КОНВЕРЗИЈА ПТОЛЕМЕЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

Шефкет Арсланагић, Берлин
Драгољуб Милошевић, Горњи Милановац

У вези са особинама четвороуглова могу се доказати многе теореме. Једна од значајнијих теорема која се чешће користи при решавању разних задатака је *Птолемејева теорема*)[1] :*У сваком тетивном четвороуглу производ дијагонала једнак је збиру производа наспрамних страница.*

Циљ нам је да овде дамо два доказа конверзије (обрата) напред наведене теореме)[2]: *Ако је у конвексном четвороуглу производ дијагонала једнак збиру производа наспрамних страница, онда је тај четвороугао – тетивни.*

Доказ 1. Нека је у конвексном четвороуглу $ABCD$ (сл. 1) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$, $\angle DAB = \alpha$, $\angle BCD = \gamma$, и $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \psi$. Површина четвороугла $ABCD$ једнака је збиру површина троуглова ABD и BCD, па је $P = \frac{1}{2}ad \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}bc \cdot \sin\gamma$, тј.

$$4P = 2ad \cdot \sin\alpha + 2bc \cdot \sin\gamma. \tag{1}$$

Како је страница BD заједничка за троуглове ABD и BCD, на основу косинусне теореме имамо:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha,$$

или

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2bc \cdot \cos\gamma - 2ad \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

Из (1) и (2) добијамо

$$\begin{aligned}(4P)^2 + (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 = \quad & (2ad \cdot \sin\alpha + 2bc \cdot \sin\gamma)^2 + \\ & (2bc \cdot \cos\gamma - 2ad \cdot \cos\alpha)^2,\end{aligned}$$

тј.

$$16P^2 = 4(ad + bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 - 16abcd \cdot \cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}. \tag{3}$$

Даље имамо:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB},$$

[1] Птолемеј (II век), истакнути старогрчки астроном и географ.
[2] У литератури је познат доказ помоћу инверзије.

односно

$$ef\cdot\cos\psi=\frac{1}{2}(e^2+d^2-c^2)-\frac{1}{2}(e^2+a^2-b^2).$$

или

$$2ef\cdot\cos\psi=b^2+d^2-a^2-c^2. \tag{4}$$

Површина четвороугла $ABCD$ је $P=\frac{1}{2}ef\cdot\sin\psi$, па, након квадрирања и примене идентичности $\sin^2\psi+\cos^2\psi=1$, добијамо

$$16P^2=4e^2f^2(1-\cos^2\psi). \tag{5}$$

На основу једнакости (4) и (5) можемо писати

$$16P^2=e^2f^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2. \tag{6}$$

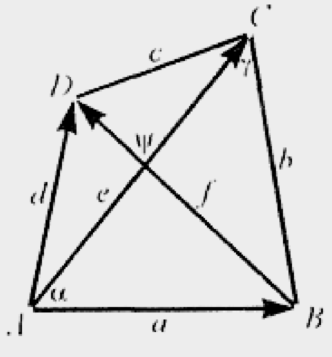
Из (3) и (6) излази

$$4abcd\cdot\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}=(ac+bd)^2-e^2f^2. \tag{7}$$

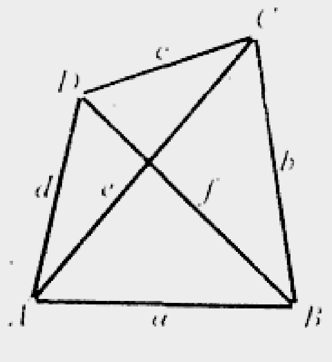
Ако у (7) ставимо $ef=ac+bd$, добијамо

$$4abcd\cdot\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}=0,$$

одакле је $\alpha+\gamma=180°$, што значи да је четвороугао $ABCD$, заиста, тетивни.



Сл. 1



Сл. 2

Доказ 2. Изаберимо тачку E тако да буде $\angle EAD=\gamma$ и $\angle EDA=\angle CDB$ (сл. 2). Тада, имамо $\angle EDB=\angle CDA=\delta$. Троуглови AED и CDB су слични, па је

$$\frac{AD}{CD}=\frac{EA}{BC}=\frac{ED}{DB}, \text{ тј. } ED=\frac{d}{c}\cdot f \text{ и } EA=\frac{d}{c}\cdot b.$$

Применимо ли косинусну теорему на троуглове EAB, EDB и ACD, добијамо редом:

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2} \cdot b^2 + a^2 - \frac{2abd}{c} \cdot \cos(\alpha + \gamma),$$

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2} \cdot f^2 + f^2 - \frac{2d}{c} \cdot f^2 \cdot \cos\delta$$

и

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\delta.$$

На основу последње три једнакости добијамо

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(\alpha + \gamma). \tag{8}$$

Ставимо ли $ef = ac + bd$ у (8), имамо $\cos(\alpha + \gamma) = -1$, тј. $\alpha + \gamma = 180°$, а то значи да је четвороугао $ABCD$ уписан у кружницу. Овим је доказ обрата Птолемејеве теореме окончан.

Напомена. Помоћу једнакости (7), односно (8), лако се доказује Птолемејева теорема.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА во 1995/96 годин