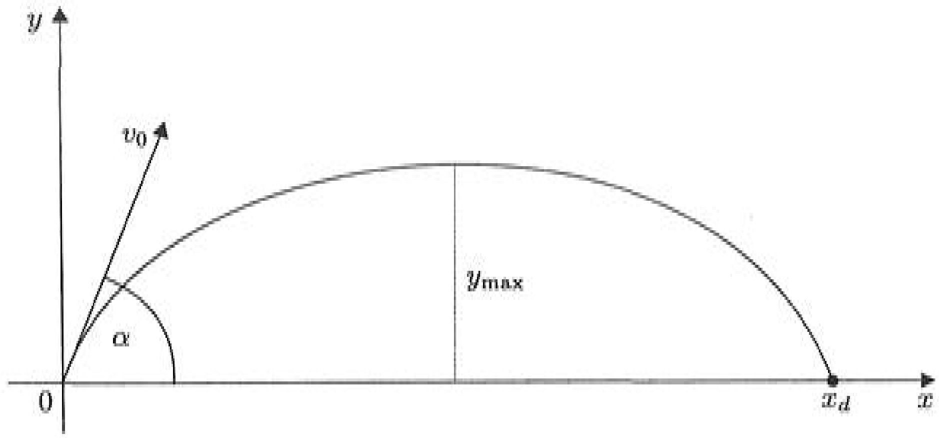
Примена елементарних функција у физици – хитац

***Нада Савић*, Крушевац**

Тело коме је дата нека почетна брзина v_0 и препуштено је да се даље креће под утицајем гравитационих сила зове се **хитац**. Најједноставнији пример оваквог кретања је хитац из ватреног оружја. У овом раду разматраћемо математички модел хица, користећи квадратну функцију и тригонометријске функције.

Путања хица лежи у једној равни, па се може посматрати у координатном систему Oxy, где y-оса има правац гравитационог убрзања. Означимо са α угао који вектор почетне брзине v_0 заклапа са позитивним делом x-осе (слика 1). Тада компонента почетне брзине у правцу x-осе износи $v_0 \cos\alpha$, а у правцу y-осе $v_0 \sin\alpha$.



Слика 1.

Кретања дуж координатних оса су праволинијска. У правцу x-осе не постоји никаква компонента убрзања, па је кретање у том правцу равномерно праволинијско. У правцу y-осе постоји гравитационо убрзање, које је за мале висине константно, па је кретање у правцу y-осе равномерно убрзано кретање. Дакле, једначине кретања хица су:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \tag{2}$$

где је t временска променљива, а g гравитационо убрзање. Приметимо да је у релацији (2) знак „минус“ зато што гравитационо убрзање има супротан смер од смера компоненте почетне брзине у правцу y-осе.

Из релација (1) и (2) следи да су x и y функције променљиве t (за дату почетну брзину v_0), тј. $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Елиминацијом променљиве t добијамо функцију која описује **путању хица**:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{3}$$

Јасно је да је $y = y(x)$ квадратна функција променљиве x. **Домет хица** x_d је решење квадратне једначине $y(x) = 0$ различито од нуле:

(4) $$x_d = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

За дату почетну брзину v_0, домет хица x_d можемо схватити као функцију променљиве α. Домет ће бити највећи ако је $\sin 2\alpha = 1$, одакле је $\alpha = \pi/4$. **Максимална висина хица** $y_{\max}$ је максимум квадратне функције $y(x)$:

(5) $$y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Хитац код кога је угао $\alpha \in (0, \pi/2)$ назива се **коси хитац**. Ако је угао $\alpha = 0$ хитац је **хоризонталан**. У случају хоризонталног хица функција путање је облика:

(6) $$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

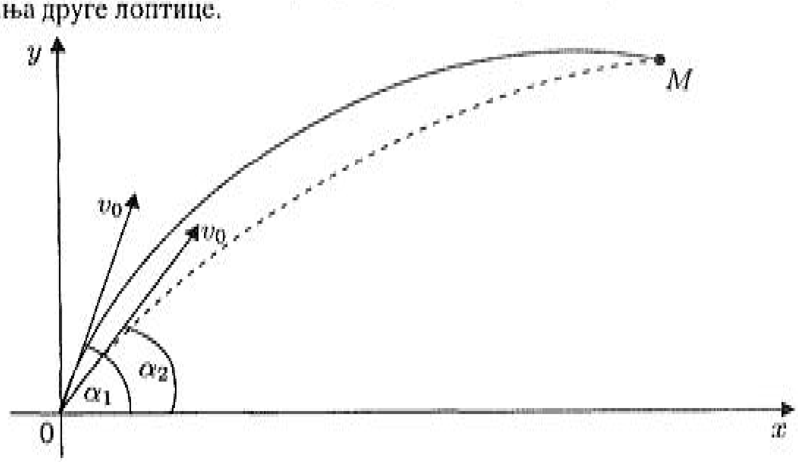
Ако је $\alpha = \pi/2$ (односно $\alpha = -\pi/2$) ради се о **вертикалном хицу** на горе (односно на доле). У случају вертикалног хица на горе из (2) следи да је $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

Напоменимо да се претходно разматрање односи на хитац који је само под утицајем гравитационе силе, док је сила трења са ваздухом занемарена. У случају када сила трења са ваздухом није занемарена за путању хица добија се тзв. балистичка крива. Испитивање балистичке криве захтева сложенији математички апарат који превазилази оквир овог рада.

Наведимо сада три задатка у којима се реални проблеми могу решити применом разматраног математичког модела хица.

1. Играч голфа изводи два ударца са истом почетном брзином $v_0 = 70\,\mathrm{m/s}$. У првом ударцу упућује лоптицу под углом $\alpha_1 = \pi/3$ према хоризонтали. После ког времена играч треба да изведе други ударац у истом смеру под углом $\alpha_2 = \pi/4$ према хоризонтали, да би се лоптице судариле у лету?

Решење. На слици 2 пуном линијом је приказана путања прве лоптице, а испрекиданом линијом путања друге лоптице.



Слика 2.

Нека је t време протекло од тренутка упућивања прве лоптице до тренутка упућивања друге. Тада је време путовања прве лоптице $t + \Delta t$, где је Δt време након кога је упућен други ударац. Релације (1) и (2) кретања прве, односно друге лоптице имају облик:

$$x_1 = v_0(t + \Delta t)\cos\alpha_1, \quad y_1 = v_0(t + \Delta t)\sin\alpha_1 - \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2,$$

односно

$$x_2 = v_0 t\cos\alpha_2, \quad y_2 = v_0 t\sin\alpha_2 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Како је $\alpha_1 = \pi/3$ и $\alpha_2 = \pi/4$, следи:

$$x_1 = \frac{1}{2}v_0(t + \Delta t), \quad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0(t + \Delta t) - \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2,$$

односно

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t, \quad y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

У тачки судара M је $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Дакле,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}v_0(t + \Delta t) = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t,\\
&\frac{\sqrt{3}}{2}v_0(t + \Delta t) - \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,
\end{aligned}$$

одакле елиминацијом променљиве t добијамо тражено време Δt:

$$\Delta t = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})\,v_0}{(1 + \sqrt{2})\,g} \approx 3,08\,\mathrm{s}.$$

Дакле, након $3,08$ с играч мора да изведе други ударац да би се лоптице судариле у лету.

2. Скакач напушта рампу скакаонице брзином $v_0 = 34\,\mathrm{m/s}$ у хоризонталном смеру. Висина рампе износи $h = 4{,}2\ \mathrm{m}$ у односу на подножје, које заклапа угао $\pi/4$ према хоризонтали. Уз услов да се трења занемарују, одредити дужину скока d скакача, тј. растојање од подножја скакаонице до места где скакач додирне подлогу.

Решење. Скакач се може сматрати материјалном тачком у описаном кретању, које се одвија по законима кретања хоризонталног хица (слика 3). У тачки $A(0, -h)$ је подножје скакаонице, док је тачка $B(x_0, -(h + x_0))$ тачка додира скакача са подлогом. Јасно је да је d растојање између тачака A и B.

На основу (6) функција путање скакача је

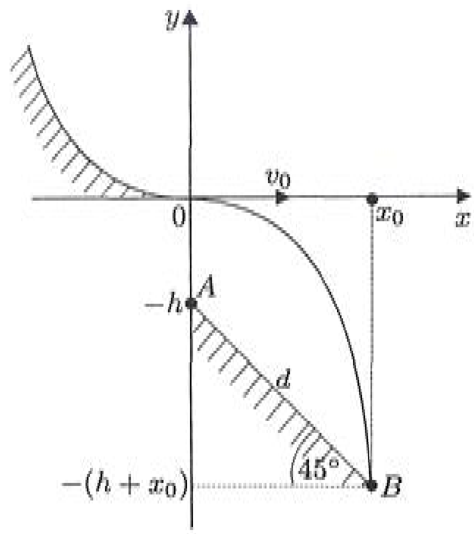
$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Заменом координата тачке додира $B(x_0, -(h + x_0))$ у функцији путање хоризонталног хица (6), добијамо:

$$-h - x_0 = -\frac{gx_0^2}{2v_0^2},$$

односно

$$gx_0^2 - 2v_0^2x_0 - 2v_0^2h = 0.$$



Слика 3.

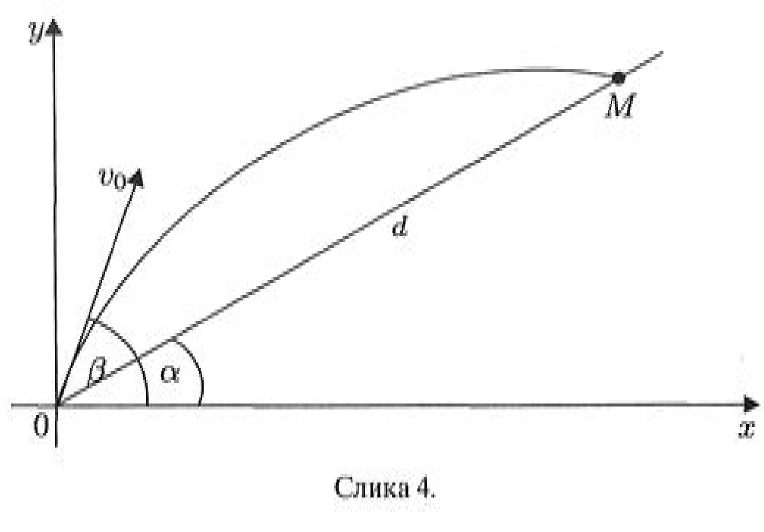
Претходна једначина је квадратна једначина променљиве x_0, која има два реална решења различитог знака. Физички смисао има само позитивно решење, одакле је

$$x_0 = \frac{v_0}{g}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\right).$$

Коначно, тражено растојање је $d = x_0\sqrt{2} \approx 338\,\mathrm{m}$.

3. Топом се гађају објекти на брду нагиба α. На ком растојању d од топа падне граната, ако излети из цеви брзином v_0 под углом β према хоризонтали?

Решење. Нека је M тачка додира гранате са брдом, и $d = d(O, M)$ тражено растојање (слика 4). Координате тачке M су $x_M = d\cos\alpha$ и $y_M = d\sin\alpha$.



Слика 4.

Како тачка M припада путањи хица, на основу релација (1) и (2) важи:

$$x_M = v_0 t \cos\beta, \quad y_M = v_0 t \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2.$$

Следи да је

$$d\cos\alpha = v_0 t \cos\beta, \quad d\sin\alpha = v_0 t \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2.$$

Елиминацијом променљиве t једноставно добијамо тражено растојање

$$d = \frac{2v_0^2 \cos\beta \sin(\beta - \alpha)}{g \cos^2\alpha}.$$

Литература

1. В. Вучић, Д. Ивановић: *Физика 1*, Научна књига Београд, 1988.

2. М. Митровић: *Збирка задатака са такмичења из физике (1990-1995) за 1. разред*, Београд, 1999.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008/09 година