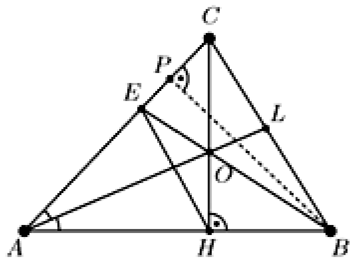
Ристо Малчески
Скопје

ТЕОРЕМА НА ЧЕВА (ВТОР ДЕЛ)

Во статијата [2] е докажана теоремата на Чева. Во оваа статија, за која може да се каже дека е продолжение на статијата [2], ќе разгледаме неколку задачи во чие решавање се користи теоремата на Чева. Притоа, да забележиме дека скоро сите разгледани задачи се задавани на национални математички олимпијади во оддел-ни држави или на престижни математички турнири.

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина $CH\,(H\in AB)$ и симетрала AL $(L\in BC)$ на $\measuredangle BAC$ кои се сечат во точката O. Правата BO ја сече страната AC во точката E. Докажи дека $\measuredangle AHE>45^\circ$.



Решение. Прво да забележиме дека сака-ното неравенство $\measuredangle AHE>45^\circ$ е еквива-лентно со неравенството $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}>\frac{\overline{AH}}{\overline{HC}}$. Од те-оремата на Чева за $\triangle ABC$ и правите $AL,$ BE и CH добиваме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{CL}}{\overline{LB}}\cdot\frac{\overline{BH}}{\overline{HA}}=1 \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$$

Нека BP е висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето B. Имаме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CH}} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{HC}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{BH}}.$$

Останува да забележиме дека $\overline{BP}>\overline{BH}$ како тетиви во кружница со дија-метар BC соодветни на $\measuredangle BCP>\measuredangle BCH$,

2. Даден е $\triangle ABC$ со центар I_a на припишаната кружница, која ја допира страната BC. Правата AI_a по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката T. Нека X е точка на TI_a таква што $\overline{XI_a}^2=\overline{XA}\cdot\overline{XT}$ и нека $XA'\perp BC$, $A'\in BC$. Аналогно се дефинираат точките B' и C'. Докажи дека правите AA',BB' и CC' се сечат во една точка.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки во $\triangle ABC$. Нека M,P и H се ортогоналните проекции соодветно на T,I_a и A врз BC. Да означиме $\overline{BM}=m=\frac{a}{2}, \overline{BH}=h, \overline{BA'}=x$ и $\overline{BP}=u$. Тогаш од условот на задачата сле-дува $\overline{A'P}^2=\overline{A'M}\cdot\overline{A'H}$ и $x=\frac{u^2-hm}{h+m-2u}$. Аналогно, ако ги замениме улогите на

B и C, добиваме

$$a-x=\frac{(a-u)^2-(a-h)(a-m)}{2(a-u)-(a-h)-(a-m)}.$$

Според тоа

$$\frac{x}{a-x}=\frac{u^2-hm}{(a-u)^2-(a-h)(a-m)}=\frac{(p-b)^2-\frac{ac\cos\beta}{2}}{(p-c)^2-\frac{ab\cos\gamma}{2}}.$$

Ако последното равенство го помножиме со аналогните равенства за B' и C', тогаш тврдењето на задачата следува од добиеното равенство и теоремата на Чева.

3. Точките P,Q и R соодветно од страните BC,CA и AB на $\triangle ABC$ се такви што правите AP,BQ и CR се сечат во точката S. Ако

$$P_{ABS}=P_{QSPC} \text{ и } \frac{P_{ARC}}{P_{BRC}}=\frac{\overline{CA}^4}{\overline{BC}^4},$$

докажи дека четириаголникот $ABPQ$ е тетивен.

Решение. Ќе ги искористиме стандардните ознаки $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и h_a,h_b за соодветните висини. Од $P_{ABS}=P_{QSPC}$ добиваме $P_{ABP}=P_{QBC}$, па затоа $\overline{BP}\cdot h_a=\overline{CQ}\cdot h_b$. Значи, $\overline{BP}=\overline{CQ}\cdot\frac{h_b}{h_a}=\overline{CQ}\cdot\frac{a}{b}$. Аналогно, од $P_{ABS}=P_{QSPC}$ добиваме $P_{ABQ}=P_{APC}$ и $\overline{AQ}=\overline{CP}\cdot\frac{b}{a}$. Бидејќи

$$\frac{\overline{BP}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{AR}}{\overline{CP}\cdot\overline{QA}\cdot\overline{RB}}=\frac{\frac{a}{b}\overline{CQ}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{AR}}{\overline{CP}\cdot\frac{b}{a}\overline{CP}\cdot\overline{RB}}=\frac{a^2\overline{CQ}^2\cdot b^4}{b^2\overline{CP}^2\cdot a^4}=\left(\frac{\overline{CQ}\cdot b}{\overline{CP}\cdot a}\right)^2,$$

од теоремата на Чева за $\triangle ABC$ следува $\frac{\overline{CQ}\cdot b}{\overline{CP}\cdot a}=1$, т.е. $\overline{CQ}\cdot b=\overline{CP}\cdot a$, што значи дека четириаголникот $ABPQ$ е тетивен.

4. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I и средини на страните AB,BC и CA соодветно C_0,A_0 и B_0. Правата C_0I ја сече A_0B_0 во точка C_1. Аналогно се дефинираат точките A_1 и B_1. Докажи дека

а) правите AA_1,BB_1,CC_1 се сечат во една точка.,

б) нормалите повлечени од A_1,B_1,C_1 соодветно на BC,CA,AB се сечат во една точка.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$.

а) Бидејќи A_0C_0 е средна линија во $\triangle ABC$, отсечката низ I која е нормална на AC и на A_0C_0 има должина $\frac{h_b}{2}$. Значи, висината од I во $\triangle A_0C_0I$ има должина $\frac{h_b}{2}-r$. Ако го искористиме овој факт и аналогниот факт за $\triangle B_0C_0I$, последователно добиваме

$$\frac{\overline{A_0C_1}}{\overline{B_0C_1}}=\frac{P_{A_0C_0C_1}}{P_{B_0C_0C_1}}=\frac{P_{A_0C_0I}}{P_{B_0C_0I}}=\frac{(\frac{h_b}{2}-r)\frac{b}{2}}{(\frac{h_a}{2}-r)\frac{a}{2}}=\frac{b(\frac{P}{b}-\frac{P}{s})}{a(\frac{P}{a}-\frac{P}{s})}=\frac{s-b}{s-a}=\frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}},$$

каде C_2 е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и страната AB. Според тоа, CC_1 минува низ C_2.

Аналогно се докажува дека AA_1 и BB_1 минуваат низ соодветните допирни точки и важат соодветните пропорции. Сега тврдењето следува од теоремата на Чева.

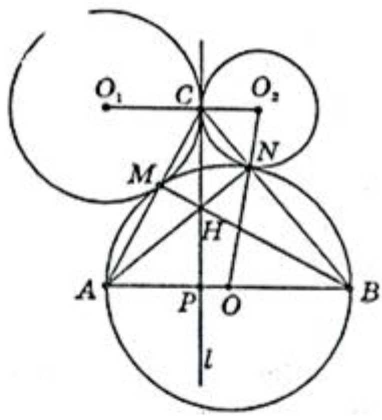
б) Од претходно докажаното равенство $\frac{\overline{A_0C_1}}{\overline{B_0C_1}}=\frac{s-b}{s-a}$ следува дека C_1 е допирната точка на припишаната кружница на $\triangle A_0B_0C_0$ кон страната A_0B_0. Аналогните тврдења важат и за точките A_1 и B_1. Сега тврдењето следува од фактот дека

$$\overline{C_1A_0}^2+\overline{B_1C_0}^2+\overline{A_1B_0}^2=\overline{C_1B_0}^2+\overline{B_1A_0}^2+\overline{A_1C_0}^2$$

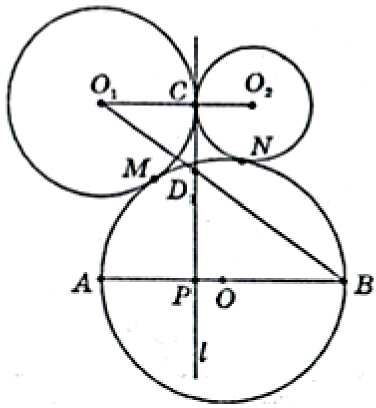
(теорема на Карно).

5. Кружниците k_1 и k_2 со центри соодветно во точките O_1 и O_2 се допираат во точката C, а кружницата k со центар O надворешно ги допира k_1 и k_2. Нека l е заедничката тангента на k_1 и k_2 во точката C и нека AB е дијаметар на k нормален на l, при што точките A и O_1 се во иста полурамнина во однос на правата l . Докажи дека правите AO_2, BO_1 и l се сечат во една точка.

Решение. Со r, r_1 и r_2 да ги означиме радисуите на k, k_1 и k_2 соодветно, со M и N допирните точки на k соодветно со k_1 и k_2 и со P пресечната точка на l со AB (цртеж десно).



Од $O_1O_2 \perp l$ и $AB \perp l$ следува дека $\measuredangle BON = \measuredangle CO_2N$. Бидејќи триаголниците BON и CO_2N се рамнокраки, тие се слични, т.е. $\triangle BON \sim \triangle CO_2N$. Затоа $\measuredangle ONB = \measuredangle CNO_2$, што значи дека точките C, N и B лежат на една права. Освен тоа, од сличноста следува $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{CO_2}}=\frac{r}{r_2}$. Аналогно добиваме дека точките A, M и C се колинеарни и $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{r}{r_1}$. Од друга страна бидејќи AB е дијаметар на k, важи $\measuredangle AMB = \measuredangle ANB = 90^\circ$, што значи дека AM и AN се висини во $\triangle ABC$. Третата висина во овој триаголник е CP. Според тоа, правите AN, AM и l се сечат во една точка H, која е ортоцентар на $\triangle ABC$.



Според теоремата на Чева имаме

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1,$$

од каде добиваме

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{r}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r} = 1, \text{ т.е. } \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1,$$

односно

$$\frac{r_1}{\overline{PB}} = \frac{r_2}{\overline{AP}}. \qquad (1)$$

Нека сега D_1 и D_2 се пресечните точки на правата l соодветно со правите BO_1 и AO_2. Јасно, $\triangle O_1CD_1 \sim \triangle BPD_1$ (цртеж десно), па затоа $\frac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1P}} = \frac{r_1}{\overline{PB}}$. Аналогно $\frac{\overline{CD_2}}{\overline{D_2P}} = \frac{r_2}{\overline{AP}}$, па затоа од (1) следува дека $\frac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1P}} = \frac{\overline{CD_2}}{\overline{D_2P}}$, т.е. $\frac{\overline{CP}}{\overline{D_1P}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{D_2P}}$, од што следува $D_1 = D_2$. Според тоа, дека правите AO_2, BO_1 и l се сечат во една точка.

6. Даден е тетивен шестаголник $ABCDEF$ за кој важи

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{AF}. \qquad (1)$$

Нека точките B и B_1 се симетричлни во однос на правата AC, D и D_1 се симетрични во однос на правата CE, F и F_1 се симетрични во однос на правата EA. Докажи дека $\triangle B_1D_1F_1$ е сличен со $\triangle BDF$.

Решение. Од $\triangle ACE$ добиваме

$$\frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle DAE} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}}, \frac{\sin\measuredangle AEB}{\sin\measuredangle CEB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \frac{\sin\measuredangle ECF}{\sin\measuredangle ACF} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}},$$

па од (1) следува

$$\frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle DAE} \cdot \frac{\sin\measuredangle AEB}{\sin\measuredangle CEB} \cdot \frac{\sin\measuredangle ECF}{\sin\measuredangle ACF} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = 1.$$

Сега, од синусната теорема на Чева следува дека правите AD, BE и CF се сечат во една точка. Нека таа точка е P.

Да ги разгледаме $\triangle AF_1P$ и $\triangle CD_1P$, Ако искористиме дека F_1 и D_1 се симетрични на F и D во однос на AE и CE и тоа дека шестаголникот е тетивен, добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle PAF_1 &= |\measuredangle PAE - \measuredangle F_1AE| = |\measuredangle DAE - \measuredangle FAE| \\ &= |\measuredangle DCE - \measuredangle FCE| = |\measuredangle D_1CE - \measuredangle PCE| \\ &= \measuredangle PCD_1.\end{aligned}$$

Горниот израз покажува дека D и D_1 се на различни страни на CF ако и само ако F и F_1 се во една иста полурамнина во однос на AD. Освен тоа, ако искористиме дека $\triangle APF \sim \triangle CPD$ и $\overline{AF_1} = \overline{AF}$ и $\overline{CD_1} = \overline{CD}$, добиваме

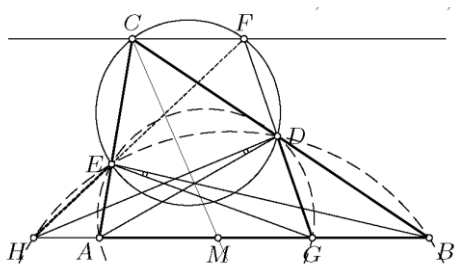
$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{CD_1}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}.$$

Според тоа, $\triangle AF_1P \sim \triangle CD_1P$. Оттука $\measuredangle APF_1 = \measuredangle CPD_1$ и $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PD_1}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{DP}}$, при што последното равенство следува од сличноста $\triangle APF \sim \triangle CPD$. Освен тоа, бидејќи D_1 е надвор од $\measuredangle PCD$ ако и само ако F_1 е во $\measuredangle FAP$, добиваме $\measuredangle F_1PD_1 = \measuredangle APC = \measuredangle FPD$. Според тоа, $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PD_1}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{DP}}$ и $\measuredangle F_1PD_1 = \measuredangle FPD$, па затоа $\triangle F_1D_1P \sim \triangle FDP$. Последното значи дека $\frac{\overline{F_1D_1}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{PD_1}}{\overline{PD}}$. Аналогно се докажува дека $\frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PD_1}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{F_1D_1}}{\overline{FD}}$ и $\frac{\overline{F_1B_1}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{F_1D_1}}{\overline{FD}}$. Од добиените равенства следува $\triangle B_1D_1F_1 \sim \triangle BDF$.

7. На страните BC и AC на $\triangle ABC$ земени се соодветно точки D и E. Нека $F(F \neq C)$ е пресечната точка на кружницата опишана околу $\triangle CED$ и правата која минува низ точката C и е паралелна со правата AB. Нека G е пресечната точка на правата FD и страната AB, а H е точка на правата AB таква што $\measuredangle HDA = \measuredangle GEB$ и $H - A - B$. Ако $\overline{DG} = \overline{EH}$, докажи дека пресечната точка на отсечките AD и BE припаѓа на симетралата на $\measuredangle ACB$.

Решение. Од

$$\begin{aligned}\measuredangle AGD &= 180^\circ - \measuredangle CFD = \measuredangle CED \\ &= 180^\circ - \measuredangle AED,\end{aligned}$$



следува дека точките A, E, D, G се конциклични. Според тоа, важи $\measuredangle DAG = \measuredangle DEG$. Но, тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle DHB &= \measuredangle DAG - \measuredangle HDA \\ &= \measuredangle DEG - \measuredangle BEG = \measuredangle DEB,\end{aligned}$$

па затоа и точките H, E, D, B се конциклични. Оттука,

$$\measuredangle BHE = 180^\circ - \measuredangle BDE = \measuredangle CDE = \measuredangle CFE,$$

што значи дека точките F, E, H се колинеарни. Според тоа, $\overline{EH} = \overline{EF} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ и $\overline{DG} = \overline{DF} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}}$, па условот $\overline{DG} = \overline{EH}$ го добива обликот $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$. Од друга страна, од $\measuredangle DEF = \measuredangle DCF = \measuredangle ABC$ и $\measuredangle DFE = \measuredangle ACB$ следува дека $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, па важи $\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$, каде M е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ и страната AB. Според тоа, $\frac{\overline{AE}}{\overline{EE}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = 1$, па од теоремата на Чева следува дека правите AD и BE се сечат на CM .

Литература

1. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: *Geometrija za* I *razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998
2. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма/Математички талент, Скопје