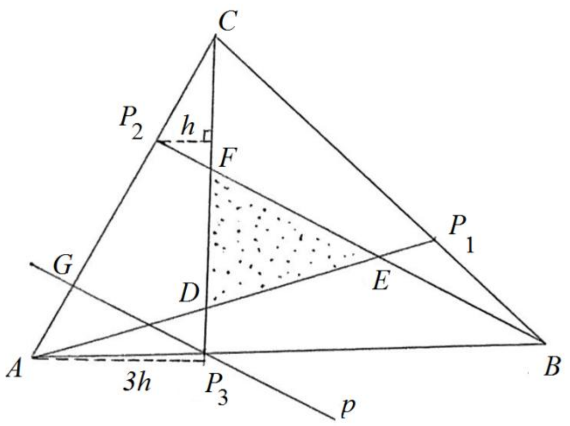
Алија Муминагиќ, Данска
Ристо Малчески, Македонија

ДА ПОГЛЕДНЕМЕ ОД ДРУГ „АГОЛ“

Решавањето на една иста задача на повеќе начини овозможува на еден ист проблем да му пристапиме од различни гледни точни, што во секојдневниот живот се искажува со фразата *гледање од друг агол.* Во следните разгледувања токму тоа ќе го направиме со следнава задача.

Задача. На страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ земени се редоследно точките P_1, P_2, P_3 такви што $\overline{BP_1} = \frac{1}{3}\overline{BC}, \overline{CP_2} = \frac{1}{3}\overline{CA}, \overline{AP_3} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Докажи дека отсечките AP_1, BP_2, CP_3 ограничуваат триаголник чија плоштина е еднаква на $\frac{1}{7}$ од плоштинината на $\triangle ABC$.



Решение. *Прв начин*. Темињата на триаголникот ограничен со отсечките AP_1, BP_2, CP_3 да ги означиме со D, E, F (цртеж десно). Низ P_3 повлекуваме права p паралелна со правата BP_2 и нека p ја сече страната AC во точката G.

Од сличноста $\triangle AP_3G \sim \triangle ABP_2$ следува $\overline{AP_2} : \overline{AG} = \overline{AB} : \overline{AP_3} = 3:1$, па затоа

$$\overline{AP_2} = 3\overline{AG}. \tag{1}$$

Понатаму,

$$\frac{\overline{CP_2}}{\overline{P_2G}} = \frac{\overline{CP_2}}{\overline{AP_2} - \overline{AG}} = \frac{3\overline{CP_2}}{3\overline{AP_2} - 3\overline{AG}} = \frac{3\overline{CP_2}}{2\overline{AP_2}} = \frac{\overline{AC}}{2 \cdot \frac{2}{3}\overline{AC}} = \frac{3}{4},$$

па затоа

$$\overline{P_2G} = \frac{4}{3}\overline{CP_2}. \tag{2}$$

Од сличноста на триаголниците $\triangle GP_3C \sim \triangle P_2FC$ и од (2) следува дека

$$\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CP_2}} = \frac{\overline{CP_2} + \overline{P_2G}}{\overline{CP_2}} = 1 + \frac{\overline{P_2G}}{\overline{CP_2}} = 1 + \frac{\frac{4}{3}\overline{CP_2}}{\overline{CP_2}} = \frac{7}{3}.$$

Значи,

$$\overline{CF}=\frac{3}{7}\overline{CP_3}, \qquad (3)$$

$$\overline{CP_3}=\frac{7}{3}\overline{CF}. \qquad (4)$$

Во $\triangle AP_3C$ да повлечеме висина од темето A, а во $\triangle P_2FC$ од темето P_2, чии должини се соодветно $3h$ и h (Зошто?). Имаме:

$$P_{P_2FC}=\frac{1}{2}h\cdot\overline{CF}, \qquad (5)$$

$$P_{AP_3C}=\frac{1}{2}3h\cdot\overline{CP_3}=\frac{1}{2}3h\cdot\frac{7}{3}\overline{CF}=\frac{7}{2}h\cdot\overline{CF}, \qquad (6)$$

па затоа

$$P_{P_2FC}=\frac{1}{7}P_{AP_3C}. \qquad (7)$$

Понатаму, од (7) следува

$$P_{AP_3FP_2}=P_{AP_3C}-P_{P_2FC}=\frac{6}{7}P_{AP_3C}. \qquad (8)$$

Сега, бидејќи $\overline{AP_3}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, добиваме

$$P_{AP_3C}=\frac{1}{3}P_{ABC}, \qquad (9)$$

па од (8) и (9) следува

$$P_{AP_3FP_2}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}P_{ABC}=\frac{2}{7}P_{ABC}. \qquad (10)$$

Аналогно се докажуваат равенствата

$$P_{P_3BP_1D}=\frac{2}{7}P_{ABC}, \qquad (11)$$

$$P_{P_1CP_2E}=\frac{2}{7}P_{ABC}. \qquad (12)$$

Конечно, од (10), (11) и (12) следува

$$P_{DEF}=P_{ABC}-P_{AP_3FP_2}-P_{P_3BP_1D}-P_{P_1CP_2E}=\frac{1}{7}P_{ABC},$$

што и требаше да се докаже.

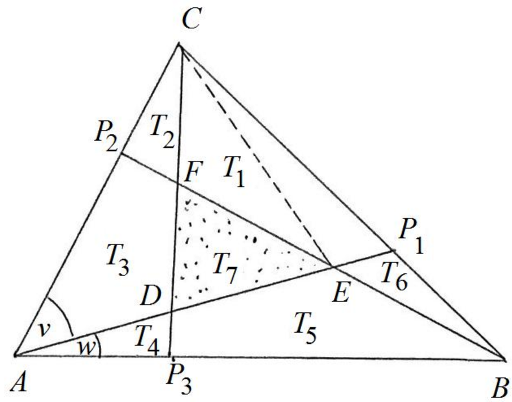
Втор начин. Точките на цртежот десно имаат исто значење како и при првиот начин на решавање и нека

$P_{ABC}=T$, $\quad P_{EP_1CF}=T_1$,

$P_{ECP_2}=T_2$, $\quad P_{ADFP_2}=T_3$,

$P_{AP_3D}=T_4$, $\quad P_{P_3BED}=T_5$,

$P_{BP_1E}=T_6$, $\quad P_{DEF}=T_7$.



Имаме

$$P_{ABP_1}=P_{BCP_2}=P_{CAP_3}=\tfrac{1}{3}P_{ABC}=\tfrac{1}{3}T\,,$$

па затоа

$$P_{ABP_1}+P_{BCP_2}+P_{CAP_3}=T\,. \qquad (*)$$

Понатаму,

$$P_{ABP_1}=T_4+T_5+T_6\,, \qquad (13)$$

$$P_{BCP_2}=T_6+T_1+T_2\,, \qquad (14)$$

$$P_{CAP_3}=T_2+T_3+T_4\,. \qquad (15)$$

Сега, од (*), (13), (14) и (15) следува

$$\begin{aligned}T&=(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6)+T_2+T_4+T_6\\&=(T-T_7)+T_2+T_4+T_6,\end{aligned}$$

т.е.

$$T_7=T_2+T_4+T_6\,. \qquad (16)$$

Од друга страна $P_{AEP_2}=2P_{ECP_2}$, па затоа $P_{BCP_2}+P_{AEP_2}+P_{ABE}=T$, т.е.

$$\tfrac{1}{3}T+2P_{ECP_2}+(T_4+T_5)=T\,.$$

Бидејќи $P_{BCP_2}-P_{BP_1E}-P_{P_1CE}=P_{ECP_2}$ и $T_4+T_5=\tfrac{1}{3}T-T_6$, добиваме

$$\tfrac{1}{3}T+2(P_{BCP_2}-P_{BP_1E}-P_{P_1CE})+\tfrac{1}{3}T-T_6=T\,,$$

т.е.

$$\tfrac{1}{3}T+2(\tfrac{1}{3}T-T_6-2T_6)+\tfrac{1}{3}T-T_6=T\,,$$

па затоа

$$T_6=\tfrac{1}{21}T\,. \qquad (17)$$

Аналогно се докажува дека

$$T_2=\tfrac{1}{21}T\,, \qquad (18)$$

$$T_4=\tfrac{1}{21}T\,. \qquad (19)$$

Со замена од (17), (18) и (19) во (16) конечно добиваме $T_7=\tfrac{3}{21}T=\tfrac{1}{7}T$, што и требаше да се докаже.

Трет начин. Точките на долниот цртеж имаат исти ознаки како и претходно и нека R_1,R_2,R_3 се точки такви што

$$\overline{BR_3}=\tfrac{1}{3}\overline{AB}\,,\ \overline{CR_1}=\tfrac{1}{3}\overline{CB}\,,\ \overline{AR_2}=\tfrac{1}{3}\overline{AC}\,.$$

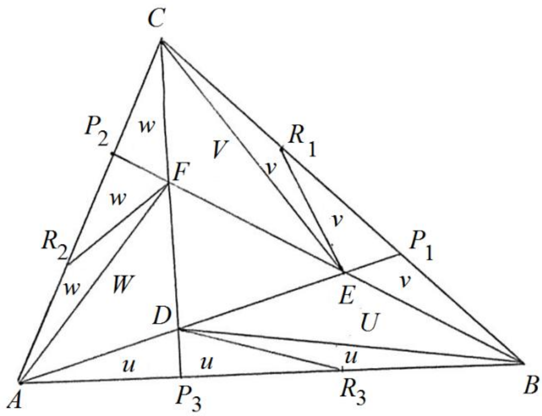
Да повлечеме отсечки како на долниот цртеж. Лесно се докажува дека

$$P_{AP_3D}=P_{P_3R_3D}=P_{R_3BD}=u\,,$$

(трите триаголници имаат иста висина и еднакви соодветни основи). Аналогно важи

$$P_{BP_1E}=P_{P_1R_1E}=P_{R_1CE}=v\,,$$

$$P_{CP_2F}=P_{P_2R_2F}=P_{R_2AF}=w.$$



Понатаму, при ознаки

$P_{BED}=U, P_{CEF}=V, P_{AFD}=W$

добиваме

$$\tfrac{1}{3}T=P_{ABP_1}=3u+U+v\,,$$

$$\tfrac{1}{3}T=P_{BCP_2}=3v+V+w,$$

$$\tfrac{1}{3}T=P_{CAP_3}=3w+W+u\,.$$

Последните три равенства ги собираме и добиваме

$$T=4(u+v+w)+U+V+W\,.$$

Од друга страна важи

$$T=3(u+v+w)+U+V+W+P_{DEF}\,,$$

па затоа

$$4(u+v+w)+U+V+W=T=3(u+v+w)+U+V+W+P_{DEF}\,,$$

т.е. $T_7=P_{DEF}=u+v+w$.

Понатаму, од $2\overline{AP_3}=\overline{P_3B}$ следува $2P_{AFP_3}=P_3FB$, односно

$$2(u+W)=2u+U+T_7\,,$$

што значи $2W=U+T_7$. Аналогно се докажува дека

$$2U=V+T_7 \text{ и } 2V=W+T_7\,.$$

Ако ги собереме последните три равенства, добиваме

$$2(U+V+W)=U+V+W+3T_7\,,$$

односно

$$3T_7=U+V+W\,.$$

Конечно,

$$T=4(u+v+w)+U+V+W=4T_7+3T_7\,, \text{ т.е. } T_7=\tfrac{1}{7}T\,.$$

Четврт начин. Триаголникот ABC да го сместиме во правоаголен координатен систем xOy како на долниот цртеж. Ако означиме

$$\overline{BC}=a\,,\ \overline{CA}=b\,,\ \overline{AB}=c \text{ и } \measuredangle BAC=\alpha,$$

тогаш темињата на триаголникот имаат координати

$A(0,0),\ B(c,0),$

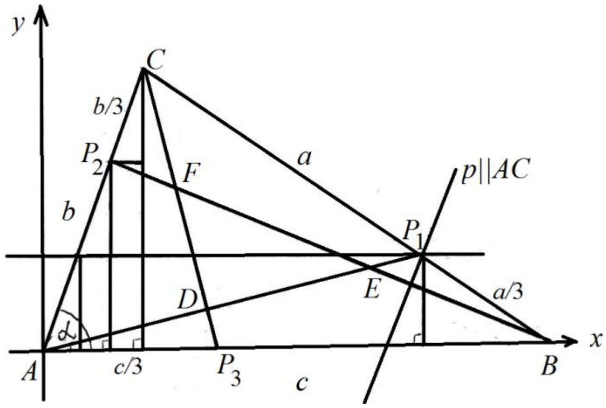
$C(b\cos\alpha, b\sin\alpha),$

а координатите на точките P_1, P_2, P_3 кои страните ги делат во однос 1:2 се

$P_1(\frac{b\cos\alpha+2c}{3},\frac{b\sin\alpha}{3}),$

$P_2(\frac{2b\cos\alpha}{3},\frac{2b\sin\alpha}{3})$ и

$P_3(\frac{c}{3},0)$.



Сега решавањето на задачата се сведува на:

- наоѓање на равенките на правите AP_1, BP_2 и CP_3,
- определување на пресечните точки на две по две од овие три прави, т.е. на наоѓање на координатите на темињата D, E и F,
- пресметување на плоштините на триаголниците ABC и DEF со формулата за плоштина на триаголник чии темиња се со зададени координати, и
- споредување на плоштините на триаголниците ABC и DEF.

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Петти начин. При ознаки како на цртежот во вториот начин на решавање на задачата, да ставиме $v=\measuredangle CAD, w=\measuredangle P_1AB$, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{CA}=b$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $P_{ABC}=T=1$. Тогаш

$$P_{ABP_1}=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AP_1}\sin w=\frac{1}{2}c\cdot\overline{AP_1}\sin w, \text{ т.е. } \frac{1}{3}=\frac{1}{2}c\cdot\overline{AP_1}\sin w,$$

$$P_{AP_1C}=\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AP_1}\sin v=\frac{1}{2}b\cdot\overline{AP_1}\sin v, \text{ т.е. } \frac{2}{3}=\frac{1}{2}b\cdot\overline{AP_1}\sin v,$$

па затоа $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{2}c\cdot\overline{AP_1}\sin w}{\frac{1}{2}b\cdot\overline{AP_1}\sin v}$, т.е.

$$\frac{1}{2}=\frac{c\sin w}{b\sin v}. \tag{20}$$

На ист начин

$$P_{ACP_3}=\frac{1}{3},$$

$$T_4 = P_{AP_3D} = \tfrac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AP_3}\sin w = \tfrac{1}{2}\overline{AD}\cdot\tfrac{1}{3}c\sin w,$$
$$\tfrac{1}{3} - T_4 = P_{ACD} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin v = \tfrac{1}{2}b\cdot\overline{AD}\sin v,$$

па затоа

$$\frac{T_4}{\frac{1}{3}-T_4} = \frac{c\sin w}{3b\sin v}. \tag{21}$$

Сега, од (20) и (21) следува $\frac{3T_4}{1-3T_4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$, т.е. $T_4 = \frac{1}{21}$. Според тоа, T_4 не зависи од должините на страните a,b,c, па заради симетрија важи $T_2 = T_4 = T_6 = \frac{1}{21}$. Конечно, бидејќи

$$T_2 + T_3 + T_4 = P_{ACP_3} = \tfrac{1}{3},\ T_4 + T_5 + T_6 = P_{ABP_1} = \tfrac{1}{3},\ T_6 + T_1 + T_2 = P_{BCP_2} = \tfrac{1}{3},$$

добиваме

$$\begin{aligned} T_7 &= T - (T_2+T_3+T_4) - (T_4+T_5+T_6) - (T_6+T_1+T_2) + (T_2+T_4+T_6) \\ &= 1 - 3\cdot\tfrac{1}{3} + 3\cdot\tfrac{1}{21} = \tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{7}T, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Забелешка. Во претходните три начини на решавање на задачата истата ја решивме за произволен триаголник. Јасно, ако се искористи методот на специјализација кој претставува пренесување на својствата на елементите од дадено множество M на некое негово подмножество N, тогаш добиваме дека претходните три начини за решавање на задачата важат и за рамностран триаголник, но за рамностраниот триаголник ќе дадеме уште еден начин за решавање на задачата. За таа цел почетната задача прво ќе ја преформулираме.

На страните AC, CB, BA *на рамностраниот триаголник* ABC *земени се точки* E, I, G *такви што* $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}, \overline{CI} = \frac{1}{3}\overline{CB}, \overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA}$. *Докажи дека отсечките* AI, BE, CG *ограничуваат триаголник чија плоштина е еднаква на* $\frac{1}{7}$ *од плоштината на* $\triangle ABC$.

Да го сместиме рамностраниот триаголник ABC во триаголна мрежа на рамнострани триаголници како на цртежот десно. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека при воведените ознаки важи

$$P_{RDA} = P_{PQR} = 1.$$

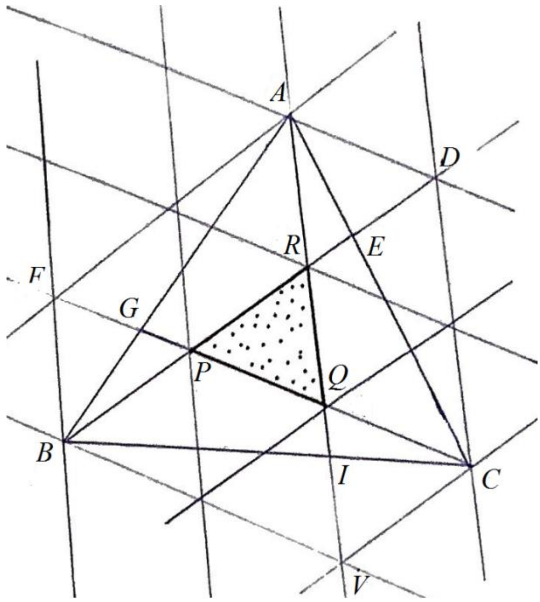
Тогаш $P_{BPCV}=4$, и затоа $P_{BPC}=\frac{1}{2}P_{BPCV}=2$. На ист начин добиваме $P_{QCA}=P_{BAR}=2$. Сега имаме:

$$P_{ABC}=P_{BPC}+P_{QCA}+P_{BAR}+P_{PQR}=2+2+2+1=7,$$

па затоа $\frac{P_{PQR}}{P_{ABC}}=\frac{1}{7}$, односно

$$P_{PQR}=\frac{1}{7}P_{ABC},$$

што и требаше да се докаже.



Пред да преминеме на следните разгледувања, да забележиме дека начинот за решавање на задачата за специјалниот случај на рамностран триаголник може да се примени и за произволен триаголник. Имено, за таа цел потребно е триаголникот ABC на потполно аналоген начин да се смести во триаголна мрежа на складни триаголници на триаголникот DEF, а потоа постапуваме идентично како во случајот со рамностраниот триаголник.

Обиди се самостојно почетната задача да ја решиш на овој начин. ■

На крајот од ова наше дружење да забележиме дека почетната задача може да се воопшти, т.е. да се генерализира. Да се потсетиме, *воопштувањето* е резултат на мисловното обединување на издвоени општи својства, кои се суштински за дадена класа предмети и појави. Притоа, може да се каже дека воопштувањето претставува преминување од дадено множество објекти A кон разгледување на пошироко множество објекти B, коишто го содржат примарното множество објекти A. Во нашиот случај тоа е од делење на страните на триаголникот во однос 2:1 кон делење во однос $(n-1):1$, каде $n\geq 3$ е природен број. Така, воопштената задача гласи:

На страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ земени се редоследно точките P_1, P_2, P_3 такви што

$$\overline{BP_1}=\frac{1}{n}\overline{BC}, \overline{CP_2}=\frac{1}{n}\overline{CA}, \overline{AP_3}=\frac{1}{n}\overline{AB}.$$

Докажи дека отсечките $AP_1,\ BP_2, CP_3$ *ограничуваат* $\triangle DEF$ *таков што*

$$P_{DEF}=\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}P_{ABC}.$$

Обопштената задача може да се реши на повеќе начини, при што според нас наједноставно е тоа да се направи со прилагодување на вториот, четвртиот и петтиот начин на решавање на почетната задача. На читателот му препорачуваме тоа самостојно да го направи, како и да се обиде обопштената задача да ја реши користејќи ја идејата за решавање на специјализираната задача за рамностран триаголник.