Никола Петревски
Скопје

МАКСИМУМ И МИНИМУМ ВО ЗАДАЧИ ОД ГЕОМЕТРИЈА

Во практиката човекот често се соочувал со проблемот којводи до барање на минимум или максимум на некоја геометриска величина – должина, плоштина, периметар и друго. Овој проблем сврзан со името на картагенската царица Дидона, којашто требало да огради максимална површина на земјиште со помош на јаже направено од воловска кожа. Тоа е една од популарните формулации на познатата задача, во која се тврди дека од сите затворени рамнински криви со дадена плоштина, кружницата заградува површина со најголема плоштина.

Такви геометриски задачи биле разгледувани од старите Грци, чијашто интуиција и практични истражувања им помогнале да решаваат многу задачи од овој вид.

Интересот кон геометриските задачи за минимум и максимум продолжува и денес. Причината за тоа не е само во нивниот практичен карактер, но и во фактот дека при нивното решавање произлегуваат фундаментални идеи, коишто го дале почетокот на важни математички теории.

Прво, ќе дадеме неколку очигледни примери.

Пример 1. Квадрат и ромб имаат еднакви периметри. Докажи дека квадратот има поголема плоштина.

Упатство. Воочи дека $h_a < a$.

Пример 2. Квадрат и правоаголник имаат исти периметри. Докажи дека квадратот ама поголема плоштина.

Решение. Нека c е страната на квадратот, а a и b се страните на правоаголникот. Од еднаквоста на нивните периметри следува $4c = 2(a+b)$, од каде што добиваме $c = \frac{a+b}{2}$. Познато е неравенството $a^2 + b^2 \geq 2ab$, од што следува $(a+b)^2 \geq 4ab$, односно $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$. Од последното неравебство следува дека квадратот ома поголема плоштина од правоаголникот.

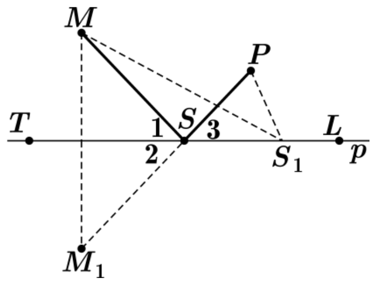
Пример 3. Квадрат и триаголник имаат еднакви плоштини. Која од дадените фигури има поголем периметар?

Решение. Нека a и h_a се страна и нејзина соодветна висина на дадениот триаголник. Тогаш, правоаголникот со страни $\frac{a}{2}$ и h_a има плоштина еднаква со плоштината на триаголникот, а периметарот му е помал од периметарот на триаголникот. Нека c е страната на квадратот. Тогаш од $2(\frac{a}{2}+h_a)>4\sqrt{\frac{ah_a}{2}}=4c$ следува дека периметарот на триаголникот е поголем од периметарот на квадратот.

Ќе разгледаме уште неколку слични задачи.

1. Дадени се правата p и точките M и P што не лежат на неа. Нека точките M и P лежат во иста полурамнина во однос на правата p, и нека S е точка од правата таква што $\sphericalangle MST=\sphericalangle PSL$. Докажи дека збирот $\overline{MS}+\overline{SP}$ е помал од збирот $\overline{MS_1}+\overline{S_1P}$, за секој друга точка S_1 од p.

Решение. Ако M_1 е симетрична точка ма M во однос на p, тогаш $\sphericalangle 1=\sphericalangle 2, \sphericalangle 1=\sphericalangle 3$, а од тоа следува дека $\sphericalangle 2=\sphericalangle 3$. Бидејќи $\sphericalangle 2=\sphericalangle 3$ следува дека $\sphericalangle M_1SP=180^\circ$, односно точките M_1, S и P лежат на една права. Во тој случај за секоја друга точка S_1 од правата p важи



$$\overline{MS}+\overline{SP}=\overline{M_1S}+\overline{SP}=\overline{M_1P}<\overline{M_1S_1}+\overline{S_1P}=\overline{MS_1}+\overline{S_1P}.$$

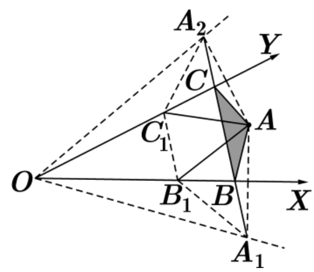
2. Дадени се правата p и точките M и P што не лежат на неа. На правата p определи точка S, таква што периметарот на триаголникот MSP е најмал.

Упатство. Ќе разгледаме два случаи: кога точките M и P се во различни полурамнини во однос на праватат p, и кога се во иста полурамнина. Во првиот случај точката S е во пресекот на правите p и MP, а вториот случај се сведува на на решението на задачата 1.

3. Од сите триаголници MPS, коишто за заедничка страна имаат дадена отсечка MP и висина кон неа h_a, кој има најмал периметар?

Упатство. Направи цртеж. Темето S се наоѓа на растојание h_a од правата MP. Следува дека тоа лежи на правата p паралелна со MP и на растојание h_a од неа. Користејќи го решението на задача 1 заклучуваме дека најмал периметар има рамнокракиот триаголник со основа MP и висина h_a.

4. Даден е остар агол XOY и точка A, внатрешна за него. Определи го триаголникот ABC така што темињата B и C да лежат на краците на аголот и да има најмал периметар.



Решение. Нека AB_1C_1 е триаголник со едно теме во точката A, а другите две темиња лежат на краците на дадениот агол. Од интерес е да знаеме кога збирот $P = \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{AC_1}$ ќе биде најмал. Да ги определиме точките A_1 и A_2 кои се симетрични на точката A во однос на OX и OY. Тогаш од $\overline{AB_1} = \overline{A_1B_1}$ и $\overline{AC_1} = \overline{C_1A_2}$ добиваме $P = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A_1}$. Овој збир ќе биде најмал кога наместо искршената линија $A_1B_1C_1A_2$ ја разгледуваме отсечката A_1A_2. Но дали таа отсечка ќе ги сече краците на аголот XOY? Бидејќи

$$\measuredangle A_1OA_2 = 2(\measuredangle XOA + \measuredangle AOY) = 2 \cdot \measuredangle XOY < 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

отсечката A_1A_2 има краишта, соодветно, на краците на аголот A_1OA_2, а краците OX и OY се внатрешни за тој агол, што значи дека отсечката A_1A_2 ги сече краците на аголот XOY. Конструкцијата на отсечката A_1A_2 е очигледна од цртежот, а со тоа и триаголникот ABC е тој што има најмал периметар.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ