

Alija Muminać, Jens Carstensen,
Данска

За една олимписка задача

Ќе покажеме како и учениците од основното образование (навистина, понекогаш) можат да решаваат и решат дури и олимписка задача. Станува збор за задача која била натпреварувачка на математичката олимпијада која е одржана во Германија, 199 година.

Задача. Правоаголниците $ABDE$, $BCFG$ и $CAHI$ се конструирани во надворешноста на даден триаголник ABC . Докажи дека симетралите на страните EH , IF и GD се сечат во една точка.

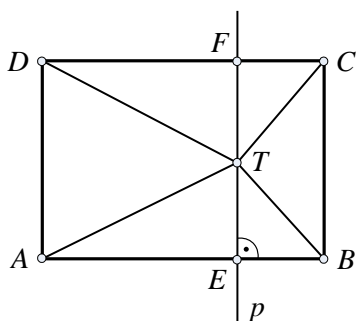
Решение. Ќе ја користиме лемата (лема е помошно тврдење која се употребува за докажување на други тврдења(теореми))

Лема. Нека $ABCD$ е правоаголник кој лежи во рамнината α . Докажи дека за секоја точка T од рамнината α е исполнето равенството:

$$\overline{AT}^2 + \overline{CT}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{DT}^2.$$

Доказ. Ако се земе во предвид положбата на точката T во однос на правоаголникот $ABCD$ разликуваме три случаи.

1° Точката T лежи во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ (види цртеж). Низ точката T ќе повлечеме права $p \perp AB$. Правата p ја сече страната AB во точката E а страната CD во точката F , при што



$\overline{AE} = \overline{DF}$ и $\overline{EB} = \overline{FC}$. Со примена на теоремата на Питагора за правоаголните триаголници AET и CFT , односно EBT и DFT добиваме:

$$\overline{AT}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ET}^2$$

$$\overline{CT}^2 = \overline{FT}^2 + \overline{FC}^2.$$

Со собирање на овие две равенства и со претходно добиените равенства имаме:

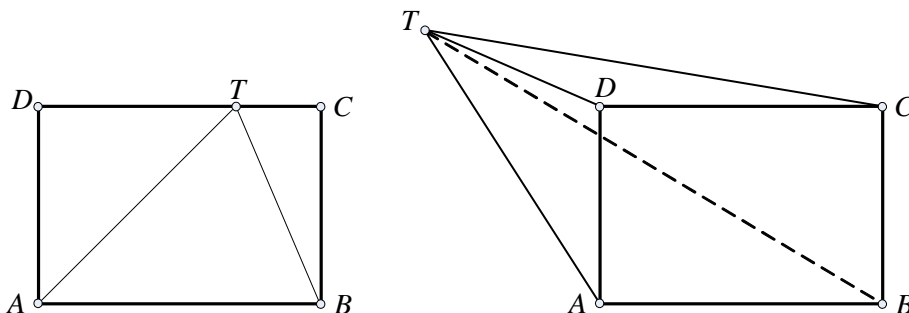
$$\overline{AT}^2 + \overline{CT}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ET}^2 + \overline{FT}^2 + \overline{FC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{ET}^2 + \overline{FT}^2. \quad (1)$$

Слично, имаме $\overline{BT}^2 = \overline{ET}^2 + \overline{EB}^2$ и $\overline{DT}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FT}^2$ од каде со собирање добиваме:

$$\overline{BT}^2 + \overline{DT}^2 = \overline{ET}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{FT}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{ET}^2 + \overline{FT}^2. \quad (2)$$

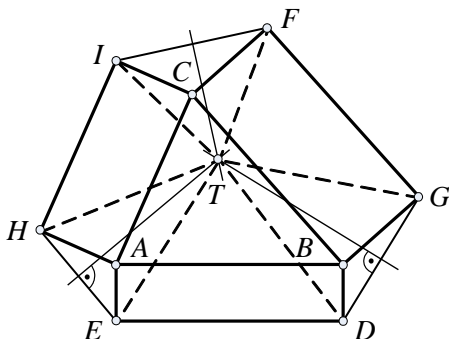
Од (1) и (2) го добиваме тврдењето од лемата.

2° Точката T лежи на страната $ABCD$ (види цртеж).



3° Точката T лежи надвор од правоаголникот $ABCD$ (види цртеж).

Доказот на случаите 2° и 3° го препуштаме на читателите (се надеваме дека читателите тоа ќе го направат без проблеми). Сега се враќаме на решение на задачата.



Нека симетралите на отсечките EH и GD се сечат во точката T (види цртеж). Со примена на лемата добиваме $\overline{TA}^2 + \overline{TD}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{TE}^2$ и заради $\overline{TE} = \overline{TH}$ и $\overline{TD} = \overline{TG}$ (зошто?), добиваме:

$$\overline{TA}^2 + \overline{TG}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{TH}^2 \quad (3)$$

$$\overline{TA}^2 + \overline{TI}^2 = \overline{TH}^2 + \overline{TC}^2 \quad (4)$$

$$\overline{TC}^2 + \overline{TG}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{TF}^2 \quad (5)$$

Ако од равенството (4) го одземеме равенството (3) добиваме дека

$$\begin{aligned} \overline{TA}^2 + \overline{TG}^2 - \overline{TA}^2 - \overline{TI}^2 &= \overline{TB}^2 + \overline{TH}^2 - \overline{TH}^2 - \overline{TC}^2 \\ \overline{TG}^2 - \overline{TI}^2 &= \overline{TB}^2 - \overline{TC}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

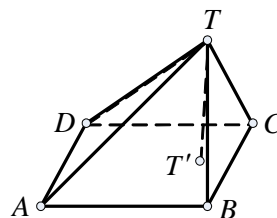
Со одземање на равенството (6) од равенството (5) добиваме дека

$$\overline{TC}^2 + \overline{TG}^2 - \overline{TG}^2 + \overline{TI}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{TF}^2 - \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2$$

$$\overline{TI}^2 = \overline{TF}^2$$

$$\overline{TI} = \overline{TF},$$

со што доказот е комплетиран.



Забелешка. Во лемата, дадениот правоаголник $ABCD$ и точката T лежат во иста рамнина α . Пробајте да ја докажете проширената лема, т.е. ако точката T не лежи во иста рамнина со правоаголникот $ABCD$, тогаш

$$\overline{AT}^2 + \overline{CT}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{DT}^2. \text{ (види цртеж)}$$

Упатство. Проекцијата на точката T во рамнината во која лежи правоаголникот $ABCD$ означи ја со T' итн. (користи го доказот на лемата).

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ