Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

ЗА ВЕКТОРИТЕ И НИВНАТА ПРИМЕНА

Во математиката и во некои области од физиката, како, на пример, кинематиката, статиката и динамиката, се среќаваме со поимите скалар и вектор. Токму затоа во следните разгледувања ќе се задржиме на векторите и нивната примена во геометријата.

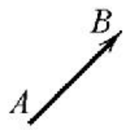
1. ПОИМ ЗА ВЕКТОР. ОСНОВНИ ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ

Дефиниција 1. Величината која е наполно определена со бројна вредност ја нарекуваме *скаларна величина* или *скалар*.

Скаларни величини се, на пример, температурата, масата, волуменот, густината на дадено тело итн.

Дефиниција 2. Величината која е наполно определена со бројна вредност, правец и насока ја нарекуваме *векторска величина* или *вектор*.

Геометриски вектор е подреден пар точки (A,B). Првата точка (точката A) ја нарекуваме почеток на векторот, а втората точка (точката B) ја нарекуваме крај на векторот. Притоа пишуваме $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, (цртеж десно). Како што рековме, секој вектор се карактеризира со:



а) бројна вредност, т.е. должина или интензитет на векторот и тоа е растојанието меѓу почетната и крајната точка на векторот, при што пишуваме $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$,

б) правец на векторот и тоа е правата на која е паралелен векторот и

в) насока на векторот и тоа е ориентацијата од почетната кон крајната точка.

Дефиниција 3. Ако точките A и B се совпаѓаат, тогаш векторот $\overrightarrow{AB}$ ќе го нарекуваме *нулти вектор*. Притоа пишуваме $\overrightarrow{AB}=\vec{o}$.

Очигледно, нултиот вектор има должина нула, т.е. $|\vec{o}|=0$.

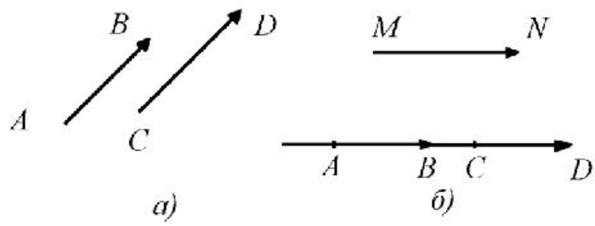
Дефиниција 4. За ненултите вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ќе велиме дека се *колинеарни* ако правите AB и CD се паралелни (секоја права е паралелна со самата себе).

Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека нултиот вектор е колинеарен со секој вектор.

Пример 1. Точките A, B и C се колинеарни ако и само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни. Докажи!

Решение. Нека точките A, B и C се колинеарни. Тогаш тие лежат на некоја права p, па, значи и векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ лежат на правата p, т.е. тие се колинеарни.

Обратно, нека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни. Тоа значи дека правите AB и AC се паралелни. Но, тие имаат заедничка точка (тоа е точката A), што значи тие се совпаѓаат, т.е. точките A, B и C се колинеарни. ■



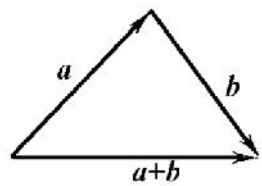
Дефиниција 5. За два колинеарни вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, правите AB и CD се различни, ќе велиме дека се *истонасочени* (имаат иста насока), ако отсечките AB и CD немаат заедничка точка (цртеж а)). Ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на иста права и ако постои вектор $\overrightarrow{MN}$ кој има иста насока со $\overrightarrow{AB}$ и со $\overrightarrow{CD}$, тогаш за векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ќе велиме дека се *истонасочени* (цртеж б)). За два колинеарни вектори, што немаат иста насока, ќе велиме дека се *спротивнонасочени* или дека имаат спротивна насока.

Дефиниција 6. За два вектори ќе велиме дека се *еднакви*, ако тие се колинеарни, имаат иста насока и имаат иста должина (интензитет).

Ако $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, тогаш векторот $\overrightarrow{BA}$ ќе го нарекуваме *спротивен* на $\vec{a}$ и ќе го означуваме со $-\vec{a}$.

Коментар 1. Нека $\vec{a}$ е произволен вектор и P е произволна точка во просторот. Од дефиницијата на еднаквост на вектори следува дека постои еден и само еден вектор $\overrightarrow{PQ}$ со почеток во P, еднаков на векторот $\vec{a}$. Со други зборови, за секој вектор почетната точка може да се избере произволно, па затоа векторите во геометријата се разгледуваат со точност до нивната положба, т.е. различните еднакви вектори се добиваат еден од друг со паралелен пренос. Во смисла на претходно изнесеното векторите во геометријата ги нарекуваме слободни. Во натамошните разгледувања со V ќе го означуваме множеството слободни вектори.

Дефиниција 7. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и векторот $\vec{b}$ има почетна точка во крајната точка на векторот $\vec{a}$. Векторот $\vec{c}$ чија почетна точка се совпаѓа со почетната точка на векторот $\vec{a}$, а крајната точка му се совпаѓа со крајната точка на векторот $\vec{b}$ го нарекуваме *збир* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (цртеж десно).

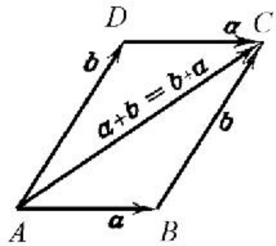


Притоа пишуваме $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Забелешка 1. Правилото за собирање вектори од претходната дефиниција го нарекуваме *правило на триаголник.*

При наоѓањето на збирот $\vec{a} + \vec{b}$ може да се случи крајната точка на $\vec{b}$ да се совпадне со почетната точка на $\vec{a}$. Јасно, во овој случај важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека векторот $\vec{b}$ е надоврзан на векторот $\vec{a}$ (цртеж десно). Според дефиниција 7 векторот $\vec{c}$ кој ги поврзува почетокот на $\vec{a}$ и крајот на $\vec{b}$ е збир на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. На цртежот десно е конструиран паралелограм $ABCD$. Притоа имаме $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Според тоа, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \vec{c}$, т.е. важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Понатаму, од својствата на триаголникот непосредно следува

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ и } ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

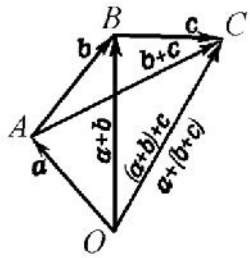
Очигледно, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат исти правци, тогаш се можни следниве случаи:

а) ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока, тогаш нивниот збир $\vec{a} + \vec{b}$ има интензитет $|\vec{a}| + |\vec{b}|$, а правецот и насоката се исти како и кај векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат различни насоки, тогаш нивниот збир $\vec{a} + \vec{b}$ има интензитет $||\vec{a}| - |\vec{b}||$, ист правец како $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и насоката на векторот кој има поголем интензитет.

Нека $\vec{a} \in V$ и $\vec{b}$ е спротивниот вектор на $\vec{a}$, т.е. $\vec{b} = -\vec{a}$. Од забелешка 1 следува дека за секој вектор $\vec{a} \in V$ важи $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$.

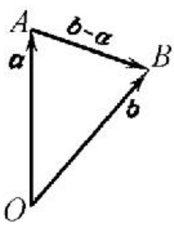
Понатаму, нека се дадени векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$. Ако ги собереме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ го добиваме векторот $\vec{a} + \vec{b}$. Сега, ако на векторот $\vec{a} + \vec{b}$ го додадеме векторот $\vec{c}$ го добиваме векторот $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Паралелно со овој збир можеме да го најдеме векторот $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, т.е. на векторот $\vec{a}$ му го додаваме збирот $\vec{b}+\vec{c}$. Ќе докажеме дека $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. За да го докажеме последното равенство, ќе ги поставиме векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ така, што векторот $\vec{b}$ е поставен во крајната точка на $\vec{a}$, а векторот $\vec{c}$ во крај-ната точка на $\vec{b}$. Притоа, со O да ја означиме почетната точка на $\vec{a}$, со A крајната точка на $\vec{a}$, со B крајната точка на $\vec{b}$ и со C крајната точка на $\vec{c}$ (цртеж десно). Тогаш



$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

т.е. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Дефиниција 8. Нека $\vec{a},\vec{b}\in V$. За векторот $\vec{c}$ ќе велиме дека е *разлика* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, во ознака $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, ако важи $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.



Да ги поставиме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ во заедничка почетна точка O и нивните крајни точки да ги означиме со A и B, соодветно (цртеж лево). Сакаме да ја определиме разликата $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$. Нека тоа е некој вектор со почеток во точката A. Тогаш крајната точка на овој вектор мора да се совпадне со точката B, бидејќи збирот $\vec{c}$ со $\vec{a}$ треба да го даде векторот $\vec{b}$. Според тоа, $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, што значи точна е следава лема.

Лема 1. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат заедничка точка. Разликата $\vec{b}-\vec{a}$ е вектор со почетна точка во крајната точка на $\vec{a}$ и крајна точка во крајната точка на $\vec{b}$. ■

Лема 2. Нека $\vec{a},\vec{b}\in V$. Тогаш

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}). \tag{1}$$

Доказ. Имаме

$$(\vec{a}+(-\vec{b}))+\vec{b}=\vec{a}+((-\vec{b})+\vec{b})=\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}.$$

Според тоа, збирот на векторите $\vec{a}+(-\vec{b})$ и $\vec{b}$ го дава векторот $\vec{a}$, па од дефиниција 8 следува равенството (1). ■

Забелешка 2. Нека $\vec{a},\vec{b}\in V$. Од лема 2 следува дека разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е определена со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Последното може непосредно да се докаже.

Навистина, ако $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, тогаш од дефиниција 8 следува $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$, т.е. $\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$. Значи, $(\vec{b}+\vec{c})+(-\vec{b})=(\vec{b}+\vec{d})+(-\vec{b})$, па затоа $\vec{c}+(\vec{b}+(-\vec{b}))=\vec{d}+(\vec{b}+(-\vec{b}))$, т.е. $\vec{c}+\vec{o}=\vec{d}+\vec{o}$, односно $\vec{c}=\vec{d}$.

Дефиниција 9. Нека $\vec{a}\in V$ и ª $\in\mathbb{R}$. Векторот $\vec{b}$ кој има ист правец како векторот $\vec{a}$, интензитет |ª|$\cdot|\vec{a}|$ и иста насока како векторот $\vec{a}$ ако ª >0, а спротивна насока од векторот $\vec{a}$ ако ª <0, го нарекуваме *производ на векторот* $\vec{a}$ *со скаларот* ª. Притоа пишуваме $\vec{b}=$ ª$\vec{a}$.

Дефиниција 10. Нека $\vec{a}\neq\vec{o}$. Векторот $\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ го нарекуваме *орт* соодветен на векторот $\vec{a}$.

Забелешка 3. Нека $\vec{a}\neq\vec{o}$. За ортот $\vec{a}_0$ соодветен на векторот $\vec{a}$ важи $|\vec{a}_0|=|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}|=\frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=1$, т.е. тој има должина 1. Затоа ќе велиме дека ортот $\vec{a}_0$ е единичен вектор колинеарен на векторот $\vec{a}$. Понатаму, за $\vec{a}$ и $\vec{a}_0$ важи $|\vec{a}|\vec{a}_0=|\vec{a}|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\vec{a}$.

Теорема 1. Векторите $\vec{a},\vec{b}\in V$ се колинеарни ако и само ако

$$\vec{b}=k\vec{a} \tag{2}$$

за некој $k\in\mathbb{R}$.

Доказ. Ако еден од векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$ е нултиот вектор, на пример $\vec{b}=\vec{o}$, тогаш $\vec{b}=0\cdot\vec{a}$. Навистина, $|0\cdot\vec{a}|=0\cdot|\vec{a}|=0$, па затоа $0\cdot\vec{a}=\vec{o}=\vec{b}$.

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$) се колинеарни и нека $\vec{e}$ и $\vec{e}'$ се нивните ортови, соодветно (цртеж десно). Тогаш

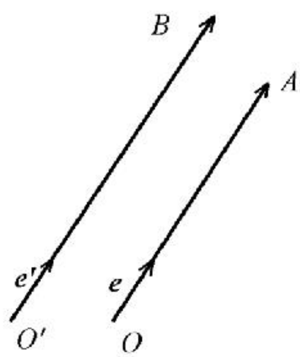
$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e},\ \vec{b}=|\vec{b}|\vec{e}'. \tag{3}$$

Очигледно

$$\vec{e}=\pm\vec{e}', \tag{4}$$

каде знакот плус соодветствува на случајот кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока, а знакот минус кога $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат спротивни насоки. Од формулите (3) и (4) следува

$$\vec{b}=|\vec{b}|\vec{e}'=\pm|\vec{b}|\vec{e}=\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}(|\vec{a}|\vec{e})=\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a},$$



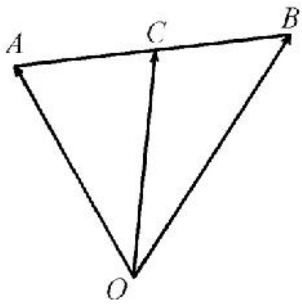
и ако земеме $k = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ добиваме дека важи (2).

Обратно, ако е исполнето равенството (2), тогаш колинеарноста на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ непосредно следува од дефиниција 9. ■

Дефиниција 11. Нека $\vec{a}_i \in V, \text{ª}_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Векторот $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \text{ª}_i \vec{a}_i$ го нарекуваме *линеарна комбинација* на векторите $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ со скаларите ª_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Делење на отсечка во даден однос. Нека се дадени точките A и B. Ако точката C ја дели отсечката AB така што $\overline{AC} : \overline{CB} = \text{ª}$ (цртеж десно), тогаш векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ се колинеарни и притоа важи

$$\overrightarrow{AC} = \text{ª} \overrightarrow{CB}. \qquad (5)$$



Релацијата (5) можеме да ја запишеме и во друг вид ако го искористиме поимот радиус-вектор. Имено, ако положбата на секоја од точките A, B, C е определена во однос на фиксна точка O (*пол*) со радиус векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, при што точката O е избрана така што да не лежи на правата AB, тогаш за векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ важи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Ако замениме во (5), последователно добиваме

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \text{ª}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}),$$
$$\overrightarrow{OC} + \text{ª}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \text{ª}\overrightarrow{OB},$$
$$(1 + \text{ª})\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \text{ª}\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \text{ª}\overrightarrow{OB}}{1 + \text{ª}}. \qquad (6)$$

Според тоа, радиус векторот $\overrightarrow{OC}$ на точката C која ја дели отсечката AB во даден однос линеарно зависи од радиус векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ на крајните точки.

Дефиниција 12. За векторите $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ ќе велиме дека се *линеарно зависни* ако постојат скалари ª_i, $i = 1, 2, ..., n$, меѓу кои барем еден е различен од нула, такви што $\sum_{i=1}^{n} \text{ª}_i \vec{a}_i = \vec{o}$.

Пример 2. а) Ако барем еден од векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,...,n$ е нултиот вектор, тогаш векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,...,n$ се линеарно зависни. Навистина, ако на пример $\vec{a}_1=\vec{o}$, тогаш од $1\cdot\vec{a}_1+\sum_{i=2}^{n}0\cdot\vec{a}_i=\vec{o}$ следува дека векторите $\vec{o}$, $\vec{a}_i$, $i=2,...,n$ се линеарно зависни.

б) Нека векторот $\vec{a}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,$ $3,...,n$. Тогаш $\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}_i$, за некои скалари α_i, $i=1,2,...,n$, па затоа

$$(-1)\vec{a}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}_i=\vec{o}$$

што значи дека векторите $\vec{a}$, $\vec{a}_i$, $i=1,2,...,n$ се линеарно зависни.

в) Претходно видовме, дека ако точката C ја дели отсечката AB така што $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{CB}$ и O е произволна точка од рамнината која не лежи на правата AB, тогаш важи (6), т.е. важи $(1+\alpha)\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\alpha\overrightarrow{OB}=\vec{o}$, што значи дека векторите $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ се линеарно зависни. ■

Дефиниција 13. За векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,...,n$ ќе велиме дека се *линеарно независни*, ако од $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}_i=\vec{o}$ следува $\alpha_i=0$, $i=1,2,...,n$.

Теорема 2. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни ако и само ако се колинеарни.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни. Тогаш постојат реални броеви x и y, од кои барем еден е различен од нула, така што

$$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{o}.$$

Нека $y\neq 0$. Тогаш $\vec{b}=-\frac{x}{y}\vec{a}$, т.е. векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни.

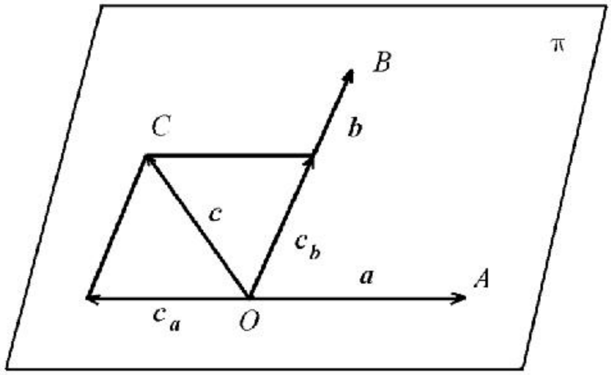
Обратно, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш постои k така што $\vec{a}=k\vec{b}$, т.е. $1\cdot\vec{a}-k\vec{b}=\vec{o}$, што значи дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни. ■

Забелешка 4. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, тогаш од теорема 2 следува дека тие не се линеарно зависни. Според тоа, за неколинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равенството $x\vec{a}=y\vec{b}$ е исполнето ако и само ако $x=y=0$.

Дефиниција 14. За векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ ќе велиме дека се *компланарни*, ако тие се паралелни на една иста рамнина.

Теорема 3. Три ненулти вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ се компланарни ако и само ако еден од нив е линеарна комбинација на другите два.

Доказ. Нека векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ се компланарни, паралелни на рамнината Π и имаат заедничка почетна точка O (цртеж десно). Да претпоставиме дека овие вектори не се по парови колинеарни, на пример, векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Го разложуваме векторот $\vec{c}$ како збир на векторите $\vec{c}_a$ и $\vec{c}_b$, кои се колинеарни со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, соодветно. Значи



$$\vec{c}=\vec{c}_a+\vec{c}_b=k\vec{a}+m\vec{b},\ k,m\in\mathbb{R}.$$

Ако два од векторите се колинеарни, на пример $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогаш

$$\vec{a}=k\vec{b}=k\vec{b}+0\vec{c},$$

т.е. $\vec{a}$ е линеарна комбинација на $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обратно, ако за векторите $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB},\ \vec{c}=\overrightarrow{OC}$ важи, на пример $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$, тогаш од дефинициите на операциите со вектори следува дека векторот $\vec{c}$ лежи во рамнината на која се паралелни векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ се компланарни. ■

2. РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Три ненулти вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ формираат триаголник ако и само ако $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ формираат триаголник, т.е. постои триаголник ABC така што $\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{CA},\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Тогаш

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\vec{o}.\end{aligned}$$

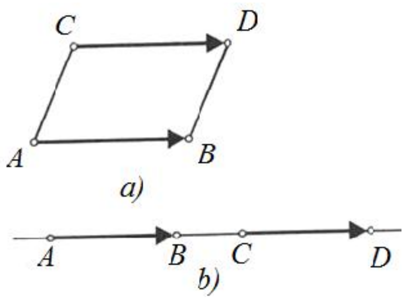
Обратно, да претпоставиме дека $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$. Нека A е произволна точка и нека B е точката, така што $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, а C онаа точка, така што $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$ (направи цртеж). Тогаш за векторот $\overrightarrow{CA}$ имаме:

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{c}).$$

Од $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ следува $\vec{b}=-(\vec{a}+\vec{c})$, па значи $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, т.е. векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ формираат триаголник ABC. ■

Задача 2. Ако $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, тогаш $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Докажи!

Решение. Од условот на задачата и од својствата на собирањето на векторите следува

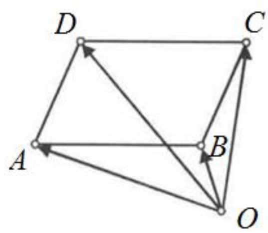


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Да забележиме дека, ако правите на кои лежат векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не се совпаѓаат, тогаш четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, а ако тие се совпаѓаат, тогаш добиваме дегенериран паралелограм $ABCD$. ■

Задача 3. Нека $ABCD$ е четириаголник и O е произволна точка. Ако $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, тогаш четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Докажи!

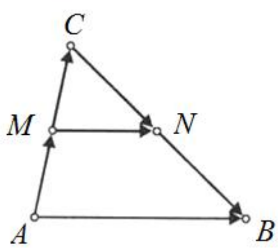
Решение. Од условот на задачата и правилото за одземање на вектори последователно добиваме



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD},\\&\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC},\\&\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}.\end{aligned}$$

Конечно, од последното равенство следува дека $BA \parallel CD$ и $\overline{BA}=\overline{CD}$, што значи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. ■

Задача 4. Докажи дека средната линија на триаголникот е паралелна со спротивната страна и е еднаква на половина од неа.



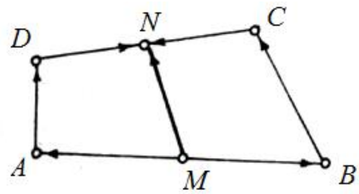
Решение. Нека M, N се средините на страните AC и BC на $\triangle ABC$ (цртеж десно). Имаме

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, па затоа

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

од каде што следува $MN \parallel AB$ и $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. ■

Задача 5. Нека M и N се средини на страните AB и DC на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



Решение. Од четириаголникот $MADN$ следува равенството $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$, а од четириаголникот $MBCN$ следува равенството $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$. Ако ги собереме последните две равенства и искористиме дека $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{DN}=-\overrightarrow{CN}$, добиваме

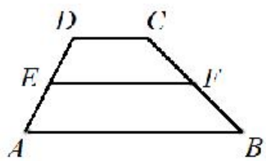
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN}&=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN})\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\vec{o}+\vec{o}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

т.е. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. ■

Задача 6. Докажи дека средната линија на трапезот е паралелна со неговите основи и е еднаква на нивниот полузбир.

Решение. Нека E и F се соодветно средините на краците AD и BC на трапзот $ABCD$. Тогаш

$$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{ED} \text{ и } \overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{CF}, \qquad (*)$$

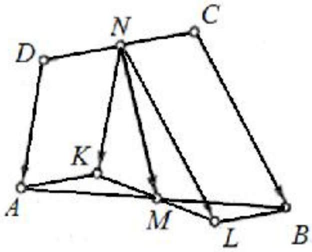


па затоа

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF},$$
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}.$$

Ако ги собереме последните две равенства, тогаш од равенствата (*) следува $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Сега тврдењето на задачата следува од тоа што векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ се колинеарни и истонасочени. ■

Задача 7. Нека точките M и N се средини на страните AB и DC на четириаголникот $ABCD$ и нека K и L се точки, такви што $\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{NL}=\overrightarrow{CB}$ (цртеж десно). Докажи дека точката M е средина на отсечката KL.



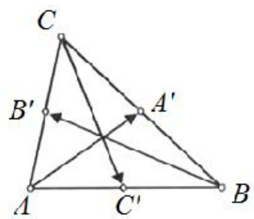
Решение. Имаме $\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{NL}=\overrightarrow{CB}$. Понатаму, од задача 5 следува $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB})$. Затоа $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NL})$ и ова равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NL},$$
$$\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{NL}-\overrightarrow{NM},$$
$$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{ML}.$$

Од последното равенство следува дека точките K,L,M се колинеарни и $\overline{KM}=\overline{ML}$, што значи дека M е средина на отсечката KL. ■

Задача 8. Докажи дека тежишните линии на секој триаголник се страни на некој триаголник.

Решение. *Прв начин.* Нека е даден $\triangle ABC$ и нека A',B',C' се соодветно средините на страните BC, CA, AB. Тогаш



$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

па затоа

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\frac{3}{2}\vec{o}=\vec{o}.$$

Сега тврдењето на задачата следува од задача 1.

Втор начин. При ознаки како во првиот начин на решавање, добиваме дека точките A',B',C' ги половат страните BC, CA, AB, па затоа важи

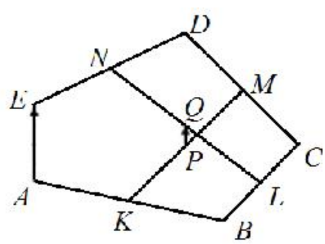
$$\overrightarrow{AA'}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2},\overrightarrow{BB'}=\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}}{2},\overrightarrow{CC'}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}.$$

Затоа важи

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$$
$$=\frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}}{2}+\frac{\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}}{2}=\vec{o}.$$

Сега тврдењето на задачата следува од задача 1. ■

Задача 9. Точките K,L,M,N се соодветно средини на страните AB, BC,CD,DE на петаголникот $ABCDE$, а P и Q се соодветно средини на отсечките KM и LN (цртеж десно).



Докажи дека $PQ \parallel AE$ и $\overline{PQ} = \frac{1}{4}\overline{AE}$.

Решение. Нека се $\overrightarrow{r_A}, \overrightarrow{r_B}, \overrightarrow{r_C}, \overrightarrow{r_D}, \overrightarrow{r_E}, \overrightarrow{r_K}, \overrightarrow{r_L}, \overrightarrow{r_M}, \overrightarrow{r_N}, \overrightarrow{r_P}, \overrightarrow{r_Q}$ соодветно радиус векторите на точките $A, B, C, D, E, K, L, M, N, P, Q$. Тогаш

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_N}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_M}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E})) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}) + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D})) \\ &= \tfrac{1}{4}(\overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_A}) = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

од каде следува тврдењето на задачата. ■

Задача 10. Точките M и N ја делат отсечката AB на три еднакви делови. Изрази ги векторите $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ со помош на векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, каде O е произволна точка која не лежи на отсечката AB.

Решение. Ако точката X ја дели отсечката AB во однос $\text{ª} = m:n$, тогаш од равенството (6) следува дека

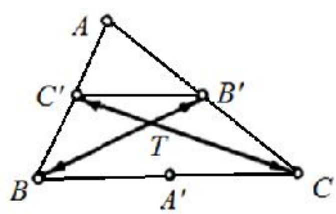
$$\overrightarrow{OX} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

Точката M ја дели отсечката AB во однос $1:2$, а точката N ја дели AB во однос $2:1$. Од претходно изнесеното имаме:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} \text{ и } \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}. \blacksquare$$

Задача 11. Докажи дека тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка T, која секоја тежишна линија ја дели во однос 2:1, сметајќи од темето.

Решение. Нека A', B', C' се соодветно средини на страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ (цртеж десно). Отсечката $C'B'$ е средна линија на овој триаголник, па од решението на задача 4 следува дека $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Нека $BB' \cap CC' = T$, $\overrightarrow{TB'} = \text{ª}\overrightarrow{TB}$ и $\overrightarrow{TC'} = \text{«}\overrightarrow{TC}$. Тогаш



$$\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{TB'} - \overrightarrow{TC'} \text{ и } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TB}.$$

Сега, ако ги искористиме добиените равенства, последователно добиваме

$$\overrightarrow{TB'} - \overrightarrow{TC'} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TB}),$$

$$2\overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TB} = 2\overrightarrow{TC'} + \overrightarrow{TC},$$

$$(2\text{ª} + 1)\overrightarrow{TB} = (2\text{«} + 1)\overrightarrow{TC}.$$

Но, векторите $\overrightarrow{TB}$ и $\overrightarrow{TC}$ не се колинеарни, па од забелешка 4 следува дека 2ª + 1 = 2« + 1 = 0, односно ª = « = $-\frac{1}{2}$. Значи, $\overrightarrow{TB'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{TB}$ и $\overrightarrow{TC'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{TC}$, односно $\overrightarrow{BT}=2\overrightarrow{TB'}$ и $\overrightarrow{CT}=2\overrightarrow{TC'}$, од каде следува дека точката T ги дели тежишните линии BB' и CC' во однос $2:1$ сметајќи од темињата на триаголникот.

Нека $AA'\cap BB'=T'$. Тогаш на потполно ист начи се добива дека $\overrightarrow{AT'}=2\overrightarrow{T'A'}$ и $\overrightarrow{BT'}=2\overrightarrow{T'B'}$, од каде следува дека точката T' ги дели тежишните линии AA' и BB' во однос $2:1$ сметајќи од темињата на триаголникот.

Според тоа, точките T и T' ја делат тежишната линија BB' во однос $2:1$ сметајќи од темето, па затоа $T\equiv T'$, од што следува тврдењето на задачата. ■

Задача 12. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Најди вектор $\vec{x}$ кој лежи на симетралата на аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Нека $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се два неколинеарни вектори. Ако $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$ и $\vec{n}=\overrightarrow{ON}$ и ако $OMPN$ е паралелограм, тогаш $\vec{m}+\vec{n}=\overrightarrow{OP}$. Значи, $\vec{m}+\vec{n}$ лежи на дијагоналата на паралелограмот $OMPN$, а таа го дели на половина аголот кај темето O ако и само ако тој е ромб.

Значи, збирот $\vec{m}+\vec{n}$ на векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ лежи на симетралата на аголот меѓу векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ако и само ако $|\vec{m}|=|\vec{n}|$. Според тоа, треба да најдеме два вектора, со иста должина, колинеарни со $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и да го земеме нивниот збир. Векторите $|\vec{b}|\vec{a}$ и $|\vec{a}|\vec{b}$ имаат иста должина $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, па затоа $\vec{x}=|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$. ■

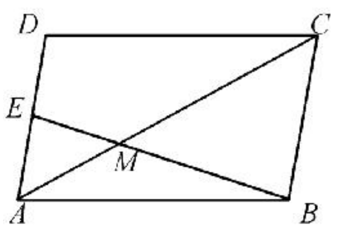
Задача 13. Нека E е средината на страната AB на паралелограмот $ABCD$ и нека $M=AC\cap BE$. Најдете ги односите $\overline{AM}:\overline{MC}$ и $\overline{BM}:\overline{ME}$.

Решение. Нека $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (цртеж десно). Векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MC}$ се колинеарни, па затоа постои $x\in\mathbb{Z}$ така што $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$. Бидејќи $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, добиваме $\overrightarrow{AM}=x(\vec{a}+\vec{b})$. Слично, за некој $y\in\mathbb{R}$ ќе биде $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BE}=y(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})$. Бидејќи $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$, добиваме

$$\vec{a}+y(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})=x(\vec{a}+\vec{b})$$

т.е.

$$(x-\frac{1}{2}y)\vec{b}+(x+y-1)\vec{a}=\vec{o}. \qquad (1)$$



Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, па од (1) следува $x-\frac{1}{2}y=0$ и $x+y-1=0$, од каде што добиваме $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$. Значи, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$, т.е. $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$, од каде што следува $\overline{AM}:\overline{MC}=1:2$. Слично, од $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$ добиваме $\overline{BM}:\overline{ME}=2:1$. ■

Задача 14. Нека точките M и N се од страните AC и BC на триаголникот ABC, така што правата MN е паралелна со правата AB. Докажи дека точките M и N ги делат страните AC и BC во еден ист однос.

Решение. Правите MN и AB се меѓусебно паралелни, па затоа векторите $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ се колинеарни, т.е. постои ª $\in \mathbb{R}$, така што $\overrightarrow{MN}=$ ª$\overrightarrow{AB}$. Нека точката M ја дели страната AC во однос $m:n$, а точката N ја дели страната BC во однос $p:q$. Тогаш имаме:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{p}{p+q}\overrightarrow{CB}.$$

Значи,

$$ª\,\overrightarrow{AB}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{p}{p+q}\overrightarrow{CB}$$

$$ª\,(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{p}{p+q}\overrightarrow{CB}$$

$$(ª-\frac{n}{m+n})\overrightarrow{AC}+(ª-\frac{p}{p+q})\overrightarrow{CB}=\vec{o}.$$

Но, векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ не се колинеарни, па затоа ª $=\frac{n}{m+n}$, ª $=\frac{p}{p+q}$. Од $\frac{n}{m+n}=\frac{p}{p+q}$ следува $m:n=p:q$, т.е. точките M и N ги делат страните AC и BC во еден ист однос. ■

Задача 15. Нека n е непарен број. Докажи дека секој $n-$аголник е еднозначно определен со средините на своите страни.

Решение. Нека се дадени точките $S_1(\vec{r}_1)$, $S_2(\vec{r}_2)$, ..., $S_n(\vec{r}_n)$ и нека $A_1A_2...A_n$ е $n-$аголник, така што S_1 е средина на страната A_1A_2, S_2 е средина на страната A_2A_3 итн. S_n е средина на страната A_nA_1. Ако $A_1(\vec{r}\,'_1)$, $A_2(\vec{r}\,'_2)$,..., $A_n(\vec{r}\,'_n)$, тогаш

$$\vec{r}\,'_1+\vec{r}\,'_2=2\vec{r}_1,$$
$$\vec{r}\,'_2+\vec{r}\,'_3=2\vec{r}_2,$$
....

$$\vec{r}\,'_{n-1}+\vec{r}\,'_{n}=2\vec{r}_{n-1},$$
$$\vec{r}\,'_{n}+\vec{r}\,'_{1}=2\vec{r}_{n}.$$

Секоја втора равенка да ја помножиме со -1, а потоа да ги собереме сите равенки. Добиваме

$$\vec{r}\,'_{1}=\vec{r}_{1}-\vec{r}_{2}+\vec{r}_{3}-...-\vec{r}_{n-1}+\vec{r}_{n}\,.$$

Значи, темето $A_1(\vec{r}\,'_1)$ е еднозначно определено, па затоа постои единствен таков n – аголник. ■

Задача 16. Трите отсечки што ги сврзуваат средините на спротивните рабови на еден тетраедар се сечат во една точка. Докажи!

Решение. Нека $ABCD$ е даден тетраедар и нека радиус-векторите на A,B,C,D се $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\vec{r}_4$, соодветно. Ако $M(\vec{r}_M)$ и $N(\vec{r}_N)$ се средините на спротивните рабови AB и CD, тогаш $\vec{r}_M=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2),\ \vec{r}_N=\frac{1}{2}(\vec{r}_3+\vec{r}_4)$. Ако, пак, $P(\vec{r}_P)$, $Q(\vec{r}_Q)$, $S(\vec{r}_S)$ и $T(\vec{r}_T)$ се средините на рабовите AC, BD, AD и BC соодветно, тогаш

$$\vec{r}_P=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_3),\ \vec{r}_Q=\frac{1}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_4),\ \vec{r}_S=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_4),\ \vec{r}_T=\frac{1}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_3)\,.$$

Следствено, имаме:

$$\vec{r}_M+\vec{r}_N=\vec{r}_P+\vec{r}_Q=\vec{r}_S+\vec{r}_T=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3+\vec{r}_4)$$

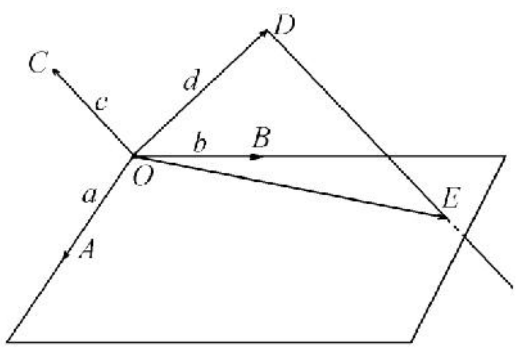
што значи MN, PQ и ST минуваат низ една точка, која што е средина на сите три отсечки (зошто?). ■

Задача 17. Докажи дека кои било четири вектори се линеарно зависни.

Решение. Нека $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ се кои било четири вектори. Ако некои три од нив се компланарни, на пример $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, тогаш $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ за некои реални броеви x и y, па затоа

$$x\vec{a}+y\vec{b}+(-1)\vec{c}+0\cdot\vec{d}=\vec{o}\,,$$

т.е. векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ се линеарно зависни.



Затоа, да претпоставиме дека кои било три од векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ не се компланарни. Да ги нанесеме во иста точка O, така што

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB},\ \vec{c}=\overrightarrow{OC},\ \vec{d}=\overrightarrow{OD}$$

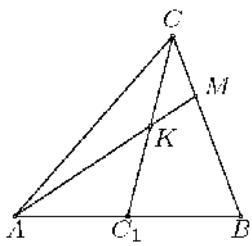
(види цртеж). Низ точката D да повлечеме права паралелна со правата OC која што ја прободува рамнината AOB во точката E. Тогаш векторите $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OE}$ се компланарни, па затоа $\overrightarrow{OE}=x\vec{a}+y\vec{b}$, за некои $x,y\in\mathbb{R}$. Векторот $\overrightarrow{ED}$ е колинеарен со векторот $\vec{c}$, па $\overrightarrow{ED}=z\vec{c}$ за некој $z\in\mathbb{R}$. Сега, имаме $\vec{d}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, т.е.

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+(-1)\vec{d}=\vec{o},$$

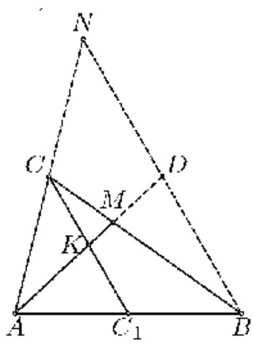
што значи векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ се линеарно зависни. ■

Задача 18. Нека K е средина на тежишната линија CC_1 на $\triangle ABC$ и нека $AK\cap BC=\{M\}$. Определи го односот $\overline{CM}:\overline{MB}$.

Решение. *Прв начин*. Точката K е средината на отсечката CC_1, па затоа $\overrightarrow{AK}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC_1}}{2}$. Векторите $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ се колинеарни, т.е. $\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AM}$ и како C_1 е средина на AB важи $\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, па затоа $\alpha\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, т.е. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2\alpha}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4\alpha}\overrightarrow{AB}$. Бидејќи точките C,M и B се колинеарни, па затоа $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BC}$ и ако $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC}$ се изразат преку $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, од претходните две равенства се добива $(\frac{1}{2\alpha}-k)\overrightarrow{AC}=(1-\frac{1}{4\alpha}-k)\overrightarrow{AB}$, па како векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ не се колинеарни, добиваме $k-\frac{1}{2\alpha}=1-k-\frac{1}{4\alpha}=0$, односно $\alpha=\frac{3}{4}$ и $k=\frac{2}{3}$. Значи, $\overrightarrow{AM}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2+1}$, па затоа $\overline{CM}:\overline{MB}=1:2$.



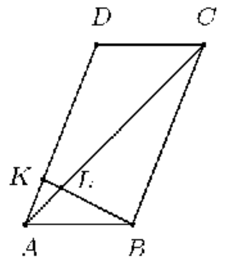
Втор начин. Нека N е точка на правата AC таква што $BN\,\|\,CC_1$ и нека $AM\cap BN=\{D\}$. Тогаш $\frac{\overline{CK}}{\overline{KC_1}}=\frac{\overline{ND}}{\overline{DB}}$, па затоа $\overline{ND}=\overline{DB}$ и $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CN}}$, па е $\overline{AC}=\overline{CN}$. Според тоа, отсечките BC и AD се тежишни линии на $\triangle ABN$, па затоа M е те-жиште на овој триаголник, т.е. $\overline{CM}:\overline{MB}=1:2$. ■



Задача 19. Нека K и L се соодветно точки на страната AD и дијагоналата AC на паралелограмот $ABCD$, такви што

$$\overline{AK}:\overline{KD}=1:3 \text{ и } \overline{AL}:\overline{LC}=1:4.$$

Докажи дека точките K, L и B се колинеарни.



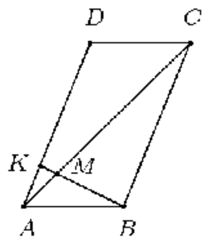
Решение. *Прв начин*. Да означиме $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Тогаш $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\vec{b}$ и $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b})$. Оттука добиваме

$$\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK} = \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{5}\vec{a} - \frac{1}{20}\vec{b}.$$

Според тоа, $\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{KL}$, што значи дека точките K, L и B се колинеарни.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање добиваме дека $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b})$. Сега, $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \cdot 4\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AK}}{1+4}$, што значи дека точките K, L и B се колинеарни.



Трет начин. Отсечките KB и AC се сечат и нека $KB \cap AC = \{M\}$. Тогаш $\measuredangle AMK = \measuredangle CMB$ (накрсни агли), $\measuredangle AKM = \measuredangle MBC$ и $\measuredangle MAK = \measuredangle MCB$ (агли со паралелни краци), па затоа $\triangle AKM \sim \triangle CBM$. Од оваа сличност следува $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CB}} = \frac{\frac{1}{4}\overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{4}$, што значи $\overline{MC} = 4\overline{AM}$ и како $\overline{LC} = 4\overline{AL}$, добиваме дека $M \equiv L$, што значи дека точките K, L и B се колинеарни. ■

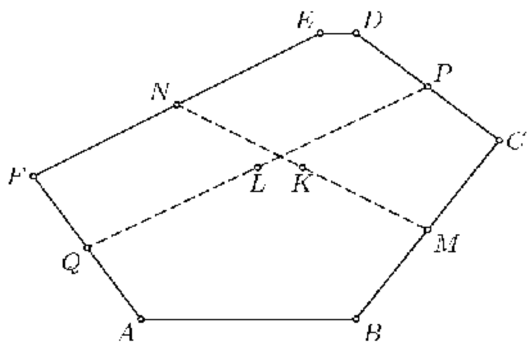
Задача 20. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник таков што $AB \| DE$. Нека M, N, P, Q се редоследно средините на страните $BC, CD,$ $ED, FA,$ а K и L се редоследно средините на отсечките MN и PQ. Докажи дека точките K и L се совпаѓаат ако и само ако $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Решение. Нека O е произволна точка. Тогаш

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$$

и слично

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA}).$$



Понатаму, точките K и L се совпаѓаат ако и само ако $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OL}$, што според горните равенства значи ако и само ако $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$, т.е.

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}$, односно $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{ED}$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 21. На страните BC,CA и AB на $\triangle ABC$ земени се соодветно точките A',B' и C'. Нека T е тежиштето на $\triangle ABC$, а T' е тежиштето на $\triangle A'B'C'$. Докажи дека $T\equiv T'$ ако и само ако

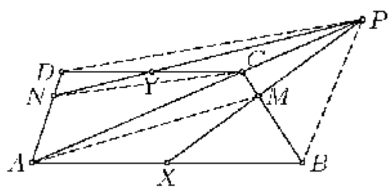
$$\overline{AC'}:\overline{C'B}=\overline{BA'}:\overline{A'C}=\overline{CB'}:\overline{B'A}.$$

Решение. Нека $\overline{AC'}:\overline{C'B}=k,\ \overline{BA'}:\overline{A'C}=l,\ \overline{CB'}:\overline{B'A}=m$. Тогаш, според задача 30 и задача 8 важи

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{TT'}&=\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}=(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AA'})+(\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BB'})+(\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CC'})\\&=(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC})+(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})\\&=\vec{o}+\tfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}+\tfrac{l}{l+1}\overrightarrow{BC}+\tfrac{m}{m+1}\overrightarrow{CA}\\&=(\tfrac{k}{k+1}-\tfrac{m}{m+1})\overrightarrow{AB}+(\tfrac{l}{l+1}-\tfrac{m}{m+1})\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

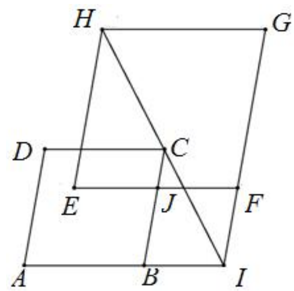
Сега, ако $T\equiv T'$, тогаш од линеарната независност на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ следува $\frac{k}{k+1}-\frac{m}{m+1}=\frac{l}{l+1}-\frac{m}{m+1}=0$, од каде добиваме $k=l=m$. Обратно, ако $k=l=m$, тогаш од горното равенство следува $T\equiv T'$. ■

Задача 22. Нека $ABCD$ е трапез таков што $AB\,||\,CD$ и P е точка на продолжението на дијагоналата AC така што C е меѓу A и P. Ако X и Y се средините на основите AB и CD, а M и N се пресечните точки на правите PX и PY со отсечките BC и DA, редоследно, докажи дека правата MN е паралелна со основите на трапезот.



Решение. Да означиме $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$. Тогаш $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{DC}=-\vec{d}+\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{2}\vec{a}$ и $\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$.

Од условот на задачата имаме $\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AC}=p(\vec{a}+\vec{c})$, за $p>1$. За точката N која припаѓа на страната AD важи $\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AD}=n\vec{d}$, каде $0<n<1$, и слично $\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BC}=m\vec{c}$, каде $0<m<1$, па затоа $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+m\vec{c}$. Ако точките N,Y,P се колинеарни тогаш ª$\overrightarrow{AN}+(1-$ª$)\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AY}$, од каде наоѓаме ª $=\frac{2p-1}{2k}$ и $n=\frac{p}{2p-1}$. Слично, «$\overrightarrow{AX}+(1-$«$)\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}$, од каде наоѓаме « $=\frac{2p-2}{2p-1}$ и $m=\frac{p}{2p-1}$. Бидејќи $AB\,||\,DC$ и $m=n$, од теоремата на Талес следува дека $AB\,||\,MN\,||\,DC$. ■

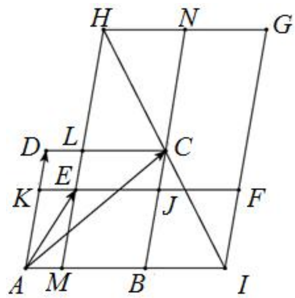


Задача 23. Ромбовите $ABCD, EFGH$ и $BIFJ$ со страни соодветно a, b и c се како на цртежот десно ($B \in AI$, $F \in IG$) и C е средина на IH .

а) Определи го односот $a:b:c$.

б) Докажи, дека E е тежиште на $\triangle ACD$.

в) Докажи, дека правата AE ја полови страната GH .



Решение. а) Ако $L = DC \cap HE$, тогаш $EJCL$ е паралелограм. Од $\triangle BCI \sim \triangle LCH$ следува дека

$$\overline{BI} = \overline{LC} \iff b = 2c,$$

$$\overline{BC} = \overline{LH} \iff a = b + c - a,$$

од каде добиваме дека $2a = 3c$. Конечно, добиваме $a:b:c = 3:4:2$.

б) Ако $K = EF \cap AD$ и $M = AB \cap EH$, тогаш четириаголникот $AMEK$ е паралелограм со должини на страни $\overline{AM} = a + c - b = \frac{1}{3}a$ и $\overline{AK} = b - c = \frac{2}{3}a$, па затоа

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

па затоа E е тежиште на $\triangle ACD$.

в) Ако N е средина на HG , тогаш CN е средна отсечка во $\triangle HIG$, т.е. $\overline{CN} = \frac{1}{2}(b + c) = a$, $CN \parallel IG \parallel AD$, па затоа $ACND$ е паралелограм. Затоа AN ја полови CD , а од а) следува дека AE ја полови CD , што значи дека $N \in AE$. Последното следува и од

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AE}. \ \blacksquare$$

Задача 24. Точките M, N, P, Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD, DA на четириаголникот $ABCD$. Точките F и G се тежишта соодветно на триаголниците BNP и PND . Отсечката MG ја сече FQ во точката K и $\overline{FK} = 6\ cm$. Докажи дека $\overline{KQ} = 9\ cm$.

Решение. На отсечката FQ да избереме точка L таква што $\overline{QL} = \frac{3}{5}\overline{QF}$. Доволно е да докажеме дека L припаѓа на MG , бидејќи ќе следува $L \equiv K$. Навистина

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{QF} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{QM} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MF}$$

$$= \frac{1}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MG}.$$

Во последното равенство искористивме дека

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{o},\ \overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP})\,.\ \blacksquare$$

Задача 25. Даден е $\triangle A_1A_2A_3$ со тежиште G, во кој точките P_1,P_2,P_3 се соодветно средините на страните A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, Нека точките G_1,G_2, G_3 се такви, што отсечките P_1G_1,P_2G_2,P_3G_3 имаат заедничка точка M, при што $\overline{MG_1}:\overline{P_1G_1}=\overline{MG_2}:\overline{P_2G_2}=\overline{MG_3}:\overline{P_3G_3}=1:m$, каде $m>1$ е реален број. Ако точките M_1,M_2,M_3 се соодветно од отсечките GG_1,GG_2,GG_3 и важи $\overline{GM_1}:\overline{M_1G_1}=\overline{GM_2}:\overline{M_2G_2}=\overline{GM_3}:\overline{M_3G_3}=10:11$, определи ги вредностите на m, за кои отсечките A_1M_1,A_2M_2,A_3M_3 се паралелни и еднакви.

Решение. Од условот на задачата следува $\overrightarrow{MG_1}=\frac{1}{m}\overrightarrow{P_1G_1}$. Оттука

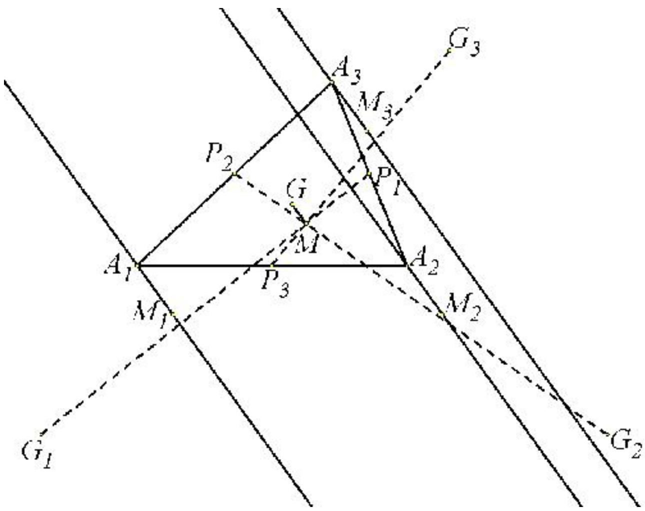
$$\overrightarrow{GG_1}=\frac{m}{m-1}\overrightarrow{GM}-\frac{1}{m-1}\overrightarrow{GP_1}\,.$$

Бидејќи G е тежиште $\triangle A_1A_2A_3$, важи $\overline{GP_1}:\overline{GA_1}=2:1$ и $\overrightarrow{GP_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA_1}$. Според тоа,

$$\overrightarrow{GG_1}=\frac{m}{m-1}\overrightarrow{GM}+\frac{1}{2(m-1)}\overrightarrow{GA_1}\,.$$

Од друга страна $\overrightarrow{GG_1}=\frac{21}{10}\overrightarrow{GM_1}$ и ако замениме во претходното равенство, добиваме

$$\overrightarrow{GM_1}=\frac{10m}{21(m-1)}\overrightarrow{GM}+\frac{5}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_1}\,.$$



Ако земеме предвид, дека $\overrightarrow{A_1M_1}=\overrightarrow{GM_1}-\overrightarrow{GA_1}$, добиваме

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \frac{10m}{21(m-1)}\overrightarrow{GM} + \frac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_1}\,.$$

Аналогно добиваме

$$\overrightarrow{A_2M_2} = \frac{10m}{21(m-1)}\overrightarrow{GM} + \frac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_2} \text{ и } \overrightarrow{A_3M_3} = \frac{10m}{21(m-1)}\overrightarrow{GM} + \frac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_3}\,.$$

Отсечките A_1M_1 и A_2M_2 се паралелни и еднакви ако и само ако $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_2M_2}$, што значи ако и само ако

$$\frac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_1} = \frac{26-21m}{21(m-1)}\overrightarrow{GA_2}, \text{ т.е. } (26-21m)(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GA_2}) = 0\,.$$

Но, $\overrightarrow{GA_1} \neq \overrightarrow{GA_2}$, па од последното равенство следува $26-21m=0$, т.е. $m=\frac{26}{21}$. Според тоа, постои единствена вредност $m=\frac{26}{21}$, при која отсечките A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 се паралелни и еднакви, при што важи

$$\overline{A_1M_1} = \overline{A_2M_2} = \overline{A_3M_3} = \frac{52}{21}\overline{GM}\,. \blacksquare$$

При решавањето на следната задача е користен координатниот запис на векторите и операциите со вектори во истиот, кој може да се види во [6], а додека при решавањето на последните две задачи е користен скаларниот производ на вектори, т.е. неговата координатна форма во рамнина, која е детално разработена во [4], при што рамнинскиот случај едноставно се добива со испуштање на третата координата.

Задача 26. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ е правилен осумаголник со центар O, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ се рационални броеви и

$$\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \alpha_3\overrightarrow{OA_3} + \alpha_4\overrightarrow{OA_4} = \vec{o}\,.$$

Докажи дека

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0\,.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $A_1(1,0),\ A_2(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),\ A_3(0,1),\ A_4(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. Тогаш векторското равенство од условот на задачата е еквивалентно со равенствата

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_4 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_4 = 0, \end{cases}$$

т.е. со равенствата

$$\begin{cases} \sqrt{2}\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 = 0, \\ \sqrt{2}\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Ако $a_1 \neq 0$ или $a_3 \neq 0$, тогаш $\sqrt{2} = \frac{a_4 - a_2}{a_1}$ или $\sqrt{2} = -\frac{a_4 + a_2}{a_3}$, што противречи на фактот дека $\sqrt{2}$ е ирационален број, а a_1, a_2, a_3, a_4 се рационални броеви. Затоа $a_1 = a_3 = 0$ и тогаш

$$\begin{cases} a_2 - a_4 = 0, \\ a_2 + a_4 = 0, \end{cases}$$

од каде добиваме $a_2 = a_4 = 0$. ■

Задача 27. Точка F лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а P и Q се проекциите на точката F на страните AB и AC. Докажи, дека ако точките M и N се соодветно средините на отсечките BC и PQ, тогаш $MN \perp FN$.

Решение. Ќе докажеме дека $\overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Бидејќи $\overrightarrow{FN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FQ})$ и

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}) = \tfrac{1}{4}(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CQ}), \end{aligned}$$

треба да докажеме дека

$$(\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FQ}) \cdot (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CQ}) = 0 .$$

Ако искористиме, дека $FP \perp BP$ и $FQ \perp CQ$, горното равенство го добива видот

$$\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 . \qquad (1)$$

Ако $X = FP \cap CQ$ и $Y = FQ \cap AB$, тогаш (1) е еквивалентно со

$$\overline{FP} \cdot \overline{CQ} \cos\measuredangle FXC + \overline{FQ} \cdot \overline{BP} \cos\measuredangle AYQ = 0 . \qquad (2)$$

Но,

$$\measuredangle FXC = 90^\circ + \sim \text{ и } \measuredangle AYQ = 90^\circ - \sim \text{, т.е. } \measuredangle FXC + \measuredangle AYQ = 180^\circ .$$

Според тоа, равенството (2) е еквивалентно со равенството

$$\overline{FP} \cdot \overline{CQ} = \overline{FQ} \cdot \overline{BP} ,$$

кое следува од сличноста на триаголниците FBP и FCQ. ■

Задача 28. Докажи дека во координатната рамнина не може да се нацрта конвексен четириаголник, кај кој едната дијагонала е два пати подолга од другата, аголот меѓу дијагоналите е 45°, а координатите на сите темиња се рационални броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека четириаголникот $ABCD$ ги задоволува бараните услови и дека $\overline{AC} = 2\overline{BD}$. Тогаш

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cos 45^\circ=\overline{BD}^2\sqrt{2}\,.$$

Меѓутоа, последното равенство не е можно, бидејќи ако $A(a_1,a_2),B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2),D(d_1,d_2)$, тогаш

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=(c_1-a_1,c_2-a_2)\cdot(d_1-b_1,d_2-b_2)\\&=(c_1-a_1)(d_1-b_1)+(c_2-a_2)(d_2-b_2)\end{aligned}$$

е рационален број, а

$$\overline{BD}^2\sqrt{2}=((d_1-b_1)^2+(d_2-b_2)^2)\sqrt{2}$$

е ирационален број. ■

Задачи за самостојна работа

29. Ако $ABCD$ е паралелограм и S е произволна точка, докажи дека $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.
30. Ако T е тежиште на $\triangle ABC$ и S е произволна точка, докажи дека $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{ST}$.
31. Ако M и N се средините на страните AD и BC на произволен четириаголник $ABCD$, докажи дека $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.
32. Докажи дека средините на страните на произволен четириаголник се темиња на паралелограм.
33. Нека K,L,M,N,P,Q се соодветно средините на отсечките AB, BC,CD,DA,DB на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека отсечките KM,LM,PQ се сечат во една точка која е средни на овие отсечки.
34. Нека T е тежиште на триаголникот ABC и O е произволна точка. Докажи дека $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
35. Точките E и F се соодветно средини на страните AB и CD на четириаголникот $ABCD$, а точките P,Q,R,S се соодветно средини на отсечките AF,ED,BF,EC. ДОкажи дека четириаголникот $PQRS$ е паралелограм.
36. Гусар запленил стара карта на остров со богатство. На картата се нацртани амбар, бунар, ветерница и гребен (кои на картата се означени со буквите A,B,V,G), и тие се наоѓаат во темињата на паралелограм. На праволинискиот пат од амбарот до бунарот е

нацртан јавор (J) така што $\overline{AJ}:\overline{JB}=4:1$. На праволинискиот пат од меѓу ветерницата и гребенот е вцртана липа (L). На праволинискиот пат од гребенот до бунарот се наоѓаат закопаното богатство (X) и меана (M). На картата амбарот, закопаното богатство и липата се наоѓаат на ист праволиниски пат. Исто така на картата јаворот, меаната и липата се наоѓаат на ист праволиниски пат. Силен ураган ги однесол амбарот, ветерницата, јаворот и липата, па така на островот останале само бунарот, меаната и гребенот. Гусарот прво измерил дека растојанието од бунарот до меаната е $25\,m$. Потоа седнал во меаната и таму дознал дека растојанието меѓу меаната и гребенот е $75\,m$. Колкаво растојание треба да помине гусарот кога ќе излезе од меаната за да дојде до богатството?

Литература

1. Boras, P., Hunski, L., Vektori, Matka, 115, 2020/2021
2. Ilić-Dajović, M., O vektorima, Matematički list, Beograd
3. Балтић, В., Задаци са векторима, https://imomath.com/srb/dodatne/vektori_vb.pdf
4. Малчески, Р., Малческа, В., Математика 2 – Векторска и линеарна алгебра (втор непроменето издание), Армаганка, Скопје, 2020
5. Милошевић, Д., Вектори и њихова примена, Математички лист, Београд
6. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К., Математика 3 (за трета година во реформираното гимназиско образование), Математички талент, 2021
7. Ђерасимовић, Б., Основне операције са векторима и њихова примена на решавање геометријских задатака, Математички лист, Београд