

Точка Шиффлера

Иван Кухарчук,
Леонид Шатунов и Константин Щербаков

Проект представляют:
И. Кухарчук, Л. Шатунов, П. Кожевников, В. Оганисян, А. Матвеева

И, чтоб родиться звёздам, нужны миллиарды лет
У нас нет времени их ждать
А потому я провожу меж рыжих точек
Сотни линий, чтобы сто новых созвездий
Осветили всё вокруг, и я видел куда бежать

pyrokinesis

Вступление

Проект предназначен для любителей классической планиметрии. Мы будем исследовать свойства загадочной точки Шиффлера Sh . Определяется она так: пусть I — инцентр произвольного треугольника ABC , тогда прямые Эйлера треугольников AIB , BIC , AIC и ABC пересекаются в этой самой точке Sh .

В нашем проекте на протяжении первых двух частей мы будем придерживаться доказательств при помощи исключительно «синтетических методов» (без привлечения тригонометрического и любого другого счета, техники кубических кривых и знаний из области проективной геометрии).

При помощи такого ограниченного арсенала средств нам удастся получить целую серию ярких результатов: найти местоположение точки Шиффлера относительно других замечательных точек, лежащих на прямой Эйлера треугольника ABC ; поймать направления на точку Шиффлера из вершин треугольника ABC ; связать точку Шиффлера с радикальным центром окружностей 9 точек треугольников вида BI_aC (где I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC , касающейся отрезка BC).

Часть 3 проекта содержит факты о внешних точках Шиффлера. Внешней точкой Шиффлера Sh_a мы называем ту точку, которая получается, если в определении точки Sh заменить всюду точку I на точку I_a . Поскольку доказательства фактов про точку Sh_a абсолютно аналогичны доказательствам фактов про точку Sh , Часть 3 предлагается читателям не для непосредственного решения, а лишь для ознакомления. В рамках проекта на конференции факты из этой части не принимаются и не оцениваются.

При взгляде на конструкцию, которая будет использована нами для поиска направлений из вершин треугольника ABC на точку Шиффлера, сразу возникает вопрос, а какова ее геометрическая природа, — настолько неочевидной выглядит ее сущность. Ответ на этот вопрос будет дан в Части 4.

Оказывается, что точка Шиффлера есть не что иное, как полюс прямой IO (где O — центр описанной окружности треугольника ABC), а конструкция, о которой идет речь, — есть лишь построение полюса при помощи одной линейки.

Правда, полюс здесь рассматривается относительно некоторой гиперболы. Поэтому в Части 4 мы приводим всю необходимую для дальнейшей работы с кониками в рамках нашего проекта теорию. Предполагается, что у читателя, столкнувшегося с кониками впервые, никаких проблем при решении задач этой части не возникнет и для работы по проекту дополнительные знания не потребуются.

Оказывается, что почти все доказательства задач Части 4 имеют проективную природу. Поэтому в Части 5 мы приводим красивое проективное обобщение точки Шиффлера, в котором обобщенный «инцентр» I и обобщенные «центры вневписанных окружностей» I_a , I_b и I_c играют одинаковую роль, а значит и точка Шиффлера вместе с внешними точками Шиффлера в этом обобщении становятся равноправными.

Часть 6 посвящена другому обобщению задачи о существовании точки Шиффлера: найти ГМТ всех точек P плоскости, для которых прямые Эйлера треугольников APB , BPC , APC пересекаются в одной точке. Оказывается, что это довольно сложный объект — на проективной плоскости \mathbb{CP}^2 на него можно смотреть как на кривую шестой степени, однако она распадается в произведение кубики, бесконечно удаленной прямой и описанной окружности исходного треугольника.

Кубика, о которой идет речь, носит имя люксембуржца Жозефа Нойберга и в «Энциклопедии кубик треугольника» [6] занимает первое место! Мы совсем чуть-чуть затронем этот объект и получим различные альтернативные красивые описания. Больше свойств кубики Нойберга можно найти в проекте ЛКТГ-2017 [8].

Факт о существовании точки Шиффлера был предложен в качестве задачи американским инженером, бизнесменом и геометром — любителем Куртом Шиффлером в феральском номере журнала *Cruix Mathematicorum* [1] в 1985 году. Тем самым точка Шиффлера стала одним из самых ярких относительно новых открытий в планиметрии треугольника. В «Энциклопедии центров треугольника» [2] точка Шиффлера занимает почетное 21 место.

Первое доказательство существования привели голландцы Г.Р. Вельдкамп и В.А. ван дер Спек в июньском номере журнала *Cruix Mathematicorum* [3] за 1986 год (то есть задача была нерешенной более года!). Как отмечено в [5], независимо сходное геометрическое доказательство было получено одним из самых известных современных задачных композиторов и геометров И.Ф. Шарыгиным.

Большой вклад в изучение точки Шиффлера внес наш современник — российский геометр Л. А. Емельянов ([4] и [5]). Авторы благодарят Л. А. Емельянова за то, что он побудил авторов создать этот проект.

Желаем успехов участникам конференции при решении задач!

Часть 1. Радикальный центр окружностей Эйлера

Здесь и далее дан треугольник ABC . Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC и AB , не содержащих точки A, B и C соответственно, окружности Ω , описанной около треугольника ABC , I — центр вписанной окружности этого треугольника, а O — центр Ω . Точки M_a, M_b и M_c — середины BC, AC и AB . Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается сторон BC, AC и AB в точках K_a, K_b и K_c .

Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Точки E_a, E_b и E_c — середины отрезков IA_2, IB_2 и IC_2 , E — середина IO .

Упр. 1. Докажите, что E — центр окружности девяти точек $\triangle A_1B_1C_1$.

Упр. 2. Докажите, что:

(a) $\triangle A_1OI \sim \triangle A_1IA_2$;

(b) $\angle C_1A_1E = \angle E_aA_1B_1$;

(c) прямые A_1E_a, B_1E_b, C_1E_c пересекаются в одной точке.

Пусть точки H_c, H_a и H_b — ортоцентры треугольников AIB, BIC и CIA соответственно.

Упр. 3. (a) Докажите, что A_2 — центр описанной окружности BH_aC .

(b) Докажите, что E_a — центр окружности девяти точек треугольника BIC .

Задача 1 (Точка Шиффлера). Докажите, что прямые Эйлера треугольников AIB, BIC и CIA пересекаются в одной точке.

Обозначим точку Шиффлера треугольника ABC через Sh .

Мы пока не доказали, что через точку Sh проходит прямая Эйлера треугольника ABC . Отложим это, а пока докажем интересный факт, но прежде снова придется преодолеть несколько вспомогательных утверждений.

Пусть ω_a — вневписанная окружность треугольника ABC , касающаяся стороны BC в точке T и продолжений сторон AB и AC в точках L и N . Аналогично определяются окружности ω_b, ω_c . Точки I_a, I_b и I_c — центры ω_a, ω_b и ω_c соответственно.

Упр. 4. Пусть I' — центр вписанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$. Докажите, что середина отрезка AA_2 — центр окружности $(M_bI'M_c)$.

Упр. 5. Докажите, что прямая Эйлера треугольника $M_bI'M_c$ параллельна прямой A_2I_a .

Упр. 6. Окружность α_1 — образ окружности (I_bCA) при симметрии относительно I_bC , окружность α_2 — образ окружности (I_cBA) при симметрии относительно I_cB . Докажите, что точка A_2 лежит на радикальной оси α_1 и α_2 .

Задача 2 (J.-P. Ehrmann, P. Yiu, K. L. Nguyen). Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников VI_aC , CI_bA и AI_cB является точкой Шиффлера для треугольника $M_aM_bM_c$.

В работе [7] доказаны и другие любопытные свойства радикальной оси окружностей Эйлера треугольников CI_bA и AI_cB . В частности, утверждается, что на ней лежит внешняя точка Фейрбаха F_a треугольника ABC . Заинтересованные читатели могут самостоятельно попробовать доказать этот факт или разобраться в его решении в источнике.

Рассмотрим треугольник Δ , образованный прямыми, аналогичными LN (т.е. соединяющими точки касания вневписанных окружностей с продолжениями соответствующих сторон) и треугольник Θ с вершинами в серединах дуг M_bM_c , M_cM_a и M_aM_b описанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$.

Упр. 7. Докажите, что треугольник Δ гомотетичен треугольнику Θ .

Упр. 8. Докажите, что центр описанной окружности Δ совпадает с ортоцентром исходного треугольника ABC , а центр описанной окружности Θ совпадает с центром окружности Эйлера ABC .

Упр. 9. Докажите, что вершины треугольника Δ лежат на радикальных осях соответствующих пар окружностей Эйлера треугольников VI_aC , CI_bA и AI_cB .

Задача 3. Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников VI_aC , CI_bA и AI_cB лежит на прямой Эйлера треугольника ABC .

В частности, отсюда следует, что точка Шиффлера лежит и на прямой Эйлера треугольника ABC . Однако, есть и более простой способ доказать это, который мы обсудим в следующей части.

Часть 2. Направления на точку Шиффлера

Напомним одно полезное утверждение, которое часто будет помогать ниже.

Утверждение 1. Два неравных треугольника гомотетичны тогда и только тогда, когда их соответственные стороны параллельны.

Приведем одно из самых известных применений этого факта.

Упр. 10. Докажите, что:

- (a) $A_1C_1 \perp VI$
- (b) треугольники $A_1B_1C_1$ и $K_aK_bK_c$ гомотетичны;
- (c) точка I лежит на прямых Эйлера $A_1B_1C_1$ и $K_aK_bK_c$;
- (d) A_1K_a , B_1K_b , C_1K_c и IO пересекаются в одной точке.

Похожим способом можно доказать следующий «близкий родственник» предыдущего утверждения, который пригодится нам далее.

Упр. 11. Докажите, что

- (а) O — центр окружности девяти точек треугольника $I_b I I_c$;
- (б) $I_a O$ является прямой Эйлера треугольников LTN и $I_b I I_c$.

Перейдем теперь к доказательству ключевой теоремы этой части.

Упр. 12. Точки X и Y таковы, что $I \in XY$, $XA \parallel IB$, $YA \parallel IC$ и $XY \parallel BC$. Докажите, что

- (а) треугольники XAY и BIC гомотетичны;
- (б) у треугольников XAY и BIC совпадают центры описанных окружностей;
- (с) прямая, соединяющая точки пересечения медиан $\triangle XAY$ и $\triangle BIC$, содержит центр описанной окружности $\triangle XAY$.

Пусть M — точка пересечения медиан, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности треугольника ABC .

Упр. 13. Пусть M_1 — точка пересечения медиан треугольника XAY . Докажите, что $MM_1 = \frac{2}{3}r$.

Задача ниже является следствием доказанных только что утверждений. Она дает нам информацию о том, в каком отношении точка Шиффлера делит отрезок MO и, заодно, является альтернативным способом доказать существование точки Шиффлера.

Задача 4 (Г.Р. Вельдкамп, В.А. ван дер Спек, И. Ф. Шарыгин). Докажите, что прямая Эйлера треугольника BIC делит отрезок MO в отношении $\frac{2r}{3R}$, считая от точки M .

Приведем полезное простое следствие этого факта, которое поможет нам доказать ряд свойств точки Шиффлера.

Пусть ASh пересекает прямую OM_a в точке Z_a .

Упр. 14. Докажите, что $\frac{M_a Z_a}{Z_a O} = \frac{r}{R}$.

Пусть $U \neq L$ — точка на прямой LN такая, что $BL = BU$. Пусть $V \neq N$ — точка на прямой LN такая, что $CN = CV$.

Упр. 15. Докажите, что $\triangle UTV$ и $\triangle K_b K_a K_c$ симметричны относительно M_a .

Упр. 16. Докажите, что $\triangle I_a I_b I_c$ подобен $\triangle UTV$ с коэффициентом $\frac{2R}{r}$.

Пусть точка P_a симметрична точке T относительно LN . Аналогично определяются точки P_b и P_c . Пусть W — пересечение прямых $I_a T$ и AP_a .

Пусть точка Q_a — точка пересечения прямых $O I_a$ (по Упр. 11б — это прямая Эйлера LTN) и BC . Аналогично определяются точки Q_b и Q_c .

Упр. 17. Докажите, что $\frac{TW}{W I_a} = \frac{r}{R}$ (подсказка: см. предыдущее упражнение).

Как мы видим, мы получили отношение, похожее на то, что было в Упр. 14. Этим мы воспользуемся чуть позже, а пока докажем еще один вспомогательный результат.

Пусть D — пересечение AI_a и BC . Серединный перпендикуляр к AD пересекает прямые BI_a и CI_a в точках G и F .

Упр. 18. Докажите, что треугольник DGF гомотетичен треугольнику TNL и центр их гомотетии лежит на пересечении прямых BC и AP_a .

Упр. 19. Докажите, что AP_a проходит через Q_a .

Задача 5 (Л. А. Емельянов и Т. Л. Емельянова). Докажите, что

- AQ_a , BQ_b и CQ_c пересекаются в точке Шиффлера треугольника ABC ;
- AP_a , BP_b и CP_c пересекаются в точке Шиффлера треугольника ABC .

Пусть H' — ортоцентр треугольника $K_aK_bK_c$.

Упр. 20. Докажите, что четырехугольники K_cAK_bH' и $NALP_a$ подобны.

Задача 6. Докажите, что точка Шиффлера изогонально сопряжена относительно треугольника ABC точке H' .

Часть 3. «Внешние» точки Шиффлера

Поговорим теперь об аналогах точки Шиффлера. Давайте в задачах, предложенных выше, заменим инцентр на эксцентр и проведем аналогичные рассуждения. Факты, приведенные в этой части, необязательны для решения, не будут оцениваться и даны лишь в ознакомительных целях.

Факт 1 («Внешняя» точка Шиффлера). *Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC , AI_aB , AI_aC , BI_aC имеют общую точку, которая делит отрезок MO внешним образом в отношении $\frac{2r_a}{3R}$, считая от точки M .*

Обозначим внешнюю A -точку Шиффлера через Sh_a . Аналогично определим Sh_b и Sh_c .

Факт 2. *Точка, симметричная K_a относительно K_bK_c , лежит на ASh_a .*

Факт 3. *Точка пересечения IO и BC лежит на ASh_a .*

Факт 4. *BSh_a , I_cO и AC пересекаются в одной точке.*

Пусть A_0 , B_0 , C_0 — середины больших дуг BC , CA , AB описанной окружности треугольника ABC соответственно.

Факт 5. *Sh_a изогонально сопряжена середине OI_a относительно треугольника $A_1B_0C_0$.*

Факт 6. *Радикальный центр окружностей Эйлера ACI_c , ABI_b и BIC является M_a -точкой Шиффлера $\triangle M_aM_bM_c$*

Точка Шиффлера

Иван Кухарчук,
Леонид Шатунов и Константин Щербаков

Проект представляют:
И. Кухарчук, Л. Шатунов, П. Кожевников, В. Оганисян, А. Матвеева

И, чтоб родиться звёздам, нужны миллиарды лет
У нас нет времени их ждать
А потому я провожу меж рыжих точек
Сотни линий, чтобы сто новых созвездий
Осветили всё вокруг, и я видел куда бежать

pyrokinesis

Часть 4. Равнобокие гиперболы

Напомним основные факты из геометрии коник (конических сечений), которые нам пригодятся в этом разделе. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих фактов и сконцентрируемся на применении их к нашей задаче. Никакой другой теории, кроме той, что сформулирована ниже, нами не будет использоваться, поэтому читатель, незнакомый с кониками, может ограничиться лишь текстом нашего проекта.

Заинтересованным же в первом знакомстве с равнобокими гиперболами советуем обратиться к лекции Ф. Бахарева [9]. Для более глубокого погружения в теорию, связанную с равнобокими гиперболами и в целом кривыми второго порядка, рекомендуем книгу [10].

Для того чтобы начать разговор о кониках с геометрических позиций нам придется сказать пару слов о проективной геометрии.

Определение 1. Вещественная проективная плоскость (обозн. $\mathbb{R}P^2$) — пучок прямых в пространстве с центром в O (множество всех прямых в пространстве, проходящих через фиксированную точку O). «Точки» — прямые, проходящие через O , «прямые» — плоскости, проходящие через O .

Плоскость, не проходящую через O , будем называть *картой*. Тогда почти каждой «точке» можно поставить в соответствие точку в карте — пересечение прямой пучка, задающей «точку» с картой. Аналогично почти каждой «прямой» — прямую в карте.

Исходная задача обычно ставится не на проективной плоскости, а на обычной евклидовой. Поэтому, можно сказать, что геометрическая задача поставлена в некоторой фиксированной карте π плоскости $\mathbb{R}P^2$.

«Точки», которым нельзя сопоставить точку в карте π , называют *бесконечно-удаленными* карты π . Ясно, что они задаются теми прямыми пучка с центром в O , которые параллельны нашей карте π . Все такие прямые лежат в одной плоскости, параллельной π и проходящей через O . Значит, с точки зрения проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, все бесконечно удаленные точки расположены на одной «прямой» (называемой бесконечноудаленной «прямой» карты π).

Важный момент состоит в том, что без фиксации карты все «прямые» на проективной плоскости *равноправны* и вообще говоря никакой выделенной бесконечноудаленной прямой нет. То есть, если для каких то целей нам нужна бесконечноудаленная «прямая», то либо мы фиксируем карту и тогда бесконечноудаленная «прямая» у нас появляется автоматически, либо договариваемся заранее, что некоторую «прямую» будем считать бесконечноудаленной.

Бесконечноудаленная «точка» A_∞ ассоциируется в карте с пучком параллельных прямых. Эти прямые получаются при сечении карты «прямыми» проходящими через указанную бесконечноудаленную «точку» A_∞ .

Для практических целей полезно уметь соединять прямой в карте бесконечноудаленную «точку» A_∞ с точкой B лежащей в этой карте. Для этого, в свете сказанного в предыдущем абзаце, нам достаточно провести через точку B прямую параллельную фиксированному направлению, отвечающему A_∞ .

Определение 2. Проективным преобразованием P плоскости $\mathbb{R}P^2$ мы будем называть то преобразование $\mathbb{R}P^2$, которое переводит «прямые» в «прямые».

Замечание 1. Любое проективное преобразование $\mathbb{R}P^2$ сохраняет **вещественные двойные отношения**.

Определение 3. Коникой на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ является образ при проективном преобразовании множества «точек» образующих в пересечении с некоторой картой евклидову окружность.

Определение 4. Рассмотрим евклидову плоскость π как некоторую карту ξ проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Тогда коникой \mathcal{C} на евклидовой плоскости π называется множество всех тех точек карты ξ для которых существует проективная коника $\overline{\mathcal{C}}$ такая, что $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \cap \xi$.

Замечание 2. «Точки» $\overline{\mathcal{C}}$, которые не пересекают ξ являются бесконечноудаленными для карты ξ . Направления, отвечающие этим «точкам» в карте ξ , называют асимптотическими направлениями коники \mathcal{C} .

Упр. 1. Пусть в пространстве зафиксирована прямоугольная декартова система координат с началом координат в точке O . Рассмотрим проективную плоскость

как пучок прямых с центром в O и карту π , заданную уравнением $z = 1$. Пусть в карте π задана окружность ω уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

(а) Нарисуйте в карте π евклидову конику \mathcal{C} в которую ω переходит при вращении вокруг оси OX на 90° .

(б) Укажите асимптотические направления коники \mathcal{C} .

Факты ниже можно использовать для доказательства существования коники.

Утверждение 1. *Коника на плоскости однозначно восстанавливается по пяти точкам (возможно бесконечноудаленным) никакие три из которых не лежат на одной прямой.*

Утверждение 2 (Обратная теорема Паскаля). *Пусть даны такие точки X_i , $i = 1, \dots, 6$, что точки пересечения прямых X_1X_2 и X_4X_5 , X_2X_3 и X_5X_6 , X_3X_4 и X_6X_1 лежат на одной прямой. Тогда существует коника, проходящая через все точки X_i .*

Если же некоторые из рассматриваемых пар прямых параллельны, то теорема сохраняет силу, в том смысле, что точка пересечения понимается как бесконечноудаленная соответствующая пучку этих параллельных прямых.

Утверждение 3. *Образ прямой при изогональном сопряжении относительно треугольника — коника проходящая через вершины этого треугольника. Образ коники проходящей через вершины треугольника при изогональном сопряжении относительно этого треугольника — прямая (возможно, бесконечноудаленная).*

Определение 5. *Равнобокой (прямоугольной, равносторонней, равнобочной) гиперболой называют ту конику в карте, которая имеет две бесконечноудаленные точки, направления на которые перпендикулярны.*

Утверждение 4. *Любая коника проходящая через вершины треугольника является равнобокой гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр этого треугольника.*

Упр. 2. (Гипербола Фейрбаха). Докажите, что точки A, B, C, I, H, H_a, H_b и H_c лежат на одной равнобокой гиперболе \mathcal{F} , которая касается прямой OI .

Определим точку Sh' как второе пересечение прямой OH с гиперболой \mathcal{F} .

Упр. 3. Применив теорему Паскаля докажите, что Sh' лежит на прямой Эйлера треугольника $\triangle BIC$.

Тем самым, мы получили еще одно, альтернативное доказательство существования точки Шиффлера. Кроме того, мы выяснили простой способ построения точки Шиффлера: достаточно лишь пересечь гиперболу \mathcal{H} с прямой Эйлера $\triangle ABC$.

Задача 1. Точка Sh лежит на пересечении гиперболы \mathcal{H} с прямой Эйлера $\triangle ABC$.

Приведем проективное определение поляр (еще называемое построением поляр линейкой) относительно коники и ее основные свойства полезные для нас.

Определение 6. Пусть две секущие P_1Q_1 и P_2Q_2 коники \mathcal{C} (P_1, Q_1, P_2, Q_2 лежат на \mathcal{C}) проходят через точку A . Тогда прямая l , проходящая через точки пересечения прямой P_1P_2 с прямой Q_1Q_2 и прямой P_1Q_2 с прямой Q_1P_2 , называется полярой точки A . Точка A в этом случае называется полюсом прямой l .

Утверждение 5. Если из точки A существует две касательные к конике \mathcal{C} , то поляра — прямая соединяющая точки касания.

Утверждение 6 (Двойственность полярного соответствия). Точка A лежит на поляре точки B относительно коники $\mathcal{C} \iff$ точка B лежит на поляре точки A относительно коники \mathcal{C} .

Пусть $Q'_a := OI_a \cap BC$.

Упр. 4. (а) (Гипербола Стаммлера) Докажите, что точки I, I_a, I_b, I_c и O лежат на одной равнобокой гиперболе \mathcal{S} .

Докажите, что

(b) BC это поляра A относительно \mathcal{S} ;

(c) полюс IO относительно \mathcal{S} лежит на AQ'_a (подсказка: сотрите с картинки все точки, кроме A, I, O, I_a).

Для дальнейшей работы над проектом нам потребуется понятие двойного отношения точек на прямой. Определяется оно следующим образом

Определение 7. Двойным отношением четверки точек A, B, C, D на прямой называется следующая величина

$$[A, B; C, D] = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{AD}}$$

Определение 8. Двойным отношением четверки прямых a, b, c, d проходящих через точку O , называется следующая величина

$$[a, b; c, d] = \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin \angle(\vec{c}, \vec{b})} \cdot \frac{\sin \angle(\vec{d}, \vec{b})}{\sin \angle(\vec{a}, \vec{d})}, \quad (1)$$

где \vec{l} — направляющий вектор прямой l .

Углы в формуле (1) понимаются как **ориентированные** углы, то есть углы между векторами. Угол $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ это тот, на который нужно повернуть вектор \vec{a} , чтобы получить \vec{b} . Притом, если поворот осуществлялся против часовой стрелки, то значение соответствующего угла мы берем со знаком «плюс», а если по часовой — со знаком «минус».

Формулировка определения 8 требует дополнительной проверки корректности. В самом деле, мы определяем двойное отношение четверки прямых, а в формуле (1) используется направляющий вектор каждой из этих прямых (т. е. формально,

величина двойного отношения может зависеть от выбора направления вектора \vec{l} , но в реальности так не происходит).

Подробнее о свойствах двойных отношений читайте в проекте ЛКТГ про движение точек [11].

При решении следующего упражнения нам потребуется использовать некоторые проективные инволюции. Кроме того, проективные инволюции будут полезны нам в следующей части проекта. Потому приведем определение.

Определение 9. Вещественная проективная прямая ($\mathbb{R}P^1$) — пучок прямых на плоскости с центром в некоторой точке O (т.е. множество проходящих через O прямых). «Точки» — прямые проходящие через O .

Определение 10. Преобразование F вещественной проективной прямой l называется проективной инволюцией, если

- F сохраняет двойные отношения, то есть: $\forall A, B, C$ и $D \in l$ верно, что

$$[A, B; C, D] = [F(A), F(B); F(C), F(D)];$$

- F инволюция, то есть: $\forall A \in l$ верно, что $F(F(A)) = A$.

Приведем один из самых сильных результатов классической планиметрии, который используют при работе с инволюциями.

Утверждение 7 (Теорема Дезарга об инволюции). *Даны четыре точки A_1, A_2, A_3 и A_4 общего положения и прямая l , не инцидентная им. Пусть l пересекает прямые $A_1A_2, A_3A_4, A_2A_3, A_4A_1, A_1A_3, A_2A_4$ в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно и конику, проходящую через A_1, A_2, A_3 и A_4 в точках W, W' . Тогда на прямой l существует проективная инволюция $f : X \leftrightarrow X', Y \leftrightarrow Y', Z \leftrightarrow Z', W \leftrightarrow W'$.*

Инволюцию f иногда называют инволюцией Дезарга порожденной четверкой точек A_1, A_2, A_3 и A_4 на прямой l .

Упр. 5. (а) Пусть даны две проективные инволюции \mathcal{I} и \mathcal{J} проективной прямой l . Каждая из них имеет по две неподвижные точки. Известно, что неподвижные точки инволюции \mathcal{I} меняются местами при инволюции \mathcal{J} . Докажите, что неподвижные точки инволюции \mathcal{J} меняются местами при инволюции \mathcal{I} .

Пусть l — касательная к гиперболе \mathcal{S} в точке O .

(б) Докажите, что l — прямая Эйлера треугольника ABC .

Указание: рассмотрите симметрию относительно биссектрисы угла BAC как инволюцию \mathcal{I}'_A пучка прямых, проходящих через A . Постройте при помощи \mathcal{I}'_A инволюцию \mathcal{I}_A на l .

Определение 11. Двойным отношением четверки точек $[A, B; C, D]$, лежащих на конике \mathcal{C} , называется двойное отношение $[PA, PB; PC, PD]$ для любой точки P на этой же конике \mathcal{C} .

Упр. 6. Пусть Sh'' — второе пересечение AQ_a с гиперболой \mathcal{F} . Докажите, что
(a) $Sh''I$ касается гиперболы \mathcal{S} (проектируйте с гиперболы на гиперболу);
(b) $Sh = Sh''$.

Таким образом, нами получено не только альтернативное доказательство одного из ключевых результатов Части 2: описание точки Шиффлера при помощи фиксации направлений на нее из вершин треугольника ABC , но и установлен «истинный» — «проективный» смысл этого описания. Сформулируем это в виде задачи.

Задача 2. Точка Sh это полюс прямой OI относительно гиперболы \mathcal{S} .

Из упражнений выше фактически следует, что конструкция Емельяновых это просто построение одной линейкой направлений на полюс некоторой прямой.

Теперь нас останавливают только небольшие технические детали от того, чтобы получить полноценное проективное обобщение исходной задачи. Постараемся пробраться сквозь терни проективной геометрии к красивому «симметричному» обобщению точки Шиффлера в следующей части.

Точка Шиффлера

Решения

Иван Кухарчук, Леонид Шатунов, Константин Щербаков

Часть 1. Радикальный центр окружностей Эйлера

Здесь и далее дан треугольник ABC . Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC и AB , не содержащих точки A, B и C соответственно, окружности Ω описанной около треугольника ABC , I — центр вписанной окружности этого треугольника, а O — центр Ω . Точки M_a, M_b и M_c — середины BC, AC и AB . Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается сторон BC, AC и AB в точках K_a, K_b и K_c .

Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Точки E_a, E_b и E_c — середины отрезков IA_2, IB_2 и IC_2 , E — середина IO .

Упр. 1. Докажите, что E — центр окружности девяти точек $\triangle A_1B_1C_1$

Решение. I и O — ортоцентр и центр описанной окружности соответственно.

Упр. 2. Докажите, что:

(а) $\triangle A_1OI \sim \triangle A_1IA_2$.

(б) Докажите, что $\angle C_1A_1E = \angle E_aA_1B_1$.

(с) Докажите, что прямые A_1E_a, B_1E_b, C_1E_c пересекаются в одной точке.

Решение. (а) $\angle A_1A_2B = \angle A_2A_1B = \angle OBA_1 \Rightarrow A_1O \cdot A_1A_2 = A_1B^2 = A_1I^2$.

(б) Из доказанного в п. а) подобия, A_1E и A_1E_a изогональны относительно угла $\angle IA_1O$. Кроме того, A_1O и A_1I изогональны относительно угла $\angle C_1A_1B_1$ как направления на центр описанной окружности и ортоцентр. Получаем требуемое.

(с) Эта точка изогонально сопряжена точке E относительно треугольника $A_1B_1C_1$.

Положим точки H_c, H_a и H_b — ортоцентры треугольников A_1B, B_1C и C_1A соответственно.

Упр. 3. (а) Докажите, что A_2 — центр описанной окружности BH_aC .

(б) Докажите, что E_a центр окружности девяти точек треугольника B_1C_1 .

Решение. (а) При симметрии относительно BC окружность BH_aC переходит в окружность B_1C_1 , а A_2 — в её центр A_1 .

(б) A_2 и I — центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle BH_aC$ соответственно. Тогда E_a — центр окружности девяти точек $\triangle B_1C_1$, а равно и $\triangle BH_aC$.

Задача 1 (Точка Шиффлера). Докажите, что прямые Эйлера треугольников A_1B, B_1C и C_1A пересекаются в одной точке.

Решение. Следствие из упражнений 2с и 3б.

Обозначим точку Шиффлера треугольника ABC через Sh .

Пусть ω_a — вневписанная окружность треугольника ABC , касающаяся стороны BC в точке T и продолжений сторон AB и AC в точках L и N . Аналогично определяются окружности ω_b , ω_c . Точки I_a , I_b и I_c — центры ω_a , ω_b и ω_c соответственно.

Упр. 4. Пусть I' — центр вписанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$. Докажите, что середина отрезка AA_2 — центр окружности $(M_bI'M_c)$.

Решение. Сделаем гомотетию с коэффициентом 2 в точке A , а затем центральную симметрию относительно M_a (это преобразование совпадает с гомотетией в точке пересечения медиан с коэффициентом -2). Тогда треугольник $M_aM_bM_c$ перейдёт соответственно в треугольник ABC , поэтому I' перейдёт в I . Остаётся заметить, что середина AA_2 перейдёт в A_1 — центр окружности BIC .

Упр. 5. Докажите, что прямая Эйлера треугольника $M_bI'M_c$ параллельна прямой A_2I_a .

Решение. При том же преобразовании прямая Эйлера $M_bI'M_c$ перейдёт в прямую Эйлера треугольника BIC , то есть в A_1E_a . Но это — средняя линия в треугольнике II_aA_2 , поэтому обе прямые Эйлера параллельны A_2I_a .

Упр. 6. Окружность α_1 — образ окружности (I_bCA) при симметрии относительно I_bC , окружность α_2 — образ окружности (I_cBA) при симметрии относительно I_cB . Докажите, что точка A_2 лежит на радикальной оси α_1 и α_2 .

Решение. Заметим, что I принадлежит описанным окружностям треугольников AI_cB и AI_bC . Обозначим как K_b и K_c отражения I относительно I_bC и I_cB соответственно, тогда $K_b \in \alpha_1$ и $K_c \in \alpha_2$, K_bI_b — диаметр α_1 и K_cI_c — диаметр α_2 . Так как $I_bC \perp IC$ и $I_cB \perp IB$, то B — середина IK_c , а C — середина IK_b . Заметим также, что точка I_a лежит на радикальной оси окружностей α_1 и α_2 , так как четырёхугольник I_cBCI_b вписан, и значит $I_aB \cdot I_aI_c = I_aC \cdot I_aI_b$.

Сделаем гомотетию с центром в I и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда точка A_2 перейдёт в E_a , точка K_b перейдёт в C , K_c перейдёт в B , I_a перейдёт в A_1 , I_b перейдёт в B_1 , I_c перейдёт в C_1 . Окружности α_1 и α_2 перейдут в окружности, построенные на B_1C и C_1B как на диаметрах (обозначим их β_1 и β_2).

Заметим, что H_a лежит на радикальной оси окружностей β_1 и β_2 : обозначим $X = H_aB \cap C_1I$, $Y = H_aC \cap B_1I$, тогда $X \in \beta_2$, $Y \in \beta_1$ и, так как $H_aB \perp C_1I$, $H_aC \perp B_1I$, четырёхугольник $BXYC$ вписан, и значит $H_aX \cdot H_aB = H_aY \cdot H_aC$.

Таким образом, получаем, что H_aA_1 — радикальная ось окружностей β_1 и β_2 , а из упражнения 3 мы знаем, что $E_a \in H_aA_1$, что равносильно утверждению задачи.

Задача 2 (J.-P. Ehrmann, P. Yiu, K. L. Nguyen). Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников BI_aC , CI_bA и AI_cB является точкой Шиффлера для треугольника $M_aM_bM_c$.

Решение. $I_a = AI \cap CI_b \cap BI_c \Rightarrow \text{row}_{\alpha_1}(I_a) = \text{row}_{(CI_bA)}(I_a) = \text{row}_{(AI_cB)}(I_a) = \text{row}_{\alpha_2}(I_a) \Rightarrow A_2I_a$ — радикальная ось α_1 и α_2 .

Сделаем гомотетию с центром в A и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда в условиях упр. 6 образы α_1 и α_2 — окружности девяти точек $\triangle CI_bA$ и $\triangle AI_cB$. Следовательно, образ A_2I_a лежит на рад-оси образов α_1 и α_2 и по упражнениям 4 и 5 является прямой Эйлера $\triangle M_bI'M_c$.

Рассмотрим треугольник Δ образованный прямыми аналогичными LN (т.е. соединяющими точки касания вневписанных окружностей с продолжениями соответствующих сторон) и треугольник Θ с вершинами в серединах дуг M_bM_c , M_cM_a и M_aM_b описанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$.

Упр. 7. Докажите, что треугольник Δ гомотетичен треугольнику Θ .

Решение. При гомотетии в M с коэффициентом -2 треугольник Θ переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, откуда видно, что стороны обоих треугольников перпендикулярны соответствующим биссектрисам треугольника ABC (см. упр. 10а).

Упр. 8. Докажите, что центр описанной окружности Δ совпадает с ортоцентром исходного треугольника ABC , а центр описанной окружности Θ совпадает с центром окружности Эйлера ABC .

Решение. Второе верно в силу построения Θ . Для доказательства первого сперва обозначим лемму:

Лемма 1. *Даны окружности ω_1 и ω_2 с проведенными к ним общими внешней касательной AB и двумя внутренними CD и EF ($A, C, E \in \omega_1$; $B, D, F \in \omega_2$). Прямые CD и EF пересекаются в точке P , а прямые AC и BF — в точке X . Докажите, что $PX \perp AB$.*

Доказательство. Пусть Q — точка пересечения внешних касательных к ω_1 и ω_2 , а Y — точка пересечения AE и BD . $AC \perp BD$, так как первая прямая перпендикулярна биссектрисе угла между AB и CD , а вторая параллельна. Аналогично $AE \perp BF$. Пусть Γ — окружность с диаметром AB . Тогда $\Gamma \perp \omega_1$ и $\omega_2 \Rightarrow P$ лежит на поляре Q относительно Γ , т.е. на прямой XY . Заметим, что A, B, X, Y — ортоцентрическая четверка. Получаем требуемое. \square

Продолжим решение упражнения 8. Обозначим вершины треугольника Δ соответственно A_d, B_d, C_d . Согласно Лемме 1 $AA_d \perp BC$. Пусть биссектриса $\angle ACB$ пересекает B_dA_d в точке H_d , H_a — основание высоты из вершины A треугольника ABC . Тогда четырехугольник $A_dH_dH_aC$ вписан и $\angle B_dA_dA = \frac{\angle C}{2} \Rightarrow A_dA$ — направление на центр описанной окружности в $\triangle A_dB_dC_d$. Получаем требуемое.

Упр. 9. Докажите, что вершины треугольника Δ лежат на радикальных осях соответствующих пар окружностей Эйлера треугольников BI_aC , CI_bA и AI_cB .

Для доказательства сперва обозначим леммы:

Лемма 2. В треугольнике ABC проведены высоты AH_a, BH_b, CH_c . Точку H_a отразили относительно сторон AB и AC и получили точки P и Q соответственно. Докажите, что P, Q, H_b, H_c лежат на одной прямой.

Доказательство. Положим $R := BP \cap CQ, X := BP \cap CH_c, Y := CQ \cap BH_b, H$ — ортоцентр $\triangle ABC$. X — образ C , а H — образ ортоцентра $\triangle ABX$ при симметрии относительно AB . Следовательно, $H \in (XAB)$, аналогично $H \in (YAC) \Rightarrow A$ — точка Микеля четырехугольника $BHCR$. Проекции точки Микеля на стороны четырехугольника лежат на одной прямой (доказывается последовательным применением теоремы Симсона). Получаем требуемое \square

Лемма 3. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1 . Из точки A_1 опущены перпендикуляры A_1A_b и A_1A_c на AB и AC соответственно. Точки B_a, B_c, C_a, C_b определяются аналогично. Докажите, что точки $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ лежат на одной окружности.

Доказательство. Известный факт: A_bA_c антипараллельно BC относительно $\angle A$. B_cC_b антипараллельно H_bH_c , т.е. параллельно BC . Значит $A_bA_cB_cC_b$ — вписанный четырехугольник. $A_cC_a \parallel AC$ и $B_cC_b \parallel BC$. Так как C_aC_b антипараллельно AB относительно $\angle C$, то это же верно и относительно угла между прямыми A_cC_a и $B_cC_b \Rightarrow$ четырехугольник $A_cB_cC_aC_b$ — вписанный. Из двух вписанностей заключаем вписанность пятиугольника $A_cB_cC_aC_bA_b$ и аналогично вписанность всего шестиугольника. \square

Вернемся к решению упражнения 9. Применяя Лемму 2 для $\triangle ACI_b$ имеем, что прямая A_dC_d содержит основания высот этого треугольника на стороны AI_b и CI_b . Аналогично прямая A_dB_d содержит основания высот $\triangle ABI_c$ на стороны AI_c и BI_c . По Лемме 3, применяемой для $\triangle I_aI_bI_c$, 4 таких основания лежат на одной окружности. Получаем требуемое.

Задача 3. Докажите, что радикальный центр окружностей Эйлера треугольников BI_aC, CI_bA и AI_cB лежит на прямой Эйлера треугольника ABC .

Решение. Сделаем гомотегию h , переводящую треугольник δ в треугольник θ . По упражнению 8, центр окружности 9 точек $\triangle ABC$ — образ ортоцентра $\triangle ABC$ при h . Радикальная ось окружностей (I_bAC) и (I_cAB) перейдет в направлении на точку Шиффлера треугольника $M_aM_bM_c$ из середины дуги M_bM_c . Согласно задаче 2 и наблюдению выше имеем, что точка Шиффлера $\triangle M_aM_bM_c$ неподвижна при такой гомотетии, т.е. является ее центром. Значит она лежит на прямой, содержащей центр окружности 9 точек и ортоцентр $\triangle ABC$, т.е. прямой Эйлера.

Schiffler point

Ivan Kukharchuk, Leonid Shatunov, Konstantin Shcherbakov

The project is presented by:

I. Kukharchuk, L. Shatunov, P. Kozhevnikov, V. Oganisyan, A. Matveeva

And it takes billions of years for stars to be born
We don't have time to wait for them
So I draw between the red dots
Hundreds of lines to create new constellations
They lit up everything and I could see where to run

pyrokinesis

Introduction

This project is intended for fans of classical planimetry. We will study the properties of the mysterious Schiffler point Sh . It is defined as follows: let I be the incenter of an arbitrary triangle ABC , then the Euler lines of triangles AIB , BIC , AIC and ABC intersect at this point Sh .

In our project, during the first two parts we will use only «synthetic methods» (without using trigonometry, cartesian coordinate method or any other calculation, cubic curve techniques, or knowledge from projective geometry).

With such a limited arsenal of methods, we will be able to obtain a whole series of brilliant results: find the location of the Schiffler point with the respect to other triangle centers lying on the Euler line of triangle ABC ; catch directions to the Schiffler point from the vertices of triangle ABC ; connect the Schiffler point to the radical center of the Nine-point circle of triangles like BI_aC (where I_a — is the center of the excircle of triangle ABC , which touches segment BC).

Part 3 of the project contains facts about Schiffler external points. We call a Schiffler external point Sh_a the point that arises if we replace the point I with the point I_a in the definition of a point Sh everywhere. Part 3 is suggested to the readers not for solving, but only for familiarization, because the proofs of the facts about point Sh_a are absolutely similar to the proofs of the facts about point Sh . The facts from this part are not evaluated as part of the project at the conference.

When we are looking at the construction that we will use to find directions from the vertices of triangle ABC to the Schiffler point, the question about its geometric nature immediately arises — its essence is so unobvious. The answer to this question will be given in Part 4.

It turns out that the Schiffler point is the pole of the line IO (where O — is the circumcenter of triangle ABC), and the construction in question is just a straightedge construction.

However, the pole here is considered with the respect to some hyperbola. So in Part 4 we give all the necessary theory for working with conics as part of our project. It is assumed that the reader, who work with conics for the first time, will have no problems in solving tasks of this part and will not need any additional knowledge to work in the project.

It turns out that almost all proofs of problems in Part 4 have projective origin. Therefore, in Part 5 we give a beautiful projective generalization of the Schiffler point in which the generalized «incenter» I and the generalized «excenters» I_a , I_b and I_c play the same role, and hence the Schiffler point together with the external Schiffler points become equal in this generalization.

Part 6 is dedicated to another generalization of the Schiffler point existence problem: find the locus of all points P of the plane for which the Euler lines of triangles APB , BPC , APC intersect at the same point. It turns out that this is a rather complicated object - we can look at it as a curve of degree six on the projective plane \mathbb{CP}^2 , but it can be interpreted the product of a cubic, an infinitely distant line, and the circumcircle of the original triangle.

The cubic in question was named by the Luxembourger Joseph Neuberg and in the «Encyclopedia of the triangle cubics» [6] is on the first place! We will a bit study this object and get different alternative beautiful descriptions. More properties of the Neuberg cubic can be found in the SCTT-2017 project [8].

The fact that a Schiffler point exists was proposed as a problem by the American engineer, businessman, and amateur geometer Kurt Schiffler in the Feral issue of *Crux Mathematicorum* [1] in 1985. And Schiffler point became one of the most brilliant and new discoveries in triangle planimetry. In the «Encyclopedia of Triangle Centers» [2] Schiffler point is on the honorable 21st place.

The first existence proof was given by the Dutch G.R. Veldkamp and W.A. van der Spek in the June 1986 issue of journal *Crux Mathematicorum* [3] (i.e., the problem had been unsolved for more than a year!). As noted in [5], an independently similar geometric proof I.F. Shariguin came up with, and he is one of the most famous modern set compositors and geometers.

A great contribution to the study of the Schiffler point was made by our contemporary Russian geometer L. A. Emelyanov ([4] and [5]). The authors would like to thank L. A. Emelyanov for his inspiring to create the project.

We wish success to the conference participants in solving the problems!

Part 1. The radical center of Euler circles

Here and below the triangle is given ABC . The points A_1, B_1, C_1 — are the midpoints of the arcs BC, AC and AB , not containing points A, B and C respectively, of

the circle Ω circumcircle about triangle ABC , I — is the center of the incircle of this triangle, and O — is the center of Ω . Points M_a, M_b and M_c — are the midpoints of BC, AC and AB . The incircle $\triangle ABC$ touches sides BC, AC and AB at points K_a, K_b and K_c .

Points A_2, B_2, C_2 are symmetric to the points A_1, B_1, C_1 with respect to the sides BC, AC and AB respectively. The points E_a, E_b and E_c — are the midpoints of the segments IA_2, IB_2 and IC_2 , E — is the midpoint of IO .

Ex. 1. Prove that E — is the center of the nine point circle $\triangle A_1B_1C_1$

Ex. 2. Prove that:

(a) $\triangle A_1OI \sim \triangle A_1IA_2$.

(b) Prove that $\angle C_1A_1E = \angle E_aA_1B_1$.

(c) Prove that the lines A_1E_a, B_1E_b, C_1E_c intersect at one point.

Let us define the points H_c, H_a and H_b — are orthocenters of triangles AIB, BIC and CIA respectively.

Ex. 3. (a) Prove that A_2 — is the center of the circumcircle of BH_aC .

(b) Prove that E_a is the center of the nine point circle of a triangle BIC .

Problem 1 (Schiffler Point). Prove that the Euler lines of triangles AIB, BIC and CIA intersect at a single point.

We denote the Schiffler point of triangle ABC by Sh .

We have not yet proved that the Euler line of triangle Sh passes through the point ABC . Let us postpone this and prove an interesting fact, but before we do so, we must again overcome a few auxiliary statements.

Let ω_a — be the excircle of triangle ABC , tangent the side BC at the point T and the extensions of the sides AB and AC at the points L and N . Similarly the circles ω_b, ω_c . Points I_a, I_b and I_c — are the centers of ω_a, ω_b and ω_c respectively.

Ex. 4. let I' — be the center of the incircle of triangle $M_aM_bM_c$. Prove that the midpoint of segment AA_2 — is the center of the circle $(M_bI'M_c)$.

Ex. 5. Prove that the Euler line of triangle $M_bI'M_c$ is parallel to line A_2I_a .

Ex. 6. The circle α_1 — is the image of a circle (I_bCA) in symmetry with respect to I_bC , circle α_2 — is the image of a circle (I_cBA) with symmetry with respect to I_cB . Prove that the point A_2 lies on the radical axis of circles α_1 and α_2 .

Problem 2 (J.-P. Ehrmann, P. Yiu, K. L. Nguyen). Prove that the radical center of the Euler circles of triangles BI_aC, CI_bA and AI_cB is the Schiffler point for triangle $M_aM_bM_c$.

In [7] other curious properties of the radical axis of Euler circles of triangles CI_bA and AI_cB . In particular, it is claimed that the outer Feuerbach point F_a of triangle ABC lies on it. Interested readers can try to prove this fact on their own or figure out its solution in the source.

Consider a triangle Δ formed by lines similar LN (i.e. connecting the points of tangency of the excircles with the extensions of the corresponding sides) and triangle Θ with vertices at the midpoints of arcs M_bM_c , M_cM_a and M_aM_b of the circumcircle of the triangle $M_aM_bM_c$.

Ex. 7. Prove that triangle Δ is homothetic to triangle Θ .

Ex. 8. Prove that the center of the circumcircle Δ coincides with the orthocenter of the original triangle ABC , and the center of the circumcircle Θ coincides with the center of the Euler circle ABC .

Ex. 9. Prove that the vertices of triangle Δ lie on the radical axes of the corresponding pairs of Euler circles of triangles BI_aC , CI_bA and AI_cB .

Problem 3. Prove that the radical center of the Euler circles of triangles BI_aC , CI_bA and AI_cB lies on the Euler line of triangle ABC .

In particular, it follows that the Schiffler point also lies on the Euler line of triangle ABC . However, there is a simpler way to prove this, which we will discuss in the next section.

Part 2. Direction to Schiffler point

Let's recall one useful statement that will often help below.

Proposition 1. *Two unequal triangles are homothetic if and only if their corresponding sides are parallel.*

Here is one of the most famous applications of this fact.

Ex. 10. Prove that:

- (a) $A_1C_1 \perp BI$
- (b) triangles $A_1B_1C_1$ and $K_aK_bK_c$ are homothetic;
- (c) point I lies on the Euler lines $A_1B_1C_1$ and $K_aK_bK_c$;
- (d) A_1K_a , B_1K_b , C_1K_c and IO intersect at one point.

In a similar way, we can prove the following "close relative" of the previous statement, which will come in handy later.

Ex. 11. Prove that:

- (a) O — is the center of the nine point circle of triangle I_bII_c ;
- (b) I_aO is the Euler line of triangles LTN and I_bII_c .

Let us now proceed to the proof of the key theorem of this part.

Ex. 12. Point X and Y are such that $I \in XY$, $XA \parallel IB$, $YA \parallel IC$ and $XY \parallel BC$. Prove that:

- (a) Triangles XAY and BIC are homothetic;
- (b) Triangles XAY and BIC have the same circumcenters;
- (c) The line connecting the intersection of the medians $\triangle XAY$ and $\triangle BIC$, contains the center of the circumcircle $\triangle XAY$.

Let M be the point of intersection of the medians, r be the radius of the incircle, R is the radius of the circumcircle of triangle ABC .

Ex. 13. Let M_1 be the point of intersection of the medians of triangle XAY . Prove that $MM_1 = \frac{2}{3}r$.

The problem below is a consequence of the statements just proved. It gives us information about the ratio in which the Schiffler point divides the segment MO and, at the same time, is an alternative way of proving the existence of the Schiffler point.

Problem 4 (G.R. Veldcamp, V.A. van der Spek, I. F. Sharygin). Prove that the Euler line of triangle BIC divides segment MO by $\frac{2r}{3R}$, counting from the point M .

Here is a useful simple consequence of this fact, which will help us to prove a number of properties of the Schiffler point.

Let AS intersect the line OM_a at the point Z_a .

Ex. 14. Prove that $\frac{M_a Z_a}{Z_a O} = \frac{r}{R}$.

Let $U \neq L$ a point on the line LN such that $BL = BU$. Let $V \neq N$ a point on the line LN such that $CN = CV$.

Ex. 15. Prove that $\triangle UTV$ и $\triangle K_b K_a K_c$ are symmetric with respect to M_a .

Ex. 16. Prove that $\triangle I_a I_b I_c$ is similar to $\triangle UTV$ with factor $\frac{2R}{r}$.

Let point P_a be the symmetry of point T with respect to LN . The points P_b and P_c are defined similarly. Let W be the intersection of lines $I_a T$ and AP_a .

Let point Q_a be the point of intersection of lines OI_a (by Ex. 11b, this is the Euler line LTN) and BC . The points Q_b and Q_c are defined similarly.

Ex. 17. Prove that $\frac{TW}{WI_a} = \frac{r}{R}$ (hint: use the previous exercise).

As we can see, we have obtained a relation similar to the one in Ex. 14. We will use this a little later, but for now we will prove another auxiliary result.

Let D be the intersection of AI_a and BC . Mid perpendicular to AD intersects the lines BI_a and CI_a at the points G and F .

Ex. 18. Prove that triangle DGF is homothetic to triangle TNL and the center of their homothety lies at the intersection of lines BC and AP_a .

Ex. 19. Prove that AP_a passes through Q_a .

Problem 5 (L. A. Emelyanov и Т. L. Emelyanova). Prove that

- AQ_a, BQ_b and CQ_c intersect at the Schiffler point of the triangle ABC ;
- AP_a, BP_b and CP_c intersect at the Schiffler point of the triangle ABC .

Let H' be the orthocenter of triangle $K_aK_bK_c$.

Ex. 20. Prove that the quadrilaterals K_cAK_bH' and $NALP_a$ are similar.

Problem 6. Prove that the Schiffler point is isogonally conjugate with respect to triangle ABC to the point H' .

Let's talk now about the analog of the Schiffler point. As we know,

Part 3. «Outside» Schiffler points

Let's now talk about analogues of the Schiffler point. Let's replace the incenter with the ecenter in the problems proposed above and carry out similar reasoning. The facts presented in this part are not necessary for the decision, will not be evaluated and are given for informational purposes only.

Fact 1 («Outside» Schiffler point). Let I_a — be the center of an excircle $\triangle ABC$, tangent to side BC . Prove that the Euler lines of triangles ABC, AI_aB, AI_aC, BI_aC have a common point, which divides segment MO externally with respect to $\frac{2r_a}{3R}$, counting from the point M .

We denote the outer A - Schiffler point by Sh_a . Similarly, we define Sh_b and Sh_c .

Fact 2. Symmetric point of K_a with respect to K_bK_c lies on ASh_a .

Fact 3. Intersection of IO and BC lies on ASh_a .

Fact 4. BSh_a, I_cO and AC intersect at the same point.

Let A_0, B_0, C_0 — be the midpoints of the large arcs BC, CA, AB of the circumcircle of triangle ABC respectively.

Fact 5. Sh_a is isogonally conjugate to the midpoint of OI_a with respect to triangle $A_1B_0C_0$.

Fact 6. The radical center of the Euler circles ACI_c, ABI_b and BIC is a M_a - Schiffler point $\triangle M_aM_bM_c$

Schiffler point

Solutions

Ivan Kukharchuk, Leonid Shatunov, Konstantin Shcherbakov

Section 1. The radical center of Euler circles

Here and below we consider the triangle ABC . Points A_1, B_1, C_1 are the midpoints of the arcs BC, AC and AB of the circumcircle Ω of the triangle ABC , which don't contain points A, B and C respectively, I is the center of the incircle of this triangle, and O is the center of Ω . Points M_a, M_b and M_c are the midpoints of BC, AC and AB . The incircle of $\triangle ABC$ touches sides BC, AC and AB at points K_a, K_b and K_c .

Points A_2, B_2, C_2 are symmetric to the points A_1, B_1, C_1 with respect to the sides BC, AC and AB respectively. The points E_a, E_b and E_c are the midpoints of the segments IA_2, IB_2 and IC_2 , E is the midpoint of IO .

Ex. 1. Prove that E is the center of the nine-point circle $\triangle A_1B_1C_1$

Solution. I is orthocenter and O is the circumcenter, respectively.

Ex. 2. Prove that:

(a) $\triangle A_1OI \sim \triangle A_1IA_2$.

(b) $\angle C_1A_1E = \angle E_aA_1B_1$.

(c) The lines A_1E_a, B_1E_b, C_1E_c intersect at one point.

Solution. (a) $\angle A_1A_2B = \angle A_2A_1B = \angle OBA_1 \Rightarrow A_1O \cdot A_1A_2 = A_1B^2 = A_1I^2$.

(b) From the similarity proved in a) A_1E and A_1E_a are isogonal with respect to the angle $\angle IA_1O$. In addition, A_1O and A_1I are isogonal with respect to angle $\angle C_1A_1B_1$ as directions to the circumcenter and the orthocenter. We obtain the required.

(c) This point is isogonally conjugate to point E with respect to triangle $A_1B_1C_1$.

We denote by H_c, H_a and H_b the orthocenters of triangles AIB, BIC and CIA respectively.

Ex. 3. (a) Prove that A_2 is the circumcenter of BH_aC .

(b) Prove that E_a is the center of the nine point circle of a triangle BIC .

Solution. (a) Consider symmetry with respect to BC , then the circle BH_aC maps to the circle BIC , and A_2 maps to its center A_1 .

(b) A_2 and I are the circumcenter and the orthocenter of $\triangle BH_aC$ respectively. Then E_a is the center of the circle of the nine points $\triangle BIC$, and is congruent to $\triangle BH_aC$.

Problem 1 (Schiffler Point). Prove that the Euler lines of triangles AIB, BIC and CIA intersect at a single point.

Solution. Corollary of Exercises 2c and 3b.

We denote the Schiffler point of triangle ABC by Sh .

Let ω_a be the excircle of triangle ABC , touching side BC at point T and the extensions of sides AB and AC at points L and N . The circles ω_b, ω_c are defined similarly. Points I_a, I_b and I_c are the centers of ω_a, ω_b and ω_c respectively.

Ex. 4. Let I' be the center of the incircle of triangle $M_aM_bM_c$. Prove that the midpoint of segment AA_2 is the center of the circle $(M_bI'M_c)$.

Solution. Consider homothety with ratio 2 and center A followed by point reflection at point M_a (this transform coincides with homothety with center at the point of intersection of the medians with ratio -2). Then the triangle $M_aM_bM_c$ maps to the triangle ABC , so I' maps to I . It remains to note that the midpoint of AA_2 maps to A_1 , which is the center of the circle BIC .

Ex. 5. Prove that the Euler line of triangle $M_bI'M_c$ is parallel to line A_2I_a .

Solution. By the same transformation, the Euler line $M_bI'M_c$ maps to the Euler line of triangle BIC , that is, to A_1E_a . But this is the midline in triangle II_aA_2 , so both Euler lines are parallel to A_2I_a .

Ex. 6. The circle α_1 is the image of a circle (I_bCA) in symmetry with respect to I_bC , circle α_2 is the image of a circle (I_cBA) with symmetry with respect to I_cB . Prove that the point A_2 lies on the radical axis of circles α_1 and α_2 .

Solution. Note that I belongs to circumcircles of triangles AI_cB и AI_bC . We denote by K_b and K_c the reflections of I with respect to I_bC and I_cB respectively, so $K_b \in \alpha_1$ and $K_c \in \alpha_2$, K_bI_b is the diameter of α_1 and K_cI_c is the diameter of α_2 . Since $I_bC \perp IC$ and $I_cB \perp IB$, we have that B is the middle of segment IK_c and C is the middle of IK_b . Note also that point I_a belongs to the radical axis of circles α_1 and α_2 , so quadrilateral I_cBCI_b is inscribed and thus $I_aB \cdot I_aI_c = I_aC \cdot I_aI_b$.

Consider homothety with center I and ratio $\frac{1}{2}$. Point A_2 maps to E_a , point K_b maps to C , K_c maps to B , I_a maps to A_1 , I_b maps to B_1 , I_c maps to C_1 . Circles α_1 and α_2 map to circles with diameters B_1C and C_1B respectively (we denote them by β_1 and β_2).

Note that H_a belongs to the radical axis of circles β_1 and β_2 : using notation $X = H_aB \cap C_1I$, $Y = H_aC \cap B_1I$ we have that $X \in \beta_2$, $Y \in \beta_1$ and since $H_aB \perp C_1I$, $H_aC \perp B_1I$ quadrilateral $BXYC$ is inscribed therefore $H_aX \cdot H_aB = H_aY \cdot H_aC$.

Hence we obtain that H_aA_1 is the radical axis of circles β_1 and β_2 . $E_a \in H_aA_1$ (see exercise 3) and this finishes the proof.

Problem 2 (J.-P. Ehrmann, P. Yiu, K. L. Nguyen). Prove that the radical center of the Euler circles of triangles BI_aC , CI_bA and AI_cB is the Schiffler point for triangle $M_aM_bM_c$.

Solution. $I_a = AI \cap CI_b \cap BI_c \Rightarrow \text{pow}_{\alpha_1}(I_a) = \text{pow}_{(CI_bA)}(I_a) = \text{pow}_{(AI_cB)}(I_a) = \text{pow}_{\alpha_2}(I_a) \Rightarrow A_2I_a$ is the radical axis of α_1 and α_2 .

Let us make a homothety with center in A and coefficient $\frac{1}{2}$. Then in the conditions of Eq. 6, the images α_1 and α_2 are nine point circles $\triangle CI_bA$ and $\triangle AI_cB$. Hence, the image A_2I_a lies on the radical axis of the images α_1 and α_2 and by Exercises 4 and 5 is the Euler line $\triangle M_bI'M_c$.

Consider a triangle Δ formed by lines similar LN (i.e. connecting the points of tangency of the excircles with the extensions of the corresponding sides) and triangle Θ with vertices at the midpoints of arcs M_bM_c , M_cM_a and M_aM_b of the circumcircle of the triangle $M_aM_bM_c$.

Ex. 7. Prove that triangle Δ is homothetic to triangle Θ

Solution. Making homothety in M with coefficient -2 triangle Θ passes into triangle $A_1B_1C_1$, hence that the sides of both triangles are perpendicular to the corresponding bisectors of triangle ABC (see Eq. 10a).

Ex. 8. Prove that the circumcenter Δ is the orthocenter of the original triangle ABC , and the circumcenter Θ is the center of the Euler circle $\triangle ABC$.

Solution. The second statement is true due to the construction of Θ . To prove the first statement we formulate the following lemma:

Lemma 1. Given circles ω_1 and ω_2 with drawn common outer tangent AB and two inner tangents CD and EF ($A, C, E \in \omega_1$; $B, D, F \in \omega_2$). Lines CD and EF intersect at a point P , and lines AC and BF intersect at a point X . Prove that $PX \perp AB$.

Proof. Let Q be the point of intersection of outer tangents to ω_1 and ω_2 , and Y be the point of intersection of AE and BD . $AC \perp BD$, since the first line is perpendicular to the bisector of the angle between AB and CD , and the second line is parallel. Similarly $AE \perp BF$. Let Γ be a circle with diameter AB . Then $\Gamma \perp \omega_1$ and $\omega_2 \Rightarrow P$ lies on the polar Q with respect to Γ , i.e., on the line XY . Note that A, B, X, Y orthocentric quadrilateral. We get the required one. \square

Let us continue the solution of Problem 8. Let us denote the vertices of triangle Δ respectively A_d, B_d, C_d . By Lemma 1 $AA_d \perp BC$. Let the bisector $\angle ACB$ intersects B_dA_d at the point H_d , H_a is the base of the altitude from vertex A of triangle ABC . Then the quadrilateral $A_dH_dH_aC$ is inscribed and $\angle B_dA_dA = \frac{\angle C}{2} \Rightarrow A_dA$ is the direction to the circumcenter in $\triangle A_dB_dC_d$. We get what we need.

Ex. 9. Prove that the vertices of triangle Δ lie on the radical axes of the corresponding pairs of Euler circles of triangles BI_aC , CI_bA and AI_cB .

First we prove a lemma:

Lemma 2. Let AH_a, BH_b, CH_c be the altitudes of the triangle ABC . Points P and Q are the reflections of point H_a through the sides AB and AC respectively. Prove that points P, Q, H_b, H_c are collinear.

Proof. Set $R := BP \cap CQ$, $X := BP \cap CH_c$, $Y := CQ \cap BH_b$, H is orthocenter $\triangle ABC$. X is the image of C , and H is the image of the orthocenter $\triangle ABX$ with symmetry relative to AB . Hence, $H \in (XAB)$, similar to $H \in (YAC) \Rightarrow A$ The Miquel point of the $BHCR$ quadrilateral. The projections of the Miquel point on the sides of the quadrangle lie on the same straight line (proved by consistent application of Simson's theorem). We get the required \square

Lemma 3. *Let AA_1, BB_1, CC_1 be the altitudes of the triangle ABC and let A_1A_b and A_1A_c be perpendiculars from point A_1 to AB and AC respectively. Points B_a, B_c, C_a, C_b are defined similarly. Prove that points $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ are concyclic.*

Proof. It's a known fact: A_bA_c and BC are antiparallel with respect to $\angle A$. Also B_cC_b and H_bH_c are antiparallel, i.e. B_cC_b and BC are parallel. So $A_bA_cB_cC_b$ is an inscribed quadrilateral. $A_cC_a \parallel AC$ and $B_cC_b \parallel BC$. Since C_aC_b and AB are antiparallel with respect to $\angle C$, the same is true for the angle between the lines A_cC_a and $B_cC_b \Rightarrow$ quadrilateral $A_cB_cC_aC_b$ is inscribed. Hence we get that pentagon $A_cB_cC_aC_bA_b$ is inscribed and similarly we get that the whole hexagon is inscribed. \square

Now we return to the solution of exercise 9. Using Lemma 2 for $\triangle ACI_b$ we obtain that the line A_dC_d contains feet of altitudes of this triangle falling on its sides AI_b and CI_b . Similarly the line A_dB_d contains feet of altitudes of $\triangle ABI_c$ falling on its sides AI_c and BI_c . These 4 feet of altitudes are concyclic by Lemma 3 applied to $\triangle I_aI_bI_c$. This finishes the proof.

Problem 3. Prove that the radical center of the Euler circles of triangles BI_aC , CI_bA and AI_cB lies on the Euler line of triangle ABC .

Solution. Consider a homothety h mapping the triangle δ to the triangle θ . By exercise 8, h maps the orthocenter of $\triangle ABC$ to the centre of the nine-point circle of $\triangle ABC$. The radical axis of circles (I_bAC) and (I_cAB) maps to the direction to the Schiffler point of triangle $M_aM_bM_c$ from the middle of the arc M_bM_c . Thus according to Problem 2 we have that the Schiffler point of $\triangle M_aM_bM_c$ is fixed under this homothety, therefore it's the homothetic center. Hence it belongs to the line containing the centre of the nine-point circle and the orthocentre of $\triangle ABC$, i.e. to the Euler line.

Part 4. References

- [1] K. Schiffler (1985) Problem 1018 https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v11n02_Feb.pdf *Crux Mathematicorum* 11: 51. Retrieved September 24, 2023.
- [2] C. Kimberling X0021: Schiffler point <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> *Triangle centers and central triangles*
- [3] G. R. Veldkamp, W. A. van der Spek (1986) Solution to Problem 1018. https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v12n06_Jun.pdf *Crux Mathematicorum* 12: 150–152. Retrieved September 24, 2023.
- [4] L.Emelyanov and T. Emelyanova (2003) A Note on the Schiffler Point. <https://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200312.pdf> *Forum Geometricorum* Vol. 3, 113-116.
- [5] L.Emelyanov (2006) The Schiffler Point. In memory of I.F. Sharygin. <https://geometry.ru/persons/emelyanov/shiffler.pdf> *Mathematics at school* № 6, 58 - 60.
- [6] B. Gilbert K001: Neuberg cubic <http://bernard-gibert.fr/Exemples/k001.html> *Cubics in the Triangle Plane*.
- [7] K. Nguyen (2005) On the Complement of the Schiffler Point. <https://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200521.pdf> *Forum Geometricorum* 5: 149–164.
- [8] N. Belukhov, A. Zaslavskii (2017) Fermat points, Euler lines and something else. <https://turgor.ru/lktg/2017/2/2-1ru.pdf> *The Summer Conferences of the Tournament of Towns* 2017.
- [9] F. Bakharev (2021) A conversation about isosceles (equilateral, rectangular) hyperbolas. <https://www.youtube.com/watch?v=xapJu-mT86c>
- [10] A. Akopyan, A. Zaslavskii (2007) Geometric properties of quadratic curves. <https://old.mccme.ru/free-books/akopyan/Zaslavky-Akopyan.pdf> *MCCME Publishing*
- [11] D. Brodskii (2022) Motion of points. <https://turgor.ru/lktg/2022/4/4-1-moving-rus.pdf> *The Summer Conferences of the Tournament of Towns* 2022.

Уклонения многочленов и критические значения

Проект представляют

Navid Safaei, Ярослав Абрамов, Ольга Бурсиан и Константин Кохась

В этом проекте обсуждаются некоторые свойства многочленов. Вы можете без ограничений пользоваться теоремами из «начального» курса математического анализа, в частности, следующими теоремами.

Теорема (Больцано–Коши о промежуточном значении). Если непрерывная функция f имеет на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, то у нее на этом отрезке имеется корень.

Теорема (Вейерштрасса). Любая непрерывная функция f , заданная на отрезке $[a, b]$ ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

1 Несколько предварительных задач

В этом разделе приведено несколько задач для знакомства с темой. Не все из этих задач простые и не обязательно решать их «в первую очередь».

1.1. Для произвольного многочлена $F(x)$ положим $F^{[n]}(x) = \underbrace{F(F(\dots F(x)))}_{n \text{ раз}}$. Докажите, что суще-

ствует такой кубический многочлен $P(x)$, что для каждого натурального N следующее уравнение имеет 3^N различных вещественных корней на отрезке $[-1, 1]$ а) $P^{[N]}(x) = 0$; б) $P^{[N]}(x) = x$.

1.2. Пусть $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ при всех $x \in [-1, 1]$. Докажите, что $|2ax + b| \leq 4$ при $|x| \leq 1$.

1.3. Пусть n — натуральное число и на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция f (можно для простоты думать, что она кусочно-линейная, как на рисунке). Для каждого многочлена F степени n обозначим

$$M(F) = \max_{x \in [a, b]} |F(x) - f(x)|.$$

Допустим, что нашелся многочлен F_n степени n , для которого величина $M(F_n)$ принимает минимальное значение. Докажите, что на отрезке $[a, b]$ найдутся такие точки $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$, что при всех k

$$F_n(x_k) - f(x_k) = \pm M(F_n)$$

и для любой пары соседних точек x_k, x_{k+1} разность $F_n(x) - f(x)$ имеет противоположные знаки.

1.4. Докажите, что каковы бы ни были заданные n точек A_1, A_2, \dots, A_n на плоскости, произведение расстояний

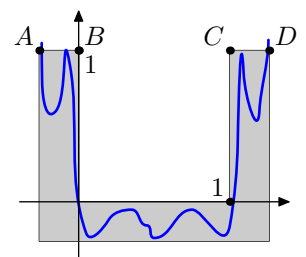
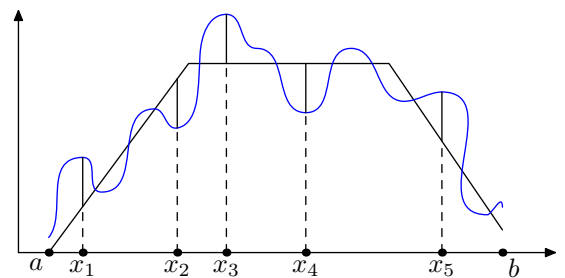
$$MA_1 \cdot MA_2 \cdot \dots \cdot MA_n$$

от них до точки M , пробегающий данный отрезок $[a, b]$ длины $b - a = 2h$, не может оставаться все время менее $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.

1.5. Задача «о стакане». «Стакан» — это фигура на декартовой плоскости, изображенная на рисунке. Ширина стенок и доньшка стакана равна δ . Существуют ли сколь угодно большие n , для которых график многочлена степени n проходит внутри «стеклянной» части стакана, если

$$\text{а) } \delta = \frac{1}{n} \quad \text{б) } \delta = \frac{1}{n^3}?$$

График должен заходить в закрашенную область, пересекая отрезок AB , и выходить из нее, пересекая CD .



2 Многочлены, мало отклоняющиеся от 0

Уклонением (от 0) многочлена F на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ будем называть величину

$$M(F) = \max_{x \in [a, b]} |F(x)|.$$

Многочлен F , у которого $M(F) \leq 1$ на заданном отрезке, будем называть *малуюклоняющимся*. Напомним, что многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется *унитарным*. В этом проекте мы рассматриваем многочлены только с вещественными коэффициентами (хотя в решениях можно использовать и комплексные числа).

Докажем, что среди всех унитарных многочленов степени n существует многочлен F_n , уклонение которого $M(F_n)$ на отрезке $[-1, 1]$ принимает наименьшее возможное значение.

Допустим, что для некоторого числа c мы нашли унитарный многочлен F_n , для которого $M(F_n) = c$ и при этом (как в задаче 1.3) *существуют такие точки $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq 1$, что при всех k*

$$F_n(x_k) = \pm M(F_n),$$

причем для любой пары соседних точек x_k, x_{k+1} значения $F_n(x_k)$ и $F_n(x_{k+1})$ имеют противоположные знаки. Проверим, что тогда c — это минимально возможное уклонение для всех унитарных многочленов степени n .

Действительно, допустим, что нашелся многочлен Q с меньшим уклонением. Тогда в пределах отрезка $[-1, 1]$ график многочлена F_n лежит в горизонтальной полосе ширины $2c$ и выходит на ее границу в точках $(x_k, F_n(x_k))$, а график многочлена Q лежит строго внутри полосы, см. рис. 1. Проведем через точки x_k вертикальные (пунктирные) прямые, они вырежут из полосы n прямоугольников. Внутри каждого прямоугольника графики P_n и Q имеют хотя бы одну точку пересечения. Но это невозможно, поскольку многочлен $P_n - Q$ имеет степень не больше $n - 1$ и не может иметь n корней.

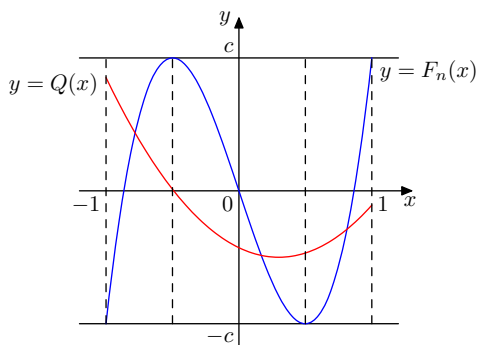


Рис. 1.

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

Рис. 2. Полиномы Чебышева

Более того, в описанной ситуации F_n — единственный унитарный многочлен, уклонение которого равно c .

Таким образом, осталось «угадать» многочлен, удовлетворяющий свойству, выделенному выше курсивом. Эта конструкция широко известна. Заметим, что при натуральных n функция $\cos nx$ с помощью тригонометрических преобразований может быть выражена через $\cos x$ и получаемая формула как раз полиномиальная: $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1$, $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$ и т. д. Таким образом, функция

$$T_n = \cos(n \arccos x)$$

является многочленом (степени n). Он называется *многочленом Чебышева* первого рода. Сразу по определению получаем, что $|T_n(x)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$ и

$$T_n(x_k) = (-1)^k, \quad \text{при } x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Значит, $M(T_n) = 1$, а в качестве многочленов F_n из предыдущего рассуждения следует взять $F_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$, при этом $c = M(F_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Несколько первых многочленов Чебышева приведены в таблице (рис. 2). Приведем еще несколько полезных формул.

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left(x - \cos \frac{\pi}{2n} \right) \left(x - \cos \frac{3\pi}{2n} \right) \left(x - \cos \frac{5\pi}{2n} \right) \dots \left(x - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \quad \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \quad (2)$$

$$2T_n(x) = (2x)^n - \frac{n}{n-1} \cdot C_{n-1}^1 (2x)^{n-2} + \frac{n}{n-2} \cdot C_{n-2}^2 (2x)^{n-4} - \frac{n}{n-3} \cdot C_{n-3}^3 (2x)^{n-6} + \dots \quad (3)$$

2.1. Докажите, что многочлен F_n из приведенного выше рассуждения определен однозначно.

2.2. Докажите, что для любого многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ выполняется неравенство

$$\max_{x \in [a, b]} |P(x)| \geq \frac{|a_d|}{2^{2d-1}} (b-a)^d.$$

Причем равенство достигается только для многочлена $P(x) = \frac{a_d(b-a)^d}{2^{2d-1}} \cdot T_d \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)$. Заодно докажите, что в случае равенства

$$P(x) = \frac{a_d}{2^{d-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} C_d^{2k} (x-a)^k (x-b)^k \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{d-2k}.$$

2.3. Докажите следующее экстремальное свойство многочленов Чебышева. Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени не выше n , причем

$$\max_{x \in [-1, 1]} |F_n(x)| = 1.$$

Тогда при всех вещественных x , $|x| > 1$, выполняется неравенство $|F_n(x)| \leq |T_n(x)|$.

2.4. Пусть $P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j$ для некоторых натуральных m, n .

а) Пусть $a_{mn} = 2^{m-1} 2^{n-1}$. Докажите, что $\max_{-1 \leq x, y \leq 1} |P(x, y)| \geq 1$, причем равенство имеет место только для $P(x, y) = T_m(x) T_n(y)$.

б) Пусть многочлен $P(x, y)$ имеет целочисленные коэффициенты и не является константой ни по x , ни по y . Докажите, что $\max_{-2 \leq x, y \leq 2} |P(x, y)| \geq 4$.

2.5. Пусть x_k — корни многочлена Чебышева T_n , где n — четно. Докажите, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2} = n^2$.

2.6. Докажите, что при всех натуральных m, n (где $m > n$) и целых x число

$$(T_{m+n}(x) - 1)(T_{m-n}(x) - 1)$$

является точным квадратом.

3 Свойства малоуклоняющихся полиномов

3.1. Пусть $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

3.2. Пусть $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что $|a| \leq 4$, $|a| + |b| \leq 4$, $|c| \leq 3$, $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7$.

3.3. Пусть $P(x)$ — многочлен степени d , такой что $|P(x)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что

$$|P(2)| < 4^d.$$

3.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не более 2018, такой что $|P(x)| \leq \frac{1}{|x-\sqrt{3}|}$ при $x \in [-2, 2]$. Докажите, что $|P(\sqrt{3})| \leq 2019$.

3.5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не более n , такой что $|P(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $0 < x < 1$. Докажите, что $|P(0)| \leq 2n + 1$.

3.6. Пусть $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ — малоуклоняющийся многочлен: $|P(x)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что

$$|a_d| + |a_{d-1}| \leq 2^{d-1}.$$

3.7. Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ — многочлен степени не более n , такой что $|P(x)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$. И пусть $T_n(x) = t_n x^n + \dots + t_0$ — это n -й многочлен Чебышева. Докажите, что

а) $|a_{n-2m}| \leq |t_{n-2m}|$ при $m = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Равенство достигается при $P(x) = \pm T_n(x)$.

б) $|a_{n-2m}| + |a_{n-2m-1}| \leq |t_{n-2m}|$ при $m = 0, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Равенство только при $P(x) = \pm T_n(x)$.

3.8. (Неравенство Бернштейна) Если $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени n и $|P(x)| \leq 1$ на $[-1, 1]$, то $|P'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$ на $(-1, 1)$.

3.9. (Теорема Маркова) Пусть многочлен n -й степени $P(x)$ удовлетворяет неравенству $|P(x)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$. Докажите, что

$$|P'(x)| \leq n^2.$$

Равенство достигается только для многочленов $P = \pm T_n$ и только в точках $x = \pm 1$.

4 Интерполяционная формула Лагранжа

Многочлен степени n однозначно задается своими значениями в $n + 1$ точке, причем можно выписать явную формулу. Пусть мы выбрали (попарно различные) точки x_1, x_2, \dots, x_{n+1} и ищем многочлен $F(x)$, который в точках x_k принимает значения y_k :

$$F(x_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Положим $G(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1})$. В произведении, задающем $G(x)$, пропустим k -ю скобку и рассмотрим дробь, в которой числитель содержит остальные скобки, а знаменатель содержит те же скобки, но в них вместо x подставлено x_k :

$$\Pi_k(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1})}.$$

Очевидно, что $\Pi_k(x_k) = 1$ и $\Pi_k(x_j) = 0$ при $j \neq k$. Произведение $\Pi_k(x)$ можно записать в более коротком виде

$$\Pi_k(x) = \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}.$$

Тогда для интересующий нас многочлен $F(x)$ задается формулой (*интерполяционная формула Лагранжа*):

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \cdot \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}. \quad (4)$$

Её можно использовать также и для изучения коэффициентов многочлена F , отслеживая коэффициенты при x^k в обеих частях этого тождества.

4.1. Докажите, что $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(k-1)\pi}{n-1}} = \frac{n(n-2)}{3}$.

4.2. Пусть $\theta_k = (k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$, где $k = 1, \dots, n$. Докажите, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 2n^2$.

4.3. Пусть $x_k = \cos \theta_k$, $k = 1, \dots, n$. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ степени не выше $n - 1$ удовлетворяет тождеству

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P(x_k) \sqrt{1 - x_k^2} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k}.$$

4.4. Пусть $x_k = \cos \theta_k$, $k = 1, \dots, n$. Докажите, что $\sum_{k=1}^n (1 - x x_k) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_k)} \right)^2 = 1$.

5 Уклонение на других множествах

5.1. Пусть $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ — многочлен, малоуклоняющийся на двух отрезках: $|P(x)| \leq 1$ при $x \in [0, 1] \cup [99, 100]$. Найдите наибольшее возможное значение $P(50)$

а) при $d = 2$; б) при $d = 100$.

5.2. Пусть A — объединение конечного количества отрезков на вещественной прямой. Илья нашел непостоянный многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1 такой, что $|Q(x)| < 1,999$ при всех $x \in A$. Докажите, что *Навид* может найти непостоянный многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1 такой, что $|P(x)| < 1$ при всех $x \in A$.

5.3. На вещественной прямой даны три непересекающихся отрезка $[-b; -a]$, $[-c; c]$ и $[a; b]$, причем $b^2 = a^2 + c^2$. Докажите, что многочлен $f(x)$ степени $2n$ с единичным старшим коэффициентом не может на этих отрезках по абсолютному значению быть меньше чем $2 \left(\frac{ac}{2}\right)^n$.

5.4. Теорема Пойя. Пусть S — подмножество \mathbb{R} , представляющееся в виде объединения конечного числа непересекающихся отрезков, ℓ — сумма длин этих отрезков. Тогда для любого многочлена $f(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом найдется такое число $y \in S$, что

$$|f(y)| \geq 2 \left(\frac{\ell}{4}\right)^n.$$

Причем, если S не является отрезком, то знак в неравенстве строгий.

5.5. Найдите унитарный многочлен степени n , имеющий наименьшее уклонение на множестве $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

6 После промежуточного финиша

6.1. Докажите следующее усиление задачи 2.3. Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени n , причем

$$\max_{x \in [-1, 1]} |F_n(x)| = 1.$$

Тогда при всех вещественных x , $|x| > 1$, и всех $j = 0, 1, \dots, n$ выполняется неравенство для производных: $|F_n^{(j)}(x)| \leq |T_n^{(j)}(x)|$.

6.2. Докажите следующее усиление задачи 3.7. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени не более n , такой что

$$|P(\alpha_i)| \leq 1, \quad \text{где } \alpha_i = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Тогда верны оба утверждения а) и б) задачи 3.7.

6.3. Докажите тригонометрическую модификацию задачи 3.8. Пусть

$$P(\varphi) = a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

— тригонометрический многочлен порядка n с вещественными коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n . Положим $M = \max_{\varphi \in \mathbb{R}} |P(\varphi)|$. Докажите, что

$$|P'(\varphi)| \leq nM \quad \text{для всех } \varphi \in \mathbb{R}.$$

6.4. Докажите, что для любого натурального n существует многочлен $P(x)$ степени не больше $100n$, такой что

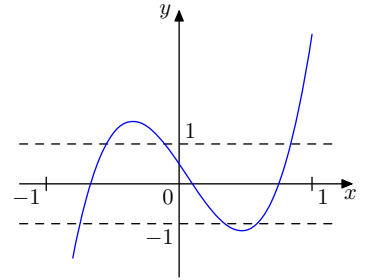
$$|P(0)| > |P(1)| + \dots + |P(n^2)|.$$

Решения

1 Несколько предварительных задач

1.1.

Первое решение. В этой задаче ничего не нужно знать о многочленах Чебышева, подойдет любой кубический многочлен, который троекратно накрывает отрезок $[-1, 1]$, т. е. для которого каждая точка отрезка $[-1, 1]$ имеет три прообраза. Например, можно выбрать любые $a, b, c \in (-1, 1)$ и тогда подойдет многочлен $F(x) = A(x-a)(x-b)(x-c)$, где число A выбирается настолько большим, чтобы локальные экстремумы F были по модулю больше 1.



Второе решение. Пусть $P(x) = 4x^3 - 3x$, тогда $P(\cos \theta) = \cos(3\theta)$. Поскольку функция $f(\theta) = \cos \theta$ является биекцией на отрезке $[0, \pi]$, ясно, что $P([-1, 1]) = [-1, 1]$ и

$$P^{[2]}(\cos \theta) = P(\cos(3\theta)) = \cos(9\theta)$$

Аналогично, $P^{[N]}(\cos \theta) = \cos(3^N \theta)$.

Из первого уравнения $\cos(3^N \theta) = 0$ получаем 3^N различных корней: $\theta = 3^{-N}(2k+1)\pi/2$, $k = 0, \dots, 3^N - 1$. Из второго уравнения $\cos(3^N \theta) = \cos \theta$ имеем $(3^N \pm 1)\theta = 2k\pi$ и тоже получаем 3^N различных корней: $\theta = (2k\pi)/(3^N + 1)$, $k = 1, \dots, \frac{3^N+1}{2}$.

1.2. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку $f'(x) = 2ax + b$ — линейная функция, ее максимум модуля достигается на границе отрезка, т. е. достаточно проверить неравенство только при $x = \pm 1$. Взяв $x = 1$, заметим, что

$$2a + b = 1,5(a + b + c) + 0,5(a - b + c) - 2c = 1,5f(1) + 0,5f(-1) - 2f(0).$$

Тогда

$$|2a + b| \leq 1,5|f(1)| + 0,5|f(-1)| + 2|f(0)| \leq 4.$$

Проверка неравенства при $x = -1$ делается аналогично. Или можно применить уже сделанную оценку к функции $f(-x)$, имеющей то же уклонение 1.

Задачу можно рассматривать как простое следствие задачи 3.7. Действительно, при $|x| \leq 1$

$$|2ax + b| \leq 2|a||x| + |b| \leq 2|a| + |b| = |a| + (|a| + |b|) \leq 2 + 2 = 4.$$

Здесь последнее неравенство использует оба пункта задачи 3.7 (при $n = 2$, $m = 2$), в которых сравниваются коэффициенты малоуклоняющегося многочлена степени 2 со старшим коэффициентом T_2 .

1.3. См. [2, §5, с. 16–18]. Идея проста: если таких точек будет меньше, чем указано, то многочлен F_n можно «подправить», уменьшив его отклонение $M(F_n)$.

Отметим, что условие задачи допускает, что у многочлена F_n могло бы быть несколько последовательно расположенных точек максимального отклонения, в которых знак выражения $F_n(x) - f(x)$ одинаков. Тогда в набор x_k мы могли бы включить лишь какую-то одну из этой серии точек.

Допустим, что мы смогли построить лишь набор x_1, \dots, x_p из $p \leq n$ таких точек. Разобьем отрезок $[a, b]$ на p отрезков (переобозначим $a = a_0$, $b = a_p$)

$$[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{p-1}, a_p]$$

так, чтобы в каждый отрезок $[a_{i-1}, a_i]$ входили лишь точки отклонения одинакового знака, включая x_i . Тогда на каждом таком отрезке

$$-M(F_n) \leq \max_{x \in [a_{i-1}, a_i]} |F_n(x) - f(x)| \leq M(F_n),$$

где один из знаков неравенства обязательно строгий. Тогда по теореме Вейерштрасса найдется такое α , $0 < \alpha < M(F)$, (можно считать, что это α одно и то же для всех отрезков) что на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ выполняется лишь одно из неравенств

$$-M(F_n) \leq F_n(x) - f(x) < M(F_n) - \alpha, \quad \text{или} \quad -M(F_n) + \alpha < F_n(x) - f(x) \leq M(F_n).$$

Положим $Q(x) = \pm(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{p-1})$, где знак выбирается так, чтобы на всех отрезках $[a_{i-1}, a_i]$ знак $Q(x)$ совпадал со знаком $F_n(x_i) - f(x_i)$. Выберем теперь небольшое положительное число ε так, чтобы выполнялось неравенство $\max_{x \in [a, b]} |\varepsilon Q(x)| < \alpha$. Тогда при всех $x \in [a, b]$

$$-M(F_n) < F_n(x) - \varepsilon Q(x) - f(x) < M(F_n).$$

Очевидно, что $\deg Q \leq n-1$, значит, $F_n - \varepsilon Q$ — многочлен степени n , дающий меньшее отклонение, чем F_n . Противоречие.

1.4. [7, задача 135]. Полагая, что речь идет о комплексной плоскости, мы можем считать, что отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[-h, h]$ вещественной оси. Расстояние от переменной точки z до точки A_k можно записать как $|z - A_k|$. Тогда требуется доказать, что

$$\max_{z \in [-h, h]} |(z - A_1)(z - A_2) \dots (z - A_n)| \geq 2 \left(\frac{h}{2}\right)^n.$$

Выражение под модулем — (произвольный) унитарный многочлен с комплексными коэффициентами. Требуемое неравенство следует из минимаксного свойства полиномов Чебышева, если мы проверим, что полиномы Чебышева имеют минимальное уклонение в классе полиномов с комплексными коэффициентами. Это вытекает из следующих соображений.

Поскольку $z \in [-h, h] \subset \mathbb{R}$, мы фактически рассматриваем наш многочлен как комплексно-значный многочлен вещественной переменной, запишем его в виде

$$F(z) = (z - A_1)(z - A_2) \dots (z - A_n) = F_1(z) + iF_2(z),$$

где коэффициенты многочленов F_1 и F_2 — это соответственно вещественные и мнимые части коэффициентов $F(z)$. Заметим, что $\deg F_1 = n$, $\deg F_2 \leq n-1$ и $|F(z)| = |F_1(z) + iF_2(z)| \geq |F_1(z)|$.

1.5. Ответ: а) существует, б) не существует.

Чтобы не возиться с масштабированием многочленов, зафиксируем начало координат, растянем стакан в 2 раза по горизонтали, после чего сдвинем на вектор $(-1, \frac{\delta}{2})$. Тогда в пределах промежутка $[-1, 1]$ мы имеем многочлен F с уклонением $\frac{\delta}{2}$. Попробуем взять $F = \frac{\delta}{2} T_n$ с четным n .

а) Пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Оценим величину $F(1 + \frac{2}{n})$ с помощью формулы (2):

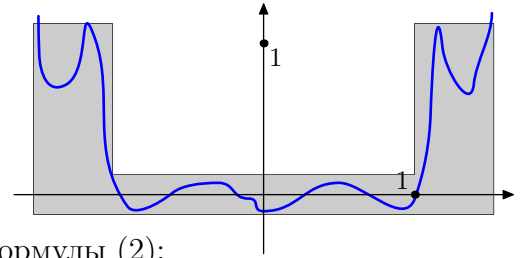
$$F\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{4n} \left(1 + \frac{2}{n} + \sqrt{\frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}\right)^n + \frac{1}{4n} \left(1 + \frac{2}{n} - \sqrt{\frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}\right)^n > \frac{1}{4n} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Выражение в правой части стремится к бесконечности, поэтому $F(1 + \frac{2}{n}) \gg 1$ при больших n . Это значит, что многочлен F удовлетворяет требованиям задачи.

б) Пусть $\delta = \frac{1}{n^3}$. Оценим величину $F(1 + \frac{2}{n^3})$ с помощью формулы (2):

$$F\left(1 + \frac{2}{n^3}\right) = \frac{1}{4n^3} \left(1 + \frac{2}{n^3} + \sqrt{\frac{4}{n^3} + \frac{4}{n^6}}\right)^n + \frac{1}{4n^3} \left(1 + \frac{2}{n^3} - \sqrt{\frac{4}{n^3} + \frac{4}{n^6}}\right)^n < \frac{2}{4n^3} \left(1 + \frac{10}{n^{3/2}}\right)^n.$$

Выражение в правой части стремится к 0. Значит, $F(1 + \frac{2}{n^3}) < 1$ при больших n . Осталось воспользоваться экстремальным свойством многочленов Чебышева из задачи 2.3: вне $[-1, 1]$ многочлены Чебышева растут быстрее всех малоуклоняющихся многочленов. Значит, для любого многочлена F , график которого проходит по доньшку нашего стакана, выполняется неравенство $F(1 + \frac{2}{n^3}) < 1$, то есть его график выходит из стеклянной части стакана, пересекая вертикальную стенку, что нарушает требования условия задачи.



2 Многочлены, мало отклоняющиеся от 0

2.1. Доказательство экстремального свойства полиномов Чебышева из раздела 2 и эту задачу мы взяли в [6, лекция 7].

Решение 1. Пусть имеются два унитарных многочлена F_n и G с отклонением c . Тогда многочлен $h(x) = \frac{1}{2}(F_n(x) + G(x))$, будучи средним арифметическим, во всех точках $x \in [-1, 1]$ удовлетворяет неравенству

$$-c \leq \min(F(x), G(x)) \leq h(x) \leq \max(F(x), G(x)) \leq c,$$

т. е. h — тоже унитарный многочлен степени n , имеющий уклонение c . Заметим, что принимать значение $\pm c$ многочлен h может только в тех точках x , где $F_n(x) = G(x) = c$ или $F_n(x) = G(x) = -c$. Поскольку в силу рассуждений из начала раздела 2 многочлен h должен попеременно принимать значения $\pm c$ в каких-то $n+1$ точках отрезка $[-1, 1]$, мы приходим к выводу, что точки максимального уклонения многочленов F_n и G совпадают.

Таким образом, унитарные многочлены F_n и $G(n)$ совпадают в $n+1$ точке, значит, они равны.

Решение 2. Другое рассуждение, более похожее на рассуждения из раздела 2, можно провести следующим образом. Пусть $x_i = \cos \frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, — точки максимального уклонения многочлена Чебышева T_n . Тогда выполнены следующие свойства.

1. На каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ многочлен $T_n - F_n$ имеет корень. Действительно, пусть для определенности $T_n(x_{k-1}) = -1$, $T_n(x_k) = 1$, тогда $T_n(x_{k-1}) - F_n(x_{k-1}) \leq 0$, $T_n(x_k) - F_n(x_k) \geq 0$ и существование корня обеспечивается теоремой о промежуточном значении.

2. Суммарное количество корней $T_n - F_n$ с учетом их кратности не меньше числа отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Действительно, построим отображение из множества корней в множество отрезков: если на интервале (x_{i-1}, x_i) имеется корень — ставим ему в соответствие отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. Если же корень оказался на конце отрезка, скажем в x_i , то это корень кратности не меньше 2 (оба многочлена достигают в точке x_i экстремум) — поставим в соответствие этому корню сразу два отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$. Очевидно, что каждый отрезок сопоставлен хотя бы одному корню.

Осталось заметить, что число отрезков равно n , т. е. многочлен $T_n - F_n$ степени не выше $n-1$ имеет n корней. Значит, $T_n = F_n$.

2.2. Отображение $y \mapsto \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y$ взаимно однозначно отображает $[-1, 1]$ на $[a, b]$. Если мы подставим $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y$ то для многочлена $P(x)$ степени d получаем

$$\max_{a \leq x \leq b} |P(x)| = \max_{-1 \leq y \leq 1} |P(x(y))| \geq \frac{|a_d|(b-a)^d}{2^{2d-1}},$$

поскольку старший коэффициент многочлена $P(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y)$ равен $|a_d|(\frac{b-a}{2})^d$. Равенство достигается только в случае, когда $P(x(y)) = |a_d|\frac{(b-a)^d}{2^{2d-1}}T_d(y)$, или (если сделать обратную замену) $P(x) = \frac{a_d(b-a)^d}{2^{2d-1}} \cdot T_d(\frac{2x-a-b}{b-a})$.

Для доказательства последнего равенства из условия задачи, перейдем к переменной y . Тогда $x - a = \frac{b-a}{2}(y+1)$, $x - b = \frac{b-a}{2}(y-1)$, $x - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}y$ и

$$\frac{a_d}{2^{d-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} C_d^{2k} (x-a)^k (x-b)^k \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{d-2k} = \frac{a_d(b-a)^d}{2^{2d-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} C_d^{2k} (y^2-1)^k y^{d-2k}. \quad (5)$$

В последней сумме легко узнать раскрытую по биному Ньютона формулу (2) и тогда правая часть последнего равенства равна $|a_d|\frac{(b-a)^d}{2^{2d-1}}T_d(y)$, что и требуется. Отметим забавный нюанс. Область определения формулы (2) — множество, заданное неравенством $|y| \geq 1$, а в формуле (5) мы используем $y \in [-1, 1]$. Читателям, которые увидели в этом проблему, мы предлагаем разобраться с ней самостоятельно.

2.3. Достаточно проверить неравенство при $x > 1$. Сменив при необходимости знак P , мы можем считать, что $P(x) > 0$ при $x > 1$. Предположим противное, пусть при некотором $x_0 > 1$ оказалось, что $1 < \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}$. Пусть

$$R(x) = \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)} T_n(x) - P(x).$$

Рассмотрим значения этого многочлена в точках $\alpha_i = \cos \frac{i\pi}{n}$ ($i = 0, \dots, n$) — это точки максимального уклонения многочлена T_n , в них $T_n(\alpha_i) = (-1)^i$. Тогда $R(\alpha_i) = (-1)^i \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)} - P(\alpha_i)$. В силу сделанного предположения знак этого выражения равен $(-1)^i$. Значит, многочлен R имеет корень на каждом интервале (α_i, α_{i+1}) .

Но кроме того, очевидно, $R(x_0) = 0$. Таким образом, многочлен $R(x)$ имеет $n + 1$ корень. Следовательно, $P(x) = \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)} T_n(x)$. Но тогда при $x = 1$ получаем противоречие $P(1) = \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)} > 1$.

Вот альтернативное рассуждение, использующее интерполяционную формулу Лагранжа.

Пусть $b_i = \cos \frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, — точки максимального уклонения многочлена Чебышева T_n . Положим

$$g_k(x) = \prod_{j:j \neq k} \frac{x - b_j}{b_k - b_j}.$$

Тогда для любого многочлена h степени n при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнена формула Лагранжа:

$$h(x) = \sum_{k=0}^n h(b_k) g_k(x).$$

Пусть $x > 1$, тогда $\text{sign } g_k(x) = (-1)^k$ и, значит, $|g_k(x)| = (-1)^k g_k(x) = T_n(b_k) g_k(x)$. Если h — малоуклоняющийся многочлен, то получаем оценку

$$|h(x)| = \left| \sum_{k=0}^n h(b_k) g_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |g_k(x)| = \sum_{k=0}^n (-1)^k g_k(x) = \sum_{k=0}^n T_n(b_k) g_k(x) = T_n(x).$$

В этом рассуждении мы использовали неравенство $|h(x)| \leq 1$ только в точках $x = b_i$. Таким образом, с точностью до того, что мы не разобрали аккуратно случай $x = -1$, доказана теорема

Теорема. Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени не выше n , причем

$$|F_n(b_i)| \leq 1, \quad \text{где } b_i = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда при всех вещественных x , $|x| > 1$, выполняется неравенство $|F_n(x)| \leq |T_n(x)|$.

2.4. а) Разложим многочлен $P(x, y)$ по степеням x :

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^m Q_i(y) x^i. \quad (6)$$

Оценим $Q_m(y)$, используя неравенство из 2.2:

$$\max_{y \in [-1, 1]} |Q_m(y)| \geq \frac{2^{m-1} 2^{n-1}}{2^{2n-1}} 2^n = 2^{m-1}.$$

Старший коэффициент выражения $\sum_{i=0}^m Q_i(y) x^i$ равен $Q_m(y)$, если мы рассматриваем эту сумму как многочлен от x , мы можем оценить её по неравенству из 2.2:

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{i=0}^m Q_i(y) x^i \right| \geq \frac{|Q_m(y)|}{2^{2m-1}} 2^m = \frac{|Q_m(y)|}{2^{m-1}}.$$

Окончательно получаем:

$$\max_{y \in [-1,1]} \max_{x \in [-1,1]} P(x, y) \geq \max_{y \in [-1,1]} \frac{|Q_m(y)|}{2^{m-1}} \geq 1.$$

Выясним теперь, когда достигается равенство. Пусть $\max_{x \in [-1,1], y \in [-1,1]} P(x, y) = 1$. Тогда из проделанных рассуждений заключаем, что $\max_{y \in [-1,1]} |Q_m(y)| = 2^{m-1}$. Следовательно, по 2.2 (случай равенства) $Q_m(y) = 2^{m-1}T_n(y)$. В частности, $Q_m(y_i) = \pm 2^{m-1}$, $i = 0, 1, \dots, n$, где y_i — точки максимального уклонения многочлена T_n .

Рассматривая $P(x, y_i)$ как многочлен от x , оценим его по неравенству из 2.2: $\max_{x \in [-1,1]} P(x, y_i) \geq 1$. Так как, кроме того, $\max_{x \in [-1,1]} P(x, y_i) \leq \max_{x \in [-1,1], y \in [-1,1]} P(x, y) = 1$, то на самом деле имеет место равенство: $\max_{x \in [-1,1]} P(x, y_i) = 1$. По утверждению 2.2 это возможно, только если $P(x, y_i) = \pm T_m(x)$.

Итак,

$$P(1, y_i) = \pm T_m(1) = \pm 1.$$

Аналогично, если все эти рассуждения провести по x ,

$$P(x_i, y) = \pm T_n(y), \quad \text{и} \quad P(x_i, 1) = \pm T_n(1) = \pm 1.$$

Заметим теперь, что если записать произведение $T_m(x)T_n(y)$ как разложение по степеням x

$$T_m(x)T_n(y) = \sum_{i=0}^m Q_i^*(y)x^i,$$

то для всех точек $y = y_k$ мы имеем равенство $Q_i^*(y_k) = Q_i(y_k)$, а поскольку количество точек y_k равно $n+1$, при всех i многочлены Q_i^* и Q_i совпадают тождественно. Таким образом, $T_m(x)T_n(y) = P(x, y)$.

б) Разложим многочлен P по степеням x , см. (6). Оценим $Q_m(y)$, используя неравенство из 2.2:

$$\max_{y \in [-2,2]} |Q_m(y)| \geq \frac{|a_{d_m}|}{2^{2d-1}} 4^d = 2|a_{d_m}| \geq 2,$$

где d_m — степень $Q_m(y)$. Тогда

$$\max_{y \in [-2,2]} \max_{x \in [-2,2]} P(x, y) \geq \max_{y \in [-2,2]} \frac{|Q_m(y)|}{2^{2d-1}} 4^d = 2 \max_{y \in [-2,2]} |Q_m(y)| \geq 4.$$

2.5. Для набора чисел x_1, \dots, x_n обозначим через σ_i стандартные симметрические функции: σ_1 — это сумма чисел, σ_2 — сумма попарных произведений и т. д. Тогда как нетрудно видеть,

$$\sum_k \frac{1}{x_k^2} = \frac{\sigma_{n-1}^2 - 2\sigma_n\sigma_{n-2}}{\sigma_n^2}.$$

Впрочем, приблизительно то же самое можно увидеть, если рассмотреть выражение $x^n T_n\left(\frac{1}{x}\right)$. Осталось сосредоточиться, применить теорему Виета и воспользоваться явным видом коэффициентов из формулы (3).

Второе решение. Пусть $P(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = \prod_{i=1}^k (x - x_i)$. Тогда $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{x - x_i}$. Продифференцировав это равенство, получим:

$$\frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = \sum_{i=1}^k \frac{-1}{x - x_i}$$

Подставляя $x = 0$, получаем

$$\frac{P'(0)}{P(0)^2} - \frac{P''(0)}{P(0)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{x - x_i}$$

Теперь используя формулу (3) на стр. 3, вычислим $P(0)$, $P'(0)$ и $P''(0)$.

2.6. Полагая $\varphi = \cos x$ и вооружившись тригонометрическими формулами, получаем

$$(T_{m+n}(x) - 1)(T_{m-n}(x) - 1) = (\cos(m+n)\varphi - 1)(\cos(m-n)\varphi - 1) = (\cos m\varphi - \cos \varphi)^2 = (T_m(x) - T_n(x))^2.$$

Таблица на рис. 2 наводит на мысль, что коэффициенты многочленов Чебышева — целые числа. А творчески переосмысленная формула (3) или размышление о том, как понижается кратность аргумента под косинусом и синусом при использовании тригонометрических формул, окончательно убеждают нас в этом. Итак, многочлены Чебышева имеют целые коэффициенты и, следовательно, принимают целые значения в целых точках. Таким образом, правая часть полученной формулы есть квадрат целого числа.

3 Свойства малоуклоняющихся полиномов

3.1. Техническая возня с такими неравенствами не очень интересна, поэтому ограничимся замечанием, что утверждение следует из задачи 3.7.

3.2. Аналогично предыдущей задаче.

3.3. По утверждению задачи 2.3 и формуле (2)

$$|P(2)| \leq |T_d(2)| = \frac{(2 + \sqrt{3})^d + (2 - \sqrt{3})^d}{2} < 4^d.$$

Для оценки $|T_d(2)|$ можно обойтись и без формулы (2). Например, может помочь неравенство о средних.

$$|T_d(2)| = 2^{d-1} \prod_{k=1}^d \left| 2 - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2d} \right| \leq 2^{d-1} \left(\frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \left| 2 - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2d} \right| \right)^d = 2^{d-1} \cdot 2^d.$$

Последняя сумма легко подсчитывается благодаря четности функции $\cos x$. Впрочем если с помощью этой четности сгруппировать сомножители парами с самого начала, то и неравенство о средних не нужно.

3.4. Решение 1. Предъявим сначала многочлен $R(x)$, для которого $R(\sqrt{3}) = 2019$. Заметим, что $T_{2019}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T_{2019}\left(\cos \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{2019\pi}{6} = 0$. Тогда положим $R(x) = \frac{T_{2019}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{x - \sqrt{3}}$ (сократив дробь), а значение $R(\sqrt{3})$ найдем по непрерывности (с помощью правила Лопиталья):

$$R(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{T_{2019}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{x - \sqrt{3}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{T_{2019}(\cos \theta)}{2\cos \theta - \sqrt{3}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2019 \cdot \theta)}{2\cos \theta - \sqrt{3}} = \frac{2019 \cdot \sin \frac{2019\pi}{6}}{2\sin \frac{\pi}{6}} = 2019. \quad (7)$$

Предположим от противного, что нашелся многочлен P , для которого $P(\sqrt{3}) > 2019$. Пусть $\beta_i = 2\cos \frac{\pi}{2019}$, $i = 0, \dots, 2019$ и $\gamma = \sqrt{3}$. Тогда

$$|R(\beta_i)| = \frac{1}{|\beta_i - \sqrt{3}|} \geq |P(\beta_i)| \quad \text{и} \quad P(\gamma) > |R(\gamma)|.$$

Возьмем $\epsilon > 0$ и положим $Q_\epsilon(x) = R(x) - (1 - \epsilon)P(x)$. Тогда для достаточно маленьких ϵ

$$\text{sign}(Q_\epsilon(\beta_i)) = \text{sign}(R(\beta_i) - (1 - \epsilon)P(\beta_i)).$$

Поскольку знаки $R(\beta_i)$ чередуются, многочлен Q_ϵ имеет не меньше 2019 корней. Это невозможно.

Решение 2. Проверим еще одно экстремальное свойство полиномов Чебышева.

Лемма. Пусть $R(x)$ — малоуклоняющийся многочлен степени не более n : $|R(x)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$, имеющий общий корень x_0 с многочленом T_n : $R(x_0) = T_n(x_0) = 0$. Тогда $|R'(x_0)| \leq |T'_n(x_0)|$.

Доказательство. Допустим, что нашелся многочлен R , для которого $|R'(x_0)| \geq |T'_n(x_0)|$. Пусть $x_i = \cos \frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, — точки максимального уклонения многочлена Чебышева T_n . И пусть $x_0 \in (x_{k-1}, x_k)$. Меняя при необходимости знак $R(x)$, мы можем считать, что выражения $R'(x_0)$ и $T'_n(x_0)$ одинакового знака. Пусть оказалось, что $T_n(x_{k-1}) = -1$, $T_n(x_k) = 1$ и $R'(x_0) > T'_n(x_0) > 0$, другие комбинации знаков разбираются аналогично. Тогда, как нетрудно убедиться, многочлен $R - T_n$ имеет на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ еще один корень, кроме x_0 . Рассуждая как во втором решении задачи 2.1, получаем что многочлен $R - T_n$ степени не выше n имеет на отрезке $[-1, 1]$ не меньше $n + 1$ корня, что невозможно.

Перейдем к решению задачи. Пусть $x = 2y$, $R(y) = P(2y)(2y - \sqrt{3})$, тогда $|R(y)| \leq 1$ при $y \in [-1, 1]$, а число $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — общий корень $R(y)$ и $T_{2019}(y)$. По лемме $|R'(\frac{\sqrt{3}}{2})| \leq |T'_{2019}(\frac{\sqrt{3}}{2})|$. Осталось подсчитать, что $R'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2P(\sqrt{3})$, $T'_{2019}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 \cdot 2019$ — последнее вычисляется так же, как в (7).

3.5. Решение 1. По условию $|xP(x^2)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$. Пусть $Q(x) = xP(x^2)$. Рассмотрим $2n + 2$ точки $\alpha_k = \cos \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 0, \dots, 2n + 1$. Заметим, что $1 = \alpha_0 > \dots > \alpha_{2n+1} = -1$ и

$$\alpha_k + \alpha_{2n+1-k} = 0. \quad (8)$$

Поскольку $\deg Q \leq 2n + 1$, мы можем задать многочлен Q с помощью его значений в точках α_k с помощью интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} Q(\alpha_i) \frac{R(x)}{(x - \alpha_i)R'(\alpha_i)}, \quad R(x) = (x - \alpha_0) \dots (x - \alpha_{2n+1}) = (x^2 - \alpha_0^2) \dots (x^2 - \alpha_n^2).$$

Так как $R(x)$ — четная функция, ее производная $R'(x)$ нечетная, а функция $Q(x)$, кстати, тоже нечетная. Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(x) &= R(x) \sum_{i=0}^n \left(\frac{Q(\alpha_i)}{(x - \alpha_i)R'(\alpha_i)} + \frac{Q(-\alpha_i)}{(x + \alpha_i)R'(-\alpha_i)} \right) = \\ &= R(x) \sum_{i=0}^n \frac{Q(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)} \left(\frac{1}{x - \alpha_i} + \frac{1}{x + \alpha_i} \right) = R(x) \sum_{i=0}^n \frac{Q(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)} \cdot \frac{2x}{x^2 - \alpha_i^2}. \end{aligned}$$

Теперь

$$P(x^2) = \frac{Q(x)}{x} = 2R(x) \sum_{i=0}^n \frac{Q(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)} \cdot \frac{1}{x^2 - \alpha_i^2}.$$

И поскольку $|Q(\alpha_i)| \leq 1$, получаем неравенство

$$|P(0)| \leq 2|R(0)| \sum_{i=0}^n \frac{1}{\alpha_i^2 |R'(\alpha_i)|}. \quad (9)$$

Проверим, что при $Q(x) = T_{2n+1}(x)$ достигается равенство, это позволит нам вычислить значение правой части.

Действительно, проделанные разложения имеют место для любого нечетного многочлена степени $2n + 1$. В частности для $Q(x) = T_{2n+1}(x)$ имеем

$$\frac{T_{2n+1}(x)}{x} = 2R(x) \sum_{i=0}^n \frac{T_{2n+1}(\alpha_i)}{(x^2 - \alpha_i^2)R'(\alpha_i)}.$$

Поскольку $T_{2n+1}(\alpha_i) = (-1)^i$ и $\operatorname{sgn}(R'(\alpha_i)) = (-1)^i$, последнее выражение можно ещё слегка упростить:

$$\frac{T_{2n+1}(x)}{x} = 2R(x) \sum_{i=0}^n \frac{1}{(x^2 - \alpha_i^2)|R'(\alpha_i)|}.$$

Таким образом, значение $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{T_{2n+1}(x)}{x} \right|$ совпадает с правой частью (9), и нам остается лишь досчитать этот предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{T_{2n+1}(x)}{x} \right| = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos(2n+1)t}{\cos t} \right| = 2n+1.$$

Решение 2. Пусть $Q(x) = xP(x^2)$, тогда Q — малоуклоняющийся многочлен степени не более $2n+1$, причем $Q(0) = 0 = T_{2n+1}(0)$. Тогда по лемме из второго решения предыдущей задачи $|Q'(0)| \leq |T'_{2n+1}(0)|$. Осталось заметить, что $Q'(0) = P(0)$, $T'_{2n+1}(0) = 2n+1$.

3.6. Утверждение следует из следующей задачи. Но мы докажем его непосредственно.

Заменяя при необходимости x на $-x$ или меняя знак многочлена, мы сведем задачу к случаю, когда у данного многочлена $P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots$ оба коэффициента a_d и a_{d-1} положительны. Предположим, что при этом $m = \frac{2^{n-1}}{a_d + a_{d-1}} < 1$. Тогда $\max_{x \in [-1, 1]} |mP(x)| = m < 1$ и, следовательно, знаки выражений $T_d(x)$ и $T_d(x) - mP(x)$ в точках максимального уклонения многочленов T_d одинаковы. Тогда многочлен $T_d(x) - mP(x)$ степени d имеет d корней на отрезке $[-1, 1]$ и эти корни x'_k перемежаются с точками максимального уклонения:

$$\cos \frac{0\pi}{d} > x'_1 > \cos \frac{1\pi}{d} > x'_2 > \cos \frac{2\pi}{d} > \dots > x'_n > \cos \frac{d\pi}{d}. \quad (10)$$

Но заметим, что два старших коэффициента многочлена $T_d - mP$ отличаются лишь знаком:

$$\begin{aligned} T_d(x) - mP(x) &= (2^{d-1}x^d + 0 \cdot x^{d-1} + \dots) - \left(\frac{2^{d-1}a_d}{a_d + a_{d-1}}x^d + \frac{2^{d-1}a_{d-1}}{a_d + a_{d-1}}x^{d-1} \dots \right) = \\ &= \frac{2^{d-1}a_{d-1}}{a_d + a_{d-1}}x^d - \frac{2^{d-1}a_{d-1}}{a_d + a_{d-1}}x^{d-1} \dots \end{aligned}$$

Тогда по теореме Виета, сумма корней многочлена $T_d - mP$ равна 1. Но это невозможно в силу неравенств (10). Действительно, сумма косинусов, выписанных в формуле (10), равна 0, значит,

$$1 = \cos \frac{0\pi}{d} + \cos \frac{1\pi}{d} + \dots + \cos \frac{(d-1)\pi}{d} > x'_1 + x_2 + \dots + x'_n.$$

3.7. Мы приводим решение, близкое к решению Н. Ленской. Отметим, что в этом решении не требуется в полной мере то, что многочлен P малоуклоняющийся. Вместо этого используется только то, что $|P(x)| < 1$ в точках максимального уклонения многочлена T_n . Таким образом, это решение является также решением задачи 6.2.

а) Пусть n чётно. Достаточно проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|t_{2k}(1 + \varepsilon)| \geq |a_{2k}|$. Положим $G(x) = (1 + \varepsilon)T_n(x) - \frac{1}{2}(F(x) + F(-x))$. Очевидно, $G(x)$ — чётная функция. Поскольку

$$\left| \frac{1}{2}(F(x) + F(-x)) \right| \leq \frac{1}{2}(1 + 1) < 1 + \varepsilon \quad \text{при } x \in [-1, 1], \quad (11)$$

в точках максимального уклонения многочлена T_n получаем совпадение знаков:

$$\operatorname{sgn} G(x_i) = \operatorname{sgn} T_n(x_i) = (-1)^i, \quad \text{где } x_i = \cos \frac{\pi i}{n}, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (12)$$

Значит, по теореме о промежуточном значении на интервале $(x_i; x_{i-1})$ имеется корень G . То есть у $G(x)$ заведомо имеется n вещественных корней. Так как многочлен G четный и имеет

степень не выше n , можно записать его в виде $G(x) = c(x^2 - y_1^2) \dots (x^2 - y_{n/2}^2)$, где $\pm y_i$ — корни $G(x)$, $|y_i| < 1$, и $c > 0$, поскольку $G(1) > 0$. Тогда знаки коэффициентов многочлена $G(\sqrt{x})$ чередуются (это очевидно из раскрытия скобок). Но коэффициент при x^k в этом многочлене равен $t_{2k}(1 + \varepsilon) - a_{2k}$. В аналогичном рассуждении для многочлена $-F(x)$ мы получим при x^k коэффициент $t_{2k}(1 + \varepsilon) + a_{2k}$ того же знака. Отсюда следует, что $|t_{2k}(1 + \varepsilon)| \geq |a_{2k}|$, что нам и требовалось.

Пусть теперь n нечетно. Как и в предыдущем случае, докажем для произвольного $\varepsilon > 0$, что $|t_{2k+1}(1 + \varepsilon)| \geq |a_{2k+1}|$. Определим $G(x) = (1 + \varepsilon)T_n(x) - \frac{1}{2}(F(x) - F(-x))$. Тогда $G(x)$ — нечетный многочлен. Как и в случае четного n убеждаемся в совпадении знаков (12), наличии n вещественных корней и разложения $G(x) = cx(x^2 - y_1^2) \dots (x^2 - y_{(n-1)/2}^2)$, где $c > 0$. Тогда из раскрытия скобок видим, что знаки коэффициентов многочлена $G(\sqrt{x})/\sqrt{x}$ чередуются. Коэффициент при x^k в этом многочлене равен $t_{2k+1}(1 + \varepsilon) - a_{2k+1}$. Написав аналогичные рассуждения для $-F(x)$, получим коэффициент $t_{2k+1}(1 + \varepsilon) + a_{2k+1}$ того же знака. Следовательно, $|t_{2k+1}(1 + \varepsilon)| \geq |a_{2k+1}|$, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим два случая:

I. n четно. Рассмотрим многочлены степени n

$$G_1(x) = \frac{1}{2}(F(x)(1+x) + F(-x)(1-x)) \quad \text{и} \quad G_2(x) = \frac{1}{2}(F(x)(1-x) + F(-x)(1+x)).$$

Оба этих многочлена малоуклоняющиеся на отрезке $[-1; 1]$ (это очевидно). Значит, они удовлетворяют утверждению п. а). Но коэффициент при x^{2k} у многочлена $G_1(x)$ равен $a_{2k} + a_{2k-1}$, а у $G_2(x)$ он равен $a_{2k} - a_{2k-1}$. Значит, $|t_{2k}| \geq \max(|a_{2k} + a_{2k-1}|, |a_{2k} - a_{2k-1}|) = |a_{2k}| + |a_{2k-1}|$, что и требовалось доказать.

II. n нечетно. Следует провести аналогичное рассуждение для многочленов

$$G_1(x) = \frac{1}{2}(F(x)(1+x) - F(-x)(1-x)) \quad \text{и} \quad G_2(x) = \frac{1}{2}(F(x)(1-x) - F(-x)(1+x)).$$

3.8. и **3.9.** Решения этих задач имеются в прекрасном задачнике [3], гл. I, задача 2.22.

4 Интерполяционная формула Лагранжа

4.1. Заменяем $n - 1$ на n и $k - 1$ на k . Тогда требуется доказать, что $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = \frac{n^2 - 1}{3}$ или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \cos^2 \frac{k\pi}{n}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2x}{x^2 - \cos^2 \frac{k\pi}{n}} \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x - \cos \frac{k\pi}{n}} + \frac{1}{x + \cos \frac{k\pi}{n}} \right) \Big|_{x=1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - \cos \frac{k\pi}{n}} \Big|_{x=1} = \frac{n^2 - 1}{3}. \end{aligned}$$

Здесь косинусы в слагаемых — это точки максимального уклонения многочлена T_n , кроме ± 1 .

Полагая $P(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - \cos \frac{k\pi}{n}) = \frac{T_n^2(x) - 1}{x^2 - 1}$, приходим к выводу, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - \cos \frac{k\pi}{n}} \Big|_{x=1} = \frac{P'(1)}{P(1)}.$$

В лоб проводить это вычисление не очень удобно, поэтому заметим, что

$$P(\cos \varphi) = \frac{1 - T_n^2(\cos \varphi)}{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Тогда $\ln P(\cos \varphi) = 2(\ln \sin n\varphi - \ln \sin \varphi)$. И значит, $\frac{P'(\cos \varphi)}{P(\cos \varphi)}(-\sin \varphi) = 2(n \operatorname{ctg} n\varphi - \operatorname{ctg} \varphi)$. Запасем заранее асимптотическое разложение для котангенса

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{\varphi}{3} + o(\varphi), \quad \text{при } \varphi \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\frac{P'(1)}{P(1)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2(n \operatorname{ctg} n\varphi - \operatorname{ctg} \varphi)}{-\sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2}{-\sin \varphi} \left(n \left(\frac{1}{n\varphi} - \frac{n\varphi}{3} + o(\varphi) \right) - \frac{1}{\varphi} + \frac{\varphi}{3} + o(\varphi) \right) = \frac{n^2 - 1}{3}.$$

4.2. Решение 1. Аналогично предыдущему решению имеем

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 - \cos \theta_k} = \frac{2T'_n(1)}{T_n(1)}.$$

Мы знаем, что $T_n(1) = 1$, а $T'_n(1)$ найдем из явной формулы с арккосинусом:

$$T'_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{n^2 \cos(n \arccos x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = n^2.$$

Решение 2. Квадраты синусов, расположенных под знаком суммы, принимают то же множество значений, что и квадраты подходящих косинусов. А эти косинусы, в свою очередь, — корни многочлена T_{2n} , в нашей сумме использована (симметричная) половина всех корней. Осталось сослаться на задачу 2.5, которая сообщает нам, что сумма равна $\frac{1}{2}(2n)^2$.

4.3. [4, отдел 6, задача 71] Возьмем в качестве точек интерполяции корни многочлена Чебышева T_n . Тогда $G(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ в обозначениях формулы (4) и

$$G'(x_k) = 2^{1-n} T'_n(x_k) = 2^{1-n} (\cos(n \arccos x))' \Big|_{x=x_k} = \sin(n \arccos x) \cdot \frac{n2^{1-n}}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=x_k} = \frac{(-1)^k n2^{1-n}}{\sqrt{1-x_k^2}}.$$

Тогда для каждого многочлена $P(x)$ степени не более $n-1$ получаем формулу Лагранжа

$$P(x) = \sum_{k=1}^n P(x_k) \cdot \frac{G(x)}{G'(x_k)(x-x_k)} = \sum_{k=1}^n P(x_k) \cdot \frac{(-1)^k \sqrt{1-x_k^2}}{n} \cdot \frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

4.4. В левой части доказываемой формулы написан многочлен степени $2n-1$. Для доказательства формулы достаточно проверить равенство в $2n$ точках.

I. Подставим $x = x_p = \cos \frac{(2p-1)\pi}{2n}$, $p = 1, \dots, n$. Поскольку $T_n(x_p) = 0$, и в сумме обнулятся слагаемые для $k \neq p$. Поскольку в p -м слагаемом имеется неопределенность, найдем его предел

$$\lim_{x \rightarrow x_p} (1 - xx_p) \left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_p)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow x_p} \frac{1-x_p^2}{n} \cdot \left(\frac{T_n(x) - T_n(x_p)}{x-x_p} \right)^2 = \frac{1-x_p^2}{n} \cdot T'_n(x_p) = 1$$

(значение производной $T'_n(x_p)$ вычислено в предыдущей задаче).

II. Подставим точки уклонения $x = y_i = \cos \frac{i\pi}{n} = \cos \frac{2i\pi}{2n}$, $i = 0, \dots, n$. В этих точках $T_n(x) = \pm 1$ и нам остается проверить, что при каждом i

$$\sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos \frac{2i\pi}{2n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}}{(\cos \frac{2i\pi}{2n} - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n})^2} = n^2.$$

Подготовим формулу для преобразования слагаемых:

$$\frac{1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta}{(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)^2} = \frac{1 - \frac{\cos(2\alpha+2\beta) + \cos(2\alpha-2\beta)}{2}}{4 \sin^2(\alpha+\beta) \sin^2(\alpha-\beta)} = \frac{\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)}{4 \sin^2(\alpha+\beta) \sin^2(\alpha-\beta)} = \frac{1}{4 \sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{1}{4 \sin^2(\alpha-\beta)}.$$

Тогда интересующую нас сумму можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos \frac{2i\pi}{2n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}}{(\cos \frac{2i\pi}{2n} - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n})^2} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4 \sin^2 \frac{(2i+2k-1)\pi}{4n}} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{(2i-2k+1)\pi}{4n}} \right) = \\ &= \sum_{\ell=1}^{2n} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{(2\ell+1)\pi}{4n}} = \sum_{\ell=1}^{2n} \frac{1}{4 \cos^2 \frac{(2\ell+1)\pi}{4n}} = \frac{2n^2}{4} = n^2 \end{aligned}$$

(предпоследнее равенство мы знаем из задачи 2.5).

5 Уклонение на других множествах

5.1. Ответ: $2\left(\frac{50^2-49^2}{4}\right)^{d/2}$.

Проведем рассуждение в общем случае. Отметим, что в этой задаче степень d четная.

Пусть $0 < \alpha < \beta$ и имеется множество $S = [-\beta, \beta] \setminus [-\alpha, \alpha]$, представляющее собой объединение двух промежутков длины $\beta - \alpha$, симметричных относительно начала координат. Обозначим через μ_n нижнюю грань максимумов модуля всех полиномов степени n со старшим коэффициентом 1. Тогда

$$\mu_n \geq 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{n/2}. \quad (13)$$

При четном n равенство достигается.

Это утверждение мы взяли в задачнике Поляя, Сега [4, отдел 6, задача 64], но подредактировали его с учетом работы участников конференции Махмутова А. и Моисеева Ф. В [4] для случая нечетного n доказывается оценка

$$\alpha \cdot 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{(n-1)/2} \leq \mu_n \leq \beta \cdot 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{(n-1)/2}. \quad (14)$$

Найти точное значение μ_n при нечетном n , по-видимому, трудно.

Для доказательства для каждого унитарного многочлена $P(x)$ рассмотрим многочлен

$$\frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2} = \begin{cases} Q(x^2) & \text{при четном } n, \\ xQ(x^2) & \text{при нечетном } n, \end{cases} \quad (15)$$

где $Q(\xi)$ — унитарный многочлен степени $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ от $\xi = x^2$.

Пусть n четно. Когда переменная x пробегает любой из отрезков $[-\beta, -\alpha]$, $[\alpha, \beta]$, переменная ξ пробегает отрезок $[\alpha^2, \beta^2]$. Тогда

$$\max_{x \in S} |P(x)| \geq \max_{x \in S} \left| \frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2} \right| = \max_{\xi \in [\alpha^2, \beta^2]} |Q(\xi)| \geq 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{n/2}.$$

Это равенство достигается, если в качестве Q_0 взять многочлен, наименее уклоняющийся от 0 на отрезке $[\alpha^2, \beta^2]$, и положить $P(x) = Q_0(x^2)$. Нетрудно проверить, что равенство достигается только для этого многочлена.

Пусть теперь n нечетно. Тогда

$$\max_{x \in S} |P(x)| \geq \max_{x \in S} \left| \frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2} \right| \geq \alpha \cdot \max_{\xi \in [\alpha^2, \beta^2]} |Q(\xi)| \geq \alpha \cdot 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{(n-1)/2}.$$

А взяв $P_0(x) = xQ_0(x^2)$, получаем оценку

$$\mu_n \leq \max |P_0(x)| \leq \beta \cdot 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{(n-1)/2}.$$

В результате мы проверили неравенство (14). Для доказательства оценки (13) в нечетном случае сделаем еще один фокус. Положим для краткости $M = \max_{x \in S} |P(x)|$. Как мы уже видели,

$$\max_{x \in S} |xQ(x^2)| \leq M.$$

Следовательно, $\max_{x \in S} x^2 Q^2(x^2) \leq M^2$ и тогда $\max_{\xi \in [\alpha^2, \beta^2]} \xi Q^2(\xi) \leq M^2$. Поскольку выражение под максимумом неотрицательно,

$$\max_{\xi \in [\alpha^2, \beta^2]} \left| \xi Q^2(\xi) - \frac{M^2}{2} \right| \leq \frac{M^2}{2}.$$

Под модулем — унитарный многочлен степени n , применяя для максимума стандартную чебышевскую оценку из задачи 2.2, получаем требуемое неравенство

$$\frac{(\beta^2 - \alpha^2)^n}{2^{2n-1}} \leq \max_{\xi \in [\alpha^2, \beta^2]} \left| \xi Q^2(\xi) - \frac{M^2}{2} \right| \leq \frac{M^2}{2}.$$

Отметим, что которая из нижних оценок в формулах (13) и (14) сильнее, зависит от параметров α и β : неравенство

$$2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{n/2} \leq \alpha \cdot 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{(n-1)/2}$$

равносильно неравенству $5\alpha^2 \geq \beta^2$.

5.2. Положим $\tilde{T}_1(x) = x^2 - 2$, тогда многочлен \tilde{T}_1 переводит отрезок $[-2, 2]$ в себя (отмасштабированный для отрезка $[-2, 2]$ многочлен Чебышева). Для $n > 1$ положим рекурсивно $\tilde{T}_n(x) = \tilde{T}_1(\tilde{T}_{n-1}(x))$. Тогда \tilde{T}_n — унитарный многочлен степени $2n$, переводящий отрезок $[-2, 2]$ в себя. Положим $2c = 1,999$. Тогда $0 < c < 1$ и $|Q(x)|/c < 2$ при $x \in A$. Рассмотрим многочлен $f_n(x) = c^{2n} \tilde{T}_n(Q(x)/c)$. Тогда f_n — унитарный многочлен и $|f_n(x)| \leq c^{2n} \cdot 2$ при всех $x \in A$. При достаточно большом n получаем требуемое.

5.3. Это утверждение приведено в [2] как пример случая, когда в задаче о минимальном уклонении на множестве более сложном, чем отрезок, возможен хоть сколько-то приличный ответ.

Действуя как в решении задачи 5.1, построим «симметризацию» (15) исходного многочлена P и рассмотрим унитарный многочлен $Q(\xi)$, где $\xi = x^2$, $\xi \in [0, c^2] \cup [a^2, b^2]$. Если $\max |P| = \mu$, то $\max_{x \in [0, c^2] \cup [a^2, b^2]} |Q(\xi)| = \mu$. Поскольку $b^2 - a^2 = c^2$, эти отрезки имеют одинаковую длину. Наименьшее уклонение многочлена на двух равных отрезках оценено в решении задачи 5.1. В нашем случае $\beta = \frac{b^2}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$ и мы получаем оценку

$$\mu \geq 2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \right)^{n/2} = 2 \left(\frac{(a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2}{16} \right)^{n/2} = 2 \left(\frac{ac}{2} \right)^n.$$

5.4. Доказательство можно прочесть в замечательной книге «Доказательства из Книги» [1]. Но мы приводим слегка подчищенное рассуждение из [2, с. 23–24], поскольку оно не использует дополнительные свойства многочленов (вынесенные в книгу [1] в отдельную рамочку).

Допустим, что нашелся многочлен

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (16)$$

опровергающий утверждение теоремы:

$$M = \max_{x \in S} |f(x)| < 2 \left(\frac{\ell}{4} \right)^n.$$

Можно считать, что все корни многочлена f вещественны, поскольку для любого набора комплексных чисел $z_k = x_k + iy_k$ при вещественных x выполняется неравенство

$$|(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)| \leq |x - z_1| \cdot |x - z_2| \cdot \dots \cdot |x - z_n|.$$

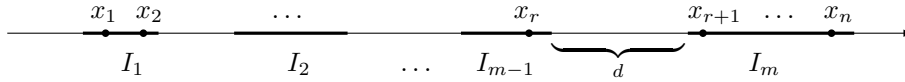
Далее, мы можем считать, что

$$S = f^{-1}([-M, M]) = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m, \quad (17)$$

где отрезки $I_k \subset \mathbb{R}$ перечислены на числовой прямой слева направо. В силу формулы (17) все корни многочлена f содержатся в множестве S .

Далее мы будем рассуждать методом спуска: будем поочередно «сдвигать» влево самый правый из отрезков I_k так, чтобы он склеился с предыдущим. Слово «сдвигать» означает, что мы будем модифицировать многочлен f так, чтобы его корни (лежащие на самом правом отрезке) подвинулись влево, но чтобы при этом многочлен по-прежнему служил контрпримером к доказываемой теореме. В результате нескольких сдвигов мы сведем изучаемый случай к одному отрезку, т. е. к теореме Чебышева, и получим противоречие (с оценкой задачи 2.2).

Итак, рассмотрим отрезок I_m . Пусть он отделен от отрезка I_{m-1} промежутком длины d . Пусть в объединении $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{m-1}$ содержатся корни нашего многочлена x_1, x_2, \dots, x_r , а на отрезке I_m — корни x_{r+1}, \dots, x_n . Отметим, что отрезок I_m действительно должен содержать хотя бы один корень многочлена f , поскольку в противном случае $n = r$, при $x > x_r$ выражение $|f|$ монотонно возрастает (поскольку возрастают по модулю все множители в (16)) и, значит, между I_{m-1} и I_m не должно быть никакого промежутка.



Рассмотрим тогда новый многочлен

$$f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r) \cdot (x - x_{r+1} - d) \dots (x - x_{n+1} - d).$$

Очевидно, $|f_1(x)| \leq |f(x)|$ при $x \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{m-1}$, поскольку в результате сдвига на d множители $x - x_k$ из второй половины разложения f (т. е. при $k > r$) уменьшились по модулю. Обозначим через $I_m - d$ отрезок, получающийся сдвигом отрезка I_m на d влево. Тогда при $x \in I_m - d$ также выполняется неравенство

$$|f_1(x)| \leq |f(x)| \quad (18)$$

поскольку $|x - d - x_k| < |x - x_k|$ при $k \leq r$. Осталось заметить, что отрезок $I_m - d$ имеет общий конец с I_{m-1} т. е. множество $\tilde{I}_{m-1} = I_{m-1} \cup I_m - d$ является отрезком, длина которого равна сумме длин I_{m-1} и I_m . Таким образом

$$|f_1(x)| \leq M \quad \text{при } x \in S_1 = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{m-2} \cup \tilde{I}_{m-1}$$

и суммарная длина отрезков, составляющих множество S_1 , по-прежнему равна ℓ .

Для доказательства того, что в случае двух и более отрезков неравенство строгое, заметим, что в формулах (18), которые мы использовали при спуске, на самом деле знак всегда строгий, кроме случаев, когда вместо x подставляют какой-то из корней многочлена. Значит, при выполнении спуска максимум модуля многочлена уменьшается.

5.5. [7, задача 134]. С помощью интерполяционной формулы Лагранжа искомый многочлен $P(x)$ однозначно задается значениями в точках указанного множества:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P(k) \cdot \frac{(x-0)(x-1)\dots(x-(k-1)) \cdot (x-(k+1))\dots(x-n)}{(k-0)(k-1)\dots(k-(k-1)) \cdot (k-(k+1))\dots(k-n)}.$$

Коэффициент при x^n в правой части равен

$$\frac{P(0)}{(-1)^n n!} + \frac{P(1)}{(-1)^{n-1} 1!(n-1)!} + \frac{P(2)}{(-1)^{n-2} 2!(n-2)!} + \dots + \frac{P(n)}{n!} = 1.$$

Поскольку $|P(x)| \leq M(F)$ при всех x , получаем неравенство

$$1 \leq M(P) \cdot \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = M(P) \cdot \frac{2^n}{n!}$$

(последнее равенство следует из того, что при умножении большой скобки на $n!$ мы получаем сумму всех биномиальных коэффициентов из n -й строки треугольника Паскаля). Таким образом $M(P) \geq \frac{n!}{2^n}$. Многочлен, дающий наименьшее возможное уклонение, получится лишь в том случае, если мы положим

$$P(n) = -P(n-1) = P(n-2) = -P(n-3) = \dots = (-1)^n P(0) = \frac{n!}{2^n}.$$

6 После промежуточного финиша

6.1. Мы взяли эту задачу в [3], гл. I, задача 2.21.

6.2. Решение этой задачи уже приведено выше под видом решения задачи 3.7. Мы приведем еще одно решение, опирающееся на циничную идею¹: если все, что мы знаем о многочлене степени n , — это ограничения на его значения в $n+1$ точке, то всю информацию об этом многочлене можно выцарапать из интерполяционной формулы Лагранжа!

а) Следует из б).

б) I. Разберем сначала случай, когда n нечетно, $n = 2k - 1$.

Пусть y_i — это точки максимального уклонения многочлена T_n , т. е. $y_i = \cos \frac{i\pi}{n}$, $i = 0, \dots, n$. Рассмотрим функцию

$$Q(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n) = (x^2 - y_0^2) \dots (x^2 - y_{k-1}^2).$$

Для нечетного n функция $Q(x)$ четная, а $Q'(x)$ — нечетная. Следовательно, $Q'(y_{n-i}) = -Q'(y_i)$. Заодно заметим, что $\operatorname{sgn} Q'(y_i) = (-1)^i$ в силу того, что узлы упорядочены: $y_0 > \dots > y_n$.

Напишем интерполяционную формулу Лагранжа с узлами y_0, \dots, y_n :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n P(y_i) \frac{Q(x)}{(x - y_i)Q'(y_i)} = \sum_{i=0}^n P(y_i)(x + y_i) \frac{(x^2 - y_0^2) \dots \widehat{(x^2 - y_i^2)} \dots (x^2 - y_{k-1}^2)}{Q'(y_i)}.$$

Здесь в правой части мы допускаем мелкую неаккуратность: для слагаемых, равноотстоящих от концов диапазона суммирования, например при $i = j$ и $i = n - j$, мы имеем $y_j = -y_{n-j}$. При $i = j$ в числителе большой дроби в множителе $(x^2 - y_j^2) = (x - y_j)(x - y_{n-j})$ следует пропустить скобку $(x - y_j)$, а другая скобка $(x - y_{n-j}) = (x + y_j)$ должна остаться, а при $i = n - j$ — наоборот: вычеркивается скобка $(x - y_{n-j})$, а остается $(x + y_{n-j})$. В формуле так и записано: вычеркивается квадратичная скобка $(x^2 - y_j^2)$ и добавляется линейная, но тем не менее это может вызывать некоторое недоумение.

Приравняв коэффициенты при x^{2l+1} , x^{2l} в обеих частях формулы Лагранжа, получаем, что

$$a_{2l+1} = (-1)^{n-2l-1} \sum_{i=0}^n P(y_i) \cdot \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)}, \quad a_{2l} = (-1)^{n-2l} \sum_{i=0}^n y_i P(y_i) \cdot \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)},$$

где через $S_{m, \hat{i}}$ обозначены стандартные симметрические суммы набора $\{y_0^2, \dots, y_{k-1}^2\} \setminus \{y_i^2\}$. Например

$$S_{1, \hat{i}} = y_0^2 + \dots + \widehat{y_i^2} + \dots + y_{k-1}^2, \quad S_{2, \hat{i}} = \sum_{\substack{0 \leq s \neq t \leq k-1 \\ s \neq i, t \neq i}} y_s^2 y_t^2.$$

¹Отметим, что цинизм в математических рассуждениях часто сопровождается техническими извращениями.

В частности, суммы $S_{m, \hat{i}}$ неотрицательны. Только этой неотрицательностью мы и будем пользоваться ниже. В силу упомянутой выше неаккуратности $S_{m, \hat{i}} = S_{m, \widehat{n-i}}$. Это позволяет еще преобразовать формулы для коэффициентов:

$$(-1)^{n-2l-1} a_{2l+1} = \sum_{i=0}^n P(y_i) \cdot \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (P(y_i) - P(y_{n-i}))$$

и

$$(-1)^{n-2l} a_{2l} = \sum_{i=0}^n y_i P(y_i) \cdot \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} = \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (P(y_i) + P(y_{n-i})).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |a_{2l}| + |a_{2l+1}| &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (P(y_i) + P(y_{n-i})) \right| + \left| \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (P(y_i) - P(y_{n-i})) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} \right| \cdot |P(y_i) + P(y_{n-i})| + \sum_{i=0}^{k-1} \left| \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} \right| \cdot |P(y_i) - P(y_{n-i})| \leq \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 2 \sum_{i=0}^{k-1} \left| \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} \right|. \end{aligned}$$

Здесь в неравенстве (*) мы воспользовались тем, что для любых вещественных $|z|, |t| \leq 1$ и неотрицательных A, B выполняется неравенство

$$A|z - t| + B|z + t| \leq 2 \max\{A, B\}. \quad (19)$$

(Мы применили это неравенство для частного случая $A = B = |S_{n-2l, \hat{i}}|$. Общее неравенство пригодится нам во второй части решения.)

Заметим теперь, что по той же интерполяционной формуле коэффициент многочлена $T_n(x)$ при x^{2l+1} на самом деле равен

$$2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (-1)^i.$$

Как мы помним, $\operatorname{sgn} Q'(y_i) = (-1)^i$ и, значит, этот коэффициент совпадает с правой частью нашей оценки

$$2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (-1)^i = 2 \sum_{i=0}^{k-1} \left| \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} \right|.$$

Готово! В доказываемых неравенствах случай равенства возможен, только если $|P(y_i)| = 1$ и $P(y_i) - P(y_{n-i}) = 2(-1)^i$ или $2(-1)^{i+1}$ при всех i . В этом случае коэффициент при x^{2l} многочлена $P(x)$ должен быть равен нулю и одно из уравнений $P(x) = T_n(x)$ или $P(x) = -T_n(x)$ имеет $d+1$ корней. Это означает, что или $P(x) = T_n(x)$ или $P(x) = -T_n(x)$ при всех x .

II. Теперь разберем случай, когда n четно. В этом случае

$$Q(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_n) = x(x^2 - y_0^2) \dots (x^2 - y_{k-1}^2),$$

функция $Q(x)$ нечетная, а $Q'(x)$ — четная. Таким образом $Q'(y_{n-i}) = Q'(y_i)$ и $Q'(y_k) = Q'(0)$. Тогда дроби под знаком суммы в формуле Лагранжа мы можем преобразовать к виду

$$\frac{Q(x)}{(x - y_i)Q'(y_i)} = \begin{cases} x(x + y_i) \frac{(x^2 - y_0^2) \dots (\widehat{x^2 - y_i^2}) \dots (x^2 - y_{k-1}^2)}{Q'(y_i)}, & \text{если } i \neq k \\ \frac{(x^2 - y_0^2) \dots (x^2 - y_{k-1}^2)}{Q'(0)}, & \text{если } i = k \end{cases}$$

Далее аналогично нечетному случаю имеем

$$(-1)^{n-2l-1}a_{2l+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n y_i P(y_i) \cdot \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} \quad (-1)^{n-2l}a_{2l} = \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(0)} P(0) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n P(y_i) \cdot \frac{S_{n-2l+2, \hat{i}}}{Q'(y_i)}.$$

И с учетом замечаний о четности, мы можем преобразовать это к виду

$$a_{2l+1} = - \sum_{i=0}^{k-1} y_i \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (P(y_i) - P(y_{n-i})) \quad a_{2l} = \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(0)} P(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l+2, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (P(y_i) + P(y_{n-i})).$$

Заметим, что все коэффициенты многочлена Q при четных степенях равны 0. В частности коэффициент при y^{2l-2} равен 0. Этот коэффициент равен

$$S_{n-2l+2, \hat{i}} + y_i^2 S_{n-2l, \hat{i}} = 0$$

(здесь отдельно сгруппированы слагаемые, содержащие y_i и не содержащие), поэтому

$$|S_{n-2l+2, \hat{i}}| = |y_i^2 S_{n-2l, \hat{i}}| = |y_i^2| \cdot |S_{n-2l, \hat{i}}| \leq |S_{n-2l, \hat{i}}|.$$

Так же, как раньше, пользуясь неравенством (19) при $A = |S_{n-2l+2, \hat{i}}|$, $B = |S_{n-2l, \hat{i}}|$, находим, что

$$|a_{2l}| + |a_{2l+1}| \leq \left| \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(0)} P(0) \right| + 2 \left| \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} \right|.$$

Коэффициент при x^{2l} многочлена $T_n(x)$ в действительности равен

$$\frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(0)} (-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (2(-1)^i).$$

Аналогично нечетному случаю $\operatorname{sgn} Q'(y_i) = (-1)^i$, для всех $i = 0, \dots, k-1$. Отсюда

$$\frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(0)} (-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} (2(-1)^i) = \left| \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(0)} \right| + 2 \left| \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n-2l, \hat{i}}}{Q'(y_i)} \right|$$

Итого, достигнут случай равенства в неравенстве треугольника и мы получили желаемый результат. Случай равенства достигается, когда $|P(y_i)| = 1$ и $P(y_i) + P(y_{n-i}) = 2(-1)^i$ или $2(-1)^{i+1}$ для всех i . В этом случае коэффициент при x^{2l} в $P(x)$ должен быть нулевым, или уравнение $P(x) = T_n(x)$ или $P(x) = -T_n(x)$ имеет $n+1$ решений. Это означает, что или $P(x) = T_n(x)$, или $P(x) = -T_n(x)$ для всех x .

6.3. Мы взяли эту задачу в [3], гл. I, задача 2.22.

6.4. Начнем с неудачной, но полезной попытки. Будем интересоваться аналогичным неравенством

$$|P(0)| + |P(1)| + \dots + |P(n^2 - 1)| \leq |P(n^2)|. \quad (20)$$

Воодушевившись задачей о стакане, попробуем взять в качестве P отмасштабированный многочлен Чебышева. Пусть $P(x) = T_{100n}(\frac{x}{n^2-1})$. Тогда по формуле (2)

$$\begin{aligned} P(n^2) &= T_{100n}\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right) \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2-1} + \sqrt{\frac{2}{n^2-1} + \frac{1}{(n^2-1)^2}}\right)^{100n} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2-1}}\right)^{100n} \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100n} \approx \frac{1}{2} e^{100}. \end{aligned}$$

Как видим, правая часть (20) может быть весьма крупной константой, но проблема в том, что левая часть (20) с ростом n стремится к бесконечности, по-видимому, как некрупная линейная функция.

Начнем сначала. Пусть $P_0(x) = T_0(x) + T_1(x) + \dots + T_{2n}(x)$. Тогда $P_0(1) = 2n + 1$. А внутри промежутка $(-1, 1)$ мы можем надеяться на то, что значения $T_k(x)$ при разных k достаточно хаотически меняются, из-за чего сумма таких величин в каждой точке x относительно невелика. Действительно, при $t \in (0, \pi]$ выполнена формула

$$P_0(\cos t) = \cos 0t + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos 2nt = \frac{\sin(2n + \frac{1}{2})t + \sin \frac{1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin(2n + \frac{1}{2})t + \sin \frac{1}{2}t}{\sqrt{2(1 - \cos t)}}.$$

Значит, при всех $x \in (-1, 1)$ верно неравенство

$$|P_0(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}.$$

Положим тогда $P(x) = \left(P_0\left(1 - \frac{2x}{n^2}\right)\right)^4$, $\deg P = 8n$. В этом случае $P(0) = (2n + 1)^4$ и

$$|P(1)| + \dots + |P(n^2)| \leq \sum_{i=1}^{n^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2i}{n^2}}}\right)^4 = n^4 \cdot \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i^2} \leq 2n^4 < P(0).$$

Список литературы

- [1] Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. М.: Мир, 2006.
- [2] Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов. Л., М.: ОНТИ, 1937.
- [3] Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. М.: МЦНМО, 2024.
- [4] Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М: Наука, 1978.
- [5] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005.
- [6] Табачников С.Л., Фукс Д.Б. Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011.
- [7] Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М: ГИТТЛ, 1954.

Deviations of polynomials and critical values

Project team:

Yaroslav Abramov, Olga Bursian, Konstantin Kokhas, Navid Safaei,

In this project some properties of the polynomials are discussed. You can use without restrictions theorems from «introductory» course of Calculus, in particular, the following theorems.

Bolzano-Cauchy's theorem (Intermediate value theorem). If continuous function f takes on the endpoints of segment $[a, b]$ the values of different signs, then it has a root on this segment.

Weierstrass theorem (Extreme value theorem). Any continuous function f defined on segment $[a, b]$ is bounded on it and attains the largest and the smallest values.

1 Several preliminary problems

In this section a few problems are given for acquaintance with project. Not all of these problems are simple and it is not necessary to solve them «first of all».

1.1. For an arbitrary polynomial $F(x)$ set

$$F^{[n]}(x) = \underbrace{F(F(\dots F(x)))}_{n \text{ times}}.$$

Prove that there is cubic polynomial $P(x)$ such that for each positive integers N the following equations have 3^N distinct real roots in $[-1, 1]$. a) $P^{[N]}(x) = 0$; b) $P^{[N]}(x) = x$.

1.2. Let $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ for all $|x| \leq 1$. Prove that $|2ax + b| \leq 4$, for all $|x| \leq 1$.

1.3. Let n be a natural number and a continuous function f is defined on the segment $[a, b]$ (we can suppose for simplicity that it is piecewise linear, as in the figure). For each polynomial F of degree n denote

$$M(F) = \max_{x \in [a, b]} |F(x) - f(x)|.$$

Suppose that there exists polynomial F_n of degree n , for which $M(F_n)$ attains the minimum possible value. Prove that on segment $[a, b]$ there exist points $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ such that for all k

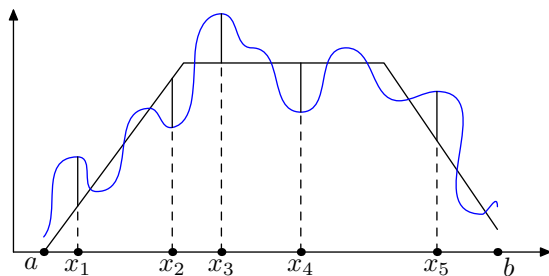
$$F_n(x_k) - f(x_k) = \pm M(F_n),$$

and for any pair of consecutive points x_k, x_{k+1} the differences $F_n(x) - f(x)$ have the opposite signs.

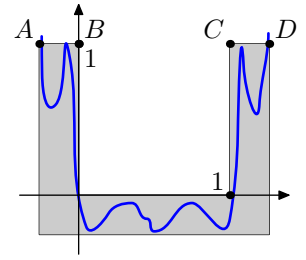
1.4. Prove that for any n given points A_1, A_2, \dots, A_n on the plane, the product of the distances

$$MA_1 \cdot MA_2 \cdot \dots \cdot MA_n$$

from them to point M running the given segment $[a, b]$ of length $b - a = 2h$, cannot remain all the time less than $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.



1.5. Problem «about the glass». We call «glass» the subset on Cartesian coordinate system drawn in the figure. The width of vertical walls and of the bottom is equal to δ . Do arbitrary large n exist such that the graph of a polynomial of degree n lies inside the «glassy» part of the glass), (this part is shaded in the figure) if



- a) $\delta = \frac{1}{n}$ b) $\delta = \frac{1}{n^3}$?

The graph must come into the shaded region intersecting segment AB , and leave this region through CD .

2 Polynomials that have small deviation from 0

By *deviation* (from 0) of a polynomial F on segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ we call the value

$$M(F) = \max_{x \in [a, b]} |F(x)|.$$

We say that polynomial F has *small deviation*, if $M(F) \leq 1$. Remind that polynomial is called *monic*, if its leading coefficient is equal to 1. In this project we consider polynomials only with real coefficients (but in the solutions you can use complex numbers).

Now we will prove that among all monic polynomials of degree n there exists polynomial F_n , the deviation of which $M(F_n)$ takes the minimum possible value on segment $[-1, 1]$.

Suppose that for some number c we found monic polynomial F_n , for which $M(F_n) = c$ and (as in problem 1.3) *there exist such points $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq 1$ that for all k*

$$F_n(x_k) = \pm M(F_n),$$

and for any pair of consecutive points x_k, x_{k+1} values $F_n(x_k)$ and $F_n(x_{k+1})$ have opposite signs. Verify that then c is the minimum possible deviation for all monic polynomials of degree n .

Indeed, suppose that polynomial Q with the lesser deviation has been found. Then for $x \in [-1, 1]$ the graph of polynomial $F_n(x)$ lies in the horizontal stripe of width $2c$ and comes on its boundary in points $(x_k, F_n(x_k))$, and the graph of polynomial Q lies strictly inside the stripe, see fig. 1. Draw through points x_k vertical (dashed) lines, they will cut n rectangles from the stripe. Inside each rectangle the graphs of P_n and Q have at least one intersection point. But it is impossible because polynomial $P_n - Q$ has degree not less than $n - 1$ and cannot have n roots.

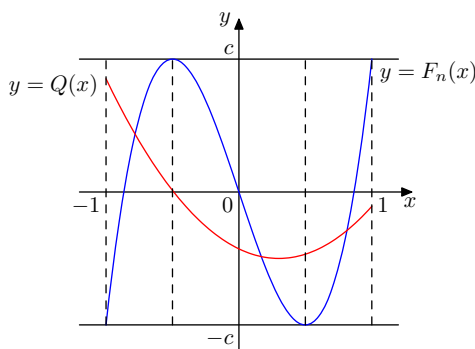


Рис. 1.

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

Рис. 2. Chebyshev's polynomials

Furthermore, in the described situation F_n is a unique monic polynomial, the deviation of which is equal to c .

Therefore, it remains «guess right» the polynomial satisfying the above property set out in italics. This construction is well known. Note that for natural n function $\cos nx$ may be expressed through $\cos x$ by trigonometric transformations and the obtaining formula is polynomial: $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1$, $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$ etc. Hence, function

$$T_n = \cos(n \arccos x)$$

is polynomial (of degree n). It is called *Chebyshev polynomial* of the first kind. It is immediately clear by the definition that $|T_n(x)| \leq 1$ for $x \in [-1, 1]$ and

$$T_n(x_k) = (-1)^k, \quad \text{for } x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Therefore, $M(T_n) = 1$, and $F_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$ must be taken as polynomials F_n from the previous reasoning, and $c = M(F_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

The first few Chebyshev's polynomials are given in the table (fig. 2). We give several useful formulas.

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left(x - \cos \frac{\pi}{2n}\right) \left(x - \cos \frac{3\pi}{2n}\right) \left(x - \cos \frac{5\pi}{2n}\right) \dots \left(x - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \quad (2)$$

$$2T_n(x) = (2x)^n - \frac{n}{n-1} \cdot C_{n-1}^1 (2x)^{n-2} + \frac{n}{n-2} \cdot C_{n-2}^2 (2x)^{n-4} - \frac{n}{n-3} \cdot C_{n-3}^3 (2x)^{n-6} + \dots \quad (3)$$

2.1. Prove that polynomial F_n from the given above reasoning is uniquely defined.

2.2. Let $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ be a polynomial of degree d , then

$$\max_{x \in [a, b]} |P(x)| \geq \frac{|a_d|}{2^{2d-1}} (b-a)^d.$$

Moreover, the equality case occurs whenever, $P(x) = \frac{a_d}{2^{2d-1}} (b-a)^d \cdot T_d\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$. And also prove that

$$P(x) = \frac{a_d}{2^{d-1}} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} C_d^{2k} (x-a)^k (x-b)^k \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{d-2k}$$

2.3. Prove the following extremal property of Chebyshev's polynomials. Let $F_n(x)$ be the polynomial of degree not more than n , and

$$\max_{x \in [-1, 1]} |F_n(x)| = 1.$$

Then for all real x , $|x| > 1$ the inequality holds $|F_n(x)| \leq |T_n(x)|$.

2.4. Let $P(x, y)$ be a polynomial of the form $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j$ for some non-negative integers m, n .

a) Let $a_{mn} = 2^{m-1}2^{n-1}$. Prove that $\max_{-1 \leq x, y \leq 1} |P(x, y)| \geq 1$. The equality occurs whenever $P(x, y) = T_m(x)T_n(y)$.

b) Let coefficients of $P(x, y)$ be integer and $P(x, y)$ is neither constant in x nor in y . Prove that $\max_{-2 \leq x, y \leq 2} |P(x, y)| \geq 4$.

2.5. Let x_k be the roots of Chebyshev's polynomial T_n , where n is even. Prove that $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2} = n^2$.

2.6. Prove that for all natural m, n (где $m > n$) and integer x the number

$$(T_{m+n}(x) - 1)(T_{m-n}(x) - 1)$$

is a perfect square.

3 The properties of polynomials with small deviation

3.1. Let $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ for all $|x| \leq 1$. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

3.2. Let $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leq 1$ for all $|x| \leq 1$. Prove that: $|a| \leq 4$, $|a| + |b| \leq 4$, $|c| \leq 3$, $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7$.

3.3. Let $P(x)$ be a polynomial of degree d such that $|P(x)| \leq 1$ for all $|x| \leq 1$. Prove that

$$|P(2)| < 4^d.$$

3.4. Let $P(x)$ be a polynomial of degree at most 2018 such that for all $x \in [-2, 2]$ we have $|P(x)| \leq \frac{1}{|x-\sqrt{3}|}$. Prove that $|P(\sqrt{3})| \leq 2019$.

3.5. Let $P(x)$ be a polynomial of degree at most n such that for all $0 < x < 1$ we have $|P(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Prove that $|P(0)| \leq 2n + 1$.

3.6. Let $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ such that for all $x \in [-1, 1]$ we have $|P(x)| \leq 1$. Prove that

$$|a_d| + |a_{d-1}| \leq 2^{d-1}.$$

3.7. Let $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ be a polynomial of degree at most n with real coefficients such that $|P(x)| \leq 1$ where $x \in [-1, 1]$. Let $T_n(x) = t_n x^n + \dots + t_0$ be n -th Chebyshev polynomial. Prove that

a) $|a_{n-2m}| \leq |t_{n-2m}|$, $m = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. The equality occurs whenever $P(x) = \pm T_n(x)$.

b) $|a_{n-2m}| + |a_{n-2m-1}| \leq |t_{n-2m}|$, $m = 0, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. The equality occurs whenever $P(x) = \pm T_n(x)$.

3.8. (Bernstein's inequality) If $P(x)$ is polynomial with real coefficients of degree n and $|P(x)| \leq 1$ on $[-1, 1]$, then $|P'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$ on $(-1, 1)$.

3.9. (Markov's theorem) Let polynomial $P(x)$ of degree n satisfy the inequality $|P(x)| \leq 1$ for $x \in [-1, 1]$. Prove that

$$|P'(x)| \leq n^2.$$

The equality is achieved only for polynomials $P = \pm T_n$ and only in the points $x = \pm 1$.

4 Lagrange interpolation formula

A polynomial of degree n is defined uniquely by its values in $n + 1$ points, and the explicit formula may be given. Let us choose (pairwise distinct) points x_1, x_2, \dots, x_{n+1} and we look for a polynomial $F(x)$ that takes on the values y_k in the points x_k :

$$F(x_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Set $G(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1})$. In the product defining $G(x)$, omit the k -th parenthesis and consider the fraction, in which the numerator contains all the remaining parentheses, and the denominator contains the same parentheses, but in them x_k is substituted instead of x :

$$\Pi_k(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1})}.$$

It is evident that $\Pi_k(x_k) = 1$ and $\Pi_k(x_j) = 0$ for $j \neq k$. The product $\Pi_k(x)$ may be written in brief form

$$\Pi_k(x) = \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}.$$

Then the polynomial of interest $F(x)$ is defined by the formula (*Lagrange interpolation formula*):

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \cdot \frac{G(x)}{G'(x_k)(x - x_k)}.$$

This formula may be also used for investigating the coefficients of polynomial F by examining the coefficients of x^k in the both sides of this identity.

4.1. Prove that $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(k-1)\pi}{n-1}} = \frac{n(n-2)}{3}$.

4.2. Let n be a positive integer and $\theta_k = (k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n$. Prove that $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 4n^2$.

4.3. Let $x_k = \cos \theta_k$, $k = 1, \dots, n$. Prove that any polynomial $P(x)$ of degree not less than $(n - 1)$ satisfies the identity

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P(x_k) \sqrt{1 - x_k^2} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k}.$$

4.4. Let $x_k = \cos \theta_k$, $k = 1, \dots, n$. Prove that

$$\sum_{k=1}^n (1 - xx_k) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_k)} \right)^2 = 1.$$

5 Deviation on the other sets

5.1. Let $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ be a polynomial with real coefficients such that for all $x \in [0, 1] \cup [99, 100]$ we have $|P(x)| \leq 1$. Find the maximum possible value of $P(50)$, a) if $d = 2$; b) if $d = 100$.

5.2. Let A be the union of a finite number of segments on real line. Ilya found fickle polynomial $Q(x)$ with real coefficients with the leading coefficient 1 such that $|Q(x)| < 1,999$ for all $x \in A$. Prove that Navid may find fickle polynomial $P(x)$ with real coefficients and the leading coefficient 1 such that $|P(x)| < 1$ for all $x \in A$.

5.3. Three non-intersecting segments $[-b; -a]$, $[-c; c]$ and $[a; b]$ are given on the real line, and $b^2 = a^2 + c^2$. Prove that polynomial $f(x)$ of degree $2n$ with the leading coefficient 1, cannot be less than $2 \left(\frac{ac}{2}\right)^n$ by the absolute value on these segments.

5.4. Pólya's theorem. Let $S \subset \mathbb{R}$ be a union of finite number of non-intersecting segments, let ℓ be the sum of lengths of these segments. Then for any polynomial $f(x)$ of degree n with the leading coefficient 1 there exists number $y \in S$ such that

$$|f(y)| \geq 2 \left(\frac{\ell}{4} \right)^n.$$

And if S is not a single segment, then the sign in the inequality is strict.

5.5. Find the polynomial of degree n that has the minimum deviation on the set $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Инварианты почти вложений графов в плоскость

Э. АЛКИН, Е. БОРДАЧЕВА, А. МИРОШНИКОВ, О. НИКИТЕНКО, А. СКОПЕНКОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	1
1. Число оборотов: определение и обсуждение	2
2. Число оборотов и пересечения	4
3. Числа оборотов изображений графов	5
4. Почти вложения: определение и обсуждение	6
5. Основные результаты: числа оборотов для почти вложений	8
6. Триодическое и циклическое числа Bu	10
7. Трёхмерные аналоги	12
8. Ответы, указания и решения	13
Список литературы	16

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неформальное описание основной темы и основных результатов

Классической темой является изучение изображений без самопересечений графов на плоскости (т.е. вложений или плоских графов). Также представляет интерес изучение таких изображений графов, которые имеют «умеренные» самопересечения, например, почти вложения (см. определение рядом с рисунками 4.1 и 4.2).

Мы определим целочисленные инварианты почти вложений: число оборотов (§1), циклическое и триодическое числа Bu (§6). (В этом тексте инвариант — просто число, характеризующее почти вложение: мы не вводим понятие почти изотопии, относительно которой это число инвариантно.)

- Мы построим почти вложения, реализующие некоторые значения этих инвариантов.
- Мы докажем некоторые соотношения между инвариантами.
- Мы изучим значения, реализуемые как инвариант некоторого почти вложения, но не реализуемые никаким вложением.

Точнее, основными результатами являются утверждения 1.3, 5.2, 5.3, 5.5, 6.2.b, 6.3.b, 7.1.a.

Хотя этот текст элементарен, он мотивирован передним краем науки, см. замечания в конце §5, статьи [Sk18, KS20, IKN+, Ga23, Bo] и ссылки в них. Нам неизвестны доказательства гипотез 6.5.b, 7.1.b, и решение задачи 5.8.

Об изучении этого текста на летней конференции см. [DMN+, Введение].

О стиле этого текста

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших (обычно маломерных) частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счет этого и текст становится доступным для начинающих, и удастся быстро добраться до интересных сложных и важных результатов,

Э. Алкин, Е. Бордачева, А. Мирошников, А. Скопенков: Московский физико-технический институт.
О. Никитенко: Алтайский технический университет.
А. Скопенков: Независимый московский университет, <https://users.mccme.ru/skopenko/>.
Мы благодарны М. Дидину, П. Кожевникову и особенно Т. Гараеву за полезные обсуждения.

методов и теоретических идей. Более простой материал приводится для того, чтобы сделать естественным и доступным более сложный.

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировки утверждения. Но мы не лишаем Вас удовольствия самостоятельно найти момент, когда Вы наконец-то сможете доказать такое утверждение. Некоторые теоремы приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», важные вспомогательные результаты — «леммами».

Мы излагаем теорию в виде последовательности задач. Изучение путем решения задач характерно для серьезного изучения математики, см. [HC19, §1.1], [ZSS, §1.2] и данные там ссылки. Оно продолжает древнюю культурную традицию. Задачи пронумерованы жирными цифрами, слово «задача» опускается. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). Указания к задачам приводятся либо сразу, либо в конце параграфа. Если к задаче или утверждению не приведено доказательство, то оно несложно. *Загадкой* называется не сформулированный четко вопрос; здесь нужно придумать и четкую формулировку, и доказательство.

Определения важных понятий даны **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти. *Разделы и задачи, отмеченные звездочкой, а также замечания*, не используются в дальнейшем.

1. ЧИСЛО ОБОРОТОВ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Пусть O, A, B, A_1, \dots, A_m — точки на плоскости.

Предположим, что $A \neq O$ и $B \neq O$ (но, возможно, $A = B$). Напомним, что *ориентированный (или направленный) угол* $\angle AOB$ — это число $t \in (-\pi, \pi]$ такое, что вектор \overrightarrow{OB} сонаправлен вектору, полученному из \overrightarrow{OA} вращением на угол t . (Если Вы знакомы с комплексными числами, то можете рассматривать векторы на плоскости как комплексные числа и переписать это условие как $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow e^{it}\overrightarrow{OA}$.)

Ломаная $A_1 \dots A_m$ — это (упорядоченный) набор $(A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m)$ отрезков. **Замкнутая ломаная** $A_1 \dots A_m$ — это набор $(A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m, A_mA_1)$ отрезков.¹

Пусть $A_1 \dots A_m$ — замкнутая ломаная, не проходящая через точку O . **Число оборотов** $w(A_1 \dots A_m, O)$ ломаной $A_1 \dots A_m$ вокруг точки O — это количество оборотов при вращении вектора, начало которого находится в точке O , а конец обходит ломаную в положительном направлении. Строго говоря,

$$2\pi \cdot w(A_1 \dots A_m, O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1$$

— сумма ориентированных углов.

Например, на рисунке 1.1

$$w(ABC, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1 \quad \text{и}$$

$$w(ABCD, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA) = \frac{1}{2\pi} (\angle BOD + \angle DOB) = 0.$$

1.1. Число оборотов w является целым числом.

¹Набор отрезков — не то же самое, что их объединение. Таким образом, строго говоря, ломаная (определённая здесь) не является подмножеством плоскости. Поэтому, понятия «ориентированный» или «неориентированный» формально не применимы к ломаным. Тем не менее, иногда мы работаем с множеством отрезков как с их объединением, например, мы пишем «ломаная, не проходящая через точку». Определённое здесь понятие ломаной близко к тому, что иногда понимают как «ориентированную ломаную».

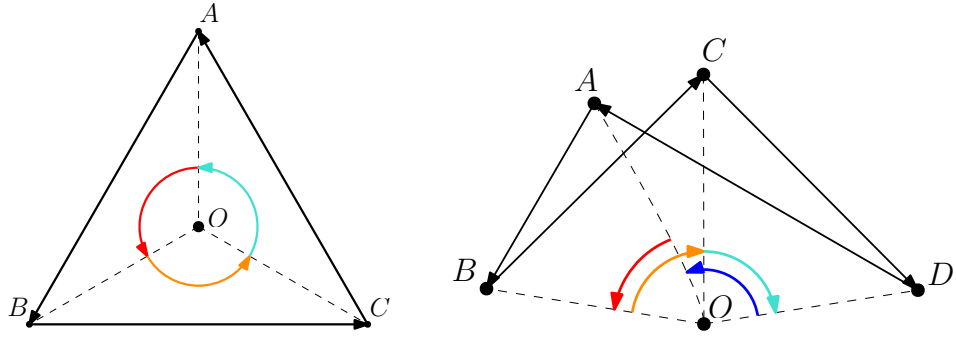


Рис. 1.1. $w(ABC, O) = +1$ и $w(ABCD, O) = 0$

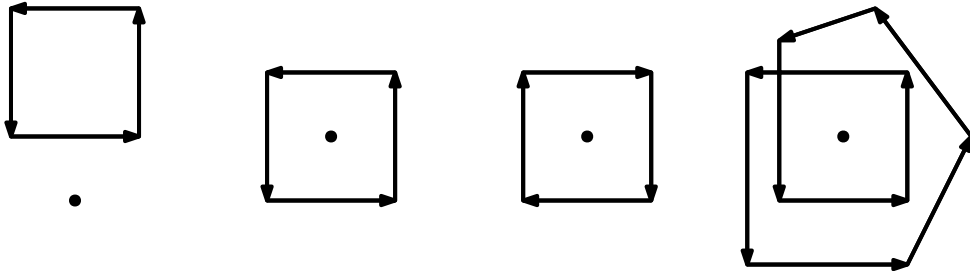


Рис. 1.2. Числа оборотов равны 0, +1, -1, +2

1.2. (а) Число оборотов контура любого выпуклого многоугольника вокруг любой точки из его внешности (внутренности) равно 0 (± 1). См. рисунок 1.2.

(б) Пусть ABC — правильный треугольник и O — его центр. Найдите $w(ABCABC, O)$.

(с) Для любых целого числа n и точки O на плоскости существует замкнутая ломаная, число оборотов которой вокруг O равно n .

(д) Приведите пример замкнутой ломаной L на плоскости такой, что $w(L, O) = 0$ для любой точки $O \in \mathbb{R}^2 - L$.

Утверждение, аналогичное 1.2.а, выполняется для любой замкнутой ломаной без самопересечений. (В зависимости от изложения это либо следствие *теоремы Жордана*, либо лемма в ее доказательстве.) Результат задачи 1.2.б показывает, что числа оборотов для разных ломаных с одинаковым объединением их отрезков могут быть разными.

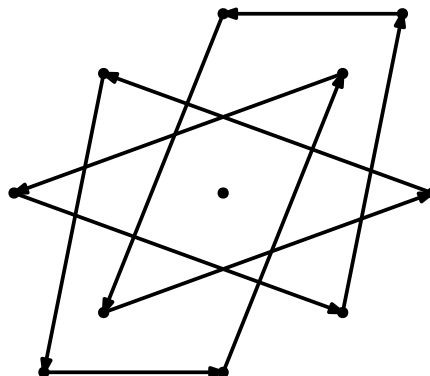


Рис. 1.3. Замкнутая ломаная, симметричная относительно точки; число оборотов равно 3

Теорема 1.3 (Борсука-Улама). Пусть замкнутая ломаная $A_1 \dots A_{2k}$ не проходит через точку O и симметрична относительно O (т. е. O — середина отрезка $A_j A_{k+j}$ для каждого $j = 1, \dots, k$). Тогда число оборотов $w(A_1 \dots A_{2k}, O)$ нечетно.

Следующие обозначение и результаты будут полезны. Пусть $A_1 \dots A_m$ — ломаная, не проходящая через точку O . Определим действительное число $w'(A_1 \dots A_m, O)$ формулой

$$2\pi \cdot w'(A_1 \dots A_m, O) := \angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{m-1} O A_m.$$

Очевидно, что

- $2\pi w(A_1 \dots A_m, O) = 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) + \angle A_m O A_1$;
- если точки A_2, \dots, A_{m-1} лежат внутри угла $\angle A_1 O A_m$, то $2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) = \angle A_1 O A_m$.

1.4. (a) Имеем $\angle A_1 O A_m = 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) + 2\pi k$ для некоторого целого k .

(b) Имеем $w(A_1 \dots A_m, O) = w'(A_1 \dots A_j, O) + w'(A_j \dots A_m A_1, O)$ для каждого $j = 1, \dots, m$.

Обозначим через \bar{l} ломаную, полученную из ломаной l проходом в противоположном порядке.

1.5. Пусть O, A, B — три попарно различных точки на плоскости.

(a) Пусть l_1, l_2, l_3 — ломаные, соединяющие точку A с точкой B , и не проходящие через точку O . Тогда $w(l_1 \bar{l}_2, O) + w(l_2 \bar{l}_3, O) = w(l_1 \bar{l}_3, O)$.

(b) Для любых трех целых чисел n_1, n_2, n_3 , таких что $n_1 + n_2 = n_3$, существуют три ломаные l_1, l_2, l_3 , соединяющие точку A с точкой B , не проходящие через точку O , и такие, что

$$w(l_1 \bar{l}_2, O) = n_1, \quad w(l_2 \bar{l}_3, O) = n_2 \quad \text{и} \quad w(l_1 \bar{l}_3, O) = n_3.$$

В утверждении 2.1.a, задачах 1.5.b, 2.1.bc и других *примерах* в этом тексте (в отличие от других *утверждений*, кроме 2.1.a), Вы можете предложить эвристическое рассуждение, а не строгое доказательство, если Вам или Вашему консультанту не станет понятно, что это приводит к путанице.

1.6. Пусть $A_1 A_2 A_3$ — правильный треугольник, а точка O — его центр. Для $m = 1, 2, 3$ обозначим через l_m ломаную, не пересекающую луч $O A_m$ и соединяющую A_{m+1} с A_{m+2} , где нумерация берется по модулю 3. Тогда $w(l_1 l_2 l_3, O) = \pm 1$.

2. ЧИСЛО ОБОРОТОВ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

2.1. (a) На плоскости даны точки P_0, P_1 , соединенные ломаной, не пересекающейся с замкнутой ломаной L . Тогда $w(L, P_0) = w(L, P_1)$.

Указание: используйте *соображения непрерывности*.

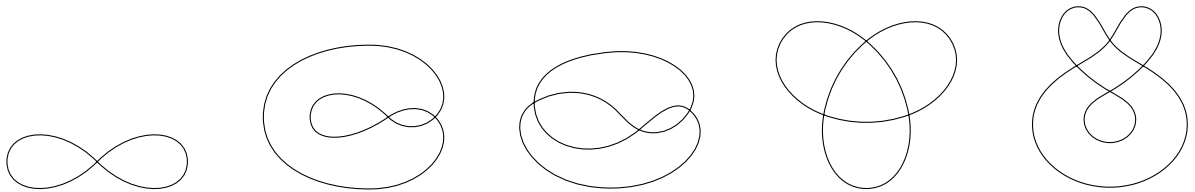


Рис. 2.1. Некоторые замкнутые ломаные

(b) Возьмем замкнутые ломаные L на плоскости, показанные на рисунке 2.1 (с некоторой ориентацией; никакая ломаная не проходит дважды ни через какой отрезок и не меняет существенно своего направления ни в одной точке). Раскрасьте дополнение $\mathbb{R}^2 - L$ в соответствии с четностью числа оборотов ломаной L .

(c) Для замкнутых ломаных L из (b) раскрасьте дополнение $\mathbb{R}^2 - L$ в соответствии с числом оборотов ломаной L .

2.2. Возьмем на плоскости замкнутую и незамкнутую ломаные L и P , все вершины которых попарно различны и находятся в общем положении. Пусть P_0 и P_1 — начальная и конечная точки ломаной P . Предположим, что $P_0, P_1 \notin L$.

(a) Тогда $|L \cap P| \equiv w(L, P_1) - w(L, P_0) \pmod{2}$. (Это дискретная версия *теоремы Стокса*.)

Подсказка. Достаточно доказать это утверждение для достаточно малых отрезков P' , таких что $P' \subset P$.

(b) Если точка P_1 расположена «достаточно далеко» от L , то $w(P_0, L) \equiv |L \cap P| \pmod 2$, а также $w(P_0, L)$ равно сумме знаков точек пересечений ломаных P и L (определенных в [Sk, §1.3]).

Пусть L — замкнутая плоская ломаная, все вершины которой попарно различны и находятся в общем положении. Ввиду утверждения 2.2.а дополнение к L допускает «шахматную раскраску», такую, что соседние области покрашены в разные цвета. Концы ломаной P имеют одинаковый цвет тогда и только тогда, когда $|L \cap P|$ четно. *Внутренностью по модулю 2* ломаной L называется объединение черных областей шахматной раскраски (при условии, что бесконечная область покрашена в белый цвет). Другими словами, это множество всех точек $x \in \mathbb{R}^2 - L$, для которых найдется ломаная P ,

- соединяющая точку x с точкой, расположенной «достаточно далеко» от L (т. е. вне выпуклой оболочки ломаной L),
- пересекающая L в нечетном числе точек, и
- такая, что все вершины ломаных L и P попарно различны и находятся в общем положении.

Корректность этого определения следует из [Sk18, лемма 1.3.3 о четности].

3. ЧИСЛА ОБОРОТОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ГРАФОВ

Замечание (некоторые строгие определения). Вы можете работать с определенными здесь понятиями на интуитивном уровне, пока Вам или жюри не станет понятно, что это приводит к путанице.

Графом (конечным) (V, E) называется конечное множество V вместе с набором $E \subset \binom{V}{2}$ его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар несовпадающих элементов). (Общепринятый термин для этого понятия — *граф без петель и кратных ребер* или *простой граф*.) Элементы данного конечного множества называются **вершинами**. Пары вершин из E называются *ребрами*. Ребро, соединяющее вершины i и j , обозначается ij (а не (i, j) , чтобы не путать с упорядоченными парами). Цикл в графе обозначается перечислением его вершин в порядке их следования (без запятых).

Говоря нестрого, граф планарен, если его можно нарисовать «без самопересечений» на плоскости. Граф (V, E) называется **планарным** (или кусочно-линейно вложимым в плоскость), если на плоскости существуют

- набор из $|V|$ точек, соответствующих вершинам, а также
- набор несамопересекающихся ломаных, соединяющих пары (точек) из E , причем никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной.²

Обозначим через

- $[n]$ множество $\{1, 2, \dots, n\}$;
- K_n полный граф на множестве $[n]$ вершин;
- $K_{m,n}$ полный двудольный граф с долями $[m]$ и $[n]'$ (мы обозначаем через A' копию объекта A).

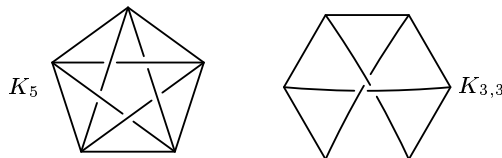


Рис. 3.1. Непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$

²Тогда любые две ломаные либо не пересекаются, либо пересекаются только по их общей концевой вершине. Мы не требуем, чтобы «ни одна изолированная вершина не лежала ни на одной из ломаных», поскольку этого свойства всегда можно добиться.

Мы рассматриваем изображения графа на плоскости, при которых ребра изображаются ломаными и допускаются пересечения этих ломаных. Приведем строгие определения. Пусть K — граф, имеющий V вершин. **Отображение** (кусочно-линейное) $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость — это

- набор V точек на плоскости, соответствующих вершинам, а также
- набор (незамкнутых) ломаных на плоскости, соединяющих те пары из набора точек, которые соответствуют парам смежных вершин.³

Сужение $f|_\sigma$ на ребро σ — это соответствующая ломаная. **Образ** $f(\sigma)$ ребра σ — это объединение отрезков соответствующей ломаной. **Образ** набора ребер — это объединение образов всех ребер из набора.

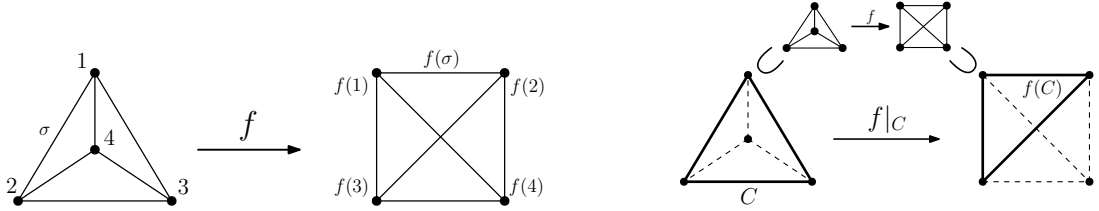


Рис. 3.2. Отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (слева) и его сужение $f|_C$ (справа)

Пусть K — граф, и $C = v_1 \dots v_n$ — ориентированный цикл в K . Например, для $j = 1, 2, 3, 4$ обозначим через C_j ориентированный цикл в K_4 , полученный удалением j из 1234. Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение. **Сужением** $f|_C : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения f называется замкнутая ломаная, «образованная» ломаными $f|_{v_1v_2}, \dots, f|_{v_{n-1}v_n}, f|_{v_nv_1}$ в указанном порядке.

3.1. Для любых отображения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и точки $O \in \mathbb{R}^2 - f(K_4)$ выполнено

$$\sum_{j=1}^4 (-1)^j w(f|_{C_j}, O) = 0 : \quad -w(f|_{234}, O) + w(f|_{134}, O) - w(f|_{124}, O) + w(f|_{123}, O) = 0.$$

Для вершины v в графе K , такой что $f(v) \notin f(C)$ положим

$$w_f(C, v) := w(f|_C, f(v)).$$

3.2. (а) Для любого целого n существует отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что

$$f(1) \notin f(C_1), \quad w_f(C_1, 1) = n, \quad \text{и} \quad f(j) \notin f(C_j), \quad w_f(C_j, j) = 0 \quad \text{для каждого} \quad j = 2, 3, 4.$$

(б) Для любых целых n_1, n_2, n_3, n_4 существует отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $f(j) \notin f(C_j)$ и $w_f(C_j, j) = n_j$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.

Указание. Для построения примеров не нужны сложные картинки — достаточно *простых* преобразований *простых* картинок. Например, полезно преобразование на рисунке 3.3.

Подробнее о числе оборотов и связанных с ним понятиях см. [Wn, Va81, To84, Ta88], [KK18, Теорема 2], [Sk18, §2].

4. Почти вложения: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Теорема 4.1 (Ханани-Татт; ван Кампен). *Для любого отображения $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ существуют два несмежных ребра, образы которых пересекаются.*

³Это небольшое искажение терминологии. У ломаной есть начало и конец поэтому приведенное определение есть определение отображения ориентированного графа. Два отображения ориентированных графов эквивалентны, если одно можно получить из другого изменением ориентации некоторых ребер, а один из соответствующих наборов ломаных может быть получен из другого прохождением соответствующих ломаных в противоположном порядке. Строго говоря, отображение графа является классом эквивалентности по этому отношению эквивалентности.

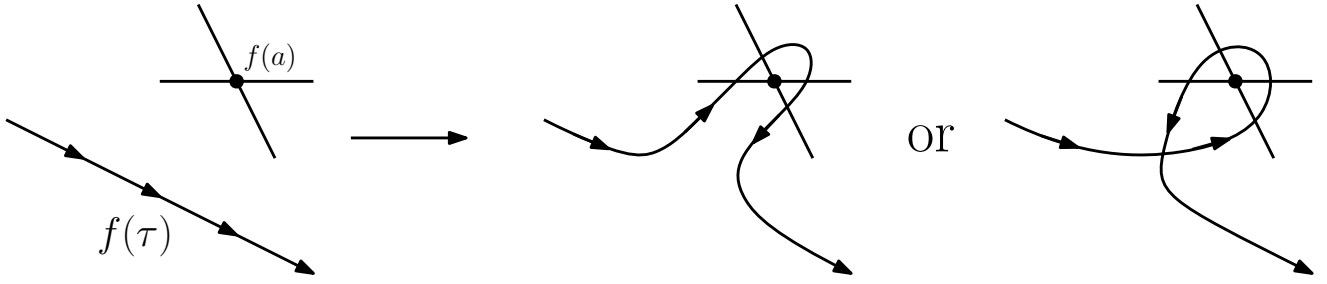


Рис. 3.3. «Пальцевое движение» (для отображения f , ребра τ , относительно вершины a) первого и второго типов, соответственно

Это следует из утверждения 2.1.а и теоремы 5.5.а ниже. (Стандартное доказательство [Sk18, §1.4] не использует понятия числа оборотов.) Аналог для $K_{3,3}$ справедлив ввиду утверждений 2.1.а и 5.7.а ниже.

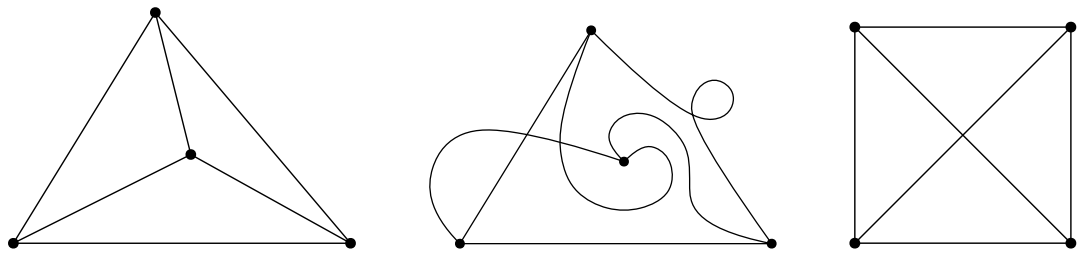


Рис. 4.1. Вложение, почти вложение и изображение, которое не является почти вложением

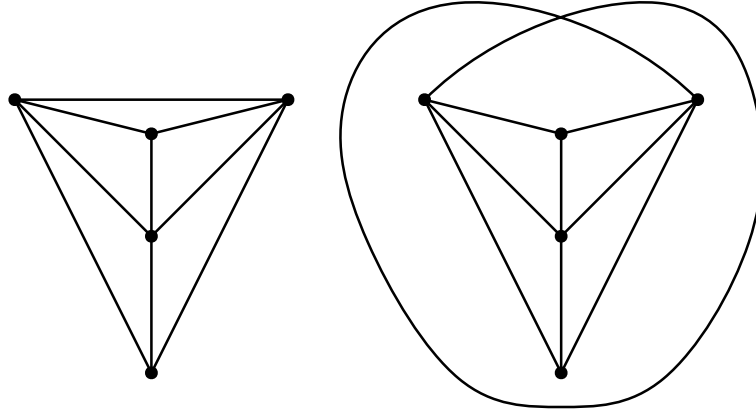


Рис. 4.2. Вложение и почти вложения графа K_5 без ребра

Отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K называется **почти вложением**, если $f(\alpha) \cap f(\beta) = \emptyset$ для любых двух несмежных симплексов (т.е. вершин и ребер) $\alpha, \beta \subset K$. Т.е. если

- (i) образы несмежных ребер не пересекаются,
- (ii) образ любой вершины не лежит на образе никакого ребра, несмежного с этой вершиной,
- (iii) образы различных вершин различны.

Замечание. Этот текст касается в первую очередь *инвариантов* почти вложений, а не проблем их *существования*. Поэтому мы сохраняем в определении свойства (ii, iii), выполнения которых можно добиться достаточно малым шевелением отображения, с сохранением свойства (i). Если граф допускает почти вложение в плоскость, то граф планарен (доказательство нетривиально).

Почти вложения естественным образом возникают в топологической теории графов, в комбинаторной геометрии, в топологической комбинаторике и при изучении вложений (графов

в поверхности и гиперграфов в многомерные евклидовы пространства). Более подробная мотивировка приведена в [ST17, §1, ‘Motivation and background’], [Sk, §6.10 ‘Almost embeddings, \mathbb{Z}_2 - and \mathbb{Z} -embeddings’].

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: ЧИСЛА ОБОРОТОВ ДЛЯ ПОЧТИ ВЛОЖЕНИЙ

5.1. (a) Для любого целого n и точки O на плоскости существует почти вложение $f : K_3 \rightarrow \mathbb{R}^2 - O$ такое, что $w(f|_{123}, O) = n$.

(b) Для любого целого n существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $w_f(123, 4) = n$.

Для любого вложения $f : K_3 \sqcup \{4\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем $w_f(123, 4) \in \{-1, 0, 1\}$ (данное утверждение близко к теореме Жордана).

Напомним, что

$$\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j) = w_f(234, 1) + w_f(134, 2) + w_f(124, 3) + w_f(123, 4).$$

Теорема 5.2. Для любого почти вложения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем $\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j) \equiv 1 \pmod{2}$.

Аналог теоремы 5.2 для вложений вместо почти вложений доказывается проще (он близок к теореме Жордана). Более того, для любого вложения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ три из четырех чисел из теоремы 5.2 равны нулю, а оставшееся равно ± 1 . Аналог теоремы 5.2 для отображений вместо почти вложений неверен по утверждению 3.2. В отличие от утверждения 3.1, теорема 5.2 не следует из «соотношения $123 + 134 + 142 + 243 = 0$ в графе».

Набросок доказательства теоремы 5.2. Определение отображения общего положения графа в плоскость дано в [Sk18, §1.4]. Пусть $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения общего положения. Тогда образы любых двух несмежных ребер пересекаются в конечном числе точек. Назовем *числом Радона* $\rho(f) \in \mathbb{Z}_2$ четность суммы

- количества точек пересечения образов несмежных ребер и
- количества тех вершин j графа K_4 , образы которых лежат во внутренней по модулю 2 образа $f(C_j)$.

Ввиду утверждения 2.2.a, для любого почти вложения общего положения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ четность числа $\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j)$ равна $\rho(f)$. Теорема 5.2.a выводится при помощи аппроксимации из этого результата и следующей знаменитой теоремы Радона для плоскости [Sk18, Лемма 2.2.3]: для любого отображения общего положения графа K_4 в плоскость число Радона нечетно. Ср. [Sk18, §2.2]. \square

Пример 5.3. (a) Для любого целого n существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $w_f(C_1, 1) = n$, $w_f(C_j, j) = 0$ для каждого $j = 2, 3$ и $w_f(C_4, 4) = n + 1$.

(b) Для любых целых n_1, n_2, n_3, n_4 таких, что $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = \pm 1$, существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $w_f(C_j, j) = n_j$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.

Пример 5.4. (a) (Е. Морозов) Существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $\sum_{j=1}^4 (-1)^j w_f(C_j, j) \neq \pm 1$.

(b) (гипотеза; см. [ALM]) Для любых целых чисел n_1, n_2, n_3, n_4 , сумма которых нечетна, существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $w_f(C_j, j) = n_j$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.

Напомним, что $K - e$ — граф, полученный из графа K удалением ребра e .

Теорема 5.5. Для любого почти вложения $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

(a) $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) \equiv 1 \pmod{2}$;

(b)* $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) = \pm 1$.

Ср. теорему 5.2 и гипотезу 5.4. Аналог пункта (b) для вложений вместо почти вложений более прост (и близок к теореме Жордана). Пункт (a) несложен и хорошо известен, а пункт (b) является недавним нетривиальным результатом [Ga23].

5.6. (a) Верен ли аналог теоремы 5.5.a для отображений вместо почти вложений?

(b) Для любого целого n существует почти вложение $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $w_f(123, 5) = n$. (См. рисунок 4.2, справа, для $n = 2$.)

Набросок доказательства теоремы 5.5.a. Для отображения общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ покрасим в красный цвет точки пересечения образов несмежных ребер. Числом ван Кампена $v(f) \in \mathbb{Z}_2$ называется четность количества красных точек. Ввиду утверждения 2.2.a для отображения общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, сужение которого на $K_5 - 45$ является почти вложением, четность числа $w_f(123, 5) - w_f(123, 4)$ равна $v(f)$. Теорема 5.5.a выводится из этого и следующей знаменитой теореме ван Кампена-Флореса для плоскости [Sk18, Лемма 1.4.3]: для любого отображения общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ число ван Кампена $v(f)$ нечетно.⁴ □

5.7. Возьмем ребро ab графа $K_{3,3}$. Обозначим через $C = C_{ab}$ произвольно ориентированный цикл $K_{3,3} - a - b$ длины 4. Для любого почти вложения $f : K_{3,3} - ab \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

(a) $w_f(C, a) - w_f(C, b) \equiv 1 \pmod{2}$; (b) (гипотеза) $w_f(C, a) - w_f(C, b) = \pm 1$.

Пункт (a) доказывается аналогично теореме 5.5.a. Аналог пункта (b) для вложений вместо почти вложений более прост (и близок к теореме Жордана). Осторожно, прямое доказательство пункта (b) может содержать технические детали (как в доказательстве теоремы 5.5.b); возможно, существует простая редукция к теореме 5.5.b, см. рисунок 5.1.

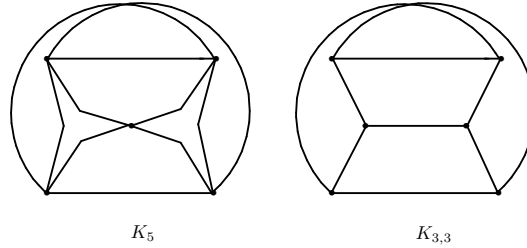


Рис. 5.1. «Почти вложение» $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

5.8 (открытая проблема; загадка). Пусть K — граф (a) куба; (b) октаэдра.

Для почти вложения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ рассмотрим набор целых чисел $w_f(C, v)$, где $v \in K$ — вершина, а $C \subset K - v$ — ориентированный цикл. Опишите наборы, реализуемые почти вложениями $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Замечание. (a) Целое число $w_f(C, v)$ и инварианты, изучаемые в §6, являются инвариантами (почти) вложения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ относительно (почти) изотопии. Они являются частями инварианта Хефлигера-Ву для f [Sk06, §5].

(b) Алгебраическая версия почти вложений (\mathbb{Z}_2 -вложения) появилась в 1930-х годах и активно изучается в теории графов с 2000-х годов. См., например, обзоры [SS13], [Sk, §6.10 «Почти вложения, \mathbb{Z}_2 - и \mathbb{Z} -вложения»] и статью [FK19] о связи \mathbb{Z}_2 -вложений и задачи минимизации ранга при восполнении матрицы. Аналоги утверждений 5.2, 5.5.a, 5.7.a верны для \mathbb{Z}_2 -вложений. Гипотеза: аналоги утверждений 5.5.b, 5.7.b верны для \mathbb{Z} -вложений, но неверны для \mathbb{Z}_2 -вложений.

(c) *Гиперграфы* — многомерные аналоги графов: ребрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества вершин. Классическая задача топологии, комбинаторики

⁴Теорема 5.5.b является целочисленной версией для почти вложений этой теоремы. Заметим, что эта теорема не имеет целочисленной версии для отображений (это известно и объяснено в [Ga23, Замечание 4]).

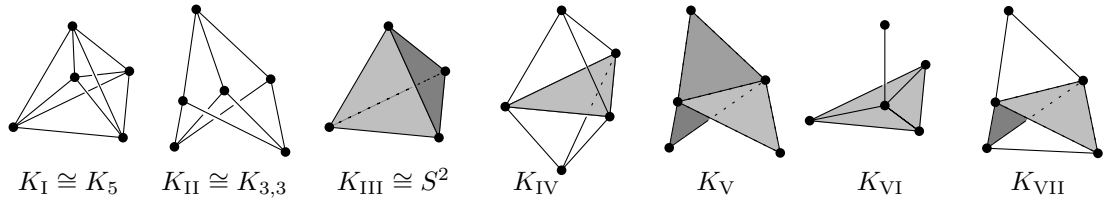


Рис. 5.2. Двумерные гиперграфы, не вложимые в плоскость

и компьютерной науки — нахождение критериев (и алгоритмов) реализуемости гиперграфов в евклидовом пространстве данной размерности d .

В 1930-1960-е гг. такой критерий был получен классиками топологии для $2d \geq 3k + 3$, где k — размерность гиперграфа. Полиномиальный алгоритм распознавания реализуемости, основанный на этом критерии, был получен в 2013. Алгоритмическая неразрешимость для $2d < 3k + 2$ анонсирована в 2019 году на конференции в Обервольфахе (Марек Филадельфский, Ульрих Вагнер и Стефан Жечев). Ошибку нашел в 2020 году Аркадий Скопенков (она признана авторами). Она заключалась в том, что в многомерном аналоге теоремы 5.5.b (и примера 7.1.a) значения некоторого инварианта не обязательно равны ± 1 . В 2020 году Роман Карасев и А. Скопенков показали, что этот инвариант принимает любые нечетные значения. Их гипотеза об аналогичном результате для графов на плоскости опровергнута в 2023 году Тимуром Гараевым, см. теорему 5.5.b. См. ссылки в обзорах [Sk06, §5], [Sk18, §3] и недавние работы [KS20, Ga23].

6. ТРИОДИЧЕСКОЕ И ЦИКЛИЧЕСКОЕ ЧИСЛА ВУ

Пусть на плоскости ломаные l_1, l_2, l_3 соединяют точку O с точками A_1, A_2, A_3 , соответственно. Предположим, что $A_i \notin l_j$ для всех $i \neq j$. (Другими словами, напомним, что граф с вершинами $\{1, 2, 3, 1'\}$, где $\deg 1' = 3$ и $\deg m = 1$ для каждого $m \in [3]$, обозначается через $K_{3,1}$; возьмем почти вложение $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ и обозначим $l_m := f(1'm)$ для каждого $m \in [3]$.)

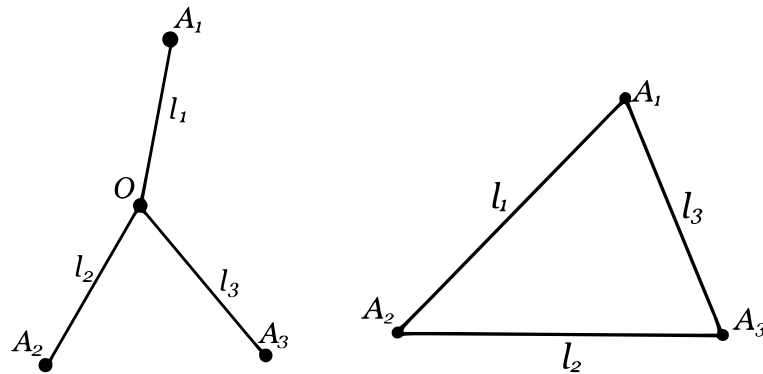


Рис. 6.1. Триод и треугольник

Триодическое число $Wu(l_1, l_2, l_3)$ определяется как число оборотов вектора в результате следующих вращений:

- от вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1A_3}$, при котором конец вектора движется по ломаной \bar{l}_2l_3 , затем
- от вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$, при котором начало вектора движется по \bar{l}_1l_2 , затем
- от вектора $\overrightarrow{A_2A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2A_1}$, при котором конец вектора движется по \bar{l}_3l_1 , затем
- от вектора $\overrightarrow{A_2A_1}$ к вектору $\overrightarrow{A_3A_1}$ по \bar{l}_2l_3 , затем
- от вектора $\overrightarrow{A_3A_1}$ к вектору $\overrightarrow{A_3A_2}$ по \bar{l}_1l_2 , затем
- от вектора $\overrightarrow{A_3A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$ по \bar{l}_3l_1 .

Это равно удвоенному (нецелому) числу оборотов в результате первых трех из вышеприведенных вращений. Строго говоря,

$$\begin{aligned} \text{wu}(l_1, l_2, l_3) &:= w'(\bar{l}_2 l_3, A_1) + w'(\bar{l}_1 l_2, A_3) + w'(\bar{l}_3 l_1, A_2) + w'(\bar{l}_2 l_3, A_1) + w'(\bar{l}_1 l_2, A_3) + w'(\bar{l}_3 l_1, A_2) = \\ &= 2(w'(\bar{l}_2 l_3, A_1) + w'(\bar{l}_1 l_2, A_3) + w'(\bar{l}_3 l_1, A_2)). \quad (*) \end{aligned}$$

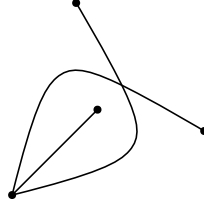


Рис. 6.2. Тройка ломаных с триодическим числом $\text{Bu} \pm 3$

6.1. (а) Для трех отрезков, соединяющих вершины A_1, A_2, A_3 правильного треугольника с его центром O , триодическое число Bu равно ± 1 .

(б) Для трех ломаных на рисунке 6.2 триодическое число Bu равно ± 3 .

6.2. (а) Для любых ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами (т. е. для любого почти вложения $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$) триодическое число Bu нечетно.

(б) Для любого целого n существуют ломаные l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами (т. е. существует почти вложение $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$), триодическое число Bu которых равно $2n + 1$.

(с) Для любого вложения $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ триодическое число Bu равно ± 1 .

(д) Перестановка ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами умножает триодическое число Bu на знак перестановки.

Пусть на плоскости заданы точки A_1, A_2, A_3 и ломаные l_1, l_2, l_3 соединяют A_1 с A_2 , A_2 с A_3 , A_3 с A_1 соответственно (и, таким образом, образуют замкнутую ломаную). Предположим, что A_i не лежит на ломаной l_{i+1} для каждого $i = 1, 2, 3$ (нумерация по модулю 3; другими словами, ломаные образуют почти вложение $K_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Циклическое число Bu $\text{wu}(l_1, l_2, l_3)$ определяется как удвоенное число оборотов вектора в результате следующих вращений:

- от вектора $\overrightarrow{A_1 A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1 A_3}$, при котором конец вектора движется по ломаной l_2 , затем

- от вектора $\overrightarrow{A_1 A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2 A_3}$, при котором начало вектора движется по ломаной l_1 , затем

- от вектора $\overrightarrow{A_2 A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2 A_1}$, при котором конец вектора движется по ломаной l_3 .

Другими словами, $\text{wu}(l_1, l_2, l_3)$ определяется следующей формулой, аналогичной (*):

$$\text{wu}(l_1, l_2, l_3) := 2(w'(l_2, A_1) + w'(l_1, A_3) + w'(l_3, A_2)). \quad (**)$$

6.3. (а') Если три ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами являются сторонами треугольника, то циклическое число Bu равно ± 1 .

(а) Для любых ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами циклическое число Bu нечетно.

(б) Для любого n существуют ломаные l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами, циклическое число Bu которых равно $2n + 1$.

Если три ломаных с вышеуказанными свойствами образуют замкнутую несамопересекающуюся ломаную, то циклическое число Bu равно ± 1 (это утверждение близко к теореме Жордана).

Циклическое число Bu схоже со *степенью* замкнутой кривой, но отличается от нее.

6.4. (а) Для любого почти вложения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

$$\text{wu}(f|_{12}, f|_{23}, f|_{31}) + \text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) = 2w_f(123, 4).$$

(б) (гипотеза; см. [Za]) Для любых двух нечетных чисел n, m существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $\text{wu}(f|_{12}, f|_{23}, f|_{31}) = m$ и $\text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) = n$.

6.5. (а) Для любого почти вложения $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

$$\text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) - \text{wu}(f|_{51}, f|_{52}, f|_{53}) = 2(w_f(123, 4) - w_f(123, 5)).$$

(б) (гипотеза) Для любого почти вложения $f : K_{3,2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

$$\text{wu}(f|_{1'1}, f|_{1'2}, f|_{1'3}) - \text{wu}(f|_{2'1}, f|_{2'2}, f|_{2'3}) = \pm 2.$$

По пункту (а), простое решение пункта (б) даст простое доказательство теоремы 5.5.b.

7. ТРЕХМЕРНЫЕ АНАЛОГИ

Линейная теорема Конвея-Гордона-Закса утверждает, что *если никакие четыре из шести точек в трехмерном пространстве не лежат в одной плоскости, то существуют два зацепленных треугольника с вершинами в этих шести точках. То есть, первый треугольник пересекает контур второго треугольника ровно в одной точке.* Доказательство см. в обзоре [Sk14].

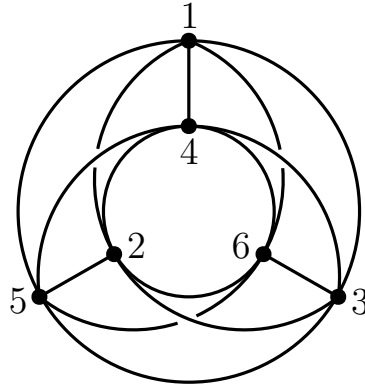


Рис. 7.1. Проекция на плоскость вложения $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Эквивалентные строгие определения коэффициента зацепления непересекающихся замкнутых ломаных в трёхмерном пространстве (используемые в следующей задаче) можно найти в [Sk20u, §§4,8], [Sk24, §§1.2,1.3], [Sk, §§4.2,4.3].

Пример 7.1 (ср. рисунок 7.1). * (а) Для любого целого n в трехмерном пространстве существуют шесть точек, а также попарно соединяющие их несамопересекающиеся ломаные, для которых

(а1) никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной,

(а2) коэффициент зацепления одной (неупорядоченной) пары непересекающихся циклов длины 3, образованных ломаными, равен $2n + 1$, а также

(а3) коэффициент зацепления любой другой пары непересекающихся циклов длины 3, образованных ломаными, равен нулю.

(б) (гипотеза) Возьмем любые 10 целых чисел $n_{123,456}, n_{124,356}, \dots$, соответствующие 10 неупорядоченным разбиениям множества [6] на два 3-элементных подмножества. Если сумма этих чисел нечетна, то в трехмерном пространстве существуют шесть точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, а также попарно соединяющие их несамопересекающиеся ломаные, для которых выполнено (а1), и коэффициент зацепления каждой пары $\{ijk, pqr\}$ непересекающихся циклов длины 3, образованных ломаными, равен $n_{ijk,pqr}$.

Часть (а) доказана в [KS20, Предложение 1.2], но могла быть известна и раньше. Часть (б), по-видимому, можно доказать с помощью [KS20, Лемма 2.1].

8. ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1.1 Для $j = 1, \dots, m$ обозначим $t_j := \angle A_j O A_{j+1}$, где $A_{m+1} = A_1$. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow e^{it_m} \overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1})} \overrightarrow{OA_{m-1}} \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1}+\dots+t_1)} \overrightarrow{OA_1}.$$

Следовательно, $(t_m + t_{m-1} + \dots + t_1)/2\pi$ является целым числом.

1.2. (а) Обозначим через Ω данный выпуклый многоугольник.

Если точка O лежит вне Ω , то проведем через O две опорные прямые к Ω . Возьмем две точки A, B из пересечений этих опорных прямых с контуром $\partial\Omega$ многоугольника. Имеем $w(\partial\Omega, O) = \frac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOA) = 0$.

Если точка O лежит внутри Ω , нарисуем правильный треугольник ABC с центром в O . Возьмем три точки A', B', C' пересечения лучей OA, OB, OC с контуром $\partial\Omega$ многоугольника. Они разбивают ломаную $\partial\Omega$ на три ломаные. Имеем

$$w(\partial\Omega, O) = \frac{1}{2\pi}(\angle A'OB' + \angle B'OC' + \angle C'OA') = \frac{3}{2\pi}\angle A'OB' = \frac{3}{2\pi}\angle AOB = \pm 1.$$

(b) Пользуясь пунктом (а), имеем $w(ABCABC, O) = 2 \cdot w(ABC, O) = \pm 2$.

(c) Если $n = 0$, примером является замкнутая ломаная, состоящая из одной точки. Если $n \neq 0$, пусть ABC — правильный треугольник, ориентированный по часовой стрелке при $n < 0$ и против часовой стрелки иначе. Пусть O — его центр. Рассмотрим замкнутую ломанную $L = \underbrace{ABC \dots ABC}_{|n| \text{ раз}}$. Пользуясь пунктом (а), имеем $w(L, O) = |n| \cdot w(ABC, O) = n$.

(d) Тривиальным примером является замкнутая ломаная, состоящая из одной точки. Другой пример: замкнутая ломаная $ABCB$ для любых трех точек A, B и C на плоскости.

2.1. (b,c) рисунок 8.1.

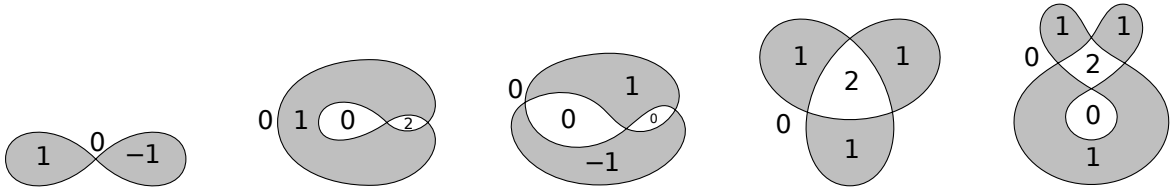


Рис. 8.1. Раскраска дополнений замкнутых ломаных с рисунка 2.1 в соответствии с числом оборотов

1.3. Ввиду симметричности, имеем $w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) = w'(A_{k+1} \dots A_{2k} A_1, O)$. Тогда

$$\begin{aligned} w(A_1 \dots A_{2k}, O) &= w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) + w'(A_{k+1} \dots A_{2k} A_1, O) = \\ &= 2w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) = 2 \left(\frac{\angle A_1 O A_{k+1}}{2\pi} + n \right) = 1 + 2n \end{aligned}$$

для некоторого целого n . Здесь предпоследнее равенство следует из утверждения 1.4.а.

1.4 (а) Используя формулу из доказательства утверждения 1.1, имеем

$$e^{i\angle A_1 O A_m} \overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{2\pi i w'(A_1 \dots A_m, O)} \overrightarrow{OA_1}.$$

Следовательно, $\angle A_1 O A_m - 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) = 2\pi k$ для некоторого целого k .

1.5. Подсказка. (а) Используйте утверждение 1.4.б и равенство $w'(l, O) = -w'(\bar{l}, O)$ для любых точки O и ломаной l , не проходящей через O .

1.6. Указание. Можно считать, что вершины треугольника пронумерованы против часовой стрелки. Докажите, что $w'(l_0, O) = w'(l_1, O) = w'(l_2, O) = \frac{2\pi}{3}$. Для этого обозначим через $B_1 \dots B_m$ последовательные вершины ломаной l_0 . Для $j \in [m-1]$ положим $t_j := \angle B_j O B_{j+1} \in (-\pi, \pi)$. Докажите, что $T_j := t_1 + \dots + t_j \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ для любого $j \in [m-1]$, и $w'(l_0, O) = T_{m-1} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ для некоторого целого k . Затем выведите, что $k = 0$.

3.1. Подсказка. Используйте следующие равенства: $w'(f|_{ij}, O) = -w'(f|_{ji}, O)$ для любого ребра ij , и $w(f|_{ijk}, O) = w'(f|_{ij}, O) + w'(f|_{jk}, O) + w'(f|_{ki}, O)$ для любого цикла ijk .

3.2. Указания. (а) Квадрат с диагоналями образует отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$; пусть вершины $f(i)$, $i \in [4]$ пронумерованы против часовой стрелки. Тогда $w_f(C_j, j) = 0$ для каждого $j \in [4]$. Сделаем $|n|$ пальцевых движений (рисунок 3.3) ребра 24 относительно вершины 1 первого/второго типа, если n положительно/отрицательно соответственно. Полученное отображение f_1 является искомым.

(б) Рассмотрим отображение f_1 из доказательства пункта (а) для $n = n_1$. Сделаем $|n_2|$ пальцевых движений ребра 13 относительно вершины 2 первого/второго типа, если n_2 положительно/отрицательно соответственно. Обозначим полученное отображение через f_2 . Сделаем $|n_3|$ пальцевых движений ребра 24 относительно вершины 3 первого/второго типа, если n_3 положительно/отрицательно соответственно. Обозначим полученное отображение через f_3 . Сделаем $|n_4|$ пальцевых движений ребра 13 относительно вершины 4 первого/второго типа, если n_4 положительно/отрицательно соответственно. Полученное отображение f_4 является искомым.

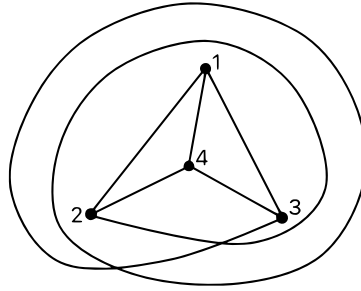


Рис. 8.2. Почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $w_f(123, 4) = 3$

5.1. (б) См. рисунок 8.2 для $n = 3$. Чтобы получить отображение для пункта (а) уберем образы ребер, исходящие из $f(4)$, и заменим $f(4)$ на O .

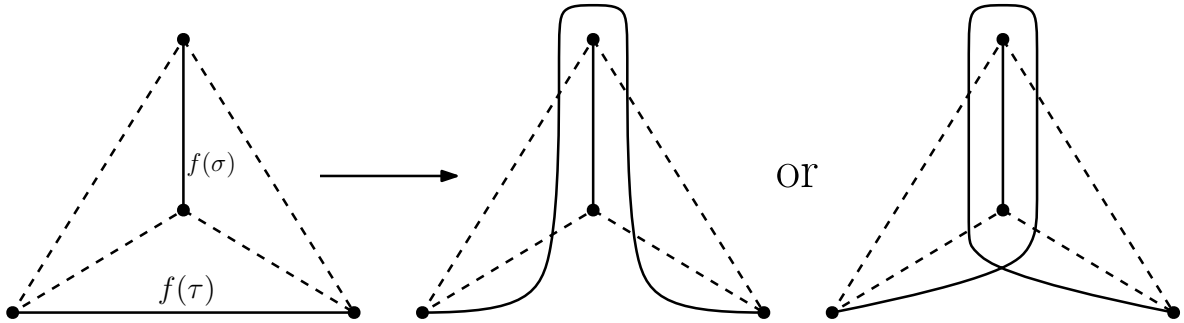


Рис. 8.3. Пальцевые движения (ребра τ относительно отрезка $f(\sigma)$, для отображения f) первого и второго типов соответственно

5.3. Указания. (а) Правильный треугольник с его центром и ребрами, соединяющими центр с вершинами, образуют отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$; пусть вершины $f(1), f(2), f(3)$ пронумерованы против часовой стрелки. Тогда $w_f(C_j, j) = 0$ для каждого $j \in [3]$, и $w_f(C_4, 4) = 1$. Сделаем $|n|$ пальцевых движений ребра 23 относительно отрезка $f(14)$ (рисунок 8.3, ср. с рисунком 3.3) первого/второго типа, если n отрицательно/положительно соответственно. Полученное отображение f_1 является искомым.

(б) В следующем абзаце мы построим почти вложение для $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = 1$. Чтобы построить почти вложение f для $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = -1$, возьмем почти вложение g для $m_1 = n_2, m_2 = n_1, m_3 = -n_3, m_4 = -n_4$, где $\sum_{j=1}^4 (-1)^j m_j = 1$. Тогда $f = g \circ \sigma$, где $\sigma : K_4 \rightarrow K_4$ перестановка, которая меняет местами вершины 1 и 2.

Рассмотрим отображение f_1 из доказательства пункта (а) для $n = n_1$. Сделаем $|n_2|$ пальцевых движений ребра 13 относительно отрезка $f_1(24)$ первого/второго типа, если n_2 положительно/отрицательно соответственно. Обозначим полученное отображение через f_2 . Сделаем $|n_3|$ пальцевых движений ребра 12 относительно отрезка $f_2(34)$ первого/второго типа, если n_3 отрицательно/положительно соответственно. Обозначим полученное отображение через f_3 . Полученное отображение f_3 является искомым.

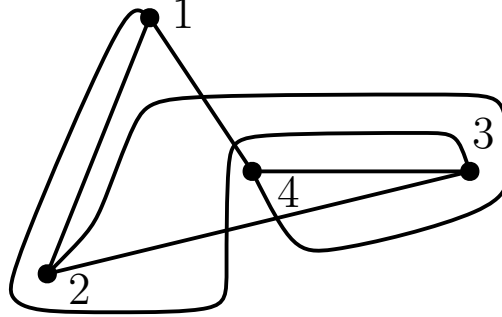


Рис. 8.4. Почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $\sum_{j=1}^4 (-1)^j w_f(C_j, j) = 3$

5.4. Указание. (а) См. рисунок 8.4.

5.6. (а) Нет. Правильный пятиугольник $f(1) \dots f(5)$ со всеми диагоналями, но без ребра $f(4)f(5)$ образует отображение $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) = 0$.

(б) См. рисунок 8.5 для $n = 3$.

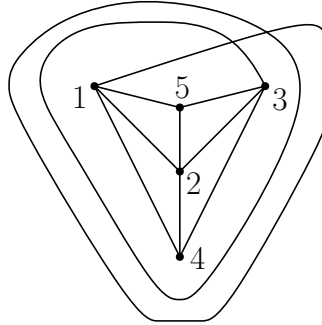


Рис. 8.5. Почти вложение графа K_5 без ребра 45 такое, что $w_f(123, 5) = 3$

6.2. (а) Имеем

$$\begin{aligned} \text{wu}(l_1, l_2, l_3) &\stackrel{(1)}{=} 2 \left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + k_1 + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + k_2 + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + k_3 \right) = \\ &= 2(k_1 + k_2 + k_3) + 2 \frac{\angle A_2 A_1 A_3 + \angle A_3 A_2 A_1 + \angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1 \end{aligned}$$

для некоторых целых k_1, k_2, k_3 . Здесь равенство (1) следует из (*) и утверждения 1.4.а.

(б) Рассмотрим отрезки l_1, l_2, l_3 с общей вершиной O , лежащей внутри треугольника $A_1 A_2 A_3$, как изображено на рисунке 6.1. Сделаем $|n|$ пальцевых движений (рисунок 3.3) ребра l_1 относительно вершины A_3 первого/второго типа для отрицательного/положительного n соответственно. Тогда

$$\text{wu}(l_1, l_2, l_3) = 2 \left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + n \right) = 1 + 2n.$$

Например, для левой части рисунка 8.6 имеем

$$w'(\bar{l}_2 l_3, A_1) = \frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi}, \quad w'(\bar{l}_3 l_1, A_2) = \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi}, \quad w'(\bar{l}_1 l_2, A_3) = \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + 2,$$

так что $wu(l_1, l_2, l_3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

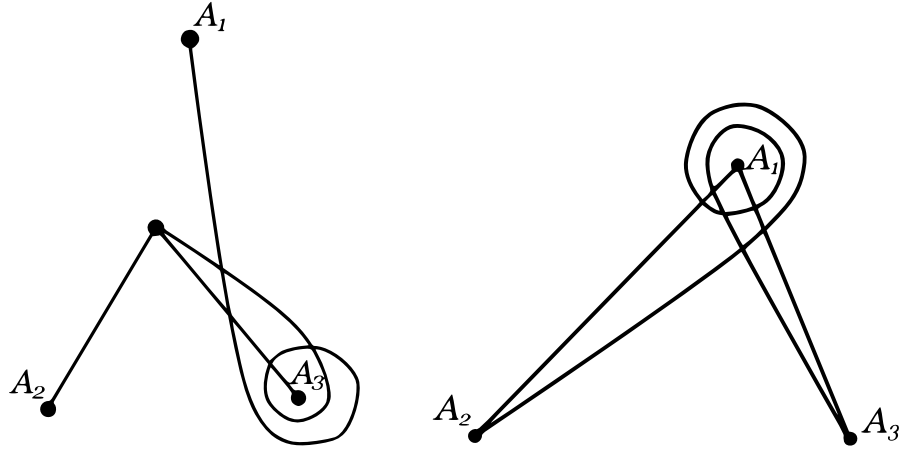


Рис. 8.6. Тройка ломаных, триодическое/циклическое (слева/справа) число Ву которой равно 5

(с) *Подсказка.* Это можно доказать индукцией по количеству отрезков в $l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

6.3. (а) Имеем

$$\begin{aligned} wu(l_1, l_2, l_3) &\stackrel{(1)}{=} 2(w'(l_2, A_1) + w'(l_1, A_3) + w'(l_3, A_2)) \stackrel{(1)}{=} \\ &= 2\left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + k_1 + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + k_2 + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + k_3\right) = \\ &= 2(k_1 + k_2 + k_3) + 2\frac{\angle A_2 A_1 A_3 + \angle A_3 A_2 A_1 + \angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1 \end{aligned}$$

для некоторых целых k_1, k_2, k_3 . Здесь равенство (1) следует из (***) и утверждения 1.4.а.

(б) Рассмотрим треугольник $A_1 A_2 A_3$ со сторонами l_2, l_3, l_1 , см. рисунок 6.1. Сделаем $|n|$ пальцевых движений (рисунок 3.3) ребра l_2 относительно вершины A_1 первого/второго типа для отрицательного/положительного n соответственно. Тогда

$$wu(l_1, l_2, l_3) = 2\left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + n + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi}\right) = 2n + 1.$$

Например, для правой части рисунка 8.6 имеем

$$w'(l_2, A_1) = \frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + 2, \quad w'(l_3, A_2) = \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi}, \quad w'(l_1, A_3) = \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi},$$

так что $wu(l_1, l_2, l_3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [DMN+] * С. Дженджер, А. Мирошников, О. Никитенко и А. Скопенков. Циклы в графах и в гиперграфах, arXiv:2406.16705.
- [ALM] E. Alkin, A. Lazarev, A. Miroshnikov, On winding numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.
- [Bo] E. Bordacheva. Symmetric 1-cycles in the deleted product of graph, https://old.mccme.ru/circles/oim/cath_bord_present.pdf.
- [FK19] R. Fulek, J. Kynčl, \mathbb{Z}_2 -genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices, 35th Intern. Symp. on Comp. Geom. (SoCG 2019), Article No. 39; pp. 39:1–39:16, <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SoCG-2019-39.pdf>. We refer to numbering in arXiv version: arXiv:1903.08637.
- [Ga23] T. Garaev, On drawing K_5 minus an edge in the plane, arXiv:2303.14503.
- [HC19] * C. Herbert Clemens. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [IKN+] * A. Inoue, N. Kimura, R. Nikkuni, K. Taniyama, Crossing numbers and rotation numbers of cycles in a plane immersed graph, J. of Knot Theory and Its Ramif. 31:11, 2250076 (2022). [arXiv:2205.01013](https://arxiv.org/abs/2205.01013)

- [KK18] * *A. Канель-Белов, П. Кожевников*, О кратности покрытия ориентированными многоугольниками, Квант, N5 (2018), 20–24, <https://kvant.mccme.ru/pdf/2018/2018-05.pdf>.
- [KS20] *R. Karasev and A. Skopenkov*. Some ‘converses’ to intrinsic linking theorems, *Discr. Comp. Geom.*, 70:3 (2023), 921–930, arXiv:2008.02523.
- [Sk06] * *A. Skopenkov*, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, *London Math. Soc. Lect. Notes*, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * *A. Скопенков*, Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность, *Мат. просвещение*, 32 (2024), 125–159. arXiv:1402.0658.
- [Sk16] * *A. Skopenkov*, A user’s guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141v5. Abridged earlier published version: *Russian Math. Surveys*, 73:2 (2018), 323–353.
- [Sk18] * *A. Скопенков*, Инварианты изображений графов на плоскости, *Мат. просвещение*, 31 (2023), 74–127. arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * *A. Скопенков*, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2020 (2е издание). Часть книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>
- [Sk20u] * *A. Скопенков*. Основы теории узлов и зацеплений для пользователя, *Мат. просвещение*, 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.
- [Sk24] * *A. Скопенков*. Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве. *Мат. просвещение*, 33 (2024), 87–132.
- [Sk] * *A. Скопенков*. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algorg.pdf>.
- [SS13] *M. Schaefer and D. Stefankovič*. Block additivity of \mathbb{Z}_2 -embeddings. In *Graph drawing*, volume 8242 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 185–195. Springer, Cham, 2013. <http://ovid.cs.depaul.edu/documents/genus.pdf>
- [ST17] *A. Skopenkov and M. Tancer*, Hardness of almost embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d , *Discr. Comp. Geom.*, 61:2 (2019), 452–463. arXiv:1703.06305.
- [To84] * *A. Тоом*, Сколько площадей у многоугольника?, *Квант*, N12 (1984), 9–12, https://kvant.mccme.ru/1984/12/skolko_ploshchadej_u_mnogougol.htm
- [Ta88] * *С. Табачников*, О плоских кривых, *Квант*, N11 (1988), 59–63, https://kvant.mccme.ru/1988/11/o_ploskih_krivyh.htm
- [Va81] * *Н. Вагутен*, Формула площади, *Квант*, N4 (1981), 17–20, https://kvant.mccme.ru/1981/04/formula_ploshchadi.htm
- [Wn] * https://ru.wikipedia.org/wiki/Число_оборотов
- [Za] *M. Zakharov*, On triodic and cyclic Wu numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.
- [ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. <http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.

Книги, обзоры и методические статьи в этом списке помечены звездочками.

INVARIANTS OF ALMOST EMBEDDINGS OF GRAPHS IN THE PLANE: RESULTS AND PROBLEMS

E. ALKIN, E. BORDACHEVA, A. MIROSHNIKOV, O. NIKITENKO, A. SKOPENKOV

ABSTRACT. A graph drawing in the plane is called an *almost embedding* if images of any two non-adjacent simplices (i.e. vertices or edges) are disjoint. We introduce integer invariants of almost embeddings: winding number, cyclic and triodic Wu numbers. We construct almost embeddings realizing some values of these invariants. We prove some relations between the invariants. We study values realizable as invariants of some almost embedding, but not of any embedding.

This paper is expository and is accessible to mathematicians not specialized in the area (and to students). However elementary, this paper is motivated by frontline of research.

CONTENTS

1. Winding number: definition and discussion	2
2. Winding number and intersections	4
3. Winding numbers of graph drawings	4
4. Almost embeddings: definition and discussion	6
5. Main results: winding numbers of almost embeddings	7
6. Triodic and cyclic Wu numbers	9
7. 3-dimensional analogues	11
8. Answers, hints and solutions	12
References	16

A classical subject is study of planar graph drawings without self-intersections (i.e. embeddings or plane graphs). It is also interesting to study graph drawings having ‘moderate’ self-intersections, e.g. almost embeddings (see definition near Figures 4.1 and 4.2).

For relation to modern research see remark at the end of §5, papers [Sk18, KS20, IKN+, Ga23, Bo] and the references therein. We do not know proofs of Conjectures 5.4.b, 5.7.b, 6.4.b, 6.5.b, 7.1.b, or solution of Problem 5.8.

In this text we expose a theory as a sequence of problems, see e.g. [HC19], [Sk21m, Introduction, Learning by doing problems] and the references therein. Most problems are useful theoretical facts. So this text could in principle be read even without solving problems or looking to §8. Problems are numbered, the words ‘problem’ are omitted. If a mathematical statement is formulated as a problem, then the objective is to prove this statement. Open-ended questions are called **riddles**; here one must come up with a clear wording, and a proof. *If a problem is named ‘theorem’ (‘lemma’, ‘corollary’, etc.), then this statement is considered to be more important.* Usually we *formulate* beautiful or important statement *before* giving a sequence of results (lemmas, assertions, etc.) which constitute its *proof*. We give hints on that after the statements but we do not want to deprive you of the pleasure of finding the right moment when you finally are ready to prove the statement. Important definitions are highlighted in **bold** for easy navigation.

E. Alkin, E. Bordacheva, A. Miroshnikov, A. Skopenkov: Moscow Institute of Physics and Technology.

O. Nikitenko: Altay Technical University.

A. Skopenkov: Independent University of Moscow, <https://users.mccme.ru/skopenko/>.

We are grateful to M. Didin, P. Kozhevnikov, and especially to T. Garaev for useful discussions.

MSC-class: 55-02, 55M25, 05C10, 57K20.

1. WINDING NUMBER: DEFINITION AND DISCUSSION

In the plane let O, A, B, A_1, \dots, A_m be points.

Assume that $A \neq O$ and $B \neq O$ (but possibly $A = B$). Recall that the *oriented* (a.k.a. *directed*) angle $\angle AOB$ is the number $t \in (-\pi, \pi]$ such that the vector \overrightarrow{OB} is codirected to the vector obtained from \overrightarrow{OA} by the rotation through t . (If you are familiar with complex numbers, you can regard vectors in the plane as complex numbers, and rewrite this condition as $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow e^{it}\overrightarrow{OA}$.)

A **polygonal line** $A_1 \dots A_m$ is the (ordered) set $(A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m)$ of segments. A **closed polygonal line** $A_1 \dots A_m$ is the set $(A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m, A_mA_1)$ of segments.¹

Let $A_1 \dots A_m$ be a closed polygonal line not passing through O . The **winding number** $w(A_1 \dots A_m, O)$ of $A_1 \dots A_m$ around O is the number of revolutions during the rotation of vector whose origin is O , and whose endpoint goes along the polygonal line in positive direction. Rigorously,

$$2\pi \cdot w(A_1 \dots A_m, O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1$$

is the sum of the oriented angles.

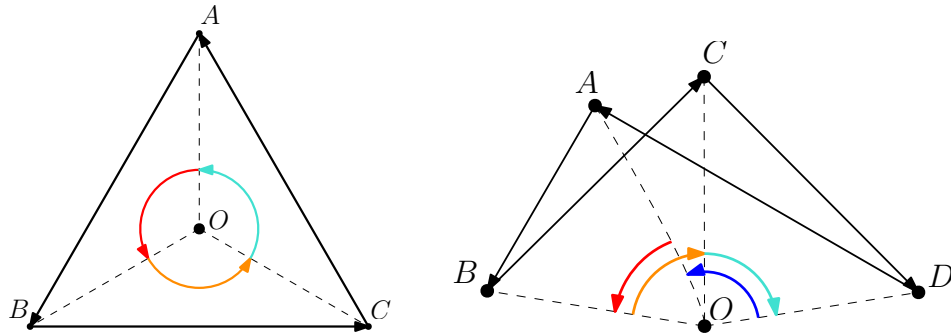


FIGURE 1.1. $w(ABC, O) = +1$ and $w(ABCD, O) = 0$

E.g. in Figure 1.1

$$w(ABC, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1 \quad \text{and}$$

$$w(ABCD, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA) = \frac{1}{2\pi} (\angle BOD + \angle DOB) = 0.$$

1.1. The winding number w is an integer.

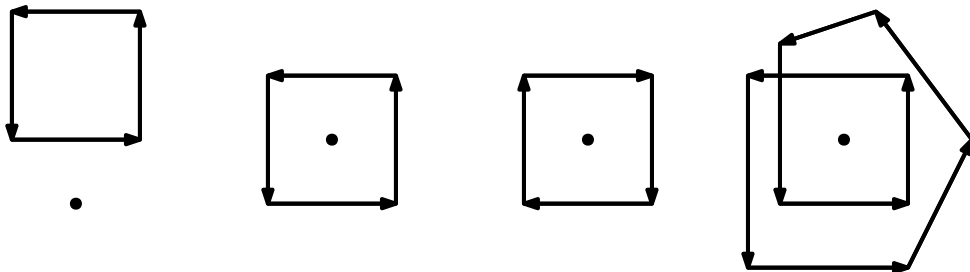


FIGURE 1.2. The winding numbers equal 0, +1, -1, +2

¹The set of segments is not the same as the union of segments. Thus, strictly speaking, the polygonal line (defined here) is not a subset of the plane. So ‘oriented’ or ‘non-oriented’ is not formally applicable to polygonal lines. Still, we sometimes work with the set of segments as with their union, e.g. we write ‘a polygonal line not passing through a point’. The notion of polygonal line defined here is close to what is sometimes understood as ‘oriented polygonal line’.

1.2. (a) The winding number of (the outline of) any convex polygon around any point in its exterior (respectively interior) is 0 (respectively ± 1). See Figure 1.2.

(b) Let ABC be a regular triangle and O its center. Find $w(ABCABC, O)$.

(c) For any integer n and any point O in the plane there is a closed polygonal line whose winding number around O is n .

(d) Give an example of a closed polygonal line L in the plane such that $w(L, O) = 0$ for any point $O \in \mathbb{R}^2 - L$.

The analogue of Assertion 1.2.a is correct for any closed polygonal line without self-intersections. (Depending on the exposition, this is either a corollary of the *Jordan Curve Theorem*, or a lemma in its proof.) The result of Problem 1.2.b shows that winding numbers for distinct polygonal lines with the same union of their segments can be distinct.

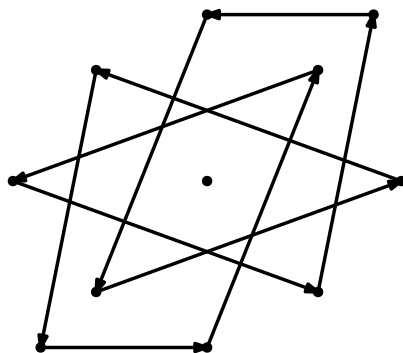


FIGURE 1.3. A closed polygonal line symmetric w.r.t. a point; the winding number equals 3

Theorem 1.3 (Borsuk-Ulam). *Suppose that a closed polygonal line $A_1 \dots A_{2k}$ does not pass through a point O , and is symmetric w.r.t. O (i.e. O is the midpoint of the segment $A_j A_{k+j}$ for every $j = 1, \dots, k$). Then the winding number is odd.*

The following notion and results would be helpful.

Let $A_1 \dots A_m$ be a polygonal line not passing through a point O . Define the real number $w'(A_1 \dots A_m, O)$ by

$$2\pi \cdot w'(A_1 \dots A_m, O) := \angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{m-1} O A_m.$$

Clearly,

- $2\pi w(A_1 \dots A_m, O) = 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) + \angle A_m O A_1$;
- if points A_2, \dots, A_{m-1} lie in the interior of the angle $\angle A_1 O A_m$, then $w'(A_1 \dots A_m, O) = \angle A_1 O A_m$.

1.4. (a) We have $\angle A_1 O A_m = 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) + 2\pi k$ for some integer k .

(b) We have $w(A_1 \dots A_m, O) = w'(A_1 \dots A_j, O) + w'(A_j \dots A_m A_1, O)$ for every $j = 1, \dots, m$.

Denote by \bar{l} the polygonal line obtained from a polygonal line l by passing in the reverse direction.

1.5. In the plane let O, A, B be three pairwise distinct points.

(a) Let l_1, l_2, l_3 polygonal lines joining A to B , and not passing through O . Then

$$w(l_1 \bar{l}_2, O) + w(l_2 \bar{l}_3, O) = w(l_1 \bar{l}_3, O).$$

(b) For any three integers n_1, n_2, n_3 such that $n_1 + n_2 = n_3$ there are three polygonal lines l_1, l_2, l_3 joining A to B , not passing through O , and such that

$$w(l_1 \bar{l}_2, O) = n_1, \quad w(l_2 \bar{l}_3, O) = n_2 \quad \text{and} \quad w(l_1 \bar{l}_3, O) = n_3.$$

In Assertion 2.1.a, Problems 1.5.b, 2.1.bc, and other *examples* in this text (as opposed to *assertions* distinct from 2.1.a) you may give an heuristic rather than rigorous proof, unless you or your advisor realize that this leads to a confusion.

1.6. Let $A_1A_2A_3$ be a regular triangle, and O its center. For $m = 1, 2, 3$ let l_m be a polygonal line disjoint with the ray OA_m , and joining A_{m+1} to A_{m+2} , where the numbering is modulo 3. Then $w(l_1l_2l_3, O) = \pm 1$.

2. WINDING NUMBER AND INTERSECTIONS

This section is only used in sketches of proofs of Theorems 5.2 and 5.5.a in §5.

2.1. (a) In the plane points P_0, P_1 are joined by a polygonal line disjoint from a closed polygonal line L . Then $w(L, P_0) = w(L, P_1)$.

Hint: use *considerations of continuity*.

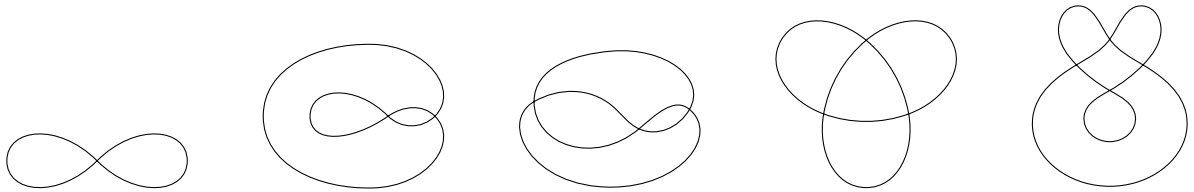


FIGURE 2.1. Some closed polygonal lines

(b) Take closed polygonal lines L in the plane shown in Figure 2.1 (with some orientations; any of the polygonal lines does not go twice through any segment, and does not significantly change its direction at any point). Color the complement $\mathbb{R}^2 - L$ by parity of the winding number of L .

(c) For closed polygonal lines L from (b) color the complement $\mathbb{R}^2 - L$ by the winding number of L .

2.2. Take a closed and a non-closed polygonal lines L and P in the plane, all whose vertices are pairwise distinct and are in general position. Let P_0 and P_1 be the starting point and the endpoint of P . Assume that $P_0, P_1 \notin L$.

(a) Then $|L \cap P| \equiv w(P_1, L) - w(P_0, L) \pmod{2}$. (This is a discrete version of the *Stokes theorem*.)

Hint. It suffices to prove this fact for a sufficiently small segment P' such that $P' \subset P$.

(b) If P_1 is far away from L , then $w(P_0, L) \equiv |L \cap P| \pmod{2}$, and $w(P_0, L)$ equals to the sum of signs of intersection points of P and L (defined in [Sk18, §1.3]).

Let L be a closed polygonal line in the plane, all whose vertices are pairwise distinct and are in general position. By Assertion 2.2.a the complement to L has a ‘chess-board’ coloring, i.e. a coloring such that the adjacent domains have different colors. The *modulo two interior* of L is the union of black domains for a chess-board coloring (provided the infinite domain is white). In other words, this is the set of all points $x \in \mathbb{R}^2 - L$ for which there is a polygonal line P

- joining x to a point ‘far away’ from L (i.e. outside the convex hull of L),
- intersecting L at an odd number of points, and
- such that all the vertices of L and P are pairwise distinct, and are in general position.

This is well-defined by [Sk18, Parity Lemma 1.3.3].

3. WINDING NUMBERS OF GRAPH DRAWINGS

Remark (some rigorous definitions). You can work with the notions defined here at an intuitive level, before you or your advisor realize that this leads to a confusion.

A (finite) **graph** (V, E) is a finite set V together with a collection $E \subset \binom{V}{2}$ of two-element subsets of V (i.e., of non-ordered pairs of distinct elements). (The common term for this notion is *a graph without loops and multiple edges* or *a simple graph*.) The elements of this finite set V are

called *vertices*. The pairs of vertices from E are called *edges*. The edge joining vertices i and j is denoted by ij (not by (i, j) to avoid confusion with ordered pairs). A cycle in a graph is denoted by listing its vertices in their order (without commas).

Informally speaking, a graph is planar if it can be drawn ‘without self-intersections’ in the plane. Rigorously, a graph (V, E) is called **planar** (or piecewise-linearly embeddable into the plane) if in the plane there exist

- a set of $|V|$ points corresponding to the vertices, and
- a set of non-self-intersecting polygonal lines joining pairs (of points) from E such that none of the polygonal lines intersects the interior of any other polygonal line.²

Denote by

- $[n]$ the set $\{1, 2, \dots, n\}$;
- K_n the complete graph with the vertex set $[n]$;
- $K_{m,n}$ the complete bipartite graph with parts $[m]$ and $[n]'$ (we denote by A' a copy of A).

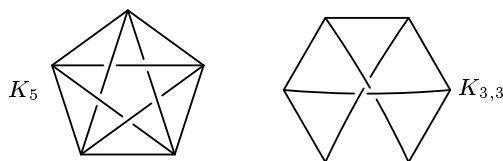


FIGURE 3.1. Non-planar graphs K_5 and $K_{3,3}$

We consider graph drawings in the plane such that the edges are drawn as polygonal lines, and intersections are allowed. Let us give rigorous definitions. Let K be a graph with V vertices. A (piecewise-linear) **map** $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ of K to the plane is

- a collection of V points in the plane corresponding to the vertices, and
- a collection of (non-closed) polygonal lines in the plane joining those pairs of points from the collection which correspond to pairs of adjacent vertices.³

The **restriction** $f|_\sigma$ to an edge σ is the corresponding polygonal line. The **image** $f(\sigma)$ of edge σ is the union of edges of $f|_\sigma$. The **image** of a collection of edges is the union of images of all the edges from the collection.

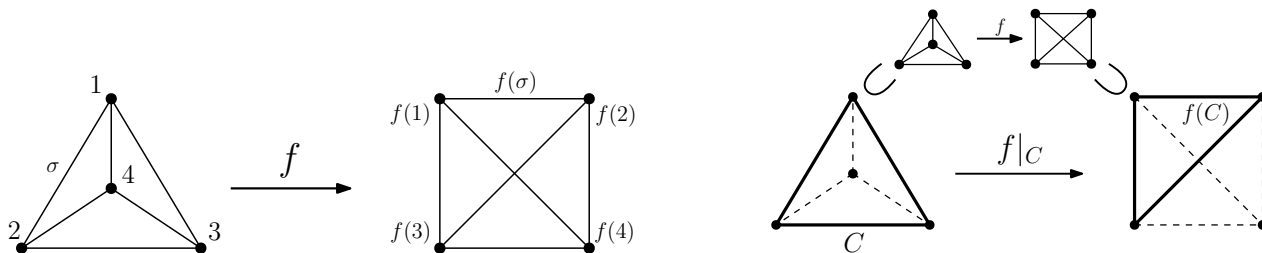


FIGURE 3.2. A map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (left) and its restriction $f|_C$ (right)

Let $C = v_1 \dots v_n$ be a directed (i.e. oriented) cycle in K . E.g. for $j = 1, 2, 3, 4$ denote by C_j the directed cycle in K_4 obtained by deleting j from 1234. Let $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a map. The **restriction** $f|_C : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ of f is the closed polygonal line ‘formed’ by the polygonal lines $f|_{v_1 v_2}, \dots, f|_{v_{n-1} v_n}, f|_{v_n v_1}$ in this order.

²Then any two of the polygonal lines either are disjoint or intersect by a common end vertex. We do not require that ‘no isolated vertex lies on any of the polygonal lines’ because this property can always be achieved.

³This is a slight abuse of terminology. A polygonal line has a starting point and an endpoint, so this is a definition of a map of an oriented graph. Two maps from oriented graphs are *equivalent* if one of them is obtained from the other by change of orientations of some edges, and one of the corresponding collections of polygonal lines is obtained from the other by passing the corresponding polygonal lines in the reverse order. Rigorously speaking, a map of a graph is an equivalence class under such an equivalence relation.

3.1. For any map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ and point $O \in \mathbb{R}^2 - f(K_4)$ we have $\sum_{j=1}^4 (-1)^j w(f|_{C_j}, O) = 0$:
 $-w(f|_{234}, O) + w(f|_{134}, O) - w(f|_{124}, O) + w(f|_{123}, O) = 0$.

For a vertex v in K such that $f(v) \notin f(C)$ denote

$$w_f(C, v) := w(f|_C, f(v)).$$

3.2. (a) For any integer n there is a map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that

$$f(1) \notin f(C_1), \quad w_f(C_1, 1) = n, \quad \text{and} \quad f(j) \notin f(C_j), \quad w_f(C_j, j) = 0 \quad \text{for every } j = 2, 3, 4.$$

(b) For any integers n_1, n_2, n_3, n_4 there is a map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $f(j) \notin f(C_j)$ and $w_f(C_j, j) = n_j$ for every $j = 1, 2, 3, 4$.

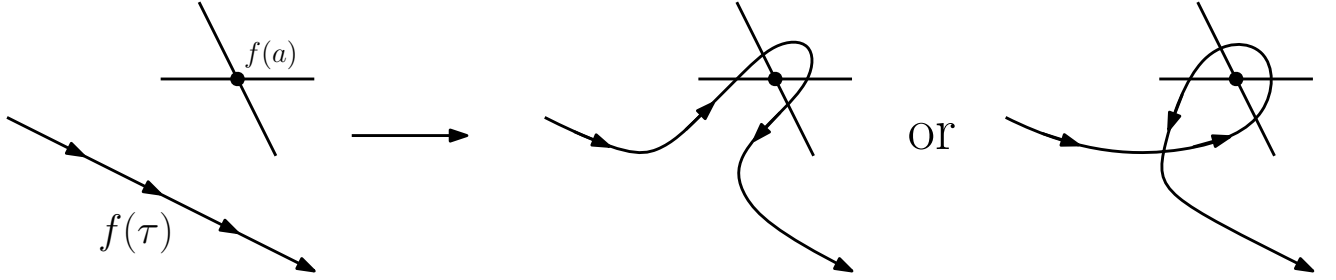


FIGURE 3.3. Finger moves (for a map f , of an edge τ , w.r.t. the vertex a) of the first and the second types respectively

Hint. Transformation of a map shown in Figure 3.3 is useful to construct examples.

For more on winding number and related notions see [Wn, Va81, To84, Ta88], [KK18, Theorem 2], [Sk18, §2].

4. ALMOST EMBEDDINGS: DEFINITION AND DISCUSSION

Theorem 4.1 (Hanani-Tutte; van Kampen). *For any map $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ there are two non-adjacent edges whose images intersect.*

This follows by Assertion 2.1.a and Theorem 5.5.a below. (The standard proof [Sk18, §1.4] does not use the winding number.) The analogue for $K_{3,3}$ holds by Assertions 2.1.a and 5.7.a below.

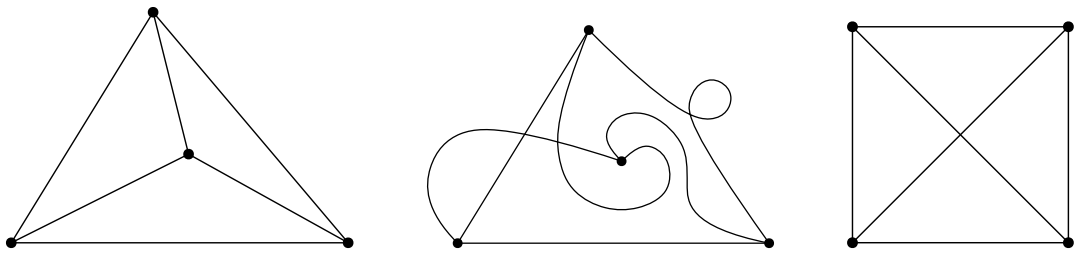


FIGURE 4.1. An embedding, an almost embedding, and a map (drawing) which is not an almost embedding

A map $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ of a graph K is called an **almost embedding** if $f(\alpha) \cap f(\beta) = \emptyset$ for any two non-adjacent simplices (i.e. vertices or edges) $\alpha, \beta \subset K$. In other words, if

- (i) the images of non-adjacent edges are disjoint,
- (ii) the image of a vertex is not contained in the image of any edge non-adjacent to this vertex,
- (iii) the images of distinct vertices are distinct.

Remark. (a) This text primarily concerns not the problem of *existence* of an almost embedding, but the *invariants* of almost embeddings. Thus we keep in the definition the properties (ii,iii) (which can be achieved by a small enough perturbation of a map, keeping the property (i)). *If a graph admits an almost embedding to the plane, then the graph is planar* (a proof is non-trivial).

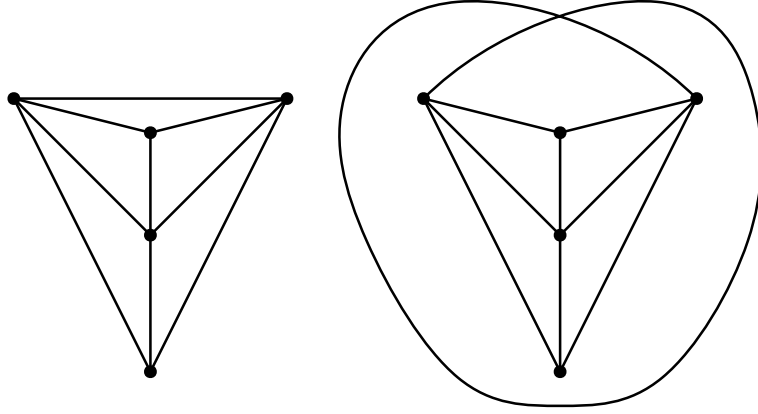


FIGURE 4.2. An embedding and an almost embedding of K_5 without an edge

(b) Almost embeddings naturally appear in topological graph theory, in combinatorial geometry, in topological combinatorics, and in studies of embeddings (of graphs in surfaces, and of hypergraphs in higher-dimensional Euclidean space). See more motivations in [ST17, §1, ‘Motivation and background’], [Sk, §6.10 ‘Almost embeddings, \mathbb{Z}_2 - and \mathbb{Z} -embeddings’].

5. MAIN RESULTS: WINDING NUMBERS OF ALMOST EMBEDDINGS

5.1. (a) For any integer n and point O in the plane there is an almost embedding $f : K_3 \rightarrow \mathbb{R}^2 - O$ such that $w(f|_{123}, O) = n$.

(b) For any integer n there is an almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $w_f(123, 4) = n$.

For any embedding $f : K_3 \sqcup \{4\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ we have $w_f(123, 4) \in \{-1, 0, 1\}$ (this result is close to Jordan Curve Theorem).

Recall that

$$\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j) = w_f(234, 1) + w_f(134, 2) + w_f(124, 3) + w_f(123, 4).$$

Theorem 5.2. For any almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ we have $\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j) \equiv 1 \pmod{2}$.

The analogue of Theorem 5.2 for embeddings instead of almost embeddings is simple (and is close to Jordan Curve Theorem). Moreover, for any embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ three of the four numbers from Theorem 5.2 are zeroes, and the remaining one is ± 1 . The analogue of Theorem 5.2 for maps instead of almost embeddings is incorrect by Assertion 3.2. Unlike Assertion 3.1, Theorem 5.2 does not come from the ‘relation $123 + 134 + 142 + 243 = 0$ in the graph’.

A *general position* map $f : K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ is defined in [Sk18, §1.4].

Sketch of a proof of Theorem 5.2. For a general position map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ let the *Radon number* $\rho(f) \in \mathbb{Z}_2$ be the parity of the sum of

- the number of intersections points of the images of non-adjacent edges, and
- the number of vertices j whose images belong to the interior modulo 2 of $f(C_j)$.

By Assertion 2.2.a, for every general position almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ the parity of $\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j)$ equals $\rho(f)$. Theorem 5.2 is deduced using approximation from this result and the following celebrated topological Radon theorem for the plane [Sk18, Lemma 2.2.3]: for any general position map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ the Radon number $\rho(f)$ is odd. \square

Example 5.3. (a) For any integer n there is an almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $w_f(C_1, 1) = n$, $w_f(C_j, j) = 0$ for every $j = 2, 3$, and $w_f(C_4, 4) = n + 1$.

(b) For any integers n_1, n_2, n_3, n_4 such that $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = \pm 1$, there is an almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $w_f(C_j, j) = n_j$ for every $j = 1, 2, 3, 4$.

Example 5.4. (a) (E. Morozov) There is an almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $\sum_{j=1}^4 (-1)^j w_f(C_j, j) \neq \pm 1$.

(b) (conjecture; see [ALM]) For any integers n_1, n_2, n_3, n_4 whose sum is odd there is an almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $w_f(C_j, j) = n_j$ for every $j = 1, 2, 3, 4$.

Recall that $K - e$ is the graph obtained from a graph K by deleting an edge e .

Theorem 5.5. For any almost embedding $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ we have

(a) $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) \equiv 1 \pmod{2}$;

(b)* $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) = \pm 1$.

Cf. Theorem 5.2 and Conjecture 5.4.b. The analogue of (b) for embeddings instead of almost embeddings is simple (and is close to Jordan Curve Theorem). Part (a) is not hard and is well-known, while part (b) is a recent non-trivial result of [Ga23].

5.6. (a) Is the analogue of Theorem 5.5.a correct for maps instead of almost embeddings?

(b) For any integer n there is an almost embedding $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $w_f(123, 5) = n$. (See Figure 4.2, right, for $n = 2$.)

Sketch of a proof of Theorem 5.5.a. For a general position map $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ color in red the intersections points of the images of non-adjacent edges. Let the van Kampen number $v(f) \in \mathbb{Z}_2$ be the parity of the number of red points. By Assertion 2.2.a, for any general position map $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ whose restriction to $K_5 - 45$ is an almost embedding the parity of $w_f(123, 5) - w_f(123, 4)$ equals $v(f)$. Theorem 5.5.a is deduced from this and the following celebrated van Kampen-Flores theorem for the plane [Sk18, Lemma 1.4.3]: for any general position map $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ the van Kampen number $v(f)$ is odd. ⁴ \square

5.7. Take an edge ab of $K_{3,3}$. Denote by $C = C_{ab}$ somehow oriented cycle $K_{3,3} - a - b$ of length 4. For any almost embedding $f : K_{3,3} - ab \rightarrow \mathbb{R}^2$ we have

(a) $w_f(C, a) - w_f(C, b) \equiv 1 \pmod{2}$; (b) (conjecture) $w_f(C, a) - w_f(C, b) = \pm 1$.

Part (a) is proved analogously to Theorem 5.5.a. The analogue of (b) for embeddings instead of almost embeddings is simple (and is close to Jordan Curve Theorem). Beware that a direct proof of (b) might contains technical details (like for Theorem 5.5.b); perhaps there is a simple a reduction to Theorem 5.5.b, see Figure 5.1.

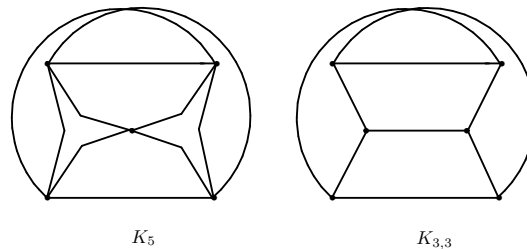


FIGURE 5.1. ‘Almost embedding’ $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

5.8 (open problem; riddle). Let K be the graph of

(a) a cube; (b) an octahedron.

For an almost embedding $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ consider the collection $w_f(C, v)$ of integers, where $v \in K$ is a vertex, and $C \subset K - v$ is an oriented cycle. Describe collections realizable by almost embeddings $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

⁴Theorem 5.5.b is an integer version for almost embeddings of this theorem. Observe that this theorem has no integer version for maps (this is known and is explained in [Ga23, Remark 4]).

Remark. (a) The integer $w_f(C, v)$ and invariants studied in §6 are (*almost*) *isotopy invariants* of an (almost) embedding $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$. They are parts of the *Haefliger-Wu invariant* of f [Sk06, §5].

(b) An algebraic version of almost embeddings (\mathbb{Z}_2 -embeddings) appeared in 1930s and is actively studied in graph theory since 2000s. See e.g. surveys [SS13], [Sk, §6.10 ‘Almost embeddings, \mathbb{Z}_2 - and \mathbb{Z} -embeddings’], and the paper [FK19] relating \mathbb{Z}_2 -embeddings to low rank matrix completion problem. The analogues of assertions 5.2, 5.5.a, 5.7.a are correct for \mathbb{Z}_2 -embeddings. We conjecture that the analogues of assertions 5.5.b, 5.7.b are correct for \mathbb{Z} -embeddings, but are incorrect for \mathbb{Z}_2 -embeddings.

(c) A *hypergraph* is a higher-dimensional analogue of graph: together with edges joining pairs of points one considers triangles spanned by triples of points, etc. A classical problem in topology, combinatorics and computer science is to find criteria (and algorithms) for realizability of hypergraphs in Euclidean space of given dimension d .

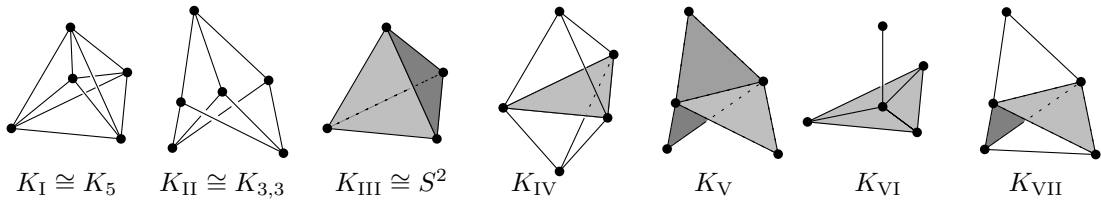


FIGURE 5.2. Two-dimensional hypergraphs non-embeddable in the plane

Such a criterion was obtained in 1930s-1960s by classical figures in topology. The criterion is stated in terms of certain configuration space, yielded many specific corollaries, and works for $2d \geq 3k + 3$, where k is the dimension of the hypergraph. A polynomial algorithm based on this criterion was obtained in 2013. The non-existence of a polynomial algorithm for $2d < 3k + 2$ was announced in 2019 by Marek Filakovský, Ulrich Wagner and Stephan Zhechev. A mistake was found in 2020 by Arkadiy Skopenkov (and recognized by the authors). The mistake was that in a higher-dimensional analogue of Theorem 5.5.b (and of Example 7.1.a) certain linking invariant can assume values distinct from ± 1 . In 2020 Roman Karasev and Arkadiy Skopenkov showed that the linking invariant can assume any odd value. Their conjecture that the same holds for graphs in the plane was refuted by Timur Garaev, see Theorem 5.5.b. For references see surveys [Sk06, §5], [Sk18, §3], and recent research papers [KS20, Ga23].

6. TRIODIC AND CYCLIC WU NUMBERS

In the plane let l_1, l_2, l_3 be polygonal lines joining a point O to points A_1, A_2, A_3 , respectively. Assume that $A_i \notin l_j$ for every $i \neq j$. (In other words, recall that $K_{3,1}$ is the graph with vertices $\{1, 2, 3, 1'\}$, where $\deg 1' = 3$ and $\deg m = 1$ for each $m \in [3]$; take an almost embedding $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ and denote $l_m := f(1'm)$ for each $m \in [3]$.)

The *triodic Wu number* $wu(l_1, l_2, l_3)$ is defined to be the number of revolutions in the following rotation of vector:

- from $\overrightarrow{A_1A_2}$ to $\overrightarrow{A_1A_3}$ as the second point of the vector moves along $\overline{l_2l_3}$, then
- from $\overrightarrow{A_1A_3}$ to $\overrightarrow{A_2A_3}$ as the first point of the vector moves along $\overline{l_1l_2}$, then
- from $\overrightarrow{A_2A_3}$ to $\overrightarrow{A_2A_1}$ as the second point of the vector moves along $\overline{l_3l_1}$, then
- from $\overrightarrow{A_2A_1}$ to $\overrightarrow{A_3A_1}$ along $\overline{l_2l_3}$, then
- from $\overrightarrow{A_3A_1}$ to $\overrightarrow{A_3A_2}$ along $\overline{l_1l_2}$, then
- from $\overrightarrow{A_3A_2}$ to $\overrightarrow{A_1A_2}$ along $\overline{l_3l_1}$.

This equals twice the (non-integer) number of revolutions in first three rotations above. Rigorously,

$$wu(l_1, l_2, l_3) := w'(\overline{l_2l_3}, A_1) + w'(\overline{l_1l_2}, A_3) + w'(\overline{l_3l_1}, A_2) + w'(\overline{l_2l_3}, A_1) + w'(\overline{l_1l_2}, A_3) + w'(\overline{l_3l_1}, A_2) =$$

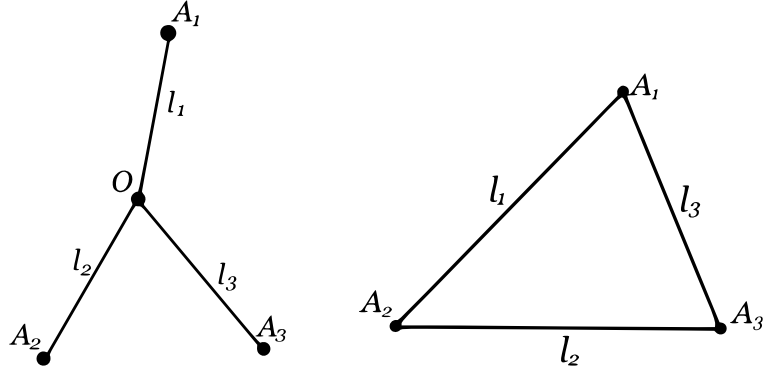
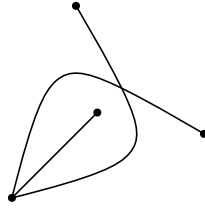


FIGURE 6.1. A triod and a triangle

$$= 2 (w'(\bar{l}_2 l_3, A_1) + w'(\bar{l}_1 l_2, A_3) + w'(\bar{l}_3 l_1, A_2)) . \quad (*)$$

FIGURE 6.2. Three polygonal lines whose triodic Wu number equals ± 3

6.1. (a) For the three segments joining the vertices A_1, A_2, A_3 of a regular triangle to its center O , the triodic Wu number equals ± 1 .

(b) For the three polygonal lines shown in Figure 6.2 the triodic Wu number equals ± 3 .

6.2. (a) For any polygonal lines l_1, l_2, l_3 as above (i.e. for any an almost embedding $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$) the triodic Wu number is odd.

(b) For any integer n there are polygonal lines l_1, l_2, l_3 as above (i.e. there is an almost embedding $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$) whose triodic Wu number equals $2n + 1$.

(c) For any embedding $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ the triodic Wu number is ± 1 .

(d) Permutation of the polygonal lines l_1, l_2, l_3 as above multiplies the triodic Wu number by the sign of the permutation.

In the plane let A_1, A_2, A_3 be points and l_1, l_2, l_3 polygonal lines joining A_1 to A_2 , A_2 to A_3 , A_3 to A_1 , respectively (and thus forming a closed polygonal line). Assume that A_i is not contained in l_{i+1} for each $i = 1, 2, 3$ (the numeration is modulo 3; in other words, the polygonal lines form an almost embedding $K_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$). The *cyclic Wu number* $wu(l_1, l_2, l_3)$ is defined to be twice the number of revolutions in the following rotation of vector:

- from $\overrightarrow{A_1 A_2}$ to $\overrightarrow{A_1 A_3}$, as the second point of the vector moves along l_2 , then
- from $\overrightarrow{A_1 A_3}$ to $\overrightarrow{A_2 A_3}$, as the first point of the vector moves along l_1 , then
- from $\overrightarrow{A_2 A_3}$ to $\overrightarrow{A_2 A_1}$, as the second point of the vector moves along l_3 .

In other words, $wu(l_1, l_2, l_3)$ is defined by the following formula analogous to (*):

$$wu(l_1, l_2, l_3) := 2 (w'(l_2, A_1) + w'(l_1, A_3) + w'(l_3, A_2)) . \quad (**)$$

6.3. (a') If the three polygonal lines l_1, l_2, l_3 as above are sides of a triangle, then the cyclic Wu number is ± 1 .

(a) For any polygonal lines l_1, l_2, l_3 as above the cyclic Wu number is odd.

(b) For any integer n there are polygonal lines l_1, l_2, l_3 as above whose cyclic Wu number equals $2n + 1$.

If three polygonal lines as above form a simple closed polygonal line, then the cyclic Wu number is ± 1 (this is close to Jordan Curve Theorem).

The cyclic Wu number is similar to, but distinct from, the *degree* of a closed curve.

6.4. (a) For any almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ we have

$$\text{wu}(f|_{12}, f|_{23}, f|_{31}) + \text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) = 2w_f(123, 4).$$

(b) (conjecture; see [Za]) For any two odd integers n, m there is an almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $\text{wu}(f|_{12}, f|_{23}, f|_{31}) = m$ and $\text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) = n$.

6.5. (a) For any almost embedding $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ we have

$$\text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) - \text{wu}(f|_{51}, f|_{52}, f|_{53}) = 2(w_f(123, 4) - w_f(123, 5)).$$

(b) (conjecture) For any almost embedding $f : K_{3,2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ we have

$$\text{wu}(f|_{1'1}, f|_{1'2}, f|_{1'3}) - \text{wu}(f|_{2'1}, f|_{2'2}, f|_{2'3}) = \pm 2.$$

By (a), a simple proof of (b) would give a simple proof of Theorem 5.5.b.

7. 3-DIMENSIONAL ANALOGUES

The Linear Conway–Gordon–Sachs Theorem. If no 4 of 6 points in 3-space lie in one plane, then there are two linked triangles with vertices at these 6 points (i.e. the first triangle intersects the outline of the second triangle exactly at one point). For a proof see survey [Sk14].

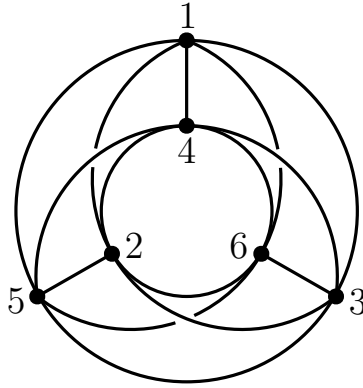


FIGURE 7.1. A projection on the plane of an embedding $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Equivalent rigorous definitions of a *linking number* of disjoint closed polygonal lines in 3-space can be found in [Sk20u, §§4,8], [Sk24, §§1.2,1.3], [Sk, §§4.2,4.3].

Example 7.1 (cf. Figure 7.1). * (a) For any integer n there are six points in 3-space, and non-self-intersecting polygonal lines joining each pair of them, and such that

(a1) the interior of one polygonal line is disjoint with any other polygonal line,

(a2) the linking number of one (unordered) pair of disjoint cycles of length 3 formed by the polygonal lines is $2n + 1$, and

(a3) the linking number of any other pair of disjoint cycles of length 3 formed by the polygonal lines is zero.

(b) (conjecture) Take any 10 integers $n_{123,456}, n_{124,356}, \dots$ corresponding to the 10 non-ordered splittings of [6] into two 3-element subsets. If the sum of the integers is odd, then there are 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6 in 3-space, and non-self-intersecting polygonal lines joining each pair them, for which (a1) holds, and the linking number of every pair $\{ijk, pqr\}$ of disjoint cycles of length 3 formed by the polygonal lines equals $n_{ijk,pqr}$.

Part (a) is proved in [KS20, Proposition 1.2] but could have been known before. Part (b) could perhaps be proved using [KS20, Lemma 2.1]. For higher-dimensional analogues see survey [Sk14] and [KS20, §1]. In those results the linking number can assume any odd value, like Conjecture 5.4.b, but unlike Conjecture 5.7.b and Theorem 5.5.b.

8. ANSWERS, HINTS AND SOLUTIONS

1.1. For $j = 1, \dots, m$ let $t_j := \angle A_j O A_{j+1}$, where $A_{m+1} = A_1$. Then

$$\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow e^{it_m} \overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1})} \overrightarrow{OA_{m-1}} \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1}+\dots+t_1)} \overrightarrow{OA_1}.$$

Hence $(t_m + t_{m-1} + \dots + t_1)/2\pi$ is an integer.

1.2. (a) Let Ω be a convex polygon.

If O is in the exterior of Ω , draw two supporting lines from O to Ω . Take two points A, B from intersections of the lines and $\partial\Omega$. Then $w(\partial\Omega, O) = \frac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOA) = 0$.

If O is in the interior of Ω , draw a regular triangle ABC centered at O . Take three intersection points A', B', C' of the rays OA, OB, OC with $\partial\Omega$. They split $\partial\Omega$ in three polygonal lines. We have

$$w(\partial\Omega, O) = \frac{1}{2\pi}(\angle A'OB' + \angle B'OC' + \angle C'OA') = \frac{3}{2\pi}\angle A'OB' = \frac{3}{2\pi}\angle AOB = \pm 1.$$

(b) By (a), we have $w(ABCABC, O) = 2 \cdot w(ABC, O) = \pm 2$.

(c) If $n = 0$, example is a single-point closed polygonal line. If $n \neq 0$, let ABC be a regular triangle oriented clockwise if $n < 0$, and counterclockwise in the opposite case. Let O be its center. Consider the closed polygonal line $L = \underbrace{ABC \dots ABC}_{|n| \text{ times}}$. By a refinement of (a), we have

$$w(L, O) = |n| \cdot w(ABC, O) = n.$$

(d) A trivial example is a single-point closed polygonal line. Another example: a closed polygonal line $ABCB$ for any three points A, B and C in the plane.

1.3. By the symmetry, $w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) = w'(A_{k+1} \dots A_{2k} A_1, O)$. Then

$$\begin{aligned} w(A_1 \dots A_{2k}, O) &= w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) + w'(A_{k+1} \dots A_{2k} A_1, O) = \\ &= 2w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) = 2 \left(\frac{\angle A_1 O A_{k+1}}{2\pi} + n \right) = 1 + 2n \end{aligned}$$

for some integer n . Here the last but one equality follows from Assertion 1.4.a.

1.4. (a) Using the formula from the proof of Assertion 1.1, we have

$$e^{i\angle A_1 O A_m} \overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{2\pi i w'(A_1 \dots A_m, O)} \overrightarrow{OA_1}.$$

Hence $\angle A_1 O A_m - 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) = 2\pi k$ for some integer k .

1.5. *Hint.* (a) Use Assertion 1.4.b and the following equality: $w'(l, O) = -w'(\bar{l}, O)$ for every point O and every polygonal line l not passing through O .

1.6. *Hint.* We can assume that the vertices of the triangle are numbered counter-clockwise. Prove that $w'(l_0, O) = w'(l_1, O) = w'(l_2, O) = \frac{2\pi}{3}$. For that denote by $B_1 \dots B_m$ the sequence of vertices of l_0 . For $j \in [m-1]$ let $t_j := \angle B_j O B_{j+1} \in (-\pi, \pi)$. Prove that for every $j \in [m-1]$ we have $T_j := t_1 + \dots + t_j \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$, and $w'(l_0, O) = T_{m-1} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ for some integer k . Then deduce that $k = 0$.

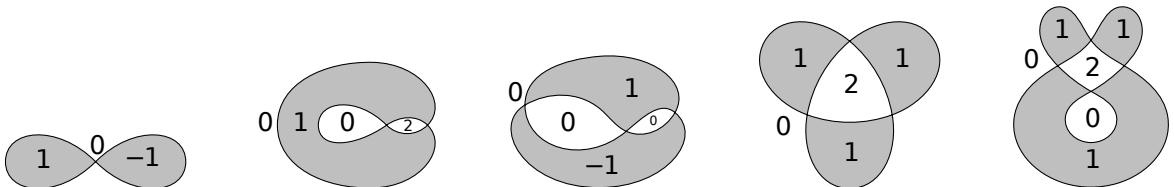


FIGURE 8.1. Coloring of the complement of the closed polygonal lines from Figure 2.1 by the winding number

2.1. (b,c) Figure 8.1.

3.1. *Hint.* Use the following equalities: $w'(f|_{ij}, O) = -w'(f|_{ji}, O)$ for every edge ij , and $w(f|_{ijk}, O) = w'(f|_{ij}, O) + w'(f|_{jk}, O) + w'(f|_{ki}, O)$ for every cycle ijk .

3.2. Hints. (a) A square with the diagonals forms a map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$; assume the vertices $f(i)$, $i \in [4]$ are numbered counterclockwise. Then $w_f(C_j, j) = 0$ for every $j \in [4]$. Make $|n|$ finger moves (Figure 3.3) of the edge 24 w.r.t. the vertex 1 of the first/second type if n is positive/negative respectively. The obtained map f_1 is as required.

(b) Consider the map f_1 from the proof of (a) for $n = n_1$. Make $|n_2|$ finger moves of the edge 13 w.r.t. the vertex 2 of the first/second type if n_2 is positive/negative respectively. Denote the obtained map by f_2 . Make $|n_3|$ finger moves of the edge 24 w.r.t. the vertex 3 of the first/second type if n_3 is positive/negative respectively. Denote the obtained map by f_3 . Make $|n_4|$ finger moves of the edge 13 w.r.t. the vertex 4 of the first/second type if n_4 is positive/negative respectively. The obtained map f_4 is as required.

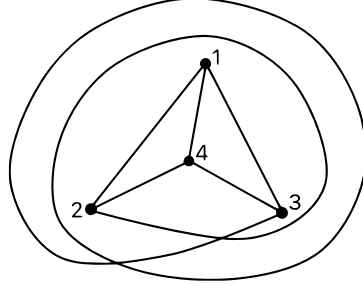


FIGURE 8.2. An almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $w_f(123, 4) = 3$

5.1. (b) See Figure 8.2 for $n = 3$. To obtain a map for (a) remove the images of edges issuing out of $f(4)$, and replace $f(4)$ by O .

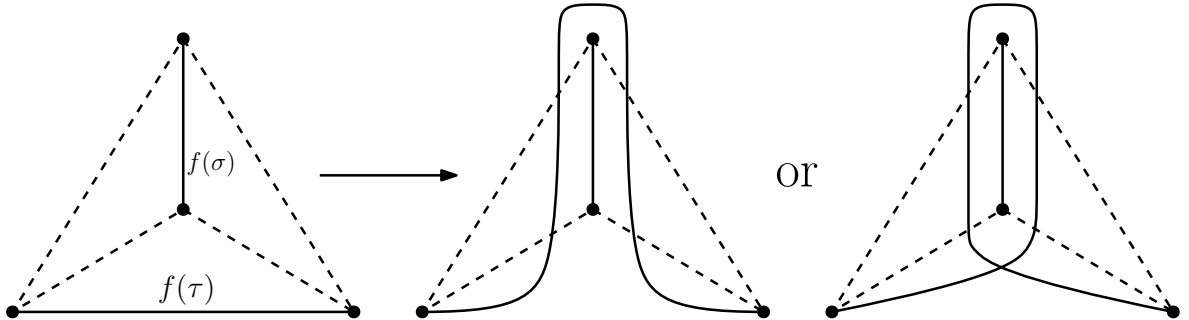


FIGURE 8.3. Finger moves (for a map f , of an edge τ , w.r.t. the segment $f(\sigma)$) of the first and the second types respectively

5.3. Hints. (a) A regular triangle with its center and edges connecting the center to the vertices form a map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$; assume $f(1), f(2), f(3)$ are the vertices numbered counterclockwise. Then $w_f(C_j, j) = 0$ for every $j \in [3]$, and $w_f(C_4, 4) = 1$. Make $|n|$ finger moves of the edge 23 w.r.t. the segment $f(14)$ (Figure 8.3, cf. Figure 3.3) of the first/second type if n is negative/positive respectively. The obtained map f_1 is as required.

(b) In the next paragraph we construct an almost embedding for $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = 1$. To construct an almost embedding f for $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = -1$ take an almost embedding g for $m_1 = n_2, m_2 = n_1, m_3 = -n_3, m_4 = -n_4$, where $\sum_{j=1}^4 (-1)^j m_j = 1$. Then $f = g \circ \sigma$, where $\sigma : K_4 \rightarrow K_4$ is a permutation that interchanges the vertices 1 and 2.

Consider the map f_1 from the proof of (a) for $n = n_1$. Make $|n_2|$ finger moves of the edge 13 w.r.t. the segment $f_1(24)$ of the first/second type if n_2 is positive/negative respectively. Denote the obtained map by f_2 . Make $|n_3|$ finger moves of the edge 12 w.r.t. the segment $f_2(34)$ of the first/second type if n_3 is negative/positive respectively. Denote the obtained map by f_3 . The obtained map f_3 is as required.

5.4. Hint. (a) See Figure 8.4.

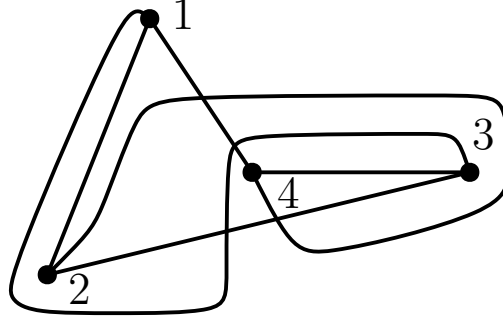


FIGURE 8.4. An almost embedding $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $\sum_{j=1}^4 (-1)^j w_f(C_j, j) = 3$

5.6. (a) No. A regular pentagon $f(1) \dots f(5)$ with all the diagonals, but without the edge $f(4)f(5)$ forms a map $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) = 0$.

(b) See Figure 8.5 for $n = 3$.

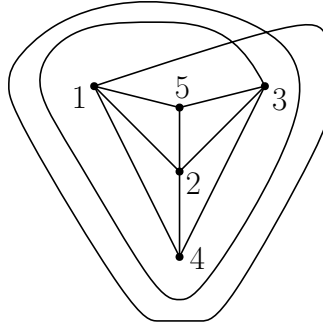


FIGURE 8.5. An almost embedding of K_5 without an edge 45 such that $w_f(123, 5) = 3$

6.2. (a) We have

$$\begin{aligned} \text{wu}(l_1, l_2, l_3) &\stackrel{(1)}{=} 2 \left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + k_1 + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + k_2 + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + k_3 \right) = \\ &= 2(k_1 + k_2 + k_3) + 2 \frac{\angle A_2 A_1 A_3 + \angle A_3 A_2 A_1 + \angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1 \end{aligned}$$

for some integers k_1, k_2, k_3 . Here equality (1) follows by (*) and Assertion 1.4.a.

(b) Consider segments l_1, l_2, l_3 having a common point O in the interior of triangle $A_1 A_2 A_3$ such as Figure 6.1. Make $|n|$ finger moves (Figure 3.3) of the edge l_1 w.r.t. the vertex A_3 of the first/second type for negative/positive n respectively. Then

$$\text{wu}(l_1, l_2, l_3) = 2 \left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + n \right) = 1 + 2n.$$

For example, in Figure 8.6, left,

$$w'(\bar{l}_2 l_3, A_1) = \frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi}, \quad w'(\bar{l}_3 l_1, A_2) = \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi}, \quad w'(\bar{l}_1 l_2, A_3) = \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + 2,$$

so $\text{wu}(l_1, l_2, l_3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

(c) *Hint.* This is proved by induction on the number of segments in $l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

6.3. (a) We have

$$\begin{aligned} \text{wu}(l_1, l_2, l_3) &\stackrel{(1)}{=} 2 \left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + k_1 + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + k_2 + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + k_3 \right) = \\ &= 2(k_1 + k_2 + k_3) + 2 \frac{\angle A_2 A_1 A_3 + \angle A_3 A_2 A_1 + \angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1 \end{aligned}$$

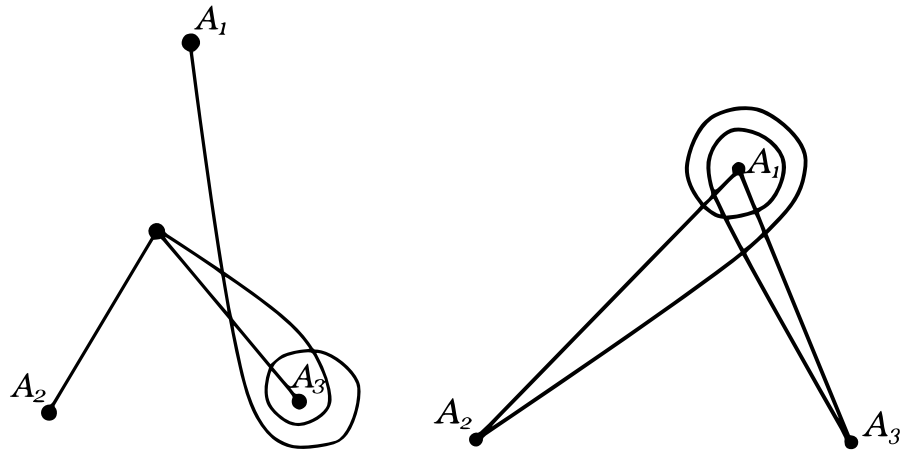


FIGURE 8.6. Three polygonal lines whose triodic/cyclic (left/right) Wu number equals 5

for some integers k_1, k_2, k_3 . Here equality (1) follows by (***) and Assertion 1.4.a.

(b) Consider triangle $A_1A_2A_3$ with sides l_2, l_3, l_1 , see Figure 6.1. Make $|n|$ finger moves (Figure 3.3) of the edge l_2 w.r.t. the vertex A_1 of the first/second type for negative/positive n respectively. Then

$$\text{wu}(l_1, l_2, l_3) = 2 \left(\frac{\angle A_2A_1A_3}{2\pi} + n + \frac{\angle A_3A_2A_1}{2\pi} + \frac{\angle A_1A_3A_2}{2\pi} \right) = 2n + 1.$$

For example, in Figure 8.6, right,

$$w'(l_2, A_1) = \frac{\angle A_2A_1A_3}{2\pi} + 2, \quad w'(l_3, A_2) = \frac{\angle A_3A_2A_1}{2\pi}, \quad w'(l_1, A_3) = \frac{\angle A_1A_3A_2}{2\pi},$$

so $\text{wu}(l_1, l_2, l_3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

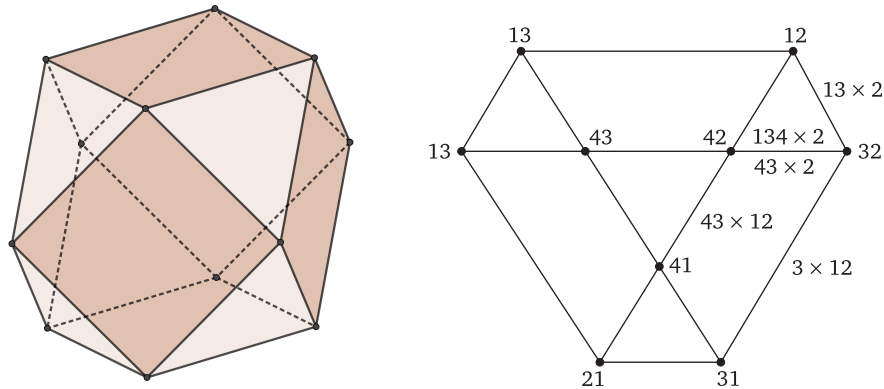


FIGURE 8.7. Left: a magic cuboctahedron. Right: the magic: the figure does not show the invisible part whose projection is obtained from the pictured projection by rotation through $\pi/3$; the lower 13 should be 23; 4×123 is the central triangle, 123×4 is the invisible central triangle, 24×13 is the bottom left trapezoid, 13×24 is the upper right invisible trapezoid, $\text{off}(123) = 12, 13, 23, 21, 31, 32$ is the outer cycle of length 6, $\text{triod}(123, 4) = 12, 14, 13, 43, 23, 24, \dots$, where dots denote the part symmetric to the written part (obtained replacing xy by yx) (each of the cycles $\text{off}(123)$ and $\text{triod}(123, 4)$ splits the cuboctahedron into two equal parts)

6.4. *Hint:* see Figure 8.7 and [ADN+, §2, §5]; $\text{off}(123) + \text{triod}(123, 4) = 123 \times 4 + 4 \times 123 + \partial(13 \times 24) + \partial(24 \times 13) + \partial(12 \times 34) + \partial(34 \times 12) + \partial(14 \times 23) + \partial(23 \times 14)$.

REFERENCES

- [ADN+] * *E. Alkin, S. Dzhenzher, O. Nikitenko, A. Skopenkov, A. Voropaev.* Cycles in graphs and in hypergraphs, arXiv:2308.05175.
- [ALM] *E. Alkin, A. Lazarev, A. Miroshnikov,* On winding numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.
- [Bo] *E. Bordacheva.* Symmetric 1-cycles in the deleted product of graph, https://old.mccme.ru/circles/oim/cath_bord_present.pdf.
- [FK19] *R. Fulek, J. Kynčl,* \mathbb{Z}_2 -genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices, 35th Intern. Symp. on Comp. Geom. (SoCG 2019), Article No. 39; pp. 39:1–39:16, <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SoCG-2019-39.pdf>. We refer to numbering in arXiv version: arXiv:1903.08637.
- [Ga23] *T. Garaev,* On drawing K_5 minus an edge in the plane, arXiv:2303.14503.
- [HC19] * *C. Herbert Clemens.* Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [IKN+] * *A. Inoue, N. Kimura, R. Nikkuni, K. Taniyama,* Crossing numbers and rotation numbers of cycles in a plane immersed graph, J. of Knot Theory and Its Ramif. 31:11, 2250076 (2022). [arXiv:2205.01013](https://arxiv.org/abs/2205.01013).
- [KK18] * *A. Kanel-Belov, P. Kozhevnikov,* On the multiplicity of coverage by oriented polygons (in Russian), Kvant, 5 (2018), 20–24, <https://kvant.mccme.ru/pdf/2018/2018-05.pdf>.
- [KS20] *R. Karasev and A. Skopenkov.* Some ‘converses’ to intrinsic linking theorems, Discr. Comp. Geom., 70:3 (2023), 921–930, arXiv:2008.02523.
- [Sk06] * *A. Skopenkov,* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * *A. Skopenkov,* Realizability of hypergraphs and intrinsic linking theory, Mat. Prosveschenie, 32 (2024), 125–159, arXiv:1402.0658.
- [Sk16] * *A. Skopenkov,* A user’s guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141v5. Abridged earlier published version: Russian Math. Surveys, 73:2 (2018), 323–353.
- [Sk18] * *A. Skopenkov.* Invariants of graph drawings in the plane. Arnold Math. J., 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * *A. Skopenkov,* Algebraic Topology From Geometric Standpoint (in Russian), MCCME, Moscow, 2020 (2nd edition). Part of the book: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>. Part of the English translation: <https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf>.
- [Sk20u] * *A. Skopenkov.* A user’s guide to basic knot and link theory, in: Topology, Geometry, and Dynamics, Contemporary Mathematics, vol. 772, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2021, pp. 281–309. Russian version: Mat. Prosveschenie 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.
- [Sk21m] * *A. Skopenkov.* Mathematics via Problems. Part 1: Algebra. Amer. Math. Soc., Providence, 2021. Preliminary version: https://www.mccme.ru/circles/oim/algebra_eng.pdf
- [Sk24] * *A. Skopenkov.* Double and triple linking numbers in space (in Russian). Mat. Prosveschenie, 33 (2024), 87–132.
- [Sk] * *A. Skopenkov.* Algebraic Topology From Algorithmic Standpoint, draft of a book, mostly in Russian, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.
- [SS13] *M. Schaefer and D. Stefankovič.* Block additivity of \mathbb{Z}_2 -embeddings. In Graph drawing, volume 8242 of Lecture Notes in Comput. Sci., 185–195. Springer, Cham, 2013. <http://ovid.cs.depaul.edu/documents/genus.pdf>
- [ST17] *A. Skopenkov and M. Tancer,* Hardness of almost embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d , Discr. Comp. Geom., 61:2 (2019), 452–463. arXiv:1703.06305.
- [To84] * *A. Toom.* How much areas does a polygon have? (in Russian), Kvant, 12 (1984), 9–12, https://kvant.mccme.ru/1984/12/skolko_ploshchadej_u_mnogougol.htm
- [Ta88] * *S. Tabachnikov.* On plane curves (in Russian), Kvant, 11 (1988), 59–63, https://kvant.mccme.ru/1988/11/o_ploskih_krivyh.htm
- [Va81] * *N. Vaguten.* A formula for area (in Russian), Kvant, 4 (1981), 17–20, https://kvant.mccme.ru/1981/04/formula_ploshchadi.htm
- [Wn] * https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number
- [Za] *M. Zakharov,* On triodic and cyclic Wu numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.

Books, surveys and expository papers in this list are marked by the stars.

Дистанционные графы и теорема Турана

Андрей Райгородский, Максим Дидин, Святослав Дженжер,
Вадим Ретинский, Алексей Суворов, Александр Толмачев

Введение

В 2010 году на Московской математической олимпиаде последней (самой сложной) задачей в варианте 10 класса А.М. Райгородским была предложена такая задача:

На плоскости отметили 4α точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $\alpha + 1$ точек обязательно есть две, соединенные отрезком. Докажите, что всего проведено не менее 7α отрезков.

На той олимпиаде эту задачу решил всего один человек из 616 участников, что приводит нас к мысли, что решить ее весьма непросто, несмотря на короткую и ясную формулировку! Часто на олимпиадах предлагаются «игрушечные» задачи, не имеющие приложений и большой теории, которая стоит за их решениями. Однако, эта задача связана с очень красивым разделом математики — комбинаторной геометрией.

На олимпиаде размышления над задачей заканчиваются после того, как удалось найти (или узнать после олимпиады) верное решение, но в научной деятельности решение одной задачи является первым шагом в постановке новых задач. Давайте попробуем сделать следующие шаги и придумать новые (можно придумать ещё!) вопросы:

- В условии задачи сказано, что точки расположены на плоскости. А что изменится, если отказаться от этого условия и рассмотреть произвольный граф? Какое минимальное количество ребер может быть в таком графе?
- Можно ли улучшить оценку на число ребер в таком графе и вместо 7α написать какое-то большее число?

Попробуем ответить на первый вопрос. В этом случае получается такая задача:

Дан граф с 4α вершинами, так что среди любых $\alpha + 1$ вершин есть ребро. Каково минимальное количество ребер в таком графе?

Напомним важное определение: *числом независимости* графа G называется величина $\alpha(G)$, равная максимальному числу вершин графа G , которое можно выбрать так, чтобы никакие две выбранные вершины не были соединены ребром. Тогда, задача выше спрашивает нас о том, какое минимальное количество ребер может быть в графе с 4α вершинами, число независимости у которого не больше α ? Здесь, вероятно, многие читатели вспомнили теорему Турана, которая, по сути, спрашивает нас ровно об этом. Сформулируем несколько упражнений:

- Придумайте пример такого графа, в котором ровно 6α ребер.
- Докажите, что в любом таком графе не менее 6α ребер.

В общем случае, задачу о минимальном числе ребер в графе с заданным количеством вершин и числом независимости полностью дает теорема Турана, которой посвящен первый раздел нашего проекта. Даже если эта тема кажется знакомой читателю, то мы рекомендуем внимательно изучить этот раздел, так как это позволит лучше понять следующие разделы.

Таким образом, на первый из двух новых вопросов, вдохновленных задачами с Московской олимпиады 14-летней давности, мы ответили. И вопрос-то оказался не таким уж новым, если эта проблема была уже решена венгерским математиком Палом Тураном в 1941 году.

Но что насчет второго вопроса? Давайте теперь рассматривать только графы на плоскости. Введем еще одно определение (приготовьтесь, их дальше будет еще много):

Дистанционным графом на плоскости называется граф, вершины которого суть точки на плоскости, и ребра которого соединяют точки на единичном расстоянии.

Теперь наша задача на языке графов приобретает следующий вид:

На плоскости дан дистанционный граф с 4α вершинами и числом независимости не больше α . Какое минимальное количество ребер может быть у такого графа?

В задаче с Олимпиады было доказано, что ребер не меньше 7α . Попробуйте, опираясь на решение упражнения выше про оценку на 6α , доказать это. Не забывайте, что где-то в решении должна использоваться дистанционность графа, т.е. то, что точки расположены на плоскости, и расстояния измеряются тоже на плоскости. Задача сложная, поэтому дадим подсказку: используйте то, что дистанционный граф на плоскости не содержит подграфа K_4 — полного графа на четырех вершинах.

Получилось решить? Поздравляем! Вы уже научились решать задачу, которую на Московской олимпиаде 15 лет назад решил всего один человек! Однако, если вы попытаете построить пример такого графа (ровно с 7α ребрами), то у вас ничего не получится. . .

И этот вопрос (про минимальное количество ребер для дистанционного графа) уже не такой простой, как вопрос выше, для произвольного графа. Удивительно, но точная оценка на минимальное количество ребер в этой задаче — до сих пор нерешенная проблема! С момента той олимпиады прошло уже 14 лет... За это время оценка на 7α ребер сначала была улучшена до 8α в 2016 году (см. статью Льва Шабанова и А.М. Райгородского «Об одной олимпиадной задаче на графы расстояний» в журнале «Квант»). Позже Лев Шабанов в своей статье доказал оценку на $8\frac{2}{3}\alpha$. И после этого продвижений в такой задаче не было. . .

. . . до января 2024 года, когда Максим Дидин улучшил оценку до 9α ! Это продвижение, а точнее методы, с помощью которых оно было достигнуто, легли в основу данного проекта. И сейчас, мы предлагаем Вам познакомиться с ними и, можно сказать, поработать на переднем крае одного из самых красивых (как нам кажется!) разделов математики - комбинаторной геометрии. В рамках данного проекта, последовательно решая задачи, вы не только узнаете, как улучшить оценку до 9α (а также соответствующие оценки в общем случае), но и (для самых успешных!) сможете ЕЩЁ улучшить оценку!

Математики-исследователи стараются решить задачу в общем случае, а не только в частном, который можно встретить, например, на олимпиаде в виде сложной задачи. Предлагаем, уже давно не секрет, что многие олимпиадные задачи — это частные случаи новых результатов из разных областей математики. Поэтому, главная идея данного научного проекта заключается в том, что **мы хотим получить не конкретную оценку для графа с заданным соотношением между числом вершин и числом независимости (как было в исходной задаче с ММО-2010), а найти хорошую линейную по числу вершин оценку минимального количества ребер для всех графов. Хотите узнать про новые методы и как именно можно улучшать такие оценки? А может быть вы уже**

мыслите как исследователь и хотите попробовать применить эти методы в других задачах теории графов? Тогда выбирайте наш проект и скорее приступайте к решению задач!

Комментарий участникам. Мы опускаем слова «докажите, что» и пишем сразу утверждение, которое нужно доказать. «Задачами» называются чуть более сложные или фундаментальные упражнения.

Символом (!) будем обозначать задачи, без решения которых трудно двигаться дальше. Символом (*) — задачи повышенной сложности. Символом (**) — «гробы». Чем дальше вы продвигаетесь по проекту, тем больше идей осваиваете. Поэтому задачи (*) и (**) можно пропускать и возвращаться к ним позже, используя технику более высокого уровня.

1 К теореме Турана

Основная цель этого параграфа — найти минимально возможное число рёбер в турановском графе с заданными количеством вершин и числом независимости. Вторая цель — получить методы работы с турановскими графами, которые можно использовать в остальных частях проекта.

Напомним, что *числом независимости* $\alpha(G)$ графа G называется размер наибольшего множества его вершин, попарно не соединённых ребром.

Теорема 1.1 (Туран, 1941). *Найдите минимально возможное количество рёбер в графе на n вершинах с числом независимости α .*

1.2. (!) Пусть в графе имеется вершина степени хотя бы 1. Тогда можно выбросить её вместе с выходящими рёбрами и, возможно, ещё несколько рёбер, так, что число независимости не изменится.

1.3. (!) Пусть v — вершина наименьшей степени, а N — объединение множества её соседей и $\{v\}$.

- Если удалить все рёбра с концами в N и сделать из N клику, то число независимости не увеличится.
- При любом способе проведения операции из предыдущего пункта количество рёбер в графе не увеличивается.
- При проведении операции из первого пункта количество рёбер в графе не меняется тогда и только тогда, когда N является одновременно кликой и компонентой связности.

Назовём *оптимальным* граф, на котором достигается минимум в теореме Турана 1.1.

1.4. (!) В оптимальном графе

- все компоненты связности суть клики,
- размеры компонент связности отличаются не более чем на 1.

Есть много задач, в которых нужно найти связь между числом вершин, минимально возможным числом рёбер и числом независимости в графе с какими-то ограничениями (например, граф без треугольников, дистанционный граф). Интересен случай, когда эти ограничения запрещают оптимальный пример из теоремы Турана. Тогда мы будем рассматривать локальный минимум.

Назовём ребро *лишним*, если его удаление не меняет числа независимости графа.

1.5. Найдите все лишние рёбра в (a) пути; (b) цикле; (c) полном графе; (d) квадрате с диагональю.

Назовём *турановским* связный граф без лишних рёбер.

1.6. (!) В турановском графе, отличном от клики, среди соседей любой вершины есть две независимых вершины (в частности, нет висячих вершин).

1.7. Найдите минимально возможное число вершин в турановском графе с числом независимости равным двум.

1.8. Опишите все турановские графы для количества вершин из $\{3, 4, 5, 6\}$.

2 Элементарные методы

В этом разделе мы познакомимся с основными понятиями, которые будут использоваться в дальнейшем для получения различных турановских оценок. Некоторые из этих методов пригодятся и для получения простых линейных оценок; остальные методы пригодятся для более сложных техник, но эти методы можно разобрать и сейчас для улучшения понимания происходящего.

Подмножество вершин называется *максимальным*, если разность количества вершин в нём и количества рёбер в подграфе, индуцированном на этом подмножестве, максимальна.

2.1. Опишите все максимальные множества (a) пути; (b) цикла; (c) полного графа; (d) цикла с подвешенной вершиной.

Подмножество вершин называется *независимым*, если его вершины попарно не соединены рёбрами. Таким образом, размер максимального независимого множества в графе G равен $\alpha(G)$.

2.2. (!) Максимальное независимое множество вершин является максимальным множеством.

2.3. (!) Ребро является лишним тогда и только тогда, когда не существует максимального множества, содержащего обе его вершины.

2.4. (!) Пусть в турановском графе больше одной вершины. Тогда для любой вершины найдётся как максимальное независимое множество, содержащее эту вершину, так и максимальное независимое множество, не содержащее эту вершину.

Назовём подмножество вершин *свободным*, если оно лежит в дополнении некоторого максимального множества. Назовём несвободное множество вершин *ключевым*, если оно становится свободным при удалении любой его вершины.

2.5. Опишите все ключевые множества графов из упражнения [2.1](#).

Задача 2.6. Любая вершина турановского графа вместе со своими соседями образует ключевое множество.

Назовём *шарниром* вершину, при удалении которой граф теряет связность.

Задача 2.7. В турановском графе нет шарниров.

Задача 2.8. (a) (*) Для связного графа с числом независимости α улучшите результат теоремы Турана [1.1](#) на $\alpha - 1$. (b) (**) Опишите все случаи равенства.

Указание к задаче 2.8.a. Покажите, что из графа можно выбросить лишнее ребро, а если таких нет, — вершину максимальной степени без соседей.

Указание к задаче 2.8.b. Предположим, если удалить из турановского графа вершину и несколько лишних рёбер, он распадётся на клики. Тогда степени всех вершин уменьшатся.

Далее мы будем рассматривать преобразования (добавление ребра, удаление вершины), в ходе которых возникают лишние рёбра и изменяется количество компонент связности. Пусть в результате удаления вершины граф остаётся связным, но перестаёт быть турановским. Очевидно, что мы можем избавляться как минимум от одного ребра за каждое увеличение количества компонент связности на один. После этого мы покажем, как получить гораздо больше!

- 2.9.** (a) Для каждого $n > 2$ приведите пример связного графа на n вершинах, у которого все рёбра лишние.
- (b) При удалении лишнего ребра не могут появиться новые лишние рёбра (исчезнуть могут, как видно из предыдущего пункта).
- (c) (*) Какие из пяти правильных многогранников являются турановскими графами? Для остальных придумайте последовательность удаления лишних рёбер, приводящую к распаду на несколько одинаковых турановских частей.

Далее мы будем пользоваться понятием удаления (упорядоченного) набора лишних рёбер. А именно, мы будем говорить, что граф G' получен из графа G удалением набора (e_1, \dots, e_n) лишних рёбер, если существует такая цепочка $G_0 = G, G_1, \dots, G_{n-1}, G_n = G'$ графов, что одновременно выполнены два условия:

- множества вершин всех графов G_0, G_1, \dots, G_n совпадают,
- для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ граф G_i получен из графа G_{i-1} удалением лишнего ребра e_i .

Назовём связный граф *почти турановским*, если его связность нельзя нарушить путём удаления нескольких лишних рёбер.

2.10. Приведите пример

- (a) почти турановского графа с лишними рёбрами;
- (b) графа с лишними рёбрами, в зависимости от порядка удаления которых можно получить как один турановский граф, так и две турановские компоненты связности.

2.11. (a) Пусть U — ключевое множество в турановском графе. Тогда при добавлении новой вершины, соединённой со всеми вершинами из U , полученный граф останется турановским.

- (b) Пусть U — несвободное множество в почти турановском графе. Тогда при добавлении новой вершины, соединённой со всеми вершинами из U , полученный граф тоже останется почти турановским.

3 Простые линейные оценки

В этом разделе мы научимся доказывать линейные оценки на число рёбер в графе с ограничениями. Основные действия — удаление вершины наибольшей степени без соседей, удаление вершины наименьшей степени с соседями, удаление лишних рёбер. Чтобы было, что улучшать, выпишем несколько оценок, верных для произвольного графа.

Далее мы всегда будем обозначать количество вершин через n , количество рёбер через m , а число независимости через α .

3.1. (!) Пусть имеется граф на n вершинах с числом независимости α . Тогда количество рёбер в нём не меньше (a) $n - \alpha$; (b) $2n - 3\alpha$; (c) $3n - 6\alpha$; (d) $4n - 10\alpha$; (e) $5n - 15\alpha$.

Оценки являются точными. Доказательство любой аналогичной линейной оценки — последовательность действий, упрощающих граф и позволяющих отследить изменение m, n, α . Например, вершину, степень которой не меньше, чем коэффициент при n , можно удалить без соседей (если появятся лишние рёбра — тем лучше).

Если дополнительно запретить в графе некоторые клики, то предыдущие оценки можно усилить.

3.2. (а) (!) Пусть в графе нет треугольников (клик на трёх вершинах). Тогда $m \geq 3n - 5\alpha$; (б) Равенство $m = 3n - 5\alpha$ достигается ровно на двух связных графах.

Указания к упражнению 3.2.а. Можно считать, что степени вершин в графе не превосходят 2. Достаточно рассмотреть случай турановского графа.

Указания к упражнению 3.2.б. Можно считать, что в турановском графе есть вершина v степени 3, соединённая с вершиной степени 2. Что произойдёт, если выбросить v ?

3.3. (а) (!) Предположим, оценка $m \geq 5n - 10\alpha$ верна для всех 3-регулярных турановских графов без треугольников. Докажите её для всех остальных графов без треугольников. (б) Постройте бесконечную серию связных графов без треугольников, на которых достигается равенство $m = 5n - 10\alpha$. (с) (*) Докажите оценку $m \geq 5n - 10\alpha$ для 3-регулярных графов без треугольников.

Указания к упражнению 3.3.а. Тут пригодятся методы решения 3.1.а. Также: При удалении вершины наименьшей степени d с соседями теряется хотя бы d^2 рёбер. Если граф не является регулярным, оценка улучшается на одно очко.

Вопрос: где используется, что граф не содержит треугольников?

Указания к упражнению 3.3.б. Простейший пример — цикл на пяти вершинах. Он получается, если выбросить из какого-то графа вершину степени два с соседями. Чтобы продолжить серию, добавляя на каждом шаге по три вершины, и отслеживать число независимости, потребуется понятие ключевого множества.

Указания к упражнению 3.3.с. Удаляя вершину с соседями, мы теряем 1 очко. Зато дальше можно разрушать граф, пока мы не вернём очко или не дойдём до конца (до какого конца?)

Итак, оценки 3.2 и 3.3 точны для определённых диапазонов отношения $\frac{n}{\alpha} < 3$. При этом, точной оценки для всех графов без треугольников нам неизвестно (в частности, она позволяла бы вычислить числа Рамсея $R(3, \alpha)$).

Теперь, после знакомства с техникой удаления вершины с соседями, пора получить одну из оценок, анонсированных во введении.

3.4. (!) Пусть имеется граф на n вершинах с числом независимости α . Пусть в нём нет клика на четырёх вершинах. Тогда количество рёбер в нём не меньше $5n - 12\alpha$.

Задача уже выглядит непростой. Но результат ещё нужно усилить! Для этого нужно найти точки равенства.

3.5. Пусть в условиях упражнения 3.4 в оценке достигается равенство для некоторого графа. Пусть d — наименьшая степень вершины.

(а) Тогда $2 \leq d \leq 4$.

(б) Как может выглядеть множество соседей вершины степени d ?

(с) Имеется ровно три «попарно неизоморфных» турановских графа, на которых достигается равенство в оценке.

Указание к упражнению 3.5. Докажите, что случай равенства единственный, сначала для $d = 2$, потом для $d = 3$, потом для $d = 4$. В 4-регулярном графе удобно зацепиться за ромб — цикл на четырёх вершинах с диагональю.

Кажется, что для усиления оценки для дистанционного графа необходимо использовать недистанционность большого списка подграфов, вылезает перебор. Таким образом, оценку на количество m рёбер можно усилить до $m \geq 8\frac{1}{3}\alpha$ (если запретить недистанционный пример из 3.5) или даже $m \geq 8\frac{2}{3}\alpha$ (если запретить пятиугольную пирамиду без одного бокового ребра и пару вершин с тремя общими соседями) при $n = 4\alpha$. Этого мало! Мы выберем другой путь. Для произвольного турановского графа мы получим оценки (a) $m \geq 3n - 4\alpha - 2$; (b) $m \geq 4n - 7\alpha - 3$; (c) $m \geq 5n - 11\alpha - 4$.

Имеется много случаев равенства (в частности, $m = 3n - 4\alpha - 2$ в примерах из упражнения 3.2.b. Оценка $m \geq 4n - 7\alpha - 3$ для графов без клик на 4 вершинах точна при $n \leq 4\alpha - 1$. Тем не менее, при $n \geq 4\alpha$ её можно ещё усилить. Пусть имеется турановский граф на n вершинах с числом независимости α . Пусть в нём нет клик на четырёх вершинах. Тогда количество рёбер в нём не меньше (a) $5n - 11\alpha - 2$; (b) $6n - 15\alpha - 1$, за исключением графа четырехугольной антипризмы.

Связность и отсутствие лишних рёбер позволяют добавить в оценку свободный член. Таким образом, случаи равенства при $\alpha = 2$ сохраняются, а при больших α оценка усиливается. Кроме того, можно обходить неудобные случаи равенства. Обычная техника удаления вершины не позволяет доказать такие оценки, ведь граф может после удаления лишних рёбер рассыпаться на тысячи осколков, а свободные члены для разных частей складываются! Поэтому, мы посвятим следующие две главы технике, позволяющей решать эти проблемы.

4 Расколы

В этом разделе мы познакомимся с понятием раскола, которое поможет нам преобразовывать графы так, чтобы для них было проще получать турановские оценки. Идея в том, чтобы добавляя в турановский граф ребро или удаляя вершину, делать несколько других рёбер лишними. На этом пути есть две проблемы. Во-первых, добавленное ребро может входить в запрещённый подграф. Для решения этой проблемы, мы будем окрашивать такие рёбра в красный цвет и снимем с них все ограничения. Также нам потребуются красные вершины. Заметим, что любая вершина красного ребра может легко и необратимо превратиться в красную вершину. Обычные вершины и рёбра мы назовём синими.

Во-вторых, удаление лишних рёбер может привести к увеличению числа компонент связности. Назовём вершину v турановского графа *нестабильной*, если при удалении вершины v и нескольких лишних рёбер граф может распасться на части. Назовём пару (u, v) независимых вершин турановского графа *особой*, если при добавлении ребра uv и удалении нескольких лишних рёбер граф может распасться на части.

4.1. (a) (!) Каждая вершина особой пары нестабильна. (b) (!) Любая пара вершин нечётного цикла — особая. (c) Приведите пример турановского графа, не содержащего нестабильных вершин и не являющегося кликой.

Как видно из задачи 4.1.b, частей может быть много, а лишних рёбер — не так много. Поэтому, мы не хотим оставлять полученный граф в таком виде. Оказывается, что верна следующая теорема.

Задача 4.2 ().** (a) **Раскол по ребру.** Пусть при добавлении красного ребра e и удалении нескольких лишних рёбер граф распадается на почти турановские компоненты G_1, \dots, G_t , и e лежит в G_1 . Тогда можно добавить в компоненты G_2, \dots, G_t по одной красной вершине, при этом число независимости не изменится, а общее количество рёбер в графе увеличится не более, чем на $t - 1$.

- (b) **Раскол по вершине.** Пусть при удалении нестабильной вершины v и нескольких лишних рёбер граф распадается на почти турановские компоненты G_1, \dots, G_t . Тогда можно добавить во все компоненты G_1, \dots, G_t по одной красной вершине при этом число независимости не изменится, а общее количество рёбер в графе увеличится не более, чем на $t - 1$.

Решение задачи 4.2 в рамках методов данной части не так просто (в том числе, поскольку результат раскола и даже число частей не определены однозначно). Эта задача будет решена далее с помощью гиперграфов. В дальнейшем можно использовать результат задачи 4.2 без доказательства (кроме задач, являющихся частными случаями данной теоремы).

- 4.3.** (a) (!) Расколите пятиугольник по вершине.
 (b) (!) Расколите произвольный нечётный цикл по вершине.
 (c) (!) Расколите турановский граф на $n > 3$ вершинах, содержащий пару соседних вершин степени 2. Укажите все способы (расколы по ребру или по вершине).
 (d) Какой способ из п. (b) гарантирует раскол ровно на две части?
 (e) Приведите пример связного графа с лишними рёбрами, содержащего нестабильную вершину, раскол по которой невозможен (потребуется добавить слишком много рёбер).

Этот раздел посвящён расколу на две части (назовём такой раскол простым). Наша цель — не только доказать теорему о расколе, но и найти точки равенства (назовём раскол на t частей, при котором число рёбер в графе увеличивается ровно на $t - 1$, бесплатным).

Пусть имеется турановский граф G . Пусть e — ребро из дополнения графа G . Граф назовём *e -предраскольным*, если он (1) представляет собой две почти турановские компоненты G_1, G_2 , (2) получен из графа G добавлением ребра e и удалением всех рёбер, соединяющих G_1 с G_2 , (3) имеет такое же число независимости, как и G .

- 4.4.** Найдите, если возможно, e -предраскольный граф для (a) (!) цикла на пяти вершинах; (b) веретена Мозера.

Простой раскол по ребру.

Пусть имеется турановский граф G на m рёбрах. Граф получен *простым расколом графа G по ребру e* , если количество рёбер в нём не больше $m + 1$, и он получен добавлением одной (красной) вершины в компоненту некоторого e -предраскольного графа, не содержащую e .

- 4.5.** (!) Если для турановского графа существует e -предраскольный граф, то простой раскол возможен.

Указание к упражнению 4.5. Нужно использовать факт, что рёбра, соединяющие G_1 и G_2 , изначально не были лишними. Далее ищем ключевое множество в G_2 .

Назовём *стоимостью* графа без лишних рёбер разность между количеством рёбер и количеством компонент связности. Когда мы уменьшаем стоимость графа на 1, сохраняя разность между количеством вершин и количеством компонент связности, мы получаем 1 монету.

Задача 4.6 (Простой бесплатный раскол по ребру). Пусть возможен раскол графа G по ребру e на почти турановские части G_1, G_2 . Предположим, что число рёбер в графе при этом расколе увеличится (другими словами, мы не можем получить монету при этом расколе). Пусть e лежит в G_1 . Тогда

- (a) в графе G из каждой вершины графа G_2 ведёт не более одного ребра в вершины графа G_1 ;
- (b) вершины графа G_1 , из которых в графе G ведут рёбра в вершины графа G_2 , в объединении с концами ребра e образуют независимое множество;
- (c) граф G можно расколоть по любому ребру, стягивающему вершины независимого множества из предыдущего пункта.

Задача 4.7 (Элементарный раскол). Пусть турановский граф G состоит из двух непустых подграфов G_1, G_2 , и двух вершин u и v , причём из подграфа G_1 не ведут рёбра в G_2 . Тогда

- (a) вершины u и v независимы;
- (b) после проведения ребра uv все рёбра, ведущие из u и v в один из подграфов (обозначим его G_2), станут лишними;
- (c) вершины графа G_2 , соединённые с u или v , образуют ключевое множество U ;
- (d) после добавления новой красной вершины x , соединённой с вершинами множества U , получится турановский граф $G_2 \cup \{x\}$;
- (e) граф G_1 с проведённым ребром uv также турановский.

Задача 4.8. Пусть имеются два турановских графа, в каждом из которых хотя бы три вершины. Как «собрать из них» один турановский граф, уменьшив число вершин и рёбер на один?

Указание. Важно доказать, что в полученном графе нет лишних рёбер. Задача 4.8 позволяет за несколько шагов свернуть оптимальный граф в турановский (колоссальным числом способов). Такое действие мы называем рекомбинацией графов по ребру одного графа и вершине другого. Наша цель — доказать, что в построенном примере будет минимальное число рёбер (среди всех турановских графов с такими же характеристиками).

Задача 4.9. (!) Проведите элементарный раскол в следующих турановских графах, отличных от клики и содержащих:

- (a) вершину степени 2;
- (b) вершину степени 3, входящую в два треугольника.

Далее мы используем следующие обозначения (пусть подграф G_1 находится сверху, G_2 — снизу): X — шарнир, XX — возможность элементарного раскола

4.10. (!) Пусть турановский граф G состоит из вершины и подграфов G_1, G_2 , причём имеется ровно одно ребро, соединяющее G_1 с G_2 (случай XI).

- (a) Укажите, какие элементарные расколы по ребру возможны.
- (b) Как получить в каждой части красное ребро?

4.11. (!) Пусть турановский граф G состоит из подграфов G_1, G_2 , причём имеется ровно два ребра, соединяющее G_1 с G_2 (случай II). Что получится после двух элементарных расколов?

Теперь вернёмся к упражнениям 3.4 и 3.5. Если вы решили не все пункты, примените технику расколов. Считайте, что красная вершина стоит 4 очка (но не спешите удалять красную вершину степени 4 из графа).

Задача 4.12. (a) В задаче 3.5.b получены «худшие случаи» положения вершины степени 3. Какие в этих случаях возможны расколы?

- (b) Сколько очков можно гарантированно получить в этих случаях при $\alpha > 2$? Постройте пример турановского графа с $\alpha = 3$, содержащего вершину степени 3, стоимостью 1 очко (равенство $m = 5n - 12\alpha + 1$).

- (c) (*) Покажите, что при $\alpha > 3$ турановский граф, содержащий вершину степени 3, стоит больше одного очка (неравенство $m \geq 5n - 12\alpha + 2$).

Задача 4.13. Пусть турановский граф содержит треугольник из вершин степени 3, не входящих в другие треугольники.

- (a) По каким рёбрам можно расколоть граф?
 (b) Приведите пример такого графа на 8 вершинах. Что получается при расколах?
 (c) (*) Разрешим некоторым рёбрам графа содержать больше одной вершины. (граф становится гиперграфом, который может содержать как простые рёбра, так и гиперрёбра). Расколите граф из п. (a,b) по гиперребру. Расколите гиперграф, полученный из п. (b), повторно.
 (d) (*) Дайте общее определение элементарного раскола турановского гиперграфа. Какие условия на максимальное независимое множество в G_1 или G_2 достаточны для возможности элементарного раскола?

Простой раскол по вершине.

Пусть имеется турановский граф G на m рёбрах, а v — его нестабильная вершина. Граф назовём *v -предраскольным*, если он: (1) представляет собой две почти турановские компоненты G_1, G_2 , (2) получен из графа G удалением вершины v и всех рёбер, соединяющих G_1 с G_2 , (3) имеет такое же число независимости α , как G . Граф получен *простым расколом графа G по вершине v* , если количество рёбер в нём не больше $m + 1$, и он получен добавлением по одной вершине в каждую из обеих компонент некоторого v -предраскольного графа.

4.14. (!) Если существует v -предраскольный граф, то простой раскол возможен.

4.15. (*) Пусть турановский граф G состоит из двух вершин и подграфов G_1, G_2 , причём имеется ровно одно ребро, соединяющее G_1 с G_2 (случай XXI). Докажите, что граф можно расколоть по одной из вершин.

Задача 4.16 (Симметричный раскол по вершине). Пусть в упражнении 4.14 невозможно провести раскол по вершине v так, чтобы получить монету. Кроме того, пусть невозможно расколоть граф по ребру, инцидентному v . Рассмотрим любой v -предраскольный граф $G_1 \sqcup G_2$, где G_1, G_2 суть его почти турановские компоненты.

- (a) В графе G из каждой вершины графа G_1 ведёт не более одного ребра в вершины графа G_2 .
 (b) Вершины графа G_1 , из которых в графе G ведут рёбра в вершины графа G_2 , в объединении с $\{v\}$ образуют независимое множество U .
 (c) $\alpha(G_i) \geq 3$ для $i = 1, 2$.
 (d) (*) Приведите пример турановского графа, для которого возможен симметричный раскол по одной из вершин.

Итак, мы знаем многое про простые расколы и почти всё — про простые бесплатные расколы, верим в общий случай теоремы о расколе.

Первым применением данной техники станут линейные оценки со свободным членом для турановских графов.

4.17. Докажите для турановского графа на n вершинах с числом независимости α следующие оценки снизу на количество рёбер: (a) (!) $3n - 4\alpha - 2$; (b) $4n - 7\alpha - 3$; (c) (*) $kn - \frac{k^2 - k + 2}{2}\alpha - k + 1$ для каждого натурального $k \geq 3$.

Чтобы применить эту технику, вернёмся к задаче 3.3 (если вы решили ещё не все пункты, вернитесь к ним, вооружившись техникой расколов и неравенствами 4.12). Считайте, что красная вершина стоит 3 очка, но не спешите удалять красные вершины степени 3 — лучше расколите граф.

Задача 4.18. (*) Пусть турановский граф не содержит треугольников. Рассмотрим случай равенства $m = 5n - 10\alpha$.

- (a) Граф не является 3-регулярным.
- (b) Пусть одну из вершин можно расколоть. Тогда расколы следуют один за другим, вплоть до распада графа на клики.
- (c) Все расколы — простые бесплатные. Если граф можно расколоть, выполняется равенство $n = 3\alpha - 1$.
- (d) Все расколы — элементарные.
- (e) Для каждого $\alpha > 1$ существует единственный пример с возможностью раскола. Все вершины в примере нестабильные.
- (f) Существуют ли другие примеры?

5 Удаление вершины с соседями

Итак, мы научились корректно удалять любую вершину турановского графа без соседей. Теперь мы хотим научиться удалять вершину с соседями.

Назовём вершину наименьшей степени в турановском графе *стандартной*, если при удалении этой вершины и всех её соседей получается почти турановский граф. Кажется, что у нас не возникало проблем с удалением стандартной вершины. Но на самом деле, часто можно улучшить результат. Например, для вершины степени 2 хочется, чтобы удаление совпадало с расколом.

Пусть имеется стандартная вершина v турановского графа, не являющегося полным. Назовём *удалением вершины v с соседями* следующий процесс:

- 1) выбираются два несмежных соседа u_1, u_2 вершины v ;
- 2) удаляются все соседи вершины v , кроме u_1 и u_2 , и затем все лишние рёбра;
- 3) полученный граф раскалывается по ребру u_1u_2 ;
- 4) удалённые вершины возвращаются в клику vu_1u_2 .

5.1. Если возможно, удалите с соседями:

- 1) (!) вершину пятиугольника;
- 2) вершину четырехугольной антипризмы;
- 3) (*) вершину икосаэдра.

Задача 5.2. Удаление стандартной вершины v с соседями определено корректно, то есть

- (a) у v найдутся два несмежных соседа u_1, u_2 ;
- (b) на втором шаге удаление вершин и лишних рёбер не может привести к нарушению связности графа;
- (c) на третьем шаге граф можно расколоть по ребру u_1u_2 , причём раскол простой.

Задача 5.3. Удаление стандартной вершины с соседями является расколом (то есть количество рёбер увеличивается не более чем на одно).

Тем не менее, число красных объектов увеличивается на $d - k + 2$, где d — степень удаляемой вершины v , а k — минимальный размер запрещённой клики (при условии, что v , её соседи и выходящие из них рёбра все синие, иначе лучше). Например, в графе без клики на четырёх вершинах удаление вершины степени 3 с соседями приводит к тому же результату, что и простой раскол. Как и при расколе, нас интересуют случаи, когда удаление вершины не даёт нам монет (в смысле раскола).

Задача 5.4. (*) Пусть невозможно получить монету при удалении вершины v степени d с соседями. Тогда выполняется одна из двух альтернатив:

- 1) вершина v лежит в клике на d вершинах, а граф можно расколоть по ребру;

- 2) вершина v имеет независимых соседей u_1, u_2, u_3 ;
 все остальные соседи вершины v соединены только с v, u_1, u_2, u_3 и между собой;
 все соседи вершины v имеют степень d ;

Во втором пункте при $d > 3$ возникает несколько попарно соединённых вершин, имеющих один и тот же набор соседей. Мы будем называть такие вершины *клонами*.

Задача 5.5. (!) Пусть вершина v не является стандартной. Тогда процесс удаления этой вершины с соседями невозможен; однако его можно несложно модифицировать.

- (a) Что делать, если на каком-то этапе второго шага граф перестаёт быть почти турановским?
 (b) Что делать, если степень какого-то из соседей вершины v стала меньше степени самой v ? Покажите, что мы можем не только продолжить процесс, но и получить монету за каждую из вершин, которые мы удалили к этому моменту.

Задача 5.6. Используя предыдущую задачу, докажите, что пример, построенный в задаче 4.8, оптимален.

Итак, мы получили точную оценку снизу на число рёбер в турановском графе. Далее мы ещё приблизимся к описанию оптимальных графов.

Для турановского графа G назовём *итоговым* граф G' , для которого выполнены следующие свойства:

- 1) у графов G, G' одинаковое число независимости α ;
- 2) количество вершин в G' на $\alpha - 1$ больше количества вершин в G ;
- 3) компоненты графа G' суть клики, размеры которых отличаются не более, чем на один.

5.7. (a) Итоговый граф однозначно строится по количеству вершин и числу независимости исходного графа.

- (b) Количество рёбер исходного графа не более, чем на $\alpha - 1$ меньше количества рёбер итогового графа.

5.8. (a) Степень любой вершины итогового графа не меньше двух.

- (b) Средняя степень вершин турановского графа не меньше средней степени вершин его итогового графа.
 (c) Равенства в предыдущих пунктах достигаются только для циклов нечётной длины.
 (d) Степень некоторой вершины оптимального турановского графа не больше степени некоторой вершины его итогового графа.

Теперь мы получим дополнительные условия на графы, для которых достигается равенство (то есть опишем оптимальные турановские графы).

Задача 5.9. (a) Степень любой вершины оптимального турановского графа не меньше, чем наименьшая степень вершин итогового графа.

- (b) Пусть оптимальным турановский граф нельзя расколоть по вершине v . Тогда степень вершины v не больше, чем наибольшая степень вершин итогового графа.

В предыдущей задаче практически появилось следующее понятие. Назовём *стабильным* турановский граф, который не является полным и который нельзя расколоть по вершине.

Задача 5.10. (a) Приведите пример стабильного графа.

- (b) * Существует ли оптимальный стабильный граф?
 (c) Степень любой вершины оптимального стабильного графа равна наибольшей степени вершин его итогового графа.

6 Гиперграфы

Назовём *гиперграфом* пару (V, F) , где V — множество вершин, а F — множество гиперрёбер, которые являются подмножествами множества V , состоящими из как минимум двух вершин. (Заметим, что граф является частным случаем гиперграфа, у которого все гиперрёбра имеют мощность два.)

Подмножество вершин называется *независимым*, если никакое гиперребро не содержится в нём целиком. *Числом независимости* $\alpha(G)$ графа G называется размер максимального независимого множества.

- 6.1.** (а) Количество гиперрёбер в гиперграфе не меньше, чем количество рёбер в оптимальном графе с таким же количеством вершин и числом независимости.
(б) Найдите все гиперграфы, для которых в предыдущем пункте достигается равенство.

Задача 6.2. Обобщите все введенные выше определения о графах на гиперграфы.

Как видно, неочевидно только обобщить понятие шарнира.

Вершина v гиперграфа (V, F) называется *шарниром*, если существует такое разбиение $V \setminus \{v\} = V_1 \sqcup V_2$, что никакое гиперребро из F не пересекается одновременно с V_1 и с V_2 .

Вершина v гиперграфа (V, F) назовём *почти шарниром*, если существует такое разбиение $V \setminus \{v\} = V_1 \sqcup V_2$, что любое гиперребро из F , пересекающееся одновременно с V_1 и с V_2 , содержит v .

- 6.3.** Пусть гиперграф на самом деле граф. Эквивалентны ли для него определения шарнира в смысле графов и шарнира в смысле гиперграфов? Эквивалентны ли для него определения шарнира в смысле графов и почти шарнира?

Независимое множество U связного гиперграфа (V, F) назовём *шарнирным*, если существует такое разбиение $V \setminus U = V_1 \sqcup V_2$, что любое гиперребро из F , пересекающееся одновременно с $V_1 \sqcup U$ и с V_2 , содержит U и не содержит больше никаких вершин из V_1 .

Независимое множество U связного гиперграфа (V, F) назовём *почти шарнирным*, если существует такое разбиение $V \setminus U = V_1 \sqcup V_2$, что любое гиперребро из F , пересекающееся одновременно с $V_1 \sqcup U$ и с V_2 , содержит U .

- 6.4.** Имеются шарнир v и почти шарнир u (не обязательно различные). Для каждого из множеств $\{v\}$ и $\{u\}$ определите, является ли оно • шарнирным? • почти шарнирным?

Шарнирное множество U связного гиперграфа (V, F) назовём *правильным*, если дополнительно для разбиения $V \setminus U = V_1 \sqcup V_2$ из определения шарнирного множества выполнено, что любая вершина из V_2 содержится не более чем в одном гиперребре, пересекающемся с $V_1 \sqcup U$.

Следующая задача позволяет форсировать результат раскола графа с точностью до положения вершин, добавленных при расколе в каждую из частей, и наличия тех рёбер внутри каждой части, которые без добавления новой вершины являются лишними.

- Задача 6.5.** (а) Пусть при добавлении в турановский гиперграф гиперребра U и последующем удалении лишних гиперрёбер он распадается на как минимум две почти турановские части. Как превратить U в почти шарнирное множество, сохранив количество гиперрёбер?
(б) Пусть при удалении из турановского гиперграфа вершины v и лишних рёбер он распадается на как минимум две почти турановские части. Как превратить v в почти шарнир, сохранив количество гиперрёбер?

6.6. Пусть два гиперребра турановского гиперграфа пересекаются по U , причём $|U| > 1$. Тогда можно или удалить некоторые рёбра, оставив гиперграф турановским, или превратить U в почти шарнирное множество.

Задача 6.7. Пусть в турановском гиперграфе есть почти шарнирное множество. Как получить турановский гиперграф с правильным шарнирным множеством, не увеличив количество рёбер?

7 Нетривиальные линейные оценки

Теперь, когда мы умеем корректно удалять вершины в турановском графе, как с соседями, так и без них, будем доказывать линейные оценки со свободным членом.

Сначала разберём случай, когда все расколы корректны.

Лемма 7.1. *При расколе планарного графа образуются только планарные графы.*

Теорема 7.2. *Пусть имеется планарный турановский граф на n вершинах с числом независимости α . Тогда количество рёбер в нём не меньше $6n - 14\alpha - 4$.*

Итак, получаются интересные оценки. Но в большинстве случаев, раскол не сохраняет ограничения на граф. Поэтому, мы окрасим вершины графа в два цвета: синие и красные. Ограничения будут наложены только на подграфы из синих вершин. Очевидно, что при расколе в каждой части появится одна красная вершина. При удалении некоторой вершины с соседями, в клике этой вершины может быть несколько красных вершин, а в остальных частях — по одной.

7.3. Пусть имеется турановский граф на n_1 синих и n_2 красных вершинах с числом независимости α . Пусть в нём нет синих треугольников (то есть клик на трёх синих вершинах). Тогда

- (а) Количество рёбер в нём не меньше $5n_1 + 3n_2 - 10\alpha$.
- (б) Равенство достигается только для оптимальных турановских графов.
- (в) В случае равенства, число синих вершин равно $n_1 = 3\alpha - 1$.

Теперь вернёмся к выписанным ранее оценкам для графов без клики на 4 вершинах.

7.4. Пусть имеется турановский граф на n_1 синих и n_2 красных вершинах с числом независимости α . Пусть в нём нет клики на четырёх синих вершинах. Тогда количество рёбер $m \geq 5n_1 + 4n_2 - 11\alpha - 2$.

Для синего графа, эта оценка ровно на 2 монеты лучше, чем оценка для произвольного турановского графа.

Следующая оценка существенно сложнее, поэтому можно сдавать её по пунктам. Предлагается доказать по одной и той же схеме сразу две оценки: линейную и кусочно-линейную.

7.5. Пусть имеется турановский граф на n_1 синих и n_2 красных вершинах с числом независимости α , не являющийся четырехугольной антипризмой. Пусть в нём нет клики на четырёх синих вершинах. Тогда количество рёбер $3m \geq 19n_1 + 11n_2 - 50\alpha$ $m \geq 6n_1 + 4n_2 - 15\alpha - 1$

Первая из оценок примечательна тем, что это сильнейшая из опубликованных оценок для дистанционных графов. Её доказательство требует запрета трёх графов на 6 и 7 вершинах и опирается на существенный перебор. Вам предлагается не только доказать эту оценку для всех графов без K_4 , кроме антипризмы, но и найти все 4 случая равенства. Вторая оценка немного проще, зато сильнее первой при $n < 5\alpha - 3$.

- 7.6.** (а) Пусть в графе есть красная вершина. Тогда можно либо получить монету, либо серией простых бесплатных расколов разбить граф на клики и графы из синей четырёхугольной антипризмы и красной вершины.
- (б) Если в графе есть вершина степени менее 4 или нестандартная вершина степени 4, её можно удалить с соседями, далее п. (а).
- (с) Если в графе есть 2 независимых вершины степени 4 с двумя общими соседями, одну из них можно удалить с соседями. Если она окажется стандартной, на следующем шаге мы не только восстановим баланс, но и получим монету.
- (д) Пусть п. 1-3 не выполнены. Опишите все случаи множества соседей вершины v минимальной степени $d = 4$, которую невыгодно удалять с соседями. Что делать с 4-регулярным графом?
- (е) Почему при удалении вершины степени 4 с соседями в случае равенства не получится антипризма?
- (ф) Разберите случай, когда степень всех вершин графа не менее 5.

7.7. ()** Пусть имеется турановский граф на n_1 синих, n_2 зелёных и n_3 красных вершинах с числом независимости α . Пусть в нём любая клика на четырёх вершинах содержит красную вершину, а любая антипризма - красную или зелёную вершину. Тогда либо количество рёбер $m \geq 7n_1 + 6n_2 + 4n_3 - 19\alpha$, либо граф - антипризма с одной зелёной вершиной и 7 синими, либо все вершины синие, и реализуется один из двух нетривиальных случаев равенства из предыдущей задачи ($n = 12$, $\alpha = 3$, $m = 26$).

Таким образом, для оценки $m \geq 9\alpha$ при $n = 4\alpha$ требуется не дистанционность графа, а существенно более слабые запреты. Но если вы хотите получить более простую оценку $m \geq 9\alpha$ или усилить её для дистанционных графов,

Кроме антипризмы, важнейший случай равенства — оптимальный турановский граф. Усиление оценки для дистанционных графов основано на борьбе с этим случаем. Чтобы точнее описывать серии расколов, мы введём в граф дополнительные объекты. Розовая вершина — красная вершина, не входящая в клику на 4 вершинах, из которых 3 синие, и 6 синих рёбрах (но входящая в другой запрещённый подграф).

- 7.8.** (а) Пусть в турановском графе есть красная вершина v . Тогда либо граф — клика, либо v имеет степень более 4, либо v можно сделать розовой, либо возможен простой бесплатный раскол по ребру.
- (б) Какие недистанционные подграфы нужно запретить, чтобы в условиях п. (а) при $\alpha > 3$ после одного или двух простых бесплатных расколов в графе появилось красное ребро, красная вершина степени более 4 или розовая вершина? Считаем, что откалываемые клики исчезают.
- (с) В условиях предыдущего пункта при $\alpha > 4$ после трёх простых бесплатных расколов в графе появилась красная вершина степени более 4 или розовая вершина. Какой недистанционный подграф нужно запретить, чтобы она появилась после двух простых бесплатных расколов?
- (д) Пусть в условиях п. (б) выполнено равенство $m = 6n_1 + 4n_2 - 15\alpha - 1$ и есть красная вершина. Тогда $\alpha < 4$. Постройте все примеры с $\alpha = 2, 3$ (как видно из п. (с), единственный пример с $\alpha = 3$ — недистанционный).

Эти результаты позволяют получить более сильную оценку $m \geq 7n_1 + 4n_2 - 19\alpha$ для дистанционного графа G (в частности, ровно $m = 9\alpha$ при $n = 4\alpha$). Не умаляя общности, считаем граф турановским. Эту задачу тоже можно сдавать по пунктам.

- 7.9.** (а) Пусть подграф из синих вершин G не является веретеном Мозера и содержит вершину степени менее 4. Как получить монету? Чем отличается случай, когда в G есть красная вершина A ?

- (b) Пусть в графе есть вершина степени 4, соседняя с вершиной степени 5. Как, затратив не более одной монеты, перейти к п. (а)?
- (c) Решите задачу для 4-регулярного графа.
- (d) Решите задачу для 5-регулярного графа.
- (e) Завершите решение задачи. Запрет каких подграфов важен?

Интересно заметить, что оценку для дистанционных графов можно ЕЩЁ усилить! Для этого, технику красных рёбер придётся использовать в полную силу. Предлагается доказать такую нижнюю оценку:

$$2m \geq 12n - 29\alpha - 4.$$

Подсказка: опишем стоимости большинства объектов, учитывая, что *монета стоит 2 очка*:

- Синяя вершина — 12 очков
- Красная вершина — 8 очков
- Розовая вершина — 9 очков
- Красная вершина, которую по рекомбинации можно развернуть в синий ромб — 9 очков
- Красное ребро, соединяющее противоположные вершины синего ромба: +3 очка
- Красное ребро, любой конец которого можно сделать розовым: +2 очка
- Красное гиперребро (если потребуется): +2 очка

Если Вы добрались до этого места и скучаете в этот момент, то предлагаем вам попробовать улучшить любые оценки из этого раздела или найти точки равенства, т.е. ситуации, когда количество ребер графе в точности равно какой-либо нетривиальной нижней оценке из этого раздела. Мы полагаем, что получатся интересные результаты, и будем рады их обсудить: во время летней конференции или после нее, если у вас возникнет интерес к продолжению исследовательской деятельности в этом направлении. Желаем удачи!

Решения

1.1 Следует из упражнений 1.2 и 1.3. Если $n = q\alpha + r$, где $r < \alpha$, то в оптимальном графе будет r клик размера $q + 1$ и $\alpha - r$ клик размера q , всего рёбер $T(n, \alpha) = (r \frac{q(q+1)}{2} + (\alpha - r) \frac{q(q-1)}{2})$.

1.2 Заметим, что при выкидывании вершины со всеми выходящими рёбрами число независимости не может увеличиться. Если число независимости не изменилось, то другие рёбра можно не выкидывать. Если оно уменьшилось, то будем выкидывать рёбра по одному. Заметим, что число независимости будет либо не меняться, либо увеличиваться на 1. Когда удалятся все рёбра, число независимости станет равно $n - 1$. Но изначально оно не более $n - 1$, так как в графе есть хотя бы одно ребро. Таким образом, по дискретной непрерывности можно найти набор рёбер, при удалении которого число независимости не изменится.

1.3

- Рассмотрим независимое множество в новом графе. Оно содержит не более одной вершины из N . Тогда, при необходимости заменив вершину из N вершиной v , мы получаем независимое множество такого же размера в исходном графе.
- Обозначим степень вершины v через d . Тогда в множестве N есть $d + 1$ вершина степени не менее d , откуда рёбер с концами в N не менее $\frac{d(d+1)}{2}$. А в клике на $d + 1$ -й вершине рёбер ровно $\frac{d(d+1)}{2}$. Таким образом, мы удалим рёбер не меньше, чем добавим.
- Равенство достигается, если у всех вершин из N степени равны d , и каждое удалённое ребро соединяет две вершины из N . Нетрудно видеть, что в этом случае множество N образует клику, из которой не больше никаких рёбер не выходит.

1.4

- Докажем данное утверждение индукцией по α .

База. При $\alpha = 1$ оптимальным графом является только полный граф. **Переход от $\alpha < t$ к $\alpha = t$.** Применим операцию из задачи ???. Так как граф оптимальный, то число рёбер не увеличится, и найдётся компонента связности, являющаяся кликой. Тогда граф на оставшемся множестве вершин является оптимальным для $\alpha < t$. Применяем предположение индукции и получаем, что весь граф состоит из непересекающихся клик.

- Если в одной клике k вершин, а в другой — $l > k + 1$ вершин, то перебросим одну вершину из большей клики в меньшую. Тогда рёбер уменьшится на $l - 1$, а увеличится всего на $k < l - 1$, то есть уменьшится. А так как число независимости при такой операции не меняется, то данный граф не может быть оптимальным.

1.5 Ответы:

- Для нечётного n все рёбра лишние; для чётного лишние и нелишние рёбра чередуются, начиная с нелишних.
- Для чётного n все рёбра лишние, для нечётного n лишних рёбер нет.
- Лишних рёбер нет.
- Все рёбра лишние.

1.6 Предположим противное. Пусть у вершины v все соседи попарно соединены. Так как граф связный и не является кликой, то найдутся соединённые вершины u, w такие, что

u сосед v , а w — нет. Так как ребро $u - w$ не лишнее, найдётся максимальное множество, содержащее вершины u, w . Так как в максимальном множестве нет вершин степени хотя бы 2, то в выбранном множестве нет других соседей u , а, следовательно, и соседей v . Но тогда заменим в множестве вершину u на w . Число вершин не изменится, ребро $u - w$ пропадёт, новых не появится. Получим противоречие с максимальностью исходного множества.

2.2 Заметим, что в максимальном множестве не может быть вершины степени не меньше двух: при удалении любой такой вершины искомая разность уменьшается. При удалении вершины степени один искомая разность не изменяется. Поэтому если взять любое максимальное множество и по одной удалять вершины степени 1, мы придём к независимому множеству с тем же значением разности. А так как есть хотя бы одно независимое множество, являющееся максимальным, то все максимальные независимые множества будут максимальными.

2.3 (\Rightarrow) Пусть есть максимальное множество, содержащее ребро. Тогда при его удалении в этом множестве разность числа вершин и числа рёбер возрастёт, следовательно, возрастёт и размер максимального независимого множества. Значит, ребро не было лишним.

(\Leftarrow) Пусть ребро лишнее. При его удалении число независимости увеличивается ровно на 1. Удалим его и выберем любое максимальное независимое множество. Это множество и будет максимальным в исходном графе: в исходном графе разность числа вершин и рёбер подмножества уменьшится на один и станет равна числу независимости исходного графа.

2.4 Так как граф связный и в нём больше одной вершины, то степень каждой вершины не меньше одного. Пусть дана вершина. Возьмём любое ребро, выходящее из неё. Это ребро не лишнее, поэтому по задаче 2.3 найдётся максимальное множество, содержащее выбранное ребро, а, следовательно, и данную вершину.

Как мы выясняли, все степени в максимальных множествах не больше двух. Тогда степень данной вершины в полученном максимальном множестве равна 1. Тогда выкинув из него данную вершину, получим максимальное множество, её не содержащее.

2.6

Рассмотрим произвольную вершину v , а N — объединение множества её соседей и $\{v\}$. Докажем, что N — ключевое.

Сначала покажем, что N несвободное. Действительно, пусть X — максимальное множество, не пересекающееся с N . Тогда в множестве $X \cup \{v\}$ на одну вершину больше и сколько же рёбер в сравнении с X , что противоречит максимальнойности X .

Теперь пусть $u \in N$. Покажем, что существует максимальное множество, не пересекающееся с $N \setminus \{u\}$. Рассмотрим ребро с концами v и u . (Если $v = u$, выберем любое ребро, выходящее из v). Так как выбранное ребро не лишнее, то по упражнению 2.3 существует максимальное множество X , содержащее u и v . Выкинем по одной вершины $(X \cup N) \setminus \{v, u\}$. Так как все выкидываемые вершины соединены с v , то при выкидывании вершины мы уменьшаем число вершин на 1, а число рёбер — хотя бы на 1. Следовательно, при выкидывании множество останется максимальным. Наконец, при необходимости выкинув v , мы получим максимальное множество, не пересекающееся с $N \setminus \{u\}$.

2.7 Предположим противное. Пусть G — турановский граф, а v — вершина, при удалении которой граф теряет связность. При этом $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 и G_2 — подграфы, пересекающиеся только по вершине v .

Наблюдение. Множество $X \ni v$ максимально в G тогда и только тогда, когда $X \cap V(G_1)$ максимально в G_1 , а $X \cap V(G_2)$ максимально в G_2 .

Выберем произвольные рёбра e_1 и e_2 с концами в v , ведущие в G_1 и G_2 соответственно. Так как они не лишние, то существуют максимальные множества X_1 и X_2 подграфов G_1

и G_2 соответственно, их содержащие. Тогда по наблюдению $X_1 \cup X_2$ максимально в G . Однако, вершина v имеет степень хотя бы 2 в индуцированном подграфе. Противоречие.

2.8

- (а) Будем доказывать утверждение индукцией по n . База $n = \alpha + 1$: оценка теоремы Турана даёт одно ребро, а в связном графе на $\alpha + 1$ вершине хотя бы α рёбер.

Переход. Пусть дан связный граф на n вершинах с числом независимости α . Будем по одному удалять лишние рёбра, не нарушая связности. Когда мы остановимся, возможны два случая.

Осталось хотя бы одно лишнее ребро, при удалении которого граф теряет связность. Удалим это ребро. Пусть β и γ числа независимости компонент связности, $\beta + \gamma = \alpha$. По предположению в первой компоненте рёбер хотя бы на $\beta - 1$ больше, чем в оптимальном графе, во второй компоненте хотя бы на $\gamma - 1$ больше, чем в соответствующем оптимальном графе. Следовательно, исходно рёбер хотя бы на $1 + (\beta - 1) + (\gamma - 1) = \alpha - 1$ больше, чем в графе, являющимся объединением двух оптимальных. А в любом графе с числом независимости α число рёбер не меньше соответствующей оценки Турана. Данный случай рассмотрен.

Получился турановский граф на n вершинах. Так как для него верна оценка из теоремы Турана, то найдётся вершина со степенью хотя бы $\lceil \frac{n}{\alpha} \rceil - 1$. Удалим её. По задаче 2.7 граф останется связным. Число независимости станет не более α . Применим предположение индукции к полученному графу. В полученном графе рёбер хотя бы на $\alpha - 1$ больше, чем в оптимальном графе теореме Турана на $n - 1$ вершине, а удалили мы вершину степени не меньше, чем максимальная степень вершины оптимального графа на n вершинах. Следовательно, в исходном графе рёбер хотя бы на $\alpha - 1$ больше, чем в оптимальном графе на n вершинах.

2.9

- (а) Как следует из упражнения 1.5, для нечётного n подойдёт путь, а для чётного — цикл.
- (б) Предположим противное. Пусть ребро e_1 — лишнее, и при его удалении ребро e_2 становится лишним. Так как изначально e_2 нелишнее, то по упражнению 2.3 найдётся максимальное множество, содержащее оба конца ребра e_2 . Но так как e_1 лишнее, то при его удалении число независимости сохраняется, и выбранное множество останется максимальным. Следовательно, ребро e_2 останется нелишним.

2.10

- (а) Веретено Мозера с проведённым ребром таким образом, чтобы не образовалось клики на 4 вершинах.
- (б) Пятиугольник с диагональю. Удаляя разными способами, мы можем оставить либо пятиугольник, либо несвязный граф, компоненты которого — треугольник и ребро.

2.11

- (а) Сначала покажем, что при добавлении вершины v , соединённой с некоторым несвободным множеством U , число независимости не меняется. Предположим противное. Тогда есть максимальное независимое множество X большего размера. Очевидно, оно содержит v . Тогда оно должно не содержать вершин из U . Но тогда по определению несвободности множество $X \setminus \{v\}$ не может быть максимальным в исходном графе. Тогда в X вершин не больше, чем число независимости исходного графа. Противоречие.

Теперь покажем, что полученный граф является турановским. Все нелишние рёбра исходного графа остаются нелишними, ведь максимальные множества, содержащие эти рёбра, остаются максимальными. Рассмотрим произвольно ребро $v - u$, $u \in U$ и проверим, что оно также нелишнее.

Так как множество U ключевое, то $U \setminus \{u\}$ — свободное. Рассмотрим максимальное множество X в исходном графе, не пересекающееся с $U \setminus \{u\}$. Добавим к X вершину v . Добавится 1 вершина и 1 ребро. Получим максимальное множество $X \cup \{v\}$, содержащее вершины u, v , откуда ребро $u - w$ излишнее. Следовательно, полученный граф также является турановским.

- (b) Из предыдущего пункта можно извлечь, что число независимости графа не изменилось, и все рёбра, выходящие из вершины v , являются излишними.

3.1 Докажем оценку в общем виде: для произвольного натурального k будет выполнено неравенство $m \geq kn - \frac{k(k-1)}{2}\alpha$.

Наблюдение. Пусть дан граф G из n вершин, и степень каждой вершины не больше d . Тогда число независимости G не меньше $\lceil \frac{n}{d+1} \rceil$.

Доказательство наблюдения. Явно построим независимое множество нужного размера. Выберем произвольную вершину и добавим в независимое множество. Выкинем из графа выбранную вершину и всех её соседей. Добавим произвольную оставшуюся вершину в независимое множество, выкинем её и всех соседей из графа. Повторяя эти действия, мы действительно получим независимое множество размера не меньше $\lceil \frac{n}{d+1} \rceil$.

Доказательство оценки. Предположим противное и рассмотрим минимальный по количеству вершин граф G , не удовлетворяющий оценке.

Выберем произвольное максимальное независимое множество A , а множество остальных вершин обозначим через B . Предположим, что в B есть хотя одна вершина (глобальной) степени не меньше k . Удалим её. Получим граф на $m' \leq m - k$ рёбер, $n' = n - 1$ вершинах с числом независимости α . По предположению $m' \geq kn' - \frac{k(k-1)}{2}\alpha$, откуда и следует, что и для граф G удовлетворяет оценке.

Теперь предположим, что в B все степени вершин не больше $k - 1$. При этом из каждой вершины в $v \in B$ должно вести хотя бы одно ребро в A , иначе $A \cup \{v\}$ также было бы независимым. Временно выкинем из графа G все вершины из A . Получим граф на $n - \alpha$ вершинах, степень каждой из которой не больше $k - 2$, а число независимости не больше α . Применяя наблюдение, получаем оценку $\alpha \geq \lceil \frac{n-\alpha}{k-1} \rceil$, или $\alpha k \geq n$.

Наконец, оценим m . Суммарная степень вершин в B не меньше $(n - \alpha)(k - 1)$, при этом хотя бы $n - \alpha$ рёбер имеет ровно 1 конец в B . Таким образом, получаем $m \geq (n - \alpha) + (n - \alpha) \frac{k-1}{2}$. Добавив к правой части величину $\frac{k-1}{2}(n - k\alpha)$, которая является неположительной, мы и получим требуемую оценку.

Distance graphs and Turan's theorem

Andrey Raigorodskiy, Maxim Didin, Sviatoslav Dzhenzher,
Vadim Retinskiy, Alexey Suvorov, Alexander Tolmachev

By symbol (!) we denote tasks, without solving which it is difficult to move on. The symbol (*) — tasks of increased complexity. The symbol (**) — hard tasks. The further you progress on the project, the more ideas you master. Therefore, tasks (*) and (**) can be skipped and returned to them later using a higher-level technique.

1 To Turan's theorem

The main purpose of this section is to find the minimum possible number of edges in a Turan graph with a given number of vertices and the number of independence. The second goal is to obtain methods of working with Turan graphs that can be used in the rest of the project.

Recall that *independence number* $\alpha(G)$ of a graph G is the size of the maximal set of its vertices that are pairwise not connected with edge.

Theorem 1.1 (Turan, 1941). *Find the minimal possible number of edges in a graph on n vertices with the independence number α .*

1.2. (!) Let a graph have a vertex of degree at least one. Then it can be removed along with the outgoing edges and possibly a few more edges, so that the independence number does not change.

1.3. (!) Let v be a vertex of minimal degree, and N be the union of the set of its neighbours and $\{v\}$.

- (a) If you remove all edges with ends in N and make a clique out of N , then the independence number will not increase.
- (b) With any method of performing the operation from the previous item, the number of edges in the graph does not increase.
- (c) When performing the operation from the first item, the number of edges in the graph does not change if and only if N is both a clique and a component.

A graph is said to be *optimal* if the minimum in Turan's theorem 1.1 achieved on it.

1.4. (!) In an optimal graph

- (a) all components are cliques,
- (b) sizes of components differ by at most one.

There are many problems in which you need to find a connection between the number of vertices, the minimum possible number of edges and the number of independence in a graph with some restrictions (for example, a graph without triangles, a distance graph). An interesting case is when these constraints prohibit the optimal example from Turan's theorem. Then we will consider the local minimum.

An edge is said to be *excess* if its removing does not change the independence number of the graph.

1.5. Find all excess edges in a (a) path; (b) cycle; (c) clique; (d) square with a diagonal.

A connected graph without excess edges is said to be *turanian*.

1.6. (!) In a turanian graph which is not a clique there are two independent vertices among neighbours of any vertex (in particular, there are no leaves).

1.7. Find the minimal possible number of vertices in a turanian graph with the independence number equal to two.

1.8. Describe all turanian graphs for the numbers of vertices from $\{3, 4, 5, 6\}$.

2 Elementary methods

In this section, we will get acquainted with the basic concepts that will be used in the future to obtain various Turan estimates. Some of these methods will also be useful for obtaining simple linear estimates; the rest of the methods will be useful for more complex techniques, but these methods can be disassembled now to improve understanding of what is happening.

A subset of vertices is said to be *maximal* if the difference between the number of its vertices and the number of edges in the induced subgraph is maximal.

2.1. Describe all maximal sets of a (a) path; (b) cycle; (c) clique; (d) cycle with a leaf.

A subset of vertices is said to be *independent* if its vertices are pairwise disjoint. I.e. the size of the maximal independent set in G equals $\alpha(G)$.

2.2. (!) The maximal independent set is maximal.

2.3. (!) An edge is excess if and only if there is no maximal set which contains both ends of the edge.

2.4. (!) Suppose that a turanian graph has at least two vertices. Then for any vertex there are both the maximal independent set containing this vertex and the maximal independent set not containing this vertex.

A subset of vertices is said to be *free* if it lies in the complement of some maximal set. A non-free set is said to be *crucial* if it breaks free when any vertex of it is removed.

2.5. Describe all crucial sets for graphs from Task 2.1.

Problem 2.6. Any vertex of a turanian graph with its neighbours forms a crucial set.

An *articulation point* is a vertex whose removal causes the graph to lose connectivity.

Problem 2.7. Turanian graph does not have articulation points.

Problem 2.8. (a) (*) For a connected graph with independence number α improve the result of Turan's Theorem 1.1 by $\alpha - 1$. (b) (**) Describe all the cases of equality.

Hint to 2.8.a. Show that an excess edge may be removed. If there are none, remove a vertex of the maximal degree.

Hint to 2.8.b. Suppose, if you remove a vertex and a few extra edges from a turanian graph then it splits into cliques. Then the degrees of all vertices decrease.

Next, we will consider transformations (adding an edge, removing a vertex), during which extra edges appear and the number of components changes. Suppose that as a result of removing a vertex, the graph remains connected, but ceases to be Turanian. Obviously, we can get rid of at least one edge for each increase in the number of components by one. After that, we will show you how to get a lot more!

- 2.9.** (a) For any $n > 2$ show an example of a connected graph on n vertices in which all edges are excess.
- (b) When an excess edge is removed then no new excess edges can appear (but can disappear, as may be seen from the previous item).
- (c) (*) Which of the five regular polyhedra are turanian graphs? For the rest, come up with a sequence of removing excess edges, leading to the disintegration into several identical turanian parts.

Next, we will use the concept of removing an (ordered) set of extra edges. Specifically, we say that a graph G' is obtained from G by removing a tuple (e_1, \dots, e_n) of excess edges, if there is a tuple $G_0 = G, G_1, \dots, G_{n-1}, G_n = G'$ of graphs such that simultaneously

- sets of vertices for all graphs G_0, G_1, \dots, G_n coincide,
- for any $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ the graph G_i is obtained from G_{i-1} by removing the excess edge e_i .

A connected graph is said to be *almost turanian* if its connectivity cannot be broken by removal a few excess edges.

2.10. Give an example of

- (a) an almost turanian graph with excess edges;
- (b) give an example of a graph with extra edges, depending on the order of removal of which you can get both one turanian graph and two turanian components.

2.11. (a) Let U be a crucial set of a turanian graph. Then after adding a new vertex connected to all vertices from U the resulting graph will remain turanian.

- (b) Let U be non-free set of an almost turanian graph. Then after adding a new vertex connected to all vertices from U the resulting graph will remain almost turanian.

3 Simple linear estimates

In this section we will learn how to prove linear bounds on the number of edges in a graph with constraints. Basic actions are removing the vertex of the maximal degree without neighbors, removing the vertex of the minimal degree with neighbors, removing excess edges. In order to have something to improve, we will write out several estimates that are correct for an arbitrary graph.

Here and below we will always denote the number of vertices by n , the number of edges by m , and the independence number by α .

3.1. (!) Suppose that there is a graph with a number n of vertices and the independence number α . Then the number of edges there is at least (a) $n - \alpha$; (b) $2n - 3\alpha$; (c) $3n - 6\alpha$; (d) $4n - 10\alpha$; (e) $5n - 15\alpha$.

The estimates are precise. Proof of any similar linear estimate is a sequence of actions that simplify the graph and allow you to track the change in m, n, α . For example, a vertex whose degree is not less than the coefficient at n can be removed without neighbors (if extra edges appear — so much the better).

If you additionally prohibit some cliques in the graph then the previous bounds can be strengthened.

3.2. (a) (!) Suppose a graph does not have triangles (i.e. cliques on three vertices). Then $m \geq 3n - 5\alpha$; (b) The equality $m = 3n - 5\alpha$ is achieved on exactly two connected graphs.

Hint to 3.2.a. It can be assumed that the degrees of vertices in the graph do not exceed 2. It is enough to consider the case of the turanian graph.

Hint to 3.2.b. It can be assumed that in a turanian graph there is a vertex v of degree 3 connected to a vertex of degree 2. What happens if you remove v ?

3.3. (a) (!) Suppose that the estimate $m \geq 5n - 10\alpha$ holds for all 3-regular graphs without triangles. Prove it for all other graphs without triangles. (b) Set up an infinite series of connected graphs without triangles on which the equality $m = 5n - 10\alpha$ is achieved. (c) (*) Prove the estimate $m \geq 5n - 10\alpha$ for 3-regular graphs without triangles.

Hint to 3.3.a. Methods for 3.1.a would be useful. Also, after removal a vertex of the inimal degree d with neighbours, at least d^2 edges are lost. If the graph is not regular then the estimates improves by at least one.

Question: where is used that the graph does not have triangles?

Hint to 3.3.b The simplest example is a cycle on five vertices. It is obtained if you remove a vertex of degree two with neighbours from some graph. To continue the series, adding three vertices at each step, and keep track of the independence number, you will need the concept of a crucial set.

Hint to 3.3.c. By removing a vertex with neighbours, we lose one point. But then we can destroy the graph until we get a point back or reach the end (to which end?)

So, the estimates 3.2 and 3.3 are precise for certain ranges of the ratio $\frac{n}{\alpha} < 3$. At the same time, we do not know the exact estimate for all graphs without triangles (in particular, it would allow us to calculate the Ramsey numbers $R(3, \alpha)$).

Now, after getting acquainted with the technique of removing vertices with neighbors, it is time to get one of the estimates announced in the introduction.

3.4. (!) Let there be a graph on n vertices with the independence number α . Let there be no cliques on four vertices. Then the number of edges in the graph is at least $5n - 12\alpha$.

The task already looks difficult. But the result still needs to be strengthened! To do this, you need to find the points of equality.

3.5. Let in the conditions of 3.4 equality is achieved for some graph. Let d be the minimal degree of a vertex.

- (a) Then $2 \leq d \leq 4$.
- (b) What might the set of neighbours of a vertex of degree d look like?
- (c) There are exactly three «pairwise non-isomorphic» turanian graphs on which the equality is achieved.

Hint to 3.5. Prove that the equality case is the only one, first for $d = 2$, then for $d = 3$, then for $d = 4$. In a 4-regular graph, it is convenient to cling to a cycle on four vertices with a diagonal.

It seems that in order to strengthen the estimation for a distance graph, it is necessary to use the non-distanceness of a large list of subgraphs, an bruteforce comes out. Thus, the estimate for the number m of edges can be strengthened to $m \geq 8\frac{1}{3}\alpha$ (if you prohibit the non-distance example from 3.5) or even $m \geq 8\frac{2}{3}\alpha$ (if you prohibit a pentagonal pyramid without one side edge and a pair of vertices with by three common neighbors) at $n = 4\alpha$. It is not enough! We will choose another way. For an arbitrary turanian graph, we obtain estimates (a) $m \geq 3n - 4\alpha - 2$; (b) $m \geq 4n - 7\alpha - 3$; (c) $m \geq 5n - 11\alpha - 4$.

There are many cases of equality (in particular, $m = 3n - 4\alpha - 2$ in the examples from 3.2.b. The estimate $m \geq 4n - 7\alpha - 3$ for graphs without cliques on four vertices is precise when $n \leq 4\alpha - 1$. However, at $n \geq 4\alpha$, it can be further enhanced. Let there be a turanian graph on n vertices with the independence number α . Let there be no cliques on four vertices. Then the

number of edges there is at least (a) $5n - 11\alpha - 2$; (b) $6n - 15\alpha - 1$, except for the graph of the quadrangular antiprism.

Connectivity and the absence of excess edges make it possible to add a free term to the estimate. Thus, the cases of equality for $\alpha = 2$ are preserved, and with large α the estimate improves. In addition, inconvenient equality cases can be bypassed. The usual vertex removal technique does not allow us to prove such estimates, because after removing excess edges the graph can crumble into thousands of fragments, and the free terms for different parts add up! Therefore, we will devote the next two chapters to a technique that allows us to solve these problems.

4 Splits

In this section we will get acquainted with the concept of splits, which will help us transform graphs so that it is easier for them to obtain Turan estimates. The idea is to add an edge to the turanian graph or remove a vertex, making several other edges excess. There are two problems along the way. First, the added edge may be part of a forbidden subgraph. To solve this problem, we will color such edges red and remove all restrictions from them. We will also need red vertices. Note that any vertex of a red edge can easily and irreversibly turn into a red vertex. We will call the usual vertices and edges blue.

Secondly, removing unnecessary edges can lead to an increase in the number of components. A vertex v of a turanian graph is said to be *unstable* if, when removing the vertex v and several excess edges, the graph can fall apart. A pair (u, v) of independent vertices of a turanian graph is said to be *special* if, when adding an edge uv and removing several excess edges, the graph can fall apart.

4.1. (a) (!) Any vertex of a special pair is unstable. (b) (!) Any pair of vertices of an odd cycle is special. (c) Give an example of a turanian graph without unstable vertices, which is not the clique.

As you may see from 4.1.b, there may be many parts and a few excess edges. That is why we do not want to leave the obtained graph in such a form. So, the following theorem holds.

Problem 4.2 ().** (a) **A split over edge.** Suppose that when adding a red edge e and removing several excess edges, the graph splits into almost turanian components G_1, \dots, G_t , and e lies in G_1 . Then one can add one red vertex to the components G_2, \dots, G_t , while the independence number will not change, and the total number of edges in the graph will increase by at most $t - 1$.

(b) **A split over vertex.** Suppose that when an unstable vertex v and a few excess edges are removed, the graph splits into almost turanian components G_1, \dots, G_t . Then one can add one red vertex to all components G_1, \dots, G_t , while the independence number will not change, and the total number of edges in the graph will increase by at most $t - 1$.

Solving Problem 4.2 within the framework of the methods of this part is not so simple (including since the result of the split and even the number of parts are not uniquely determined). This problem will be solved further using hypergraphs. In the future, you can use the result of Problem 4.2 without proof (except for problems that are special cases of this theorem).

4.3. (a) (!) Split a pentagon over a vertex.
 (b) (!) Split an odd cycle over a vertex.
 (c) (!) Split (over a vertex and over an edge) a turanian graph on $n > 3$ vertices with a pair of adjacent vertices of degrees equal to 2.
 (d) Which method from item (b) guarantees a split exactly on two parts?

- (e) Give an example of a connected graph with excess edges, containing an unstable vertex, that cannot be split (too many edges will need to be added).

This section is devoted to the split into two parts (let's call such a split *simple*). Our goal is not only to prove the splitting theorem, but also to find points of equality (let's call a split into t parts, in which the number of edges in the graph increases by exactly $t - 1$, *charge-free*).

Let G be a turanian graph. Let e be an edge from a complement of G . A graph is said to be *e-presplitted*, if it (1) is a union of two almost turanian components G_1, G_2 , (2) is obtained from G by adding e and removing all edges that connect G_1 to G_2 , (3) has the same independence number as G .

4.4. Find, if possible, a e -presplitted graph for (a) (!) a cycle on five vertices, (b) the Moser spindle.

A simple split over edge.

Let G be a turanian graph on m edges. A graph is obtained by a *simple split over an edge* e if the number of edges in it is at most $m + 1$, and it is obtained by adding a (red) vertex in the component of some e -presplitted graph that does not contain e .

4.5. (!) If there is a e -presplitted graph for a turanian graph then a simple split is possible.

Hint to 4.5. Use the fact that edges connecting G_1 with G_2 were not excess initially. Then find a crucial set in G_2 .

A *cost* of a graph without excess edges is the difference between the numbers of edges and of components. When the cost is reduced by one, saving the difference between the numbers of vertices and of components, we obtain a coin.

Problem 4.6 (A simple charge-free split over edge). Let it be possible to split the graph G along the edge e into almost turanian parts G_1, G_2 . Suppose that the number of edges in the graph increases with this split (in other words, we cannot get a coin with this split). Let e lie in G_1 . Then

- (a) in G from each vertex of G_1 leads at most one edge to the vertices of G_2 ;
- (b) the vertices of G_2 , from which in G lead edges to the vertices of G_1 , in union with the ends of the edge e form an independent set;
- (c) the graph G can be split by any edge constricting the vertices of the independent set from the previous item.

Problem 4.7 (An elementary split). Let a turanian graph G consists of two non-empty subgraphs G_1, G_2 , and two vertices u and v , with no edges leading from the subgraph G_1 to G_2 . Then

- (a) the vertices u and v are independent;
- (b) after the edge uv is added, all edges leading from u and v to one of the subgraphs (let G_2) will become excess;
- (c) the vertices of the graph G_2 connected to u or v form a crucial set U ;
- (d) after adding a new red vertex x connected to the vertices of the set U , we obtain a turanian graph $G_2 \cup \{x\}$;
- (e) the graph G_1 with drawn edge uv is also turanian.

Problem 4.8. Let there are two turanian graphs with at least three vertices in each of them. How to «assemble from them» one turanian graph by reducing the numbers of vertices and of edges by one?

Hint. It is important to prove that there are no excess edges in the obtained graph. Problem 4.8 allows us to convolve an optimal graph into a turanian graph in a few steps (in a colossal number of ways). We call such an action recombination of graphs by an edge of one graph and a vertex of another. Our goal is to prove that the constructed example will have the minimum number of edges (among all turanian graphs with the same characteristics).

Problem 4.9. (!) Perform an elementary split in the following turanian graphs different from clique and containing:

- (a) a vertex of degree 2;
- (b) a vertex of degree 3 entering two triangles.

Below we use the following notation (let the subgraph G_1 is above and G_2 is below): X is a articulation point, XX is a possibility of an elementary split.

4.10. (!) Let a turanian graph G consist of a vertex and subgraphs G_1, G_2 , and there is exactly one edge connecting G_1 to G_2 (case XI).

- (a) Specify which elementary splits over an edge are possible.
- (b) How to get a red edge in each part?

4.11. (!) Suppose a turanian graph G consists of subgraphs G_1, G_2 , and there are exactly two edges connecting G_1 to G_2 (case II). What is obtained after two elementary splits?

Now let's go back to Tasks 3.4 and 3.5. If you have not solved all the items, apply the split technique. Consider that the red vertex is worth 4 points (but do not rush to remove the red vertex of degree 4 from the graph).

Problem 4.12. (a) In Task 3.5.b, the «worst cases» of the position of a vertex of degree 3 are obtained. What are the possible splits in these cases?

- (b) How many points can be guaranteed in these cases when $\alpha > 2$? Construct an example of a turanian graph with $\alpha = 3$ containing a vertex of degree 3 worth 1 point (equality $m = 5n - 12\alpha + 1$).
- (c) (*) Show that for $\alpha > 3$ the turanian graph containing a vertex of degree 3 is worth more than one point (inequality $m \geq 5n - 12\alpha + 2$).

Problem 4.13. Let a turanian graph contains a triangle of vertices of degree 3 that are not included in other triangles.

- (a) Which edges can be used to split a graph over?
- (b) Give an example of such a graph with 8 vertices. What is obtained by splitting?
- (c) (*) Let some edges of the graph contain more than one vertex. (The graph becomes a hypergraph, which can contain both simple edges and hyperedges). Split the graph from (a,b) over a hyperedge. Split the hypergraph obtained from (b) repeatedly.
- (d) (*) Give a general definition of the elementary split of a turanian hypergraph. What conditions on the maximal independent set in G_1 or G_2 are sufficient to allow an elementary split?

A simple split over vertex.

Let G be a turanian graph on m edges, and v is its unstable vertex. A graph is said to be *v-presplit* if it: (1) is two almost turanian components G_1, G_2 , (2) is obtained from G by removing v and all edges connecting G_1 to G_2 , (3) has the same independence number α as G . A graph is obtained by *simple split of graph G over the vertex v* if the number of edges in it is at most $m + 1$, and it is obtained by adding one vertex to each of both components of some *v-presplit* graph.

4.14. (!) If there exists a *v-presplit* graph then a simple split is possible.

4.15. (*) Suppose a turanian graph G consists of two vertices and subgraphs G_1, G_2 , and there is exactly one edge connecting G_1 to G_2 (case XXI). Prove that the graph can be split over one of the vertices.

Problem 4.16 (A symmetric split over vertex). Suppose that in the previous problem it is impossible to split the graph over a vertex v so that to obtain a coin. Moreover, let it be impossible to split the graph over an edge incident to v . Consider any v -presplitted graph $G_1 \sqcup G_2$, where G_1, G_2 are its almost turanian components.

- (a) In G , each vertex of graph G_1 has at most one edge leading from it to the vertices of graph G_2 .
- (b) The vertices of G_1 , from which in G lead edges to the vertices of G_2 , in union with $\{v\}$ form an independent set U .
- (c) $\alpha(G_i) \geq 3$ for $i = 1, 2$.
- (d) (*) Give an example of a turanian graph for which a symmetric split over one of the vertices is possible.

So, we know a lot about simple splits and almost everything about simple charge-free splits, we believe in the general case of the splitting theorem.

The first application of this technique will be linear estimates with free term for turanian graphs.

4.17. For a Turanian graph on n vertices with independence number α prove the following lower bounds on the number of edges: (a) (!) $3n - 4\alpha - 2$; (b) $4n - 7\alpha - 3$; (c) (*) $kn - \frac{k^2 - k + 2}{2}\alpha - k + 1$ for any integer $k \geq 3$.

To apply this technique, go back to Task 3.3 (if you have not solved all the items yet, go back to them armed with the splits and inequalities technique 4.12). Consider that a red vertex is worth 3 points, but do not be in a hurry to remove red vertices of degree 3 — rather split the graph.

Problem 4.18. (*) Let a turanian graph does not contain triangles. Consider the case of the equality $m = 5n - 10\alpha$.

- (a) The graph is not 3-regular.
- (b) Let one of the vertices be split. Then the splits follow one after another until the graph is disintegrated into cliques.
- (c) All splits are simple charge-free splits. If the graph can be split, the equality $n = 3\alpha - 1$ holds.
- (d) All splits are elementary.
- (e) For every $\alpha > 1$ there is a single example with a possible split. All vertices in the example are unstable.
- (f) Are there any other examples?

5 A removal of a vertex with neighbours

So, we have learned how to correctly remove any vertex of a turanian graph without neighbours. Now we want to learn how to remove a vertex with neighbours.

A vertex of the smallest degree in a turanian graph is said to be *standard* if removing this vertex and all its neighbours results in a almost turanian graph. It seems that we had no problems with removing the standard vertex. But in fact, it is often possible to improve the result. For example, for a vertex of degree 2 we want the removal to coincide with a split.

Let there be a standard vertex v of a turanian graph that is not clique. Let us call a *removal of the vertex v with neighbours* the following process:

- 1) two non-adjacent neighbours u_1, u_2 of v are selected;
- 2) all neighbours of v except u_1 and u_2 are removed, and then all excess edges;
- 3) the resulting graph is split over the edge u_1u_2 ;
- 4) the removed vertices are returned to the clique vu_1u_2 .

5.1. Если возможно, удалите с соседями: If possible, remove with neighbours

- 1) (!) a vertex of the pentagon;
- 2) a vertex of the quadrangular antiprism;
- 3) (*) a vertex of the icosahedron.

Problem 5.2. The removal of a standard vertex v with neighbours is defined correctly, i.e.

- (a) v has to non-adjacent neighbours u_1, u_2 ;
- (b) at the second step the removal of vertices and excess edges cannot lead to the violation of graph connectivity;
- (c) at the third step the graph can be split along edge u_1u_2 , and the split is simple.

Problem 5.3. A removal of a standard vertex with neighbours is a split (i.e. the number of edges is increased by at most one).

Nevertheless, the number of red objects increases by $d - k + 2$, where d is the degree of the vertex v to be removed, and k is the minimum size of the forbidden clique (provided that v , its neighbours and the edges leaving them are all blue, otherwise it is better). For example, in a four-vertex clique-free graph, removing a vertex of degree 3 with neighbours leads to the same result as a simple split. As with splits, we are interested in cases where removing a vertex does not give us any coins (in the sense of splits).

Problem 5.4. (*) Let it be impossible to obtain a coin when removing a vertex v of degree d with neighbours. Then one of two alternatives is fulfilled:

- 1) the vertex v lies in a clique on d vertices, and the graph can be split over edge;
- 2) the vertex v has independent neighbours u_1, u_2, u_3 ;
all other neighbours of v are connected only to v, u_1, u_2, u_3 and among themselves;
all neighbours of v have degree d ;
if $d > 3$ and the vertex u_i is standard, then removing u_i with its neighbours yields a coin.

In the second case, at $d > 3$ there appear several pairwise connected vertices having the same set of neighbours. We will call such vertices *clones*.

Problem 5.5. (!) Let a vertex v is not a standard vertex. Then the process of removing this vertex with its neighbours is impossible; however, it can be easily modified.

- (a) What to do if at some point of the second step the graph ceases to be almost turanian?
- (b) What if the degree of any of the neighbours of a vertex v is less than the degree of v itself? Show that we can not only continue the process, but also get a coin for each of the vertices that we have removed by this point.

Problem 5.6. Using the previous problem, prove that the example constructed in Problem 4.8 is optimal.

Thus, we have obtained an exact lower bound for the number of edges in a turanian graph. Next, we will come closer to the description of optimal graphs.

For a turanian graph G , let us call the *summarised* graph G' for which the following properties hold:

- 1) graphs G, G' have the same independence number α ;
- 2) the number of vertices in G' is by $\alpha - 1$ greater than the number of vertices in G ;
- 3) components of the graph G' are cliques whose sizes differ by at most one.

- 5.7.** (a) The summarised graph is uniquely constructed by the number of vertices and the independence number of the original graph.
 (b) The number of edges of the original graph is not more than by $\alpha - 1$ less than the number of edges of the summerised graph.
- 5.8.** (a) The degree of any vertex of the summmarised graph is at least two.
 (b) The average degree of the vertices of a turanian graph is not less than the average degree of the vertices of its summmarised graph.
 (c) Equalities in the previous points are achieved only for odd cycles.
 (d) The degree of some vertex of the optimal turanian graph is not greater than the degree of some vertex of the summmarised graph.

Now we obtain additional conditions on the graphs for which we achieve equality (i.e. we describe optimal turanian graphs).

- Problem 5.9.** (a) The degree of any vertex of the optimal turanian graph is not less than the smallest degree of the vertices of the summarised graph.
 (b) Let the optimal turanian graph cannot be split over a vertex v . Then the degree of v is not greater than the largest degree of vertices of the summarised graph.

In the previous problem the following notion practically appeared. Let us call *stable* a turanian graph which is not clique and which cannot be split over a vertex.

- Problem 5.10.** (a) Give an example of a stable graph.
 (b) * Are there any optimal stable graphs?
 (c) The degree of any vertex of the optimal stable graph is equal to the greatest degree of the vertices of its final graph.

Трисекция угла и другие классические задачи

Проект представляют А. Заславский, С. Маркелов,
М. Евдокимов, И. Климанова, Б. Френкин

*Мы знаем, что задача не имеет решения. Мы хотим знать, как ее решать.
А. Стругацкий, Б. Стругацкий. «Понедельник начинается в субботу»*

Трисекция или деление данного угла на три равные части является одной из трех классических задач на построение, сформулированных еще в Древней Греции. Двумя другими являются *удвоение куба*, т.е. построение куба с объемом вдвое больше данного, и *квадратура круга*, т.е. построение квадрата, площадь которого равна площади данного круга. В XIX веке было доказано, что решить все эти задачи, пользуясь только циркулем и линейкой без делений, невозможно. В частности, задача о трисекции угла $\varphi = \pi/3$ сводится к решению кубического уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$, корни которого не строятся циркулем и линейкой, потому что у него нет рациональных корней. Однако задача становится разрешимой, если расширить арсенал инструментов, а также если на плоскости предварительно начерчена некоторая кривая. Приведем две наиболее известные задачи.

1 Разделите данный угол на три равные части с помощью циркуля и линейки, на которой отмечен единичный отрезок.

Определение. Пусть точка равномерно движется по лучу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг своего начала. Тогда кривая, которую она описывает, называется *спиралью Архимеда*.

2 Пусть на плоскости начерчена спираль Архимеда. Разделите данный угол с помощью циркуля и линейки

a на три равные части;

b на n равных частей.

Множество кривых, при наличии которых трисекция угла становится выполнимой, весьма обширно. Наибольший интерес представляют методы деления угла на три части с помощью коник. Поскольку во многих графических редакторах, например в Geogebra, есть возможность рисовать коники, в них можно создать и инструмент для трисекции угла.

1 Трисекция угла с помощью коник

Все задачи этого раздела следует решать циркулем и линейкой.

3 **a** Пусть на плоскости начерчена парабола $y = x^2$. Окружность с центром в точке (a, b) проходит через вершину параболы. Напишите уравнение, корнями которого являются абсциссы остальных точек пересечения окружности с параболой.

b Используя начерченную на плоскости параболу, разделите данный угол на три равные части.

c Используя параболу, решите задачу удвоения куба.

4 **a** На плоскости начерчена гипербола $xy = C$. Окружность с лежащим на гиперболе центром A проходит через точку, симметричную A относительно центра гиперболы. Докажите, что три других точки пересечения гиперболы и окружности — вершины правильного треугольника.

b Используя начерченную на плоскости равностороннюю гиперболу, разделите данный угол на три равные части.

5 **a** На плоскости начерчена гипербола, асимптоты которой образуют угол $2\pi/3$. Окружность проходит через вершину одной ветви гиперболы и фокус другой ветви. Докажите, что три другие точки пересечения гиперболы и окружности — вершины правильного треугольника.

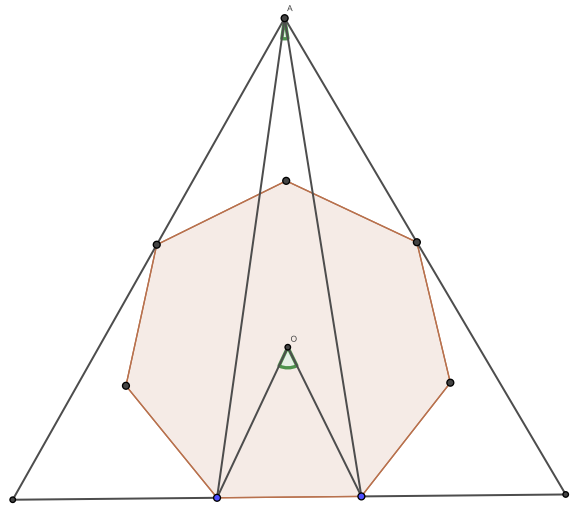
b Используя начерченную на плоскости гиперболу с эксцентриситетом 2, разделите данный угол на три равные части.

6* Попробуйте придумать метод трисекции, использующий какую-нибудь конику, отличную от приведенных выше.

2 Другие задачи о трисекции

Хотя осуществить с помощью циркуля и линейки трисекцию произвольного угла невозможно, для многих углов эта задача разрешима. При этом среди них есть и углы, которые нельзя построить циркулем и линейкой. Например, есть следующий простой способ трисекции угла, равного $2\pi/n$, для любого n , не кратного 3.

7 Правильный n -угольник с центром O вписан в правильный треугольник, как показано на рисунке справа. Докажите, что $\angle A = \angle O/3$.



Предположим теперь, что у нас кроме циркуля и линейки есть трисектор (т.е. инструмент для деления произвольного угла на три равные части). Попробуем узнать, насколько это увеличивает наши возможности в задачах на построение. В частности, можно поставить вопрос, какие правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля, линейки и трисектора.

8 С помощью циркуля, линейки и трисектора постройте правильный семиугольник.

9* Какие еще правильные многоугольники можно построить, имея трисектор, циркуль и линейку? (Напомним, что по теореме Гаусса с помощью циркуля и линейки можно построить правильный N -угольник тогда и только тогда, когда $N = 2^m p_1 \cdots p_k$, где p_1, \dots, p_k — различные простые числа вида $2^{2^i} + 1$.)

В заключение еще две задачи о трисекции с помощью необычных инструментов.

10 Дан прямоугольный лист бумаги $ABCD$ и точка X на стороне BC . Сгибая бумагу по прямым, разделите угол XAD на три равные части.

11 "Пополамер" — это прибор, который для любой выпуклой фигуры и точки на ее границе строит прямую, делящую площадь фигуры пополам. С помощью пополамера, циркуля и линейки разделите данный угол

a на три равные части;

b на n равных частей.

c С помощью пополамера, циркуля и линейки осуществите квадратуру круга.

d* Можно ли с помощью пополамера, циркуля и линейки осуществить удвоение куба?

Список литературы

[1] Rene Descartes. La geometrie. <https://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf>

Перевод: Рене Декарт. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. — Изд. 2-е, испр.. — М.: URSS, 2010

[2] W.W.Rouse Ball, H.S.M.Coxeter. Mathematical recreations and essays.

https://drive.google.com/file/d/1E0F6y0n6_oWprncBWTaico9_H-rqW4ql/view

[3] А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. — 2-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2011.

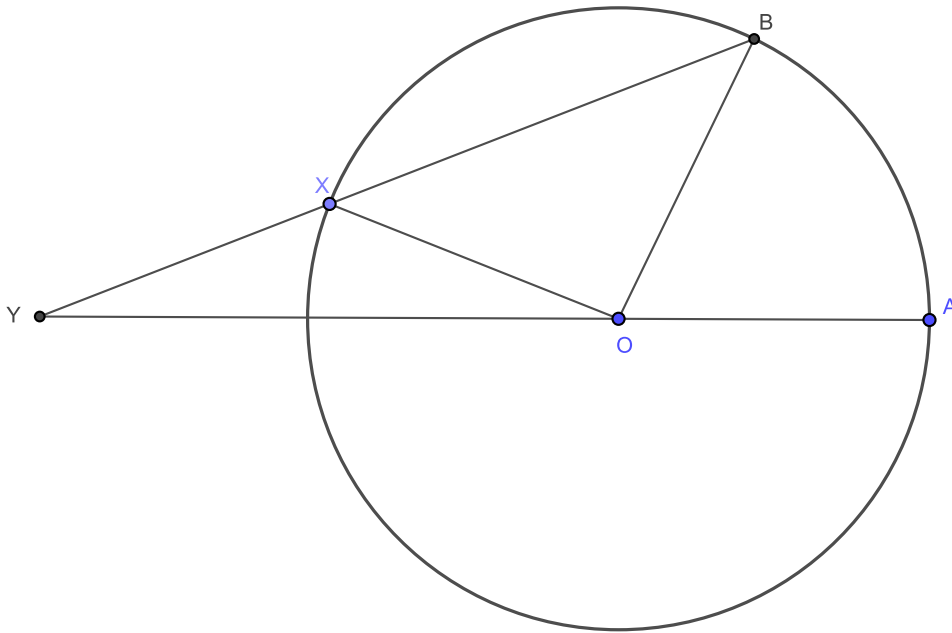
[4] A.M.Gleason. Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. The American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 3 (Mar., 1988), pp. 185-194

[5] А.Б.Скопенков. Разрешимость в радикалах. В кн. "Элементы математики в задачах". М.: МЦНМО. 2018. С.69–120.

Трисекция угла и другие классические задачи.

Решения

1 На единичной окружности с центром O возьмем точки A и B такие, что $\angle AOB = \varphi$. Используя линейку с отмеченным единичным отрезком, проведем через B прямую, пересекающую окружность и продолжение отрезка AO за точку O в таких точках X, Y , что $XY = 1$. Тогда $\angle OBX = \angle OXB = 2\angle XYA$ и $\angle AOB = \angle OBY + \angle OYB = 3\angle XYA$, следовательно, $\angle XYA = \varphi/3$.



2

a Проведем из центра O спирали два луча, образующие угол φ , и найдем точки X, Y их пересечения со спиралью. Отложим на OY отрезок $OX' = OX$, разделим отрезок $X'Y$ на три равные части и проведем через точки деления окружности с центром O , пересекающие спираль в точках P и Q . Тогда $\angle XOP = \angle POQ = \angle QOY$.

b Решение аналогично предыдущему пункту.

3

a $x^3 - (2b - 1)x - 2a = 0$

b Если $b = 2$, $a = 2 \cos \varphi$, корни полученного уравнения равны $2 \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3}$.

c Если $b = 1/2$, $a = 1$, корень полученного уравнения равен $\sqrt[3]{2}$.

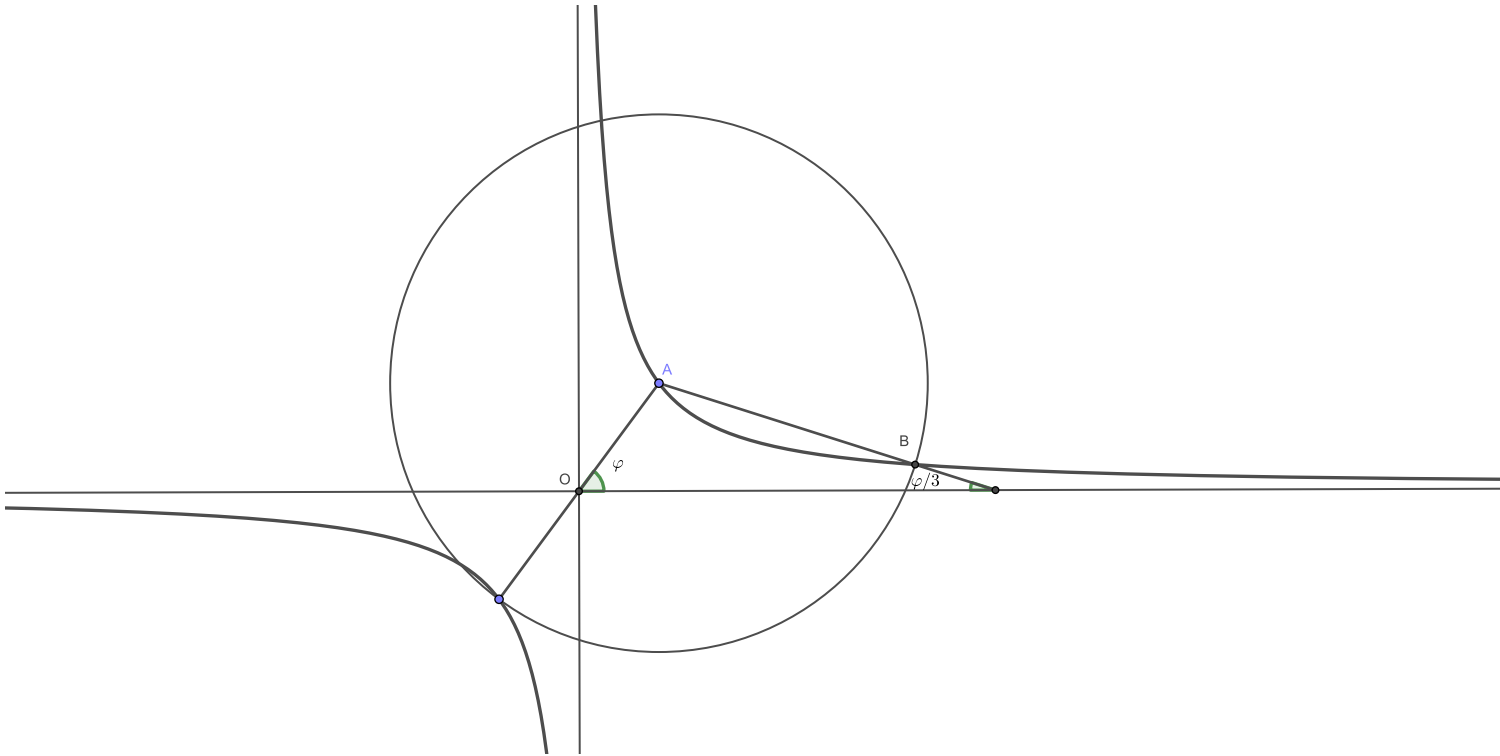
Примечание. Описанный способ трисекции угла является модификацией метода, предложенного Р.Декартом в книге [1]. Изложение этого метода можно также прочитать в [2].

4

a **Первый способ.** Пусть точка A имеет координаты $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Тогда окружность можно задать параметрическими уравнениями: $x = r \cos \varphi + 2r \cos t$, $y = r \sin \varphi + 2r \sin t$. Подставив эти выражения в уравнение гиперболы, получим $\cos \frac{t-\varphi}{2} \sin \frac{3t+\varphi}{2} = 0$. Первый множитель соответствует точке, симметричной A относительно центра гиперболы, второй определяет три точки, образующие правильный треугольник.

Второй способ. (Подробнее см. [3].) Рассмотрим треугольник Δ , образованный тремя точками пересечения окружности и гиперболы. Описанная около треугольника равносторонняя гипербола проходит через его ортоцентр, причем точка, симметричная ортоцентру относительно центра гиперболы, лежит на описанной около треугольника окружности. Следовательно, A — ортоцентр Δ . Поскольку A также является центром описанной около Δ окружности, треугольник Δ правильный.

b Возьмем на гиперболе точку A такую, что луч OA образует с осью абсцисс угол φ , проведем окружность с центром A , проходящую через точку, симметричную A относительно центра гиперболы, и найдем ближайшую к оси абсцисс точку B пересечения окружности с гиперболой. Тогда угол между прямой AB и осью абсцисс равен $\varphi/3$.



5 a (А.Соколов) Запишем уравнение гиперболы в виде $y^2 = 3x^2 - 3$. Перейдя к комплексным координатам, получим $z^2 + \bar{z}^2 + z\bar{z} = 3$.

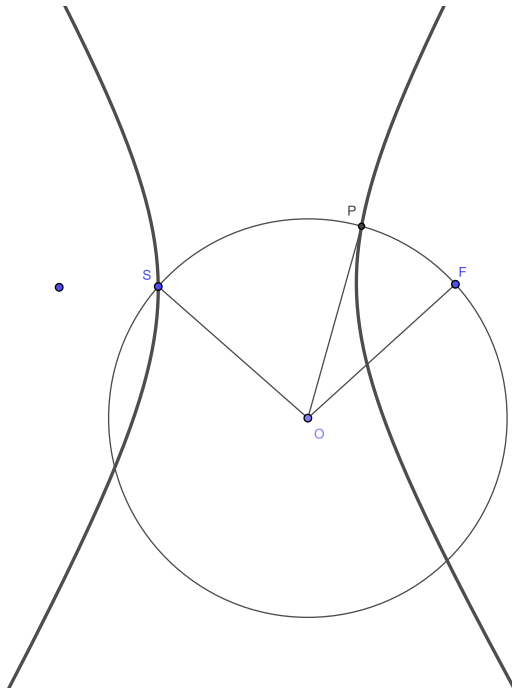
Произвольная окружность, проходящая через точки -1 (вершина) и 2 (фокус), имеет уравнение $z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} = 2$, где $a + \bar{a} = 1$.

Выразив из уравнения окружности \bar{z} , и подставив в уравнение гиперболы, получим

$$(z + 1)(z^3 - 3az^2 + 3a^2z + 3 - 3a^2) = 0.$$

Второй множитель приводится к виду $(z - a)^3 = C$, следовательно, его корни являются вершинами правильного треугольника

b Пусть окружность с центром O , проходящая через вершину S и фокус F гиперболы пересекает гиперболу в точке P . Тогда $\angle POF = \angle SOF/3$



6★ (А.Соколов) Пусть дана коника $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - 1)$ (e — эксцентриситет). Возьмем окружность с центром в точке $(e^2/8, b)$, проходящую через вершину гиперболы $(-1, 0)$.

Исключив из системы уравнений, задающих окружность и гиперболу, y и поделив полученное уравнение на $(x + 1)$, получим

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \left(\frac{15}{16} + \alpha\right)x + \left(\frac{25}{16} + \alpha\right) = 0,$$

где $\alpha = 4b^2(e^2 - 1)/e^4$.

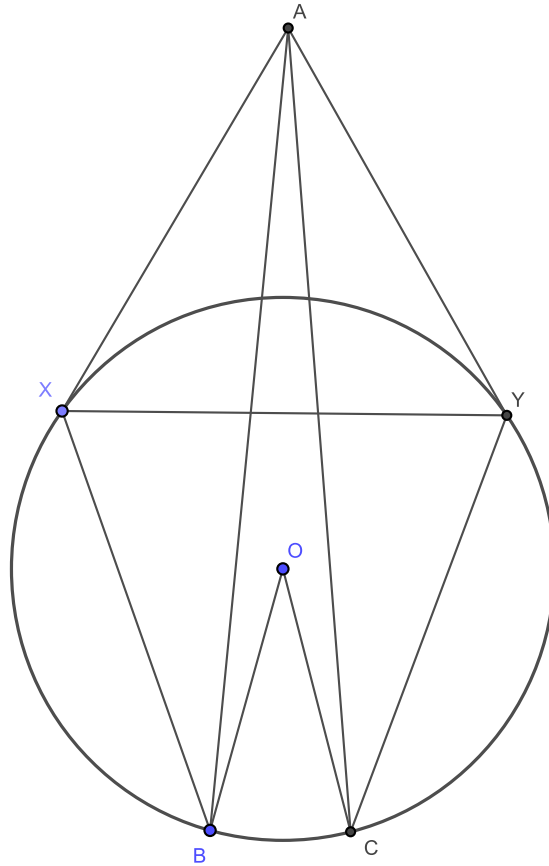
Сделав замену $t = (x - 1/2)/k$, $k = \sqrt{3/4 + 4\alpha/3}$, приведем это уравнение к виду $4t^3 - 3t + 3/8k = 0$.

При

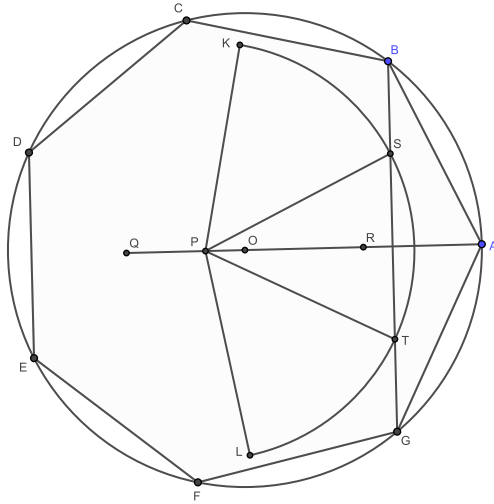
$$b^2 = \frac{27e^4}{64(e^2 - 1)} \left(\frac{1}{16 \cos^2 \varphi} - 1 \right),$$

получаем, что $\arccos t = \varphi/3$. При этом для эллипса ($e > 1$) должно выполняться условие $\cos \varphi \geq 1/4$, а для гиперболы — противоположное но произвольный угол можно представить в виде суммы или разности частей, удовлетворяющих нужному условию.

7 Пусть BC — сторона n -угольника, лежащая на основании треугольника, а X, Y — вершины, через которые проходят боковые стороны. Тогда треугольник AXY — правильный. Одна из содержащих X сторон n -угольника образует с BC угол, больший 60 градусов, а другая — меньший. Это однозначно определяет вершину X : при $n = 3k + 1$ имеем $BX = XY = YC$, а при $n = 3k - 1$ имеем $CX = XY = YB$. В первом случае $\angle BAC = \pi/3 - 2\angle CAU = \angle XYC - \pi/3 = \angle BOC/3$. Во втором $\angle BAC = 2\angle BAU - \pi/3 = 2\pi/3 - \angle AYB = \pi/3 - \angle XYB = \angle BOC/3$.



8 Пусть Ω — окружность с центром в начале координат и радиусом 6 . Возьмем точки $A(6, 0)$, $Q(-3, 0)$, $R(3, 0)$. Пусть K, L — вершины двух правильных треугольников с основанием QR . Построим дугу KL с центром в точке $P(-1, 0)$ и разделим ее на три равные части точками S и T . Точки B и G пересечения прямой ST с окружностью Ω являются вершинами правильного семиугольника $ABCDEFGG$.

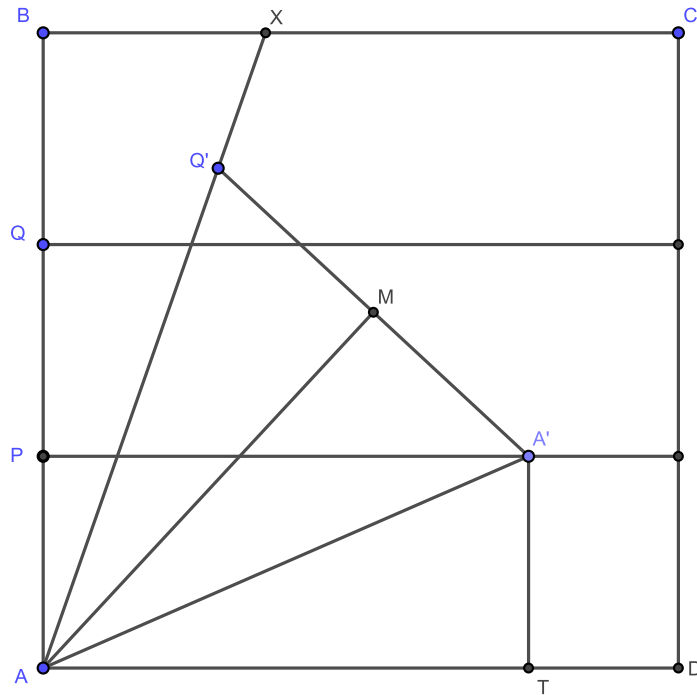


Для обоснования построения достаточно убедиться в справедливости равенства $1 + 6 \cos \frac{2\pi}{7} = \sqrt{28} \cos \frac{\arccos 1/\sqrt{28}}{3}$. Непосредственная проверка (см. [4]) показывает, что как левая, так и правая части этого равенства удовлетворяют уравнению $x^3 - 21x - 7 = 0$, имеющему единственный положительный корень. Другие примеры построения правильных многоугольников циркулем, линейкой и трисектором можно посмотреть в [4].

9★ $N = 2^m 3^n p_1 \cdots p_k$, где p_1, \dots, p_k — различные простые числа вида $2^p 3^q + 1$. В частности, можно построить 13- и 19-угольники, но нельзя построить 11-угольник. (См. доказательство теоремы Гаусса в [5].)

10 Отметим на стороне AB точку P , достаточно близкую к A , согнем лист по прямой $PP' \parallel AD$ и отметим точку Q на AB такую, что $AP = PQ$. Согнём лист по прямой так, что Q попадёт на прямую AX в какую-то точку Q' , а A — в точку A' на PP' .

Пусть M — середина $A'Q'$, T — проекция A' на AD . Точки A, Q, Q', A' образуют равнобокую трапецию, поэтому $A'M = AP = A'T$. Прямоугольные треугольники ATA' , AMA' и AMQ' равны, поэтому лучи AA' и AM делят угол XAD на равные части.



11 **a** Построим сектор OAB с $\angle AOB = \varphi$ и разделим его площадь пополам прямой, проходящей через A и пересекающей отрезок OB в точке C . Возьмем вне сектора точку D такую, что $S_{OAD} = 2S_{OAC}/3$, и проведем через O прямую, делящую пополам площадь фигуры $ODAB$. Эта прямая делит угол AOB в отношении $1 : 2$.

b Аналогично предыдущему пункту.

c Построим прямую AC , делящую пополам площадь сектора OAB с прямым углом AOB . Задача свелась к построению квадрата, площадь которого в 8 раз больше площади треугольника OAC .

Список литературы

- [1] Rene Descartes. La geometrie. <https://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf>
Перевод: Рене Декарт. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. — Изд. 2-е, испр.. — М.: URSS, 2010
- [2] W.W.Rouse Ball, H.S.M.Coxeter. Mathematical recreations and essays.
https://drive.google.com/file/d/1E0F6y0n6_oWprncBWTaico9_H-rqW4ql/view
- [3] А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. — 2-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2011.
- [4] A.M.Gleason. Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. The American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 3 (Mar., 1988), pp. 185-194
- [5] А.Б.Скопенков. Разрешимость в радикалах. В кн. "Элементы математики в задачах". М.: МЦНМО. 2018. С.69–120.

Trisection of the angle and other classical problems.

S.Markelov, A.Zaslavsky

*We know that this problem has no solution.
We want to know how to solve it.
A.Strugatsky, B.Strugatsky. "Monday begins
at Saturday"*

The trisection or the dividing of the given angle into three congruent parts is one of three classical construction problems formulated in Ancient Greece. Two remaining problems are *the duplication of the cube*, i.e. the construction of the cube having the volume twice greater than the given cube, and *the quadrature of the disc*, i.e. the construction of the square with the area equal to the area of the given disc. In XIX century it was proven that it is impossible to solve these problems using only a compass and a ruler without partition points. In particular, the trisection of the angle $\varphi = \pi/3$ is equivalent to the solution of the cubic equation $x^3 - 3x - 1 = 0$, and its roots cannot be constructed by a compass and a ruler, because it has no rational roots. But the problem can be solved, if we enlarge the list of allowed instruments, or if some curve is preliminary drawn on the plane. Below are two the most known problems.

1 Divide the given angle into three congruent parts using a compass and a ruler with two partition points bounding a unit segment.

Definition. Let a point move uniformly along a ray rotating with constant angle velocity around its origin. Then its trajectory is called *the Archimedes spiral*.

2 Let an Archimedes spiral be drawn on the plane. Using a compass and a ruler divide the given angle

a into three congruent parts;

b into n congruent parts.

The set of curves which make the trisection resolved is very great. The most interesting are the trisection methods using the conics. Since many graphic editors, for example Geogebra, contain a possibility to draw conics, it is possible to create an instrument of trisection using them.

1 Trisection by conics

All constructions of this section have to be performed using a compass and a ruler.

3 **a** Let the parabola $y = x^2$ be drawn on the plane. A circle centered at point (a, b) passes through the vertex of the parabola. Write an equation having the roots coinciding with the X -coordinates of the remaining common points of the circle and the parabola.

b Using a parabola drawn on the plane, divide the given angle into three equal parts.

c Using a parabola, solve the problem of duplication of the cube.

4 **a** The hyperbola $xy = C$ is drawn on the plane. A circle with center A lying on the hyperbola passes through the reflection of A about the center of the hyperbola. Prove that three remaining common points of the hyperbola and the circle are the vertices of a regular triangle.

b Using an equilateral hyperbola drawn on the plane, divide the given angle into three congruent parts.

5 **a** The angle between the asymptotes of a hyperbola drawn on the plane equals $2\pi/3$. A circle passes through the vertex of one branch of the hyperbola and the focus of the second branch. Prove that three remaining common points of the hyperbola and the circle are the vertices of a regular triangle.

b Using the hyperbola with eccentricity 2 drawn on the plane, divide the given angle into three congruent parts.

6★ Try to create a method of trisection using some conic distinct from described above.

КВАДРАТУРА КРУГА

А. Я. Канель-Белов, И. Иванов-Погодаев, Ф. Нилов, А. Оноприенко, А. Садовничий, М. Голафшан

Целью данного проекта является исследование удивительного факта — можно перекроить квадрат в круг, при этом допускается использовать только параллельные переносы.

Серия А: Перекраивание (немного олимпиадины)

А₁. (Квадратура круга 0). Можно ли квадрат разрезать на части и сложить круг? (Разрезы — участки прямых и дуги окружностей).

А₂. Выпуклую фигуру Φ разбили на части и сложили круг (Разрезы — участки прямых и дуги окружностей). Докажите что сама Φ является кругом.

А₃. Можно ли перекроить два круга в круг?

Серия В: Полные системы инвариантов

> Инвариантный

Пусть имеется некоторый процесс. *Инвариантом* этого процесса называется некоторая величина (функция от текущего состояния), которая не меняется, как бы ни шёл процесс.

Отсюда следует, что если в начале процесса инвариант был чему-то равен, то нельзя привести систему к состоянию, в котором этот инвариант принял бы другое значение. Это простая часть: чтобы привести систему к какому-то состоянию, *необходимо*, чтобы инвариант не менялся.

Можно задаться обратным вопросом. Пусть имеется некоторый инвариант (или несколько инвариантов, которые мы будем в совокупности называть *системой инвариантов*). Допустим, что в состоянии A и B состоянии B эта система инвариантов одна и та же.

Вопрос: Обязательно ли можно привести систему из состояния A в состояние B ?

Ответ может быть как положительным, так и отрицательным. Но если он положительный (для любых состояний A и B), то такую систему инвариантов мы будем называть *полной*.

В₁. а) По кругу стоят n деревьев, на некоторых из них сидят чижи. За ход один из чижей перелетает на соседнее дерево по часовой стрелке, а какой-то другой — на соседнее дерево против часовой. Цель: собрать всех чижей на первом дереве (тогда все чижи станут весёлыми).

б) Пусть $n = 43$, на каждом дереве сидит по чижу. Можно ли сделать всех чижей весёлыми?

в) Пусть $n = 44$, на каждом дереве сидит по чижу. Можно ли сделать всех чижей весёлыми?

г) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

д) Пусть $n = 10$, чижи сидят на деревьях через одного (то есть сидят на деревьях с нечётными номерами). На каких деревьях можно собрать всех чижей?

е) Найдите полную систему инвариантов, если чижей можно собрать на любом дереве.

В₂. На острове Серобуромалин обитают серые, бурые и малиновые хамелеоны. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Цель: сделать всех хамелеонов одноцветными.

а) На острове 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета? Если да, то какой цвет это будет?

б) На острове 13 серых, 15 бурых и 16 малиновых хамелеонов. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета? Если да, то какой цвет это будет?

в) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

В3. Имеется клетчатый прямоугольник, в некоторых его клетках стоят плюсы, в некоторых — минусы (пустых клеток нет). За ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или в любом столбце. Цель: сделать все знаки плюсами.

а) В одной угловой клетке квадрата 8×8 стоит минус, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Можно ли сделать все знаки плюсами?

б) Во всех угловых клетках квадрата 8×8 стоят минусы, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Можно ли сделать все знаки плюсами?

в) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

В4. На табло есть n лампочек и несколько кнопок, каждая из которых соединена с некоторыми лампочками (с одной лампочкой может быть соединено несколько кнопок). Нажатие на кнопку меняет состояние всех соединённых с ней лампочек на противоположное. Докажите, что число узоров, которые мы можем получить, есть 2^k для некоторого k .

В5. *Инвариантом* будем называть такое подмножество лампочек, что каждая кнопка соединена с чётным числом лампочек из него. Докажите, что число инвариантов (учитывая пустое подмножество) есть 2^ℓ для некоторого ℓ . Докажите, что некоторый узор можно зажечь тогда и только тогда, когда в каждом инварианте надо зажечь чётное число лампочек.

В6. На собрании акционеров “ОАО: не обманешь — не продашь” оказалось, что каждые подряд идущие 12 месяцев расход превышает доход, а каждые подряд идущие 11 месяцев доход превышает расход. Как долго это может продолжаться?

В7. Дана клетчатая фигура. Цель: покрыть её уголками из трёх клеток (не выходящими за границу) в несколько слоёв так, чтобы каждая клетка фигуры была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам.

а) Можно ли сделать это для квадрата 8×8 ?

б) Можно ли сделать это для прямоугольника 5×7 ?

в) Прямоугольники каких размеров можно так покрыть?

В8. Клетчатая фигура Φ обладает таким свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m \times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Φ можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника, накрытых фигурой Φ , была положительна (фигуру Φ можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Φ в несколько слоёв.

В9. Имеются две фигуры равной площади. Границы этих фигур состоят из конечного числа отрезков и дуг окружностей. Разрешается разрезать первую фигуру на конечное число частей, причём разрезы состоят также из отрезков и дуг окружностей. Цель: собрать из этих кусочков вторую фигуру (кусочки можно параллельно переносить и поворачивать).

а) Можно ли из круга сделать квадрат?

б) **Первая фигура:** круг радиуса 2, из которого вырезан круг радиуса 1 (центры кругов совпадают).

Вторая фигура: сектор круга радиуса 3 с углом $\frac{2\pi}{3}$.

Можно ли из первой фигуры сделать вторую?

в) Выпуклую фигуру перекроили в круг. Докажите, что она сама круг.

г) Можно ли какую-то пару фигур, все участки границ которых есть дуги окружностей, перекроить в выпуклую фигуру?

д) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи. Тем самым получите ответ на следующий вопрос. Даны две фигуры, границы фигур и возможных разрезов — отрезки прямых и дуги окружностей. Когда одну можно перекроить в другую?

В10. Даны две фигуры, границы фигур и возможных разрезов — отрезки прямых и дуги окружностей. Кроме того, можно осуществлять гомотетии. Когда одну фигуру можно перекроить в другую?

В11. Границы фигур и возможных разрезов — конечное объединение участков кривик. Когда одну можно перекроить в другую? Разрешено осуществлять аффинные преобразования кусочков.

В₁₂. Границы фигур и возможных разрезов — конечное объединение участков . Когда одну можно перекроить в другую? Разрешено осуществлять проективные преобразования кусочков.

В₁₃. (Теорема Бойяи–Гервина). Докажите, что любые два многоугольника равной площади на плоскости равносоставлены. Подумайте о сферическом и неевклидовом обобщениях.

➤ *T*-равносоставленными

Имеются два многоугольника равной площади. Назовём их *T*-равносоставленными, если первый многоугольник можно разрезать на конечное число частей и собрать из них второй многоугольник, при этом части можно только параллельно переносить (и нельзя поворачивать).

В₁₄. а) Являются ли треугольник и квадрат равной площади *T*-равносоставленными?

б) Являются ли два равных квадрата *T*-равносоставленными?

в) Являются ли два параллелограмма равной площади *T*-равносоставленными?

г) Найдите полную систему инвариантов для этой задачи.

В₁₅. Докажите что любые два параллелепипеда одинакового объёма в пространстве любой размерности *T*-равносоставлены.

В₁₆* Найдите полную систему инвариантов для *T*-равносоставленности в пространстве любой размерности.

Серия С: Произвольные разбиения (разрешены гомотетии)

С₁. Разрешены гомотетии. Границы разбиения могут быть объединением счетного числа отрезков и дуг окружностей. Докажите, что квадрат перекраивается в $k \times y$.

С₂. Докажите, что любой выпуклый перекраивается в любой .

Серия D: Потоки и клетки

- Данная серия подводит к основному результату: наличию возможности перекроить квадрат в круг

Начнем с подготовки (потоки на графах).

D₁. (Теорема Холла). Пусть в двудольном графе $G = (L, R, E)$ для любого k и k -элементного подмножества $L_0 \subseteq L$ количество вершин из R , смежных хотя бы с одной из вершин множества L_0 , не меньше k . Тогда в графе есть паросочетание, содержащее все вершины из L .

D₂. (Теорема Кёнига). Пусть в двудольном графе G любое паросочетание имеет размер не более k . Тогда можно выбрать k вершин таких, что любое ребро графа имеет конец среди выбранных вершин.

D₃. (Теорема Менгера). Между двумя несмежными вершинами графа x и y существует не менее t непересекающихся путей тогда и только тогда, когда при выкидывании любых $t - 1$ вершин, отличных от x и y , эти две вершины остаются в одной компоненте связности.

D₄. Вершины A и B графа G назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями без общих промежуточных вершин. Докажите, что любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями без общих ребер.

➤ Сеть

Сеть — это связный граф, в котором заданы пропускные способности рёбер.

- Одну из вершин сети будем считать *истоком* (*выходом*), другую — *стоком* (*входом*).
- *Пропускная способность*: в графе каждому ребру e приписано некоторое неотрицательное число $c(e)$.

➤ Поток

Поток в сети G — это пара функций (f, w) , где w — некоторая ориентация всех рёбер сети, $f(e)$ — заданная на множестве всех рёбер функция, для которой выполнены условия:

- 1) $0 \leq f(e) \leq c(e)$ для всех рёбер сети;
- 2) для всех вершин v , не являющихся истоком и стоком, выполняется аналог закона Кирхгофа для силы тока:

$$\sum_{e \in \Gamma(v)} f(e) - \sum_{e \in \Gamma'(v)} f(e) = 0,$$

где $\Gamma(v)$ (соответственно, $\Gamma'(v)$) — множество всех рёбер, выходящих из v (соответственно, входящих в v) при ориентации w .

- Далее будем писать просто f для потока вместо (f, w) .

- *Величина потока* — это сумма значений $f(e)$ для всех рёбер e , выходящих из истока (нетрудно понять, что она равна сумме значений $f(e)$ для всех рёбер e , входящих в сток).
- *Максимальный поток* — это поток, величина которого наибольшая.
- *Остаточная сеть* — граф G_f , вершины которого те же, что в графе G , а множество рёбер является подмножеством рёбер графа G .

— Ребро e принадлежит графу G_f , если $c(e) - f(e) > 0$.

Дополняющий путь — это такой путь $u_1 u_2 \dots u_k$ в остаточной сети, что u_1 — исток, u_k — сток.

➤ Разрез

Разрез — это такая пара непересекающихся множеств S и T , что их объединение даёт множество всех вершин графа G , исток принадлежит S , сток принадлежит T .

- Для данного разреза определим $c(S, T)$ как сумму величин $c(e)$ по всем рёбрам, ведущим из S в T . Аналогично определяется $f(S, T)$.

D₅. (Теорема Форда-Фалкерсона). Пусть в сети G с пропускной способностью $c(e)$ для ребра e задан поток f . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Поток f — максимальный.
2. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.
3. Существует разрез (S, T) такой, что $f(S, T) = c(S, T)$.

D₆. Пусть пропускная способность каждого ребра — целое число. Докажите, что в сети есть максимальный целочисленный поток (т.е. поток через каждое ребро — целый).

D7. В таблице $m \times n$ в каждой клетке записано некоторое число так, что сумма чисел в каждом столбце и сумма чисел в каждой строке является целым числом. Докажите, что каждое число можно округлить до какого-то целого (изменив менее чем на 1) так, чтобы сумма в каждом столбце и сумма в каждой строке не изменилась.

> Цепью и Антицепью

Пусть на множестве S задан частичный порядок.

- *Цепью* – назовем подмножество, в котором любые два элемента сравнимы.
- *Антицепью* – подмножество, в котором любые два не сравнимы.

D8. (Теорема Дилуорса). Пусть в множестве S нет антицепи размера больше k . Тогда S разбивается на k непересекающихся цепей.

- Перейдем к клетчатым задачам.

D9. Докажите, что при игре “Жизнь” а) в квадрате 2010×2010 ; б) на бесконечной плоскости найдется конфигурация без прообраза. (Конвеевская игра “Жизнь” заключается в следующем: в некоторых клетках решётки стоит фишка, а некоторые клетки пустые. Фишка, имеющая меньше двух соседей, умирает от одиночества, а имеющая больше трёх соседей — от перенаселённости. На пустом поле, имеющем три соседние фишки, рождается новая фишка. Максимально возможное число соседей равно 8. Все события в клетках происходят одновременно — например, каждую секунду.)

D10. На некоторых клетках бесконечной доски стоят фишки (не более одной на каждой клетке), некоторые клетки пустые. Назовем расстановку *почти полной*, если найдется такое число C , что можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не превышающее C (иногда нулевое) так, чтобы пустых клеток не осталось. Назовем расстановку *не слишком пустой*, если найдется такое число D , что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DP , где P — периметр квадрата. Докажите, что почти полные расстановки — это в точности не слишком пустые.

D11.* Аналогичный вопрос для n -мерного пространства. Пусть Ω — множество всех клетчатых кубов, разбитых на кубики. Для каждого куба $L \in \Omega$ и числа k построим следующий граф $G(L, k)$. Его вершины — клетки куба L и еще две особые вершины a и b (“источник” и “сток”). Клетки куба L (т.е. остальные вершины $G(L, k)$) являются *смежными* тогда и только тогда, когда расстояние между ними не превосходит k . Кроме того, с вершиной a смежны все свободные клетки в L и только они, а с вершиной b смежны все клетки в L , из которых можно сделать шаг длины не более k , выводящий за пределы L .

D12. Докажите, что в условии задач **D9** и **D10** существует такое натуральное k , что для любого куба $L \in \Omega$ в графе $G(L, k)$ между вершинами a и b существует k непересекающихся путей.

D13. (Основная задача. Клетчатая версия.)* Возьмем число k достаточно большое, но фиксированное (наука умеет работать с числом $k = 100^{200}$). Рассмотрим клетчатый квадрат единичной площади, разбитый на квадратики площади $1/n$ каждый, $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим круг единичной площади, покрытый клетчатым листом, разбитым на квадратики со стороной $1/n$ (стороны квадратиков параллельны сторонам исходного квадрата). Наша цель — выбрать множество векторов M из k элементов и сопоставить *почти каждому* квадратику разбиения квадрата квадратик покрытия круга так, чтобы

- 1) Соответствующие квадратики отличались сдвигом на вектор из M .
- 2) Суммарная площадь квадратиков, не имеющих партнёра, была бы меньше δ при достаточно большом n .

Докажите, что при сколь угодно малом δ и сколь угодно большом n это можно осуществить.

D₁₄. Докажите, что существует k такое, что квадрат и круг почти перекраиваются k частями (т.е. для любого ε можно перекроить с точностью до множества меры ε).

D₁₅*. Докажите, что существует k такое, что квадрат и круг перекраиваются k частями с точностью до множества меры ноль.

D₁₆. Обобщите предыдущие пункты на произвольную размерность.

D₁₇.

Задача для исследования.

 Постарайтесь уменьшить k .

D₁₈.

Задача для исследования.

 Постарайтесь уменьшить C в задачах **D₉** и **D₁₀**.

КВАДРАТУРА КРУГА

М. Голафшан, А. Я. Канель-Белов, И. Иванов-Погодаев, Ф. Нилов, А. Оноприенко, А. Садовничий

Серия Е: Задача ЦС

- Централно-симметричное выпуклое тело (фигура) разбито на два конгруэнтных множества. Доказать, что его/её центр лежит на их общей границе.

При этом *граница* частей будет считаться состоящей из участков прямых и окружностей (плоскостей и сфер в пространственном случае). Для многогранников граница будет считаться состоящей из участков плоскости.

Выражение фигура (тело) разбита (-о) на части можно понимать по-разному. Во-первых, можно считать, что пересечение частей пусто (т. е. у них нет общих точек).

Е₁. На плоскости дано (возможно, невыпуклое) множество A . Множество B есть результат некоторого движения множества A . Может ли так быть, что объединение A и B есть центрально-симметричное (возможно, невыпуклое) множество, содержащее свой центр симметрии, а пересечение множеств A и B пусто?

Е₂. На плоскости дано множество A . Множество B есть результат некоторого движения множества A . Оказалось, что объединение A и B есть плоский прямоугольник (т. е. не ломаная, а контур вместе с внутренностью). Может ли при этом центр прямоугольника принадлежать A , но не принадлежать B ?

- Во-вторых, можно допускать пересечения частей по их общей границе (т. е. все общие точки частей лежат на их границах). В дальнейшем мы будем подразумевать именно это определение.

Е₃. Несколько точек разбивают отрезок на два конгруэнтных множества (множество может состоять из нескольких кусков). Докажите, что одна из точек — в его центре.

Е₄. Круг разбит на 2 части. Доказать, что они переводятся друг в друга либо поворотом относительно центра круга, либо осевой симметрией. Что можно сказать о разбиении на 3 части?

Е₅. Решите задачу ЦС для квадрата.

Е₆. Решите задачу ЦС для правильного 6-угольника.

Е₇. Решите задачу ЦС для n -мерной сферы.

Е₈** **Открытый вопрос.** Решите задачу ЦС для куба (гиперкуба).

Е₉. В задаче ЦС на плоскости рассмотрим по отдельности все виды движений, которыми одна часть разбиения может переводиться в другую.

а) Решите задачу ЦС, если движение — это параллельный перенос или скользящая симметрия.

б) * В случае, если центрально-симметричный многоугольник разбит на две равные части, переводящиеся друг в друга поворотом, докажите, что центр этого поворота лежит внутри фигуры.

в) ** **Открытый вопрос.** Решите задачу ЦС для многоугольника, если движение — это поворот.

г) *** **Тем более открытый вопрос.** Решите задачу ЦС для произвольных центрально-симметричных фигур в \mathbb{R}^n .

Е₁₀. Площадь сферического треугольника равна четверти площади сферы. Докажите, что сферу можно разрезать на 4 треугольника, равных данному.

Е₁₁. а) Разрежьте плоскость на равные фигуры, каждая из которых ограничена тремя дугами окружностей (отрезок не является дугой окружности).

б) ** **Открытый вопрос.** Опишите все такие разрезания.

Е₁₂. а) Разрежьте правильный шестиугольник на равные части так, чтобы центр шестиугольника лежал внутри одной из них.

б) ** **Открытый вопрос.** Можно ли разрезать таким же образом правильный n -угольник при $n \neq 3, 4, 6$?

КВАДРАТУРА КРУГА

А.Я.КАНЕЛЬ-БЕЛОВ, И.ИВАНОВ-ПОГОДАЕВ, Ф.НИЛОВ, А.ОНОПРИЕНКО, А.САДОВНИЧИЙ, М.ГОЛАФШАН

Серия F. Третья проблема Гильберта.

Немного стереометрии.

F1. Докажите, что градусная мера двугранного угла правильного тетраэдра иррациональна.

F2. Можно ли замостить пространство

а) правильными тетраэдрами;

б) правильными октаэдрами;

в) правильными тетраэдрами и правильными октаэдрами вместе;

г) усеченными правильными октаэдрами?

F3. Правильный тетраэдр разрешено отражать относительно любой из его граней и повторять эту процедуру. Докажите, что множество его положений всюду плотно.

F4. Предположим, из некоторого набора многогранников (без ограничения общности их можно считать выпуклыми, кстати почему?) можно собрать как куб, так и правильный тетраэдр. Поместим в вершины липкую красную краску. Соберём куб, потом тетраэдр, потом куб, потом тетраэдр и т.д. Пусть процесс размножения красных точек остановится. Получите противоречие в этом случае.

F5. Пусть после сборки куба-тетраэдра-куба-тетраэдра красная краска высохнет и не сможет размножаться. Предположим, что на каждом отрезке с красными концами и без красных внутренних точек можно так расставить синие точки, что на примыкающих отрезках к ребру внутри куба или тетраэдра или на его границе одинаковое число синих точек. Получите противоречие в этом случае.

F6. Докажите, что искомая расстановка синих точек существует.

Линейные функции.

F7. Числовая функция f называется *линейной*, если для любых x, y из области определения f выполнено условие $f(x) + f(y) = f(x + y)$ (это условие, в частности, означает, что $x + y$ также лежит в области определения f).

а) Пусть $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная функция. Докажите, что существует $k \in \mathbb{R}$, что $f(x) = kx$.

б) Приведите пример линейной (числовой) функции f , которая не имеет вида $f(x) = kx$ ни для какого $k \in \mathbb{R}$.

Определим понятие *псевдообъёма многогранника M (инварианта Дена)* как функцию

$$f(M) = \sum_i l_i \varphi(\alpha_i),$$

где l_i — длина i -го ребра, α_i — двугранный угол при i -ом ребре, φ — числовая функция.

F8. Пусть многогранник M разрезан на многогранники M_1 и M_2 . Каким свойствам должна удовлетворять функция φ , чтобы гарантировать выполнение условия $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$?

F9. а) Докажите, что если многогранники равноставлены, то их псевдообъёмы совпадают.

б) Докажите, что куб и правильный тетраэдр не равноставлены.

в)* Какими должны быть необходимые и достаточные условия, чтобы два многогранника были равноставлены?

THE QUADRATURE OF THE CIRCLE

A. KANEL-BELOV, I. IVANOV-POGODAEV, F. NILOV, A. ONOPRIENKO, A. SADOVNICHY, M. GOLAFSHAN

💡 The aim of this project is to investigate the remarkable fact that a square can be transformed into a circle using only parallel shifts.

Part A: Re-partition (a bit of Olympiad material)

A₁. (Squaring the circle 0). Is it possible to cut a square into parts and assemble a circle? (Cuts are segments of straight lines and arcs of circles).

A₂. A convex figure Φ is cut into parts and assembled into a circle (Cuts are segments of straight lines and arcs of circles). Prove that Φ itself is a circle.

A₃. Is it possible to cut two circles into one circle?

Part B: Completeness of invariant systems

➤ Invariant

Let there be a certain process. The *invariant* of this process is a certain quantity (a function of the current state) that does not change regardless of how the process proceeds.

It follows that if the invariant was equal to something at the beginning of the process, it is impossible to bring the system to a state in which this invariant would take on a different value. This is the simple part: to bring the system to a certain state, it is *necessary* that the invariant does not change.

We can pose the reverse question. Suppose there is a certain *invariant* (or several invariants, which we will collectively call a *system of invariants*). Assume that in both state A and state B , this *system of invariants* is the same.

Question: Is it always possible to transition the system from state A to state B ?

Answer: It can be either positive or negative. However, if the answer is positive (for any states A and B), then we will call such a *system of invariants* complete.

B₁. a) There are n trees in a circle, with some of them having siskins sitting on them. In one move, one of the siskins flies to the neighbouring tree in a clockwise direction, and another one to the neighbouring tree in a counterclockwise direction. The goal is to gather all the siskins on the first tree (then all the siskins will be happy).

b) Let $n = 43$, with one siskin sitting on each tree. Is it possible to make all the siskins happy?

c) Let $n = 44$, with one siskin sitting on each tree. Is it possible to make all the siskins happy?

d) Find the complete system of invariants for this problem.

e) Let $n = 10$, the siskins sit on every other tree (i.e., on trees with odd numbers). On which trees can all the siskins be gathered?

f) Find the complete system of invariants if the siskins can be gathered on any tree.

B₂. On the island of Serobouromalin, there are gray, brown, and raspberry-coloured chameleons. If two chameleons of different colours meet, they both change their colour to the third colour simultaneously (gray and brown both become raspberry, etc.). The goal is to make all the chameleons the same colour.

a) On the island, there are 13 gray, 15 brown, and 17 raspberry-coloured chameleons. Can it happen that after some time all the chameleons will be of one colour? If yes, what colour will it be?

b) On the island, there are 13 gray, 15 brown, and 16 raspberry-coloured chameleons. Can it happen that after some time all the chameleons will be of one colour? If yes, what color will it be?

c) Find the complete system of invariants for this problem.

B₃. There is a grid rectangle, with some of its cells containing pluses and some containing minuses (there are no empty cells). In one move, it is allowed to change the signs to the opposite in any row or in any column. The goal is to make all the signs pluses.

a) In one corner cell of an 8×8 square there is a minus, and in all other cells there are pluses. Is it possible to make all the signs pluses?

b) In all corner cells of an 8×8 square there are minuses, and in all other cells there are pluses. Is it possible to make all the signs pluses?

c) Find the complete system of invariants for this problem.

B₄. There are n light bulbs on a panel and several buttons, each of which is connected to some of the light bulbs (one light bulb can be connected to several buttons). Pressing a button changes the state of all the light bulbs connected to it to the opposite state. Prove that the number of patterns we can obtain is 2^k for some k .

B₅. We will call an *invariant* such a subset of light bulbs that each button is connected to an even number of light bulbs from this subset. Prove that the number of invariants (including the empty subset) is 2^ℓ for some ℓ . Prove that a certain pattern can be lit if and only if an even number of light bulbs need to be lit in each invariant.

B₆. At the shareholders' meeting of "OAO: if you don't cheat, you won't sell," it was found that for every consecutive 12 months, expenses exceed income, and for every consecutive 11 months, income exceeds expenses. How long can this continue?

B₇. A grid figure is given. The goal is to cover it with L -shaped tiles of three cells (not going beyond the border) in several layers so that each cell of the figure is covered by the same number of cells belonging to the L -shaped tiles.

a) Is it possible to do this for an 8×8 square?

b) Is it possible to do this for a 5×7 rectangle?

c) What sizes of rectangles can be covered this way?

B₈. The grid figure Φ has the following property: for any filling of the cells of an $m \times n$ rectangle with numbers whose sum is positive, it is possible to place the figure Φ in the rectangle so that the sum of the numbers in the cells covered by the figure Φ is positive (the figure Φ can be rotated). Prove that this rectangle can be covered by the figure Φ in several layers.

B₉. There are two figures of equal area. The boundaries of these figures consist of a finite number of line segments and arcs of circles. It is allowed to cut the first figure into a finite number of parts, with the cuts also consisting of line segments and arcs of circles. The goal is to assemble the second figure from these pieces (the pieces can be translated and rotated).

a) Is it possible to make a square from a circle?

b) **First figure:** a circle of radius 2 with a circle of radius 1 cut out of it (the centres of the circles coincide).

Second figure: a sector of a circle with radius 3 and an angle of $\frac{2\pi}{3}$.

Is it possible to make the second figure from the first?

c) A convex figure was transformed into a circle. Prove that it is a circle itself.

d) Is it possible to transform a pair of figures, all of whose boundary segments are arcs of circles, into a convex figure?

e) Find the complete system of invariants for this problem. This will provide an answer to the following question: Given two figures, their boundaries, and possible cuts (line segments and arcs of circles), when can one be transformed into the other?

B₁₀. Given two figures, the boundaries of the figures, and the possible cuts segments of straight lines and arcs of circles. Additionally, homothety is allowed. When can one figure be transformed into the other?

B₁₁. The boundaries of the figures and the possible cuts are a finite union of quadratic segments. When can one figure be transformed into another? It is allowed to perform affine transformations on the pieces.

B₁₂. The boundaries of the figures and the possible cuts are a finite union of quadric segments. When can one figure be transformed into another? It is allowed to perform projective transformations on the pieces.

B₁₃. (Bolyai-Gerwien's Theorem). Prove that any two polygons of equal area on a plane are equidecomposable. Consider spherical and non-Euclidean generalisations.

➤ *T*-equidecomposable

There are two polygons of equal area. We will call them *T-equidecomposable* if the first polygon can be cut into a finite number of parts and the second polygon can be assembled from these parts, with the parts only allowed to be translated (and not rotated).

- B₁₄.** a) Are a triangle and a square *T-equidecomposable*?
 b) Are two equal squares *T-equidecomposable*?
 c) Are two parallelograms of equal area *T-equidecomposable*?
 d) Find the complete system of invariants for this problem.

B₁₅. Prove that any two parallelepipeds in space of any dimension are *T-equidecomposable*.

B₁₆* Find the complete system of invariants for *T-equidecomposability* in space of any dimension.

Part C: An arbitrary partitions (homotheties are allowed)

C₁. Homotheties are allowed. The boundaries of the subdivisions can be a union of a countable number of line segments and arcs of circles. Prove that a square can be transformed into a cube.

C₂. Prove that any convex body can be transformed into any other.

Part D: Flows and cells

- This series leads to the main result: the possibility of transforming a square into a circle

Let's start with the preparation (flows on graphs).

D₁. (Hall's Theorem). Let $G = (L, R, E)$ be a bipartite graph. For any k and a k -element subset $L_0 \subseteq L$, the number of vertices in R adjacent to at least one vertex in L_0 is at least k . Then there exists a matching in the graph that covers all vertices in L .

D₂. (König's Theorem). Let G be a bipartite graph. Any matching in G has a size of at most k . Then it is possible to select k vertices such that every edge of the graph has an endpoint among the selected vertices.

D₃. (Menger's Theorem). Between two non-adjacent vertices x and y of a graph, there exist at least t vertex-disjoint paths if and only if, upon the removal of any $t - 1$ vertices other than x and y , these two vertices remain in the same connected component.

D₄. The vertices A and B of a graph G are called *equivalent* if there exists a sequence of vertices $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ such that any two adjacent vertices A_i and A_{i+1} can be connected by k paths without common intermediate vertices. Prove that any two equivalent vertices can be connected by k paths without common edges.

> Network

A *network* is a connected graph in which the capacities of the edges are specified.

- One vertex of the network is considered the *source* (input), and another the *sink* (output).
- In the graph, each edge e is assigned a non-negative number $c(e)$ representing its *capacity*.

> Flow

A *flow* in a network G is a pair of functions (f, w) , where w is some orientation of all the edges of the network, and $f(e)$ is a function defined on the set of all edges, satisfying the following conditions:

- 1) $0 \leq f(e) \leq c(e)$ for all edges of the network;
- 2) for all vertices v that are not the source or the sink, Kirchhoff's law for electric currents holds:

$$\sum_{e \in \Gamma(v)} f(e) - \sum_{e \in \Gamma'(v)} f(e) = 0,$$

where $\Gamma(v)$ (respectively, $\Gamma'(v)$) is the set of all edges leaving (respectively, entering) v under the orientation w .

- We will denote the flow by f instead of using (f, w) .

- *Flow value* is the sum of the values $f(e)$ for all edges e leaving the source (it is easy to see that it is equal to the sum of the values $f(e)$ for all edges e entering the sink).
- *Maximum flow* is a flow whose value is the greatest.
- *Residual network* is a graph G_f whose vertices are the same as in the graph G , and the set of edges is a subset of the edges of the graph G .

- An edge e belongs to the graph G_f if $c(e) - f(e) > 0$.

- *Augmenting path* is a path $u_1 u_2 \dots u_k$ in the residual network such that u_1 is the source and u_k is the sink.

> Cut

A *cut* is a pair of disjoint sets S and T whose union gives the set of all vertices of the graph G , the source belongs to S , and the sink belongs to T .

- We define $c(S, T)$ as the sum of the capacities $c(e)$ over all edges leading from S to T . The value $f(S, T)$ is defined similarly.

D5. (Max-Flow Min-Cut Theorem). Let G be a network with capacity $c(e)$ for each edge e , and let f be a flow in this network. The following statements are equivalent:

1. The flow f is maximum.
2. There is no augmenting path in the residual network G_f .
3. There exists a cut (S, T) such that $f(S, T) = c(S, T)$.

D6. Let the capacity of each edge be an integer. Prove that there is a maximum integer flow in the network (i.e., the flow through each edge is an integer).

D7. In an $m \times n$ table, each cell contains a number such that the sum of the numbers in each column and the sum of the numbers in each row are integers. Prove that each number can be rounded to some integer (changing each by less than 1) such that the sum in each column and the sum in each row remain unchanged.

> Chain and Anti-chain

Let S be a set with a partial order.

- A *chain* is a subset in which any two elements are comparable.
- An *anti-chain* is a subset in which any two elements are incomparable.

D8. (Dilworth’s Theorem). Let the set S have no antichain of size greater than k . Then S can be partitioned into k disjoint chains.

- Let’s move on to the lattice problems.

D9. Prove that in the game “Life,” (a) a configuration without transformation can be found in the 2010×2010 square; (b) a configuration without transformation can be found on an infinite plane. (The Conway’s Game of Life consists of the following rules: in some cells of the grid, there are pieces, while other cells are empty. A piece with fewer than two neighbours dies from loneliness, and a piece with more than three neighbours dies from overpopulation. On an empty cell with three neighbours, a new piece is born. The maximum possible number of neighbours is 8. All events in the cells occur simultaneously for example, every second.)

D10. On some cells of an infinite board there are pieces (at most one per cell), and some cells are empty. A configuration is called *almost full* if there exists a number C such that each piece can be moved a distance not exceeding C (sometimes zero) so that no empty cells remain. A configuration is called *not too empty* if there exists a number D such that the number of empty cells in any square does not exceed DP , where P is the perimeter of the square. Prove that almost full configurations are exactly not too empty.

D11.* A similar question for n -dimensional space. Let Ω be the set of all grid cubes, divided into smaller cubes. For each cube $L \in \Omega$ and number k , construct the following graph $G(L, k)$. Its vertices are the cells of cube L and two special vertices a and b (“source” and “sink”). The cells of cube L (i.e., the other vertices of $G(L, k)$) are *adjacent* if and only if the distance between them does not exceed k . Furthermore, all free cells in L and only those are adjacent to vertex a , and all cells in L from which a step of length no more than k can be made outside L are adjacent to vertex b .

D12. Prove that under the conditions of problems **D9** and **D10**, there exists a natural number k such that for any cube $L \in \Omega$ in the graph $G(L, k)$, there exist k vertex-disjoint paths between vertices a and b .

D13. (Main problem. Lattice version.) * Let’s take a sufficiently large but fixed number k (science can work with $k = 100^{200}$). Consider a grid square of unit area, divided into squares of area $1/n$ each, as $n \rightarrow \infty$. Consider a circle of unit area covered by a grid sheet divided into squares with side length $1/n$ (the sides of the squares are parallel to the sides of the original square). Our goal is to select a set of vectors M consisting of k elements and align each square of the square partition with a square covering the circle so that:

- 1) The corresponding squares differ by a shift of a vector from M .
- 2) The total area of the squares that do not have a partner is less than δ for sufficiently large n .

Prove that this can be done for any arbitrarily small δ and sufficiently large n .

D₁₄. Prove that there exists a k such that a square and a circle can be almost partitioned into k parts (i.e., for any ε , they can be rearranged to match up to a set of measure ε).

D₁₅*. Prove that there exists a k such that a square and a circle can be partitioned into k parts with exactness up to a set of measure zero.

D₁₆. Generalise the previous points to arbitrary dimensions.

D₁₇. **Research problem.** Try to reduce k .

D₁₈. **Research problem** Try to reduce C in problems **D₉** and **D₁₀**.

THE QUADRATURE OF THE CIRCLE

M. GOLAFSHAN, A. KANEL-BELOV, I. IVANOV-POGODAEV, F. NILOV, A. ONOPRIENKO, A. SADOVNICHY

Part E: C.S. problems

- A centrally symmetric convex body (figure) is divided into two congruent sets. Prove that its center lies on their common boundary.

At the same time, the boundary of the parts will be considered as consisting of segments of straight lines and circles (planes and spheres in the spatial case). For polyhedrons, the boundary will be considered as consisting of plane segments.

The expression “figure (body) is divided into parts” can be understood in different ways. Firstly, it can be assumed that the intersection of the parts is empty (i.e., they have no common points).

E₁. In the plane, a set A (possibly non-convex) is given. The set B is the result of some movement of the set A . Can it be that the union of A and B is a centrally symmetric (possibly non-convex) set containing its center of symmetry, while the intersection of the sets A and B is empty?

E₂. In the plane, a set A is given. The set B is the result of some movement of the set A . It turns out that the union of A and B is a flat rectangle (i.e., not a broken line, but a contour together with the interior). Can it be that the center of the rectangle belongs to A but does not belong to B ?

- Secondly, intersections of the parts can be allowed along their common boundary (i.e., all common points of the parts lie on their boundaries). Hereafter, we will assume this definition.

E₃. Several points divide a line segment into two congruent sets (the set may consist of several pieces). Prove that one of the points is at its center.

E₄. A circle is divided into 2 parts. Prove that they can be transformed into each other either by a rotation around the center of the circle or by reflection. What can be said about a division into 3 parts?

E₅. Solve the problem **C.S.** for a square.

E₆. Solve the problem **C.S.** for a regular hexagon.

E₇. Solve the problem **C.S.** for an n -dimensional sphere.

E₈** **Open problem.** Solve the problem **C.S.** for a cube (hypercube).

E₉. In the **C.S.** problem on the plane, separately consider all types of movements by which one part of the division can be transformed into another.

a) Solve the **C.S.** problem if the movement is a translation or a glide reflection.

b)* In the case where a centrally symmetric polygon is divided into two equal parts, transforming into each other by rotation, prove that the center of this rotation lies inside the figure.

c)** **Open problem.** Solve the **C.S.** problem for a polygon if the movement is a rotation.

d)*** **Tough open problem.** Solve the **C.S.** problem for arbitrary centrally symmetric figures in \mathbb{R}^n .

E₁₀. The area of a spherical triangle is equal to one-fourth of the area of the sphere. Prove that the sphere can be divided into 4 triangles, each equal to the given one.

E₁₁. a) Cut the plane into equal figures, each bounded by three arcs of circles (a segment is not considered as an arc of a circle).

b)** **Open problem.** Describe all such cuts.

E₁₂. a) Cut a regular hexagon into equal parts such that the center of the hexagon lies inside one of them.

b)** **Open problem.** Is it possible to similarly cut a regular n -gon for $n \neq 3, 4, 6$?

THE QUADRATURE OF THE CIRCLE

A. KANEL-BELOV, I. IVANOV-POGODAEV, F. NILOV, A. ONOPRIENKO, A. SADOVNICHY

Part F: Hilbert's third problem

† A bit Solid geometry

F₁. Prove that the dihedral angle of a regular tetrahedron is irrational.

F₂. Is it possible to tile space with

- regular tetrahedra;
- regular octahedra;
- regular tetrahedra and regular octahedra together;
- truncated regular octahedra?

F₃. A regular tetrahedron is allowed to be reflected with respect to any of its faces and to repeat this procedure. Prove that the set of its positions is everywhere dense.

F₄. Suppose from some set of polyhedra (without loss of generality they can be considered convex, by the way, why?) it is possible to assemble both a cube and a regular tetrahedron. We place sticky red paint on the vertices. We assemble a cube, then a tetrahedron, then a cube, then a tetrahedron, and so on. Let the process of multiplying red points stop. Derive a contradiction in this case."

F₅. Let the red paint dry after assembling the cube-tetrahedron-cube-tetrahedron, and it can no longer multiply. Suppose that on each segment with red endpoints and without red interior points, blue points can be placed in such a way that on the adjacent segments to an edge inside the cube or tetrahedron, or on its boundary, the same number of blue points are placed. Derive a contradiction in this case.

F₆. Prove that the desired arrangement of blue points exists.

† Linear functions

> Linear

A numerical function f is called *linear* if for any x, y from the domain of definition of f , the condition $f(x) + f(y) = f(x + y)$ holds (this condition, in particular, means that $x + y$ also lies in the domain of definition of f).

F₇. a) Let $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ be a linear function. Prove that there exists $k \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = kx$.

b) Give an example of a linear (numerical) function f that does not have the form $f(x) = kx$ for any $k \in \mathbb{R}$.

- Let's define the concept of the pseudo-volume of a polyhedron M (the Dehn invariant) as the function $f(M) = \sum_i l_i \varphi(\alpha_i)$, where l_i is the length of the i -th edge, α_i is the dihedral angle at the i -th edge, and φ is a numerical function.

F₈. Let the polyhedron M be divided into polyhedrons M_1 and M_2 . What properties must the function φ satisfy to ensure that the condition $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$ holds?

F₉. a) Prove that if polyhedra are equidecomposable, then their pseudo-volumes are the same.

b) Prove that a cube and a regular tetrahedron are not equidecomposable.

c)* What are the necessary and sufficient conditions for two polyhedra to be equidecomposable?