

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО



**ЗИМСКА ШКОЛА
МЛАДИХ
МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.**

Војислав Андрић,
Ваљево, Србија

Ваљево, 31.12.2022.

УПУТСТВО ЗА УПОТРЕБУ

Пред вама су задаци везани за број 2023.

Задаци представљају новогодишњи поклон учесницима Зимске школе младих математичара – Чачак 2023.

Циљ ових задатака је мала рекреација и загревање пред Зимску школу младих математичара. Задаци су класични, али има и задатака који су мање познати. Погледајте и покушајте да решите све што можете.

Препоручујемо да ученици свих разреда обавезно реше задатке за свој разред, претходни разред и ако су у могућности и за следећи разред.

Срећно!

У Ваљево,
31.12.2022.

Математички клуб „Диофант“
Ваљево

ЗАДАЦИ ВЕЗАНИ ЗА БРОЈ 2023

ЗАДАЦИ ЗА УЧЕНИКЕ 5. РАЗРЕДА

1. Дат је скуп бројева $A = \{1, 2, 3, \dots, 2022, 2023\}$. Постоје ли скупови B и C такви да је: $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$ и збир бројева скупа B , једнак је збиру бројева скупа C ?
2. Да ли је збир прва 2023 природна броја, паран или непаран број?
3. Између бројева 2023 2022 2021 ... 3 2 1 треба поставити знаке + или – тако да добијени израз има најмању могућу вредност. Колика је та вредност?
4. Могу ли се између бројева 2023 2022 2021 ... 3 2 1 поставити знаци + и – тако да вредност добијеног израза буде: а) 2; б) 1; в) 1012?
5. Да ли је број 2023 прост или сложен број?
6. Колико делилаца укључујући јединицу и самог себе има број 2023?
7. Одреди збир свих делилаца броја 2023.
8. Може ли производ три проста броја бити 2023?
9. Дужине ивица квадра су природни бројеви. Колико има различитих квадра чија је запремина 2023?
10. Правоугаони лист папира чија је површина 2023 cm^2 треба исећи на мање и подударне квадрате чија дужина странице је природан број. Колико најмање и колико највише се може добити таквих квадрата?
11. Збир три проста броја је 2023. Може ли производ тих простих бројева бити паран број.
12. Одреди бар три тројке простих бројева такве да је њихов збир 2023.
13. Постоје ли четири проста броја чији је збир једнак 2023?
14. НЗС два природна броја је 2023. Које вредности може имати НЗД та два природна броја?
15. Производ НЗД и НЗС два природна броја је 2023. О којим бројевима је реч?
16. На једном математичко-информатичком научном скупу учествује 2023 научника од којих се сваки бави математиком или информатиком. Пет седмина од њих се бави математиком, а три седмине информатиком. Колико учесника тог скупа се бави и математиком и информатиком?
17. Дат је скуп бројева $S = \{1, 2, 3, \dots, 2021, 2023\}$. Колико бројева из скуп S није дељиво ни са 2 ни са 3 ни са 5?
18. Збир бројиоца и имениоца разломка $\frac{p}{q}$ ($q \neq 1$) је 2023. Одреди најмањи и највећи од тих разломака, тако да се добијени разломак не може скратити ако је добијени разломак:

- а) прави разломак; б) било који разломак.
19. Одреди разломак који је једнак разломку $\frac{3}{4}$ тако да је збир његовог бројиоца и имениоца једнак 2023.
20. Која цифра се налази на 2023 месту у запису разломка $14/33$?
21. Шта је веће: $\frac{2022}{2023}$ или $\frac{2023}{2024}$?
22. Упореди разломке $\frac{6}{2023}$ и $\frac{5}{1684}$.
23. Одреди све просте бројеве p за које је
- $$\frac{288}{2023} < \frac{1}{p} < \frac{289}{579} .$$
24. На куглицама су записани бројеви 2, 3, 4 ... 2021, 2023. Све куглице су потом постављене у непровидну врећу. Куглице из вреће извлачи Сава. Ако Сава извуче прост број један бод се уписује Вељку, а ако Сава извуче сложен број онда један број добија Драган. Игра се завршава када један од такмичара сакупи 101 бод. Да ли је дата игра поштена, то јест да ли Вељко и Драган имају једнаке шансе да победе?
25. Ако се број 2023 сабере са природним бројем n , добија се палиндром АВВА. Одреди најмању могућу вредност n .
26. Ако се број 2023 сабере са природним бројем n , добија се петодигрни палиндром АВСВА. Одреди највећу могућу вредност n .
27. На колико начина се број 2023 може написати као збир два палиндрома?
28. На колико начина се број 2023 може написати као збир три палиндрома?
29. Дато је n тачака у равни. Могу ли дате тачке одређивати тачно 2023 праве?
30. Колико дужи је одређено са 2023 тачке?

ЗАДАЦИ ЗА УЧЕНИКЕ 6. РАЗРЕДА

31. На колико начина се број 2023 може приказати као производ:
а) три различита цела броја; б) четири различита цела броја?
32. Може ли збир два спољашња угла троугла бити 2023' (минута)?
33. Колико делилаца броја 2023 су парни, а колико непарни?
34. Може ли се скуп бројева $S = \{ 1, 2, 3, \dots, 2020, 2021, 2023 \}$ поделити на два подскупа А и В, који немају заједничких елемената, тако да је збир елемената скупа А једнак збиру елемената скупа В?

35. Може ли се скуп бројева $S = \{-2023, -2022, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 2020, 2021, 2023\}$ поделити на два подскупа A и B , који немају заједничких елемената, тако да је $A \cup B = S$ и: а) збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B ; б) производ елемената скупа A једнак производу елемената скупа B ?

36. Реши једначину:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}}} = 2023.$$

37. Када се број 2023 подели природним бројем m добије се количник n и остатак n . Одреди природне бројеве m и n .
38. Између цифара 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 не мењајући им редослед напиши симболе рачунских операција и заграде тако да добијени израз има предност 2023.
39. Могу ли се 2023 кликера поделити групи од 64 дечака тако да сваки од њих добије бар један кликер и да сви добију различит број кликера?
40. Могу ли се 2023 кликера поделити групи од 63 дечака тако да сваки од њих добије бар један кликер и да сви добију различит број кликера?
41. У једној школи има 2023 ученика. Докажи да бар 3 од њих имају исте иницијале. Докажи да бар 6 од њих славе рођендан истог дана.
42. Скуп P чине 2023 проста броја. Доказати да се бар 505 датих простих бројева завршавају истом цифром. Да ли смемо да тврдимо да се бар 506 датих простих бројева завршава истом вцифром?
43. Докажи да у скупу природних бројева постоји 2023 узастопна природна броја који су сложени.
44. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је
- $$p + q = 2023?$$
45. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је
- $$p - 5q = 2023?$$
46. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је
- $$p - q = 2023?$$
47. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је
- $$p + 2q = 2023?$$
48. Постоји ли природан број m који је за 2023 већи од збира својих цифара?
49. Постоји ли природан број n такав да када се сабере са збиром својих цифара добије се 2023?
50. Дат је разломак $17/33$. Колико износи збир првих 2023 цифре иза децималног зареза тог броја?

51. Која цифра се налази на 2023 месту иза децималног записа разломка $3/7$?
52. Може ли се дати квадрат поделити на 2023 мања, необавезно подударна, квадрата?
53. Може ли се дати једнакостранични троугао поделити на 2023 мања, необавезно подударна, једнакостранична троугла?
54. Може ли збир 2023 узастопна цела броја бити 2013?
55. Може ли збир 2023 узастопна цела броја бити једнак њиховом производу?
56. Једнаки углови једнакокраког троугла ABC су по 2023°. Да ли је троугао ABC оштроугли, правоугли или тупоугли?

ЗАДАЦИ ЗА УЧЕНИКЕ 7. РАЗРЕДА

57. У декадном запису природног броја $m = 20232023\dots20232023$ група цифара 2023 се понавља n пута. Постоји ли природан број n такав да је m потпун квадрат?
58. Одреди најмањи природан број n такав да је број $2023n$ потпун квадрат.
59. Одреди најмањи природан број n такав да је $\sqrt{2023 + n}$ природан број.
60. Колико има природних бројева n таквих да је

$$3 \leq \sqrt{n - 2023} \leq 17?$$

61. Шта је веће: 2^{2023} или 3^{1336} ?
62. Одреди најмањи природан број који има тачно 2023 делиоца.
63. Одреди природан број n , ако број 2023^n има 231 делилац.
64. Постоји ли многоугао чији је збир унутрашњих углова једнак 2023° ?
65. Постоји ли природан број n такав да је

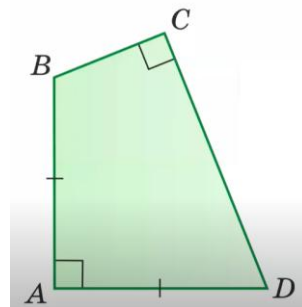
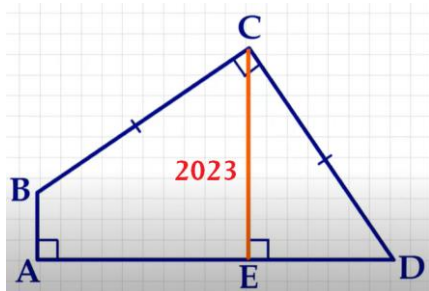
$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = 2023?$$

66. Дати су бројеви $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}$ и $B = 2^{2024}$. Шта је веће: A или B ?
67. Докажи да је број $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}$ дељив са 15, а није дељив са 30. Која је последња цифра броја A ?
68. Скуп S садржи 2023 различита природна броја. Докажи да у скупу S постоји бар 55 природних бројева чија је разлика дељива са 37.
69. Шта је веће 2^{2023} или 3^{1348} ?
70. Колико је

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2019^2 - 2020^2 + 2021^2 - 2023^2?$$

71. Да ли је број $m = 1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023}$ дељив са 10?
72. Постоји ли природан број n такав да је $5^n + 6^n + 7^n + 8^n$ дељиво са 10?

73. Докажи да једначина $x^4 + y^4 = 202320232023$ нема решења у скупу целих бројева.
74. На тениском турниру учествује 2023 тенисера. Једно од правила турнира је да победник меча наставља такмичење, а поражени испада из даљег такмичења. Колико укупно мечева треба одиграти да би се добио победник турнира?
75. Колико има природних бројева мањих од 2023 који имају тачно:
а) 3 делиоца; б) тачно 5 делилаца?
76. Одреди природан број n , ако број 2023^n има 231 делилац.
77. Да ли је број $0, 202320232023\dots$ где се група цифара 2023 бесконачно понавља рационалан или ирационалан број? Ако је дати број рационалан одреди његов запис у облику m/n .
78. У правоуглом троуглу ABC полупречник уписаног круга је 2023. Докажи да је збир катета тог троугла већи од 8092.
79. У четвороуглу $ABCD$ је: $BC = CD$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ и $CE = 2023$. Одреди површину датог четвороугла $ABCD$ (слика лево).



80. У четвороуглу $ABCD$ је: $AB = AD$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ и $BC + CD = 2023$. Одреди површину датог четвороугла $ABCD$ (слика десно).
81. Хипотенуза правоуглог троугла је 2023, а један оштар правоуглог угао троугла је 15° . Колика је површина тог троугла?
82. Дат је шестоугао $ABCDEF$ чије су сви углови једнаки, а странице шестоугла имају дужину: $AB = 2023$, $BC = 2024$, $CD = 2025$ и $EF = 2021$. Одредити обим тог шестоугла.
83. Дат је траpez $ABCD$ чије дијагонале се секу у тачки O тако да је површина троугла AOD једнака 2023. Колика је површина троугла BOC ?
84. Површина четвороугла $ABCD$ је 2023. На страници AB дате су тачке M и N , тако да је $AM = MN = NB$, а на страници CD тачке P и Q тако да је $CP = PQ = QC$. Одреди површину четвороугла $MNPQ$.
85. Постоји ли многоугао који има 2023 дијагонале?
86. Може ли конвексни многоугао са 2023 странице имати све унутрашње углове изражене природним бројем степени?
87. Збир дељеника делиоца и количника је 2023, а разлика количника и делиоца је 245. О којим бројевима је реч?
88. На колико начина се број 2023 може приказати као збир неколико природних бројева?

89. На колико начина се број 2023 може приказати као збир неколико узастопних целих бројева?
90. У правоугаонику чије су димезије 168 и 144 на случајан начин су распоређене 2023 тачке. Докажи да при ма каквом распореду постоје две тачке такве да њихово међусобно растојање није веће од 5.
91. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x! + y^2 = 2023$?

ЗАДАЦИ ЗА УЧЕНИКЕ 8. РАЗРЕДА

92. Докажи да једначина $x^2 + y^2 = 2023$ нема решења у скупу целих бројева?
93. Дата је једначина $x^2 - y^2 = 2023$. Колико решења дата једначина има у скупу:
а) природних бројева; б) целих бројева?
94. Да ли једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2023$ има решења у скупу природних бројева?
95. Докажи да једначина $x^2 - 3y^2 = 2023$ нема решења у скупу целих бројева.
96. Колико најмање, а колико највише квадрата природних бројева треба сабрати да би добијени збир био 2023?
97. Постоји ли правоугли троугао чије су дужине свих страница природни бројеви, а једна катета има дужину 2023?
98. Докажи да не постоји правоугли троугао чије су дужине катета природни бројеви, а хипотенуза има дужину 2023.
99. Постоји ли правоугли троугао чије су дужине катета природни бројеви, а површина једнака 2023? Колико таквих различитих троуглова има?
100. Може ли обим правоуглог троугла чије су дужине свих страница природни бројеви бити 2023?
101. Дужине ивица квадра су природни бројеви. Може ли површина тог квадра бити 2023?
102. Када се број 2023 подели природним бројем m добије се количник n и остатак p . Одреди природне бројеве m и n .
103. Колико решења у скупу природних бројева има једначина $x^2 - y^2 = 2^{2023}$?
104. На колико начина се број 2023 може приказати као збир неколико узастопних природних бројева?
105. За целе бројеве x и y важи једнакост

$$2xy + 3x + 4y = 2023.$$

Докажи да је бар један од бројева x и y негативан.

106. Колико решења у скупу природних бројева има једначина

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2023}?$$

107. Колико целобројних решења има једначина

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2023}.$$

108. Докажи да је

$$\frac{88}{45} < \frac{1}{\sqrt{1936}} + \frac{1}{\sqrt{1937}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} + \frac{1}{\sqrt{2023}} < 2.$$

109. Докажи да у декадном запису броја 2^{2023} постоји цифра која се појављује најмање 20 пута.

110. Постоји ли скуп тачака у равни такав да одређују тачно:

а) 2023 дужи; б) 2023 правих?

111. Докажи да постоји n тачака у простору које одређују тачно 2023 различите равни.

112. Колико решења у скупу природних бројева има једначина $5x + 8y = 2023$.

113. Реши једначину

$$||x - 1| - 3| = 2023.$$

114. Реши неједначину

$$|x + |x + |x||| \leq 2023.$$

115. Дата је једначина

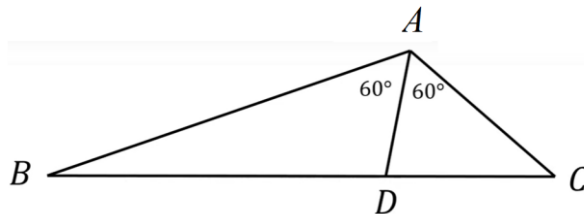
$$||\dots|x + |x + \dots |x|\dots|| = 2023$$

где је број (отворених и затворених) апсолутних заграда једнак природном броју k ($k > 1$).
Одреди све вредности броја k , тако да су сва решења дате једначине целобројна.

116. У троуглу ABC , страница $BC = a = 2023$, а за унутрашње углове троугла важи релација

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 4. \text{ Докажи да је } \frac{bc}{b+c} = 2023.$$

117. Дат је троугао ABC тако да је $AB = 2AC$ и $\angle BAC = 120^\circ$. Симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки D , тако да је $AD = 2023$. Израчунај страницу BC .



118. Реши једначину:

$$\frac{x+6}{2018} + \frac{x+7}{2019} + \frac{x+8}{2020} = \frac{x+9}{2021} + \frac{x+10}{2022} + \frac{x+11}{2023}.$$

119. Одреди скуп решења једначине:

$$\frac{x - 2023}{x - 2} + \frac{x - 2022}{x - 3} + \frac{x - 2021}{x - 4} + \frac{x - 2020}{x - 5} + \frac{x - 2019}{x - 5} + 5 = 0$$

120. Напиши бар једну неједначину чије је једино решење број 2023.
121. Напиши бар једну једначину чије решење је скуп $(2023, \infty)$.
122. Дато је 13 узастопних природних бројева. Када је изостављен један од њих, збир преосталих 12 бројева је 2023. О којим бројевима је реч?
123. На колико начина се од комада злата масе 2023 грама, могу направити златници масе 4 грама и 7 грама?
124. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је

$$4x^2 + 5y^2 = 2023?$$

125. Може ли се коцка чија ивица има дужину 13 исећи (поделити на 2023 мање коцке чије ивице имају дужину изражену природним бројем)?
126. Ако са $S(n)$ означимо збир цифара природног броја n , реши једначине:
- а) $n + S(n) = 2023$;
- б) $n + S(n) + S(S(n)) = 2023$.
127. Одредити цео део броја

$$\frac{10^{4046} + 2}{10^{2023} + 1}.$$