\neq\frac{2}{3}$;

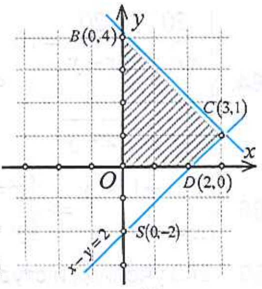
б) Системот нема решение (графиците се паралелни) за $k=\frac{2}{3}$.. **145.** а) за $k\neq4$ системот има едно решение. б) За $k=4$ системот има бесконечно многу решенија, правите се совпаѓаат.

146. а) $\frac{1}{x}=u;\ \frac{1}{y}=v\Rightarrow\begin{cases}u+v=15\\u-v=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=14\\v=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x=\frac{1}{14};\\y=1\end{cases}$ б) $\begin{cases}4k-3v=10\\4k+2v=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{14}{41}\\y=\frac{7}{4}\end{cases}$;

в) $\begin{cases}2u+3v=5\\4u+v=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\frac{1}{2}\\y=4\frac{5}{7}\end{cases}$; г) $\begin{cases}2u+7v=11\\5u+3v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=-\frac{1}{2}\\u=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2x+y-3}=\frac{1}{2}\\\frac{1}{2x-3y-3}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

147. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$; Решение е: а) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. (црт. 30)

$P_{ODCB} = P_{\Delta SCB} - P_{\Delta SDO} = \frac{6 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 9 - 2 = 7.$



црт. 30

148. $P_{\Delta} = \frac{x \cdot y}{2}; 10 = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow x = 5.$ Низ точката $A(5,0)$ и $M(3,4)$ минува една права, а другата права p минува низ координатниот почеток и точката M. Второ решение. Низ точките $C(-5,0)$ и $M(3,4)$ минува една права, а втората права е p.

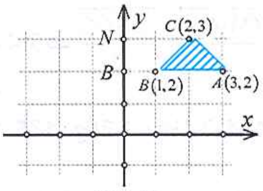
149. Се решаваат три системи, и тоа:

$\mathrm{I} \begin{cases} y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}; A(3,2);\ \mathrm{II} \begin{cases} y = 2 \\ y - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}; B(1,2);\ \mathrm{III} \begin{cases} x + y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; C(2,3).$

Точките A, B и C се темиња на ΔABC (црт. 31)

$P_{\Delta ABC} = P_{MACN} - P_{MBCN} = \frac{3+2}{2} \cdot 1 - \frac{1+2}{2} \cdot 1 = P\Delta_{ABC} = 2{,}5 - 1{,}5 = 1.$

$L_{\Delta ABC} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} \approx 2 + 1{,}4 + 1{,}4 = 4{,}8.$



црт. 31

150. $x = a = 10{,}5\,\mathrm{cm},\ y = b = 1{,}5\,\mathrm{cm}.$ **151.** 9 cm и 6 cm.

152. $r_1 = 36\,\mathrm{cm},\ r_2 = 20\,\mathrm{cm}.$

153. Од $P_o = 2R\pi \Leftrightarrow R = 4\,\mathrm{cm};\ h = 8\,\mathrm{cm};\ \begin{cases} a + b = 20 \\ a - b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16\,\mathrm{cm} \\ b = 4\,\mathrm{cm} \end{cases}$. **154.** 70 мин; 28 мин.

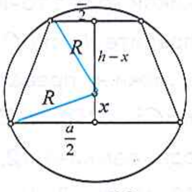
155. $\begin{cases} \frac{18}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{21}{x} + \frac{12}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18k + 16v = 1 \\ 21k + 12v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30\ \text{дена} \\ y = 40\ \text{дена} \end{cases}$. **156.** 105 km; 15 km.

157. $\begin{cases} x - 2 = y \\ x = (y - 2) \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8\ \text{крави} \\ y = 6\ \text{волови} \end{cases}$. **158.** $\begin{cases} 24x + 10y = 630 \\ 60x + 46y = 3 \cdot 630 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20\,\mathrm{m/s} \\ y = 15\,\mathrm{m/s} \end{cases}$.

159. $\begin{cases} \frac{900}{x - y} = 18 \\ \frac{900}{x + y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 250\,\mathrm{m/min} \\ y = 200\,\mathrm{m/min} \end{cases}$. **160.** $\begin{cases} x + y = 250 \\ 13x + 8y = 2500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100\,\mathrm{kg} \\ y = 150\,\mathrm{kg} \end{cases}$.

161. $\begin{cases} (x-2)(y+2) = xy \\ (x+4)(y-2) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8\ \text{кам} \\ y = 6\,\mathrm{h} \end{cases}$. **162.** $60\,\ell$ и 36ℓ.

163. $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2;\ R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (4 - x)^2;\ x = 5\,\mathrm{cm};\ R = 13\,\mathrm{cm}.$ (црт. 32)



црт. 32

164. $\begin{cases} \dfrac{20}{x+y}+\dfrac{20}{x-y}=10 \\ \dfrac{2}{x-y}=\dfrac{3}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u+3v=1 \\ 2v=3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\dfrac{1}{6}\,\text{km/h} \\ y=\dfrac{5}{6}\,\text{km/h} \end{cases}$. **165.** 10 g злато; 8 g бакар.

166. $\begin{cases} 2(x-1)=y \\ x=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ сестри} \\ y=4 \text{ браќа} \end{cases}$. **167.** $d_2=24\,\text{cm}$; $d_1=13$. **168.** $a=8\,\text{cm}$, $h=4\,\text{cm}$.

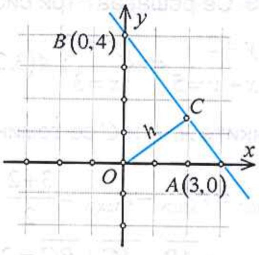
169. 1200 ученици и студенти; 3200 други. **170.** Мајката 45 години, ќерката 13 години.

171. Девијчињата по 7, а момчињата по 8 дрвца. **172.** $a=3$, $b=-5$.

173. $y=-\dfrac{4}{3}x+4$; Растојанието $\overline{OC}=?$ (црт. 33)

x	0	3
y	4	0

$\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{OC}}{2}\Rightarrow 3\cdot 4=5\cdot\overline{OC}$; $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}$; $\overline{AB}=5$. $\overline{OC}=2,4$.



црт. 33

174. 2,4kg и 1,2kg. **175.** $\begin{cases} (x+6)(y-7)=xy \\ (x-2)(y+7)=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \text{ работника} \\ y=14 \text{ дена} \end{cases}$.

176. $R:r=7:5$; $(R+r):(7+5)=R:7 \Rightarrow R=14\,\text{cm}$, $r=10\,\text{cm}$.

ТЕМА 4

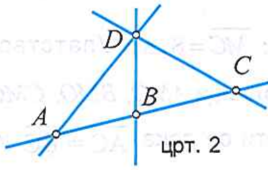
ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

1

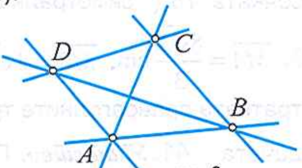
3. Ако A и B се две различни точки од просторот, тогаш со нив е определена во просторот правата AB; на неа лежат бесконечно многу точки (да означиме една од нив со M, различна од A и B), но има и точки што не лежат на AB (да означиме една од нив со N). Значи: а) A, B, N се неколинеарни; б) A, B, M се колинеарни; в) сите точки од AB се колинеарни меѓу себе. **4.** Три, но треба да се неколинеарни. **5.** Три точки ABC, под услов да се неколинеарни. **6.** а) и б) Бесконечно многу. в) Само една, ако тие точки се неколинеарни, а бесконечно многу, ако точките се колинеарни.
г) Нека четирите точки се означени со A, B, C и D. Низ тие точки минуваат: 1) бесконечно многу рамнини, ако четирите точки се колинеарни; 2) само една, ако три точки се колинеарни, а четвртата не е колинеарна со нив; 3) четири рамнини, ако никои три од точките не се колинеарни, а тоа се: ABC, ABD, ACD и BCD. **7.** Да, бидејќи правите AO и BO лежат на рамнината ABO, а точката C лежи на правата AO и точката B лежи на правата BO. **8.** а) ABC, ABD, ABS, ACD, ACS, ADS, BCD, BCS, BDS, CDS. б) $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. **11.** Да, неколинеарните точки A, B, C определуваат точно една рамнина. **12.** 10 и тоа: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, и CDE. **13.** 10 и тоа: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE.

14. а) Сите четири точки се колинеарни (црт. 1). б) Само три од точките се колинеарни (црт. 2). в) Никои три од точките не се колинарни (црт. 3).

црт. 1



црт. 2



црт. 3

2

15. Не. **16.** Да, ако се паралелни; не, ако се разминувачки. **17.** Тие се разминувачки. **18.** а) AB, CD и MN. б) AK и NK во точката K, BL и ML во точката L. в) AD, BC, CM и DN. **19.** AB е паралелна со KL, MN и CD, а е разминувачка со CM, ML, DN и NK. **20.** Се сечат: AC и BD, KM и LN; паралелни: AC и KM, BD и LN; разминувачки: AC и NL, BD и KM. **21.** а) 10. б) Да, на пример AB и CS, итн. **23.** Една, ако правите a и BC се сечат или се паралелни; две, ако a и BC се разминуваат и тоа : Σ_1 од B и a, Σ_2 од C и од a. **24.** Од $a \notin \Sigma$ и $b \in \Sigma$ следува дека a и b не се сечат, па тие може да се паралелни или да се разминуваат. **25.** Една, ако сите прави лежат во иста рамнина, три ако правите не лежат во иста рамнина (види го црт. 1 кон задачата 18: правите AB, DC, KL се паралелни и не лежат во иста рамнина; тие ги определуваат рамнините: ABC, ABL и DCL). **26.** Една, ако сите четири прави лежат во една рамнина; четири рамнини ако три од правите лежат во една рамнина, а една права лежи надвор од таа рамнина; шест рамнини, ако никои три од правите не лежат на иста рамнина. (На пример, на црт. 1 кон зад. 18, такви се правите AB, CD, KL и MN; тие ги определуваат рамнините: ABC, ABL, ABM, CDM, CDL и KLM.) **27.** Дадени се: права a и точка $M \notin a$. Правата a и точката M определуваат рамнина Σ, па според аксиомата за паралелност, во Σ постои точно една права a' што минува низ M и е паралелна на a. Ако земеме дека и друга права a'' низ M е паралелна на a, тогаш рамнината Σ_1 определена од a и a'' и рамнината Σ определена со M и a се совпаѓаат (бидејќи M лежи и на Σ и на Σ_1). Тоа значи дека во Σ има 2 прави низ M, паралелни на a - спротивно на аксиомата за паралелни прави (што ја изучуваше во VI одделение).

3

28. а) Бесконечно многу; тие формираат рамнина паралелна со Σ. б) Точно една (рамнината од a). **29.** а) Точно една. б) Бесконечно многу, а сите тие минуваат низ правата што минува низ M и е нормална на Σ. **30.** а) AB, DC, D_1C_1, A_1B_1; б) ADD_1A_1 и BCC_1B_1; в) ако основата $ABCD$ е квадрат: да. **31.** а) Не. б) Да. **32.** Не мора, ако Σ_1 и Σ_2 се различни, тие може да се сечат и, тогаш, пресечната права е паралелна со a. **33.** $a \parallel \Sigma_2$, бидејќи сите точки на a се во Σ_1. **34.** $a \parallel p$. **35.** Правата е паралелна и на Σ_1 и на Σ_2. **36.** а) Не. б) Да. **37.** Точно една, а тоа е правата низ M и паралелна на p. **38.** Ако Σ_1 и Σ_2 се различни рамнини, тогаш правите не може да се сечат; тие или се паралелни или се разминувачки прави.

39. Тоа е рамнина што е нормална на правата AB и што минува низ средината на отсечката AB ("симетрална рамнина" на отсечката AB во просторот).

40. $\overline{MA}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm; $\overline{MB}=4\sqrt{2}$ cm; $\overline{MC}=8$ cm. Упатство. Нацртај ги на листот од тетратката правоаголните триаголници AMO, BMO, CMO со помош на податоците од задачата. **41.** ***Упатство.*** Потсети се дека $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ и разгледај ги правоаголните триаголници AXO, BXO, CXO, DXO и потоа најди ги нивните хипотенузи.

4 **42.** а) A, C, B, D. б) Точката A, отсечката: AB, AB, BC; в) BD, BA, DB; г) $\triangle ABC$, $\triangle BDA$, $\triangle ABC$, отсечката AB. **43.** $AB \perp \Sigma$. **44.** Не е секогаш; во случај кога a е паралелна со проектирачкиот правец s, проекцијата на a е точка.
Ако $a \nparallel s$ и $a \parallel \Sigma$, тогаш $a \parallel a'$; ако $a \nparallel s$ и $a \nparallel \Sigma$, тогаш a и a' се сечат во прободната точка на a и Σ. **45.** Од $A' \equiv B'$ следува $AB \parallel s$, па тогаш а) не; б) да. **46.** Направи цртеж. Воочи дека секогаш $AA' \parallel BB' \parallel s$; бидејќи две различни паралелни прави определуваат рамнина, следува дека четириаголникот $AA'BB'$ е рамнинска фигура со еден пар паралелни спротивни страни, т.е. тој е трапез со основи AA' и BB' и краци AB и $A'B'$. **47.** 16 cm. Упатство. Направи цртеж. Триаголникот ABA' е правоаголен, со хипотенуза $\overline{AB}$. **48.** Да; за секоја точка $M \in \Sigma$ е $M' \equiv M''$. **49.** а) Паралелни или разминувачки. б) Се сечат или се разминувачки; в) се сечат или се паралелни, а рамнината што ја определуваат да е паралелна со проектирачкиот правец. **50.** Од $AA' \parallel BB'$ следува дека четириаголникот $AA'B'B$ е рамнински (трапез), па неговите дијагонали AB' и $A'B$ се сечат. **51.** Како во претходната задача заклучуваме дека $AA'BB'$ е рамнински четириаголник со еден пар спротивни паралелни страни, но сега и еднакви, па тој е паралелограм и неговите дијагонали AB и $A'B'$ се преполовуваат во пресечната точка. **52.** $\overline{AC}'=16$ cm; $\overline{BC}'=9$ cm. ***Упатство.*** Од $\Delta ACC'\left(\measuredangle AC'C=90^{\circ}\right)$ пресметај ја $\overline{CC}'$, па потоа од $\Delta CBC'$ и $\overline{BC}'=9$ cm. (Зошто зададената проекција од 16 cm е на отсечката AC?) **53.** Од правоаголните триаголници AMM', BMM' и CMM' се добива $\overline{M'A}=\overline{M'B}=\overline{M'C}=\sqrt{s^2-\overline{MM'}^2}$.

5 **57.** Четириаголна пирамида; се гледа одозгора и оддесно. **58.** Четириаголна пирамида; се гледа одоздола и одлево. **59.** а) Триаголна призма, се гледа одозгора и одлево. б) Триаголна призма, се гледа одоздола и оддесно.

6 **60.** а) Не. б) Не. **61.** а) Не. б) Да. **62.** Не, ако призмата е коса; да, ако призмата е права. **63.** Да, заедничкиот раб е нормален на две прави што минуваат низ неговото подножје на основата (тоа се страните на соседните правоаголници), па тој е нормален на основата. **64.** Не, основата на таа призма може да е, на пример, ромб.

65. а) Призма со основа паралелограм. б) и в) Права призма со основа правоаголник; **66.** Триаголни. **67.** а) 0; б) 1; в) 2; г) $n-3$. **68.** а) 0; б) 2; в) 5; г) 9. **69.** 4; да, два пара. **70.** Во призма со основа квадрат или правилен петаголник. ***Упатство***. Согледај дека само кај квадрат и правилен петаголник сите дијагонали се еднакви меѓу себе. **71.** Правоаголник – ако ја сече горната основа по соодветната дијагонала; трапез – ако ја сече горната основа, но не по дијагоналата; триаголник – ако го сече бочниот раб што се разминува со дијагоналата. **72.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dm. **73.** Пресекот е рамнокрак триаголник со основа 12 cm и крак $6\sqrt{5}$ cm ; неговата плоштина е 72 cm². **74.** 12 cm.

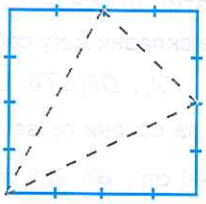
7 **75.** а) Правоаголници (можно е некои или сите да се квадрати). б) Основите се складни меѓу себе и два по два спротивни бочни ѕидови се складни меѓу себе. в) Два; правоаголници. г) Просторни дијагонали; има 4: AC_1, BD_1, CA_1, DB_1. **76.** б). **77.** б) Права, ако за основи се земат ромбовите. в) Коса, ако за основи се земат правоаголници. **78.** в). **79.** $3\sqrt{3}$ cm. **80.** 5 cm. **81.** 592 cm². **82.** 140 cm². **83.** 288 cm². **84.** $P=2\left(30+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$ $(a=2\text{ cm})$. **85.** а) Осумаголна. б) Петоаголна. в) Шестаголна. ***Упатство***. Потсети се: $M=L\cdot H$. **86.** $d=5\sqrt{10}$ cm. ***Упатство***. $d^2=a^2+b^2+c^2$, $d_1=a^2+b^2$, $d_2{}^2=a^2+c^2$, $d_3=b^2+c^2$, $d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2=?$. **87.** $\approx 0{,}31\text{ cm}^2$. **88.** а) Правоаголник со страни 8 dm и 50 cm. б) Правоаголник со страни 4 dm и 50 cm. **89.** 1) а) $a=4$ cm, $B=4\sqrt{3}\text{ cm}^2$, $P=8\left(9+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$; б) $a=10$, $H=15$, $M=450$. 2) а) $a=10$ cm, $H=5$ cm; б) $H=8$ cm, $B\approx 32\text{ cm}^2$, $P\approx 232\text{ cm}^2$. **90.** $d=9$ cm. **91.** $H=12$, $P=18\left(12+\sqrt{3}\right)$. **92.** 1022 cm².

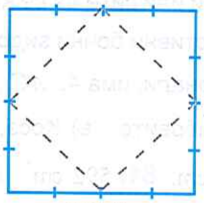
8 **93.** $a=4$ cm, $P=96$ cm², $V=64$ cm³. **94.** 0, 512 ℓ. **95.** $H=4$ cm, $P=232$ cm². **96.** 240 cm³. **97.** 210 cm³. **98.** 5 часови. **99.** $P=292$ cm². ***Упатство***. Најди ги делителите на 336; меѓу нив се димензиите на квадарот. (Димензиите се: 6 cm, 7 cm, 8 cm.) **100.** Да; за основа на квадарот може да се земе споменатиот бочен ѕид, а за висина H - основниот раб што е нормален на тој бочен ѕид. **101.** 64. **102.** 16 или 17. **103.** $P=236\ cm^2$, $V=240$ cm³. **104.** 252 cm³. Упатство. $V=P_{BCC_1B_1}\cdot\overline{AB}=24\cdot 10{,}5=252\text{ cm}^3$. **105.** 4,5 mm. **106.** 2880. **107.** 270 ℓ. **108.** 60 cm³.

9 **109.** 6 cm. **110.** $P=\left(12+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{dm}^2$, $V=\sqrt{3}\text{ dm}^3$. **111.** $H=6$ cm, $P=128$ cm², $V=96$ cm³. **112.** $P=471{,}6$ cm², $V=270$ cm³. **113.** $P=214$ cm², $V=205$ cm³. **114.** а) 900 cm^3. б) 1350 cm^3. в) 360 cm^3. **115.** $B=1{,}5\text{cm}^2$, $M=18\text{cm}^2$, $P=21\text{cm}^2$, $V=4{,}5\text{ cm}^3$. **116.** $B_{\text{кв}}=9\text{ dm}^2$, $B_{\text{пр}}=9\text{ dm}^2$; двете канти имаат ист волумен. **117.** $\approx 280\text{ cm}^3$. **118.** 234 cm².

119. $\approx 280\ \text{cm}^3$. **120.** $V \approx 27,68\ \text{cm}^3$. (Правилна триаголна призма со основен раб a и висина $H = a$.) **121.** $p = 1488\ \text{cm}^2$, $V = 2880\ \text{cm}^3$. **122.** а) $4\ \text{dm}$; б) $446\ \text{dm}^2$; в) $168\ \text{dm}^3$. ***Упатство*.** Од $M = L \cdot H = 432$ ќе се најде помалиот основен раб; потоа $5 \cdot 1,4 = 7\ \text{dm}^2$. **123.** $\approx 0,11\ \text{mm}$.

10 **124.** а) Не. б) Да, триаголна. в) Да, шестаголна. **125.** а) $B = 36\ \text{cm}^2$, па $P = B + M = 36 + 112 = 148\ \text{cm}^2$; б) $M = 1\ \text{dm} = 100\ \text{cm}^2$, па $B = P - M = 136 - 100 = 36\ \text{cm}^2$. в) $M = \frac{1}{2} \cdot L \cdot h = 15 \cdot 7 = 105\ \text{cm}^2$. **126.** $\approx 223\ \text{cm}^2$. **127.** $336\ \text{cm}^2$. **128.** $\approx 1516\ \text{cm}^2$. **129.** $P = \left(1+\sqrt{3}\right)a^2$; $P \approx 154\ \text{cm}^2$. **130.** $a = 1,5\ \text{cm}$. **131.** $P = 3a^2$; $P = 3 \cdot 144 = 432\ \text{cm}^2$. **132.** в). **133.** а) Да (црт. 4). б) Не (црт. 5). **134.** $a = 5\ \text{cm}$, $h = 6,5\ \text{cm}$. **135.** $a = 1,8\ \text{dm}$; $h = 4,1\ \text{dm}$; $H = 4\ \text{dm}$. **136.** $s = 10\ \text{cm}$; $P = 28\left(7+\sqrt{51}\right)\text{cm}^2$. **137.** $M = 600\ \text{cm}^2$. **138.** а) $P = 120\left(12+5\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$; б) $P = 54\left(2+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$. **139.** $P = \frac{a^2}{4}\left(3+\sqrt{3}\right) \approx 1,1825a^2$; $P \approx 118,25\ \text{dm}^2$.


Црт. 4


Црт.5

11 **140.** а) $624\ \text{cm}^3$. б) $2,6\ \text{cm}^3$. в) $V = \frac{n}{6} \cdot abH$. **141.** $864\ \text{cm}^2$. **142.** $32\ \text{cm}^3$. **143.** 800cm^2. **144.** $s = 7\ \text{cm}$. **145.** $1,5\ \text{dm}^3$. **146.** $180\ \text{cm}^3$. **147.** $V = 288\ \text{cm}^3$; $M = 216\ \text{cm}^2$. **148.** $1632\ \text{cm}^3$. **149.** $\frac{1}{2} \cdot 243\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **150.** $18\sqrt{2}\ \text{cm}^3$. **151.** а) $50\ \text{cm}^3$; б) $18\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; в) $36\sqrt{2}\ \text{cm}^3$; г) $1568\ \text{cm}^3$. **152.** $P \approx 345\ \text{cm}^2$, $V = 360\ \text{cm}^2$. **153.** $V = 35\ \text{cm}^3$. ***Упатство*.** Да се земе еден бочен ѕид како "основа"; тогаш работ што не е катета на основата е "висината". **154.** $V = \frac{\sqrt{2}}{12}\ \text{cm}^3$. **155.** $V = 48\ \text{cm}^3$. ***Упатство*.** Сите бочни рабови се по $9\ \text{cm}$, па подножјето на висината е во центарот на опишаната кружница на основата.

12 **156.** а) $P = 96\pi\,\text{cm}^2$; $V = 128\pi\ \text{cm}^3$. б) $P = 400\pi\ \text{cm}^2$; $V = 1000\pi\ \text{cm}^3$. в) $P = 384\pi\ \text{cm}^2$; $V = 1024\pi\,\text{cm}^3$. **157.** $5\pi\ \text{dm}^2$; $1,5\pi\ \text{dm}^3$. **158.** $P = 1628\pi\ \text{cm}^2$; $V = 7260\pi\ \text{cm}^3$. **159.** $R = 2\,\text{cm}$; $24\pi\,\text{cm}^2$; $16\pi\ \text{cm}^3$. **160.** $12\pi\,\text{cm}^2$; $4\pi\sqrt{2}\ \text{cm}^3$. **161.** $20\pi\ \text{cm}^3$. **162.** а) $34\pi\ \text{cm}^3$; б) $34\pi\ \text{cm}^3$. **163.** $\approx 100\ \text{m}$. **164.** ≈ 43960 литри. **165.** $\approx 23\ \text{cm}$. **166.** $864\,\pi\ \text{cm}^3$. **167.** $\approx 45,2\ \text{kg}$. **168.** $P \approx 58\ \text{cm}^2$; $V = 31\ \text{cm}^3$. **169.** $R = 3\sqrt{2}\ \text{cm}$; $V = 180\pi\ \text{cm}^3$. **170.** $V_{\text{о}} : V_{\text{в}} = 2:1$; $P_{\text{о}} : P_{\text{в}} \approx 8:5$. $\left(P_0 : P_b = \left(1+\sqrt{2}\right):1,5\right)$.

13 **171.** а) $96\pi\ \text{cm}^2$; $96\pi\ \text{cm}^3$. б) $24\pi\ \text{dm}^2$; $12\pi\ \text{dm}^2$. **172.** $12,56\ \text{dm}^2$. **173.** $P = 24\pi\ \text{cm}^2$; $V = 12\pi\ \text{cm}^3$. **174.** а) $P = \pi\ \text{dm}^2$. б) $P = 31,5\ \text{dm}^2$. **175.** а) $96\pi\ \text{cm}^2$; $96\pi\ \text{cm}^3$. б) $224\pi\ \text{cm}^2$; $392\pi\ \text{cm}^3$. **176.** $144\left(1+\sqrt{2}\right)\pi\ \text{cm}^2$; $576\pi\ \text{cm}^3$. **177.** $75,36\ \text{cm}^3$.

178. $P=90\pi\,\text{cm}^2$; $V=100\pi\,\text{cm}^3$. **179.** $9\pi\left(1+\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$; $9\pi\,\text{m}^3$. **180.** 282,6 cm²; 314 cm³.

181. 5dm³. **182.** $P=216\pi\,\text{cm}^2$; $V=324\pi\,\text{cm}^3$. **183.** $P=30\pi\,\text{cm}^2$; $V=24\pi\,\text{cm}^3$.

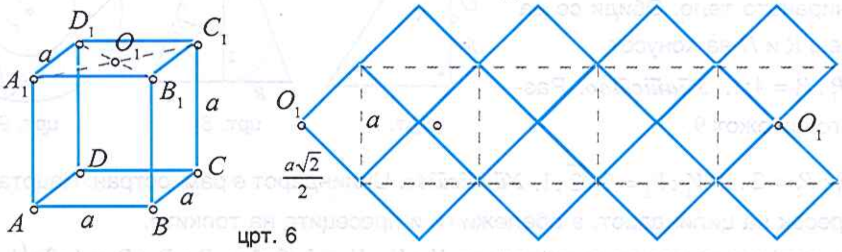
184. $P=a^2\sqrt{3}\pi$; $V=\dfrac{a^3\pi}{4}$. **185.** $M=130\pi\,\text{cm}^2$. ***Упатство.*** Согледај дека триаголникот е правоаголен. $R=13:2$.

186. $P=a^2\sqrt{2}\pi$; $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}\pi}{6}$.

14 **187.** $\approx 523\,\text{cm}^3$. **188.** $P\approx 113\,\text{cm}^2$. **189.** $36\pi\,\text{cm}^2$. **190.** $R=3\,\text{cm}$. **191.** $V_t=\dfrac{\pi}{6}V_k$; ≈47,6%.
192. $P=185\pi\,\text{cm}^2$; $V\approx 419,4\pi\,\text{cm}^3$. **193.** ≈4154 cm²; ≈19386 cm³. **194.** а) $1:\sqrt{2}$. б) $1:2\sqrt{2}$. **195.** 12 cm. **196.** 3 cm. **197.** ≈284,3cm³. **198.** $252\,\pi\,\text{cm}^3$. **199.** 3 cm³ и 24 cm³.

200. Топката: $V_т=\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}\cdot V_к$. **201.** $P_т:P_ц=4:3$. **202.** $P_о:P_в=2:1$; $V_о:V_в=2\sqrt{2}:1$.

15 **203.** а) Ако M е меѓу Σ_1 и Σ_2: $\overline{A_1B_1}=50\,\text{cm}$. б) Во секоја друга положба: $\overline{A_1B_1}=10\,\text{cm}$. **204.** Нацртај ја ортогоналната проекција на $ABCD$ врз Σ; согледај ги трапезите A_1C_1CA и B_1D_1DB и нивната заедничка средна линија. **205.** 8 cm и 17 cm. **206.** Нацртај коцка (направи модел) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб a и со O_1 означи го центарот на горната основа. Пресечи ја коцката по дијагоналите AB_1, A_1B, CD_1, C_1D и полудијагоналите A_1O_1 и D_1O_1 на трите ѕида на коцката. Потоа ќе може да ја претставиш мрежата со 12 квадрати со страна $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (црт. 6).



црт. 6

207. 56 dm². **208.** Уште еден ден. ***Упатство.*** $V_{(1.IV)}=a\,b\,c$, $V_{(30.IV)}=?$; секој ден се троши по $\dfrac{1}{30}abc$. **209.** 20 cm³. **210.** а) 36 dm³. б) ***Упатство.*** Ако a,b,c се димензиите на квадарот, тогаш $Q_1=ab, Q_2=ac, Q_3=bc$, па $Q_1Q_2Q_3=ab\cdot ac\cdot bc=(abc)^2=V^2$, од каде што $V=\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$.

211. $M_1:M_2:M_3=25:17:4\sqrt{29}$; $V_1:V_2:V_3=250:289:348$. **212.** а) 1 : 7; б) 3 : 5.

213. $V=576\,\text{cm}^3$. **214.** $V=\dfrac{3}{\pi^3}$. **215.** $P=2a^2$, $V=\dfrac{a^3}{6}$. **216.** $V=\dfrac{1}{16}\cdot c^3\cdot\sqrt{3}$.

217. $V=420\,\text{cm}^3$. ***Упатство.*** Подножјето на висината H е во центарот на опишаната кружница на основата. $R=\dfrac{abc}{4P}$, $H=6\,\text{cm}$. **218.** $M=2\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}$.

219. $V = 72\,\mathrm{cm}^3$. ***Упатство.*** Од условот дека сите бочни ѕидови се еднакво наведнати кон основата, следува: а) пирамидата има апотема; б) подножјето на висината H е во центарот на кружницата впишана во основата; в) основата е тангентен четириаголник.

220. $\frac{5a^3}{6}, a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$. **221.** $\frac{126}{65}$. ***Упатство.*** Нацртај еден дијагонален пресек на пирамидата и во него еден дијагонален пресек на впишаната коцка.

222. $V=\frac{4\pi}{3a}s(s-a)(s-b)(s-c),\ P=\frac{2\pi(b+c)}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, 2s=a+b+c.$

223. а) $P=24\pi,\ V=12\pi$. б) $P=40\pi,\ V=32\pi$. в) $P=88\pi,\ V=64\pi$.

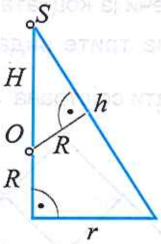
224. а) $V_{\text{ц}}=\frac{1}{9}\cdot 4\pi V\sqrt{3}$. б) $V_{\text{п}}=\frac{1}{\pi}\cdot 4V$. ***Упатство.*** Обрни внимание на заемната положба на основите на призмата и цилиндарот. **225.** Плоштините: $1:2:3$; волумените $1:2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$. ***Упатство.*** За првата и втората топка разгледај еден хоризонтален пресек, а за третата еден дијагонален пресек на коцката.

226. $P_1:P_2:P_3=1:3:9;\ V_1:V_2:V_3=1:3\sqrt{3}:27.\ \left(R_1=\frac{H}{4}=\frac{a\sqrt{6}}{12}, R_2=\frac{a\sqrt{2}}{4}, R_3=\frac{a\sqrt{6}}{4}.\right)$

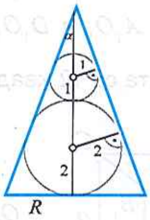
227. $R=\frac{4}{3}$. ***Упатство.*** Согледај го во пирамидата правоаголниот триаголник (црт. 7) (r - радиус на впишаната кружница во основата, R - бараниот радиус, h - апотемата и H - висината на пирамидата).

228. $V=\frac{64}{3}\pi$. ***Упатство.*** На цртежот 8 е осниот пресек на комбинираното тело. Обиди се да ги најдеш R и H на конусот.

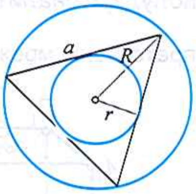
229. $P_1:P_2=4:1$. ***Упатство.*** Разгледај го цртежот 9.



црт. 7



црт. 8



црт. 9

230. $P_1:P_2=2:1,\ V_1:V_2=2\sqrt{2}:1$. ***Упатство.*** Цилиндарот е рамностран. Нацртај еден осен пресек на цилиндарот, а обележи ги и пресеците на топките.

231. Нацртај осен пресек и заклучи дека $V_{\text{ц}}:V_{\text{т}}:V_{\text{к}}=3:2:1$ и $P_{\text{ц}}:P_{\text{т}}:P_{\text{к}}=4:3:\left(1+\sqrt{2}\right)$.

232. ***Упатство.*** Точките што се на растојание a од A образуваат сфера со центар A и радиус a; точките што го исполнуваат вториот услов образуваат сфера со центар во B и радиус b. а) Ако $|a-b|<\overline{AB}<a+b$, сферите се сечат по кружница (решение: кружница); б) ако $\overline{AB}=a+b$ или $\overline{AB}=|a-b|$, решение: една точка; в) ако $\overline{AB}>a+b$ или $\overline{AB}<|a-b|$, решение: $\varnothing$. **233.** а) Ако $a>b$, решение: унија од две кружници; б) ако $a=b$, решение: две точки; в) ако $a<b$, решение: $\varnothing$. **234.** а) Ако $d>h$, решение: унија од две кружници; б) ако $a=h$, решение: кружница; в) ако $a<h$, решение: $\varnothing$.

СОДРЖИНА

ТЕМА 1 СЛИЧНОСТ 3

ТЕМА 2 ЛИНЕАРНА РАВЕНКА. ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА 35

ТЕМА 3 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ 65

ТЕМА 4 ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА 87

ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА 111

Автори: **Јово Стефановски, Д-р Наум Целакоски**

Рецензенти: Д-р Никола Пандевски - Математички институт - Скопје
Милчо Аврамоски - наставник во ОУ “Мирче Ацев” - Скопје
Јордан Дудески - наставник во ОУ “11 Октомври” - Скопје

Стручни соработници: Миле Неданоски, Гоце Шопкоски

Уредник: **Јово Стефановски**

CIP - Каталогизација во публикација на Народна и универзитетска библиотека “Св. Климент Охридски” - Скопје
372.851(076.32) = 163.3

СТЕФАНОВСКИ, Јово
Збирка задачи по математика : за IX одделение / Јово Стефановски, и др. - Скопје: Алби, 2003, 150 стр.: 23 cm

ISBN 9989 - 919 - 51 - 8
1. Јово Стефановски
COBISS. MK - ID 53498378

Издавач
ДРУШТВО ЗА ИЗДАВАЧКА ДЕЈНОСТ
„А Л Б И" д о о - Скопје
ул. „Даме Груев" бр. 7 - Скопје
Управител: Александар Стефановски

Јово Стефановски, Д-р Наум Целакоски
ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА
за IX одделение деветгодишно основно образование

Лектура
Сузана Стојковска

Компјутерска обработка
Милчо Аврамоски, Блаже Тофиловски, Бобан Аврамоски

Коректура
Автори

Со Решениена Министерот за образование и наука број 10-1934/1 од 01.09.2005 година оваа книга е одобрена за употреба во VIII одделение осумгодишно основно образование или IX одделение деветгодишно основно образование

Ракописот е предаден во печат во март 2015 година.
Печатењето е завршено во април 2015 година.
Обем 150 страници, формат 17 x 23 cm.
Тираж 300 примероци.
Отпечатено во Печатница Наумовски - Скопје