Костадин Тренчевски, Скопје

ПРИМЕНА НА ВЕКТОРИ

Еден од најважните геометриски поими во математиката е поимот за вектор. Со овој поим сте запознаени во VII одделение и научивте дека тој се определува со неговиот **интензитет**, **правец** и **насока**. Се запознавте и со основната операција собирање на вектори. Знаете дека важат својствата за **комутативност** (за секои два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$) и **асоцијативност** (за секои три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$) на операцијата собирање на вектори. Постои и вектор нула (или нулти вектор) $\vec{0}$, за кој важи $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$, за секој вектор $\vec{a}$. Нултиот вектор има интензитет 0, но нема определен правец и насока. Често пати се прифаќа дека тој има ист правец и насока со кој било друг вектор. За секој вектор $\vec{a}$, постои негов **спротивен вектор** $-\vec{a}$, така што важи $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$. Операцијата одземање на вектори го задоволува равенството $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, па затоа одземањето на вектори се сведува на собирање на вектори. Покрај операцијата собирање на вектори од посебно значење е и операцијата **множење на вектор со скалар (број)**. За множењето на вектор со скалар важат **дистрибутивните закони** (за секој скалар k и секои два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; за секои два скалари p и q и за секој вектор $\vec{a}$, $(p+q)\vec{a}=p\vec{a}+q\vec{a}$). Така, ако се користат сите претходно спомнати правила, произлегува дека со векторите се работи со познатите алгебарски правила. Во таа смисла, на пример, $2(\vec{a}-2\vec{b})-3(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=-\vec{a}$.

Еден од поважните поими е поимот за **колинеарност на вектори**. За два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ велиме дека се колинеарни ако постои скалар x така што $\vec{a}=x\vec{b}$ (или пак $\vec{b}=x\vec{a}$). Имено, два ненулти вектора велиме дека се колинеарни ако имаат ист правец, а ако барем еден од тие два вектора е нултиот вектор, тогаш тие два вектора се колинеарни. Пољубопитните веројатно ќе се запрашаат: а како се дефинира производ на вектор со вектор? Одговорот е дека овој производ се изучува во средно училиште, а има голема примена во математиката, физиката и техниката.

По ова кратко повторување за векторите, ќе се задржиме на примената на векторите. Најпрво ќе го докажеме следново тврдење:

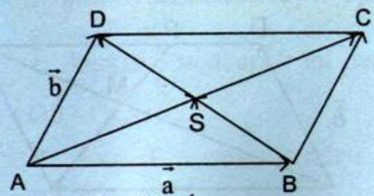
Тврдење. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни и ако важи $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$, тогаш $x=y=0$.

Доказ. Претпоставката дека дадените вектори не се колинеарни, всушност значи дека секој од тие два вектора е ненулти. Да претпоставиме дека $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$. Ако притоа $x\neq 0$, тогаш со делење на даденото равенство со x добиваме $\vec{a}+\frac{y}{x}\vec{b}=\vec{0}$, односно $\vec{a}=-\frac{y}{x}\vec{b}$. Тоа покажува дека дадените вектори се колинеарни, а тоа противречи на претпоставката дека тие не се колинеарни. Значи мора да биде x=0. Аналогно се покажува дека и y=0. ■

Ова едноставно тврдење често пати се користи во геометријата за докажување на разни тврдења. Така на пример, со негова помош се докажува дека тежишните линии во еден триаголник се сечат во една точка (тежиште) и при тоа таа точка ја дели секоја од тежишните линии во однос 2:1. Ќе дадеме два поедноставни примера.

Пример 1. Да се докаже дека дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат.

Решение: Нека ABCD е паралелограм и нека S е пресечната точка на неговите дијагонали. Ќе покажеме дека неговите дијагонали се преполовуваат (црт. 1). Нека $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$



црт. 1.

Векторот $\overrightarrow{AS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$, па $\overrightarrow{AS}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$, за некој скалар x.

Слично, векторот $\overrightarrow{BS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, па $\overrightarrow{BS}=y(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=y(\vec{b}-\vec{a})=y\vec{b}-y\vec{a}$, за некој скалар y. Од равенството $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}$, добиваме дека:

$$(x+y-1)\vec{a}+(x-y)\vec{b}=\vec{0}.$$

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, па $x+y-1=0$ и $x-y=0$, од каде што следува дека $x=y=\frac{1}{2}$. Но, x и y беа воведени со равенствата $\overrightarrow{AS}=x\cdot\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BP}=y\cdot\overrightarrow{BD}$. Според тоа, точката S е средина на дијагоналите AC и BD, односно дијагоналите се преполовуваат. ♦

Забележуваме дека основната идеја при доказот на претходната задача беше во следното. Избравме два произволни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни. Сите останати вектори во рамнината можат да се изразат со нивна помош. Еден од условите за колинеарност се сведува на равенството од облик $p\vec{a}+q\vec{b}=\vec{0}$ од каде што следува дека $p=0$ и $q=0$, каде p и q зависат од непознатите броеви x и y. Од овие две равенства ги определуваме непознатите x и y. Ова е и начинот на решавање на поголем дел од задачите од овој тип.

Пример 2. Нека ABCD е произволен паралелограм, а точката P нека лежи на страната CD и притоа $\overline{DP}:\overline{PC}=1:2$. Ако $AC\cap BP=\{M\}$, да се најде односот $\overline{AM}:\overline{MC}$.

Решение: Нека $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (црт.2). Бидејќи точките A, M и C се колинеарни, следува дека:

$$\overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{AC}=x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}.$$

Точките B, M и P се колинеарни, па $\overrightarrow{BM}=y\cdot\overrightarrow{BP}$. Но,

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=x\vec{a}+x\vec{b}-\vec{a}=(x-1)\vec{a}+x\vec{b}$$ и

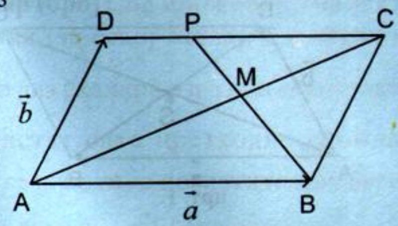
$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=-\vec{a}+\vec{b}+\tfrac{1}{3}\vec{a}=-\tfrac{2}{3}\vec{a}+\vec{b},$$

па добиваме:

$$(x-1)\vec{a}+x\vec{b}=y(\vec{b}-\tfrac{2}{3}\vec{a})$$

$$(x-1)\vec{a}+\tfrac{2}{3}y\vec{a}+x\vec{b}-y\vec{b}=0$$

$$(x-1+\tfrac{2}{3}y)\vec{a}+(x-y)\vec{b}=\vec{0}.$$



црт. 2.

Според претходното тврдење добиваме дека $x+\frac{2}{3}y-1=0$ и $x-y=0$.

Заменувајќи $y=x$ во првата равенка, добиваме $x=y=\frac{3}{5}$. Значи $\overline{AM}=\frac{3}{5}\overline{AC}$,

па $\overline{AM}:\overline{MC}=3:2$.

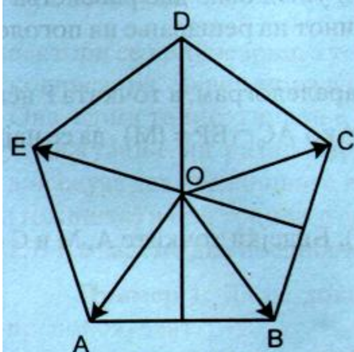
Покрај користењето на горното тврдење, често се користи очигледниот факт дека **ако некој вектор е колинеарен со два вектора кои не се колинеарни, тогаш тој вектор е нултиот вектор**. Имено знаеме дека нултиот вектор е единствениот кој може да има повеќе од еден правец.

Пример 3. Нека O е центар на правилен петаголник ABCDE. Докажи дека важи равенството $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

Решение. Знаеме дека правилен петаголник ABCDE е осносиметричен со пет оски на симетрија. Да ја разгледаме оската на симетрија OD (црт. 3). Збирот $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{OD}$, а исто така и збирот $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{OD}$. Затоа и збирот:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OD}$$

е колинеарен со векторот $\overrightarrow{OD}$.



Меѓутоа, можеме да избереме и друга оска на симетрија, на пример OE. Во тој случај аналогно како пред малку се докажува дека векторот $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{OE}$. Според тоа векторот $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ е колинеарен со два вектора кои не се колинеарни ($\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$), па затоа тој вектор мора да е нулти вектор.

Задачи за самостојна работа

1. Ако O е центарот на рамностран триаголник ABC, докажи дека $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

2. Ако T е тежиштето на триаголникот ABC, докажи дека $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}=\vec{0}$.

3. Нека ABCD е паралелограм. Нека P и Q се средини на страните BC и CD соодветно и нека $AC\cap PQ=\{M\}$. Со помош на вектори најди го размерот $\overline{CM}:\overline{AM}$. (Одг. 1:3)

4. Нека ABC е произволен триаголник. На страните BC и CA избрани се точки A' и B' соодветно, такви што A' е средина на BC и $\overline{AB'}:\overline{B'C}=1:2$. Најди го размерот $\overline{BM}:\overline{MB'}$. (Одг. 3:1)

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС