Прича о малим и великим бројевима (Први део)

др Миодраг Рашковић, Београд

Људи су одувек имали потребу да описују једни друге. Тако су једни називани косматима а други слабокосима (или ћелавим). И све то је било лепо и красно док људи нису почели, а морали су почети, да филозофирају. И тада се у разумевању ове поделе појавио проблем формулисан под, у филозофији познатим, називом: „Парадокс ћелавца".

У чему је овај парадокс? Па ево. Замислимо најкосматијег (и ако треба најглаватијег) човека на свету и почнимо да му чупамо влас (длаку) по влас. Чупањем једне длаке статус његове косматости остаје исти, он дакле остаје космат. То ће се исто десити када му исчупамо другу, па трећу, па четврту итд. влас. Он ће остати стално космат јер напросто „длака горе, длака доле" не значи ништа. Али, ето парадокса, наше заморче ће на крају остати без длака, а и даље ћемо га звати косматим!

Какве сад ово има везе са математиком, упитаће се неко? Па има, најдубље могуће, одговорићемо му одмах. У циљу да то мало ближе покажемо заменимо сам скуп власи (тј. косу) њеним (кардиналним) бројем. Тако, тотално ћелав човек нема ни једну длаку, а онај најкосматији има их највише 174888 (за овај број не гарантујемо).

Подсетимо се сада мало особина природних бројева онако како их учимо у школи. Нула је најмањи природан број (може и један) и „сви" остали природни бројеви се могу добити тако што ће се на предходни број додати јединица. Тако долазимо до растућег низа „свих" природних бројева $0, 1, 2, \ldots$.

Овом низу, схваћеном као целина (тј. скуп), додељује се једна важна особина. Наиме, сматра се да сваки његов део, тј. подскуп, који је непразан има најмањи елемент. То својство се назива „Принцип минималног елемента". Назовимо овако засноване природне бројеве као „стандардни систем" (природних бројева). Овај назив, иако уобичајен, у ствари није добар али се овде не упуштамо у расправу око тога.

Сада наш проблем (или парадокс) можемо преформулисати у оквиру математике. Скуп $\{0, 1, \ldots, 174888\}$ поделимо у два подскупа A и B. У првом скупу A нека буду они бројеви који представљају бројеве власи слабокосих људи, а у другом скупу B они остали. (Овде намерно не говоримо о ћелавцима, не због доброг васпитања, већ зато што је ћелавост такође повезана са још једним другим математичким проблемом, а то је питање облика). Ови скупови су очигледно непразни. На основу принципа најмањег елемента, који важи за „стандардан систем", у скупу B постоји најмањи број b и он, као и остали из тог скупа, одговара броју длака косматог човека. Са друге стране имамо да $b-1$ одговара броју длака слабокосог, па то исто важи и за број b (јер се статус додавањем длаке не мења!). Контрадикција!!!

Како да превазиђемо ову контрадикцију? У принципу постоје два пута. Први је да променимо наше схватање косматости, а други је да променимо нашу математику; тачније теорију природних бројева.

Присталица искључиво „стандардног система" (а таквих је највише међу онима који и не знају да некакав други систем постоји), определивши се за први пут вероватно би рекао:

„Наш појам косматости није математички добро дефинисан. Ми морамо тачно одредити гранични број k испод кога имамо слабокосост."

Међутим, овакво решење није добро из најмање два разлога. Прво, ко је спреман и ко има времена да пребројава длаке у граничним случајевима и друго за нас је неприхватљиво да човек са $k-1$ длаком буде слабокос, а онај са k космат.

Може се такође покушати са увођењем већег броја појмова косматости (што вуче према теорији мере или теорији фазискупова) а што може само да компликује али не и реши проблем на начин који ће задовољити наше практичне потребе.

Па шта нам онда преостаје? Одговор је: Наравно само други пут. А то је за ову прилику (а и видећемо касније и за друге, за математику много важније, прилике) промена нашег схватања природног броја. Такозвани „нестандардни систем" природних бројева (још гори назив).

У чему се разликује тај „нестандардни систем"? У њему се природни бројеви деле на „мале" и „велике". „Велики" природни бројеви дођу иза „малих". Подскуп „малих" бројева M нема највећи, а подскуп „великих" V нема најмањи елемент. Према томе у овом систему не важи принцип минималног елемента.

Сада се лако види да се број длака слабокосих може интерпретирати као „мали", а број длака косматих као „велики" а да контрадикције нема.

Али ће неко можда упитати: „*А што ти је то број* 174888 *па велики?* Уосталом појмови велики и мали су само психолошки. За мало дете је и 100 велики број, а за време Милошевића је и плата од 10000000000 била мала". Људи који постављају таква питања обично слепо верују у „реалност", „природност" и јединственост приступа природним бројевима оличене у „стандардном систему". Они верују у неку врсту објективног, реалног постојања природних бројева и називају се обично платонисти (по старогрчком филозофу Платону који је веровао у постојање света идеја). Они чврсто верују да се математика само открива а не ствара.

Одговор на овакав и друге приговоре платониста и осталих тек ћемо касније давати. Али основни одговор је: ***Овде се ради о квалитативном решењу проблема који нам решава (огромне) квантитативне проблеме.***

Ипак за оне који воле да маштају нека замисле број P направљен помоћу броја $\pi = 3,14\ldots$ на следећи начин. Нека му је прва цифра 3, друга 1, трећа 4 итд. све до краја стоте галаксије рачунате одавде. Дефинишимо сада број Q као $\left.P^{P^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{P}}}}}\right\}P^{P^{P}}$ (Ово је у стандардном систему наравно обичан и сасвим природан број!).

Замислимо сада два пријатеља од којих један почиње да броји од нула унапред, а други од Q уназад. Ако се сада ослободимо маште и окренемо се стварном бројању, када ће они стићи до истог броја? Наравно, никада!

Како се развијао „нестандардни систем" кроз векове и у највећим дубинама људског ума тек ћемо да видимо. Пратићемо како су улагани велики напори да се он дефинитивно уклони из математике, али и како се он увек као феникс враћао обогаћујући све више и више математику. На крају ћемо видети како је „нестандардни систем" постао потпуно равноправан са „стандардним", па у неком смислу чак и супериоран.

Осврнућемо се и на тренутни статус броја Q као и на његову могућу даљу перспективу. Сва ова узбудљива догађања пратићете у наредним бројевима Тангенте.

Прича о малим и великим бројевима (Други део)
Грци и бесконачност

***др Миодраг Рашковић*, Београд**

Први рачун са „малим" и „великим" бројевима створили су стари Грци. Наравно, тај рачун је био далеко од оног који ће бити створен у XVII веку од стране Лајбница и других. То делује помало парадоксално када се има у виду да су Грци, начелно говорећи, били велики противници бесконачности. Они су ишли чак дотле да су њено постојање директно забрањивали! То управо чини чувена аксиома, из Еуклидових Елемената, која тврди да „целина мора бити већа од дела".

Грчка реч за бесконачност била је „апејрон" што је буквално значило неограничен, а такође и неодређен, недефинисан и сл. За нас је овде посебно значајно да је апејрон у основи имао негативно па чак и пежоративно значење. Свођење на апсурд (reducio sub apsurdum) је најчешће значио свођење на бесконачност (reducio sub infinitum).

Зашто су Грци имали тако негативан однос према бесконачности? Одговор се крије како у одређеним филозофским ставовима тако вероватно и у томе што су рано уочили њену парадоксалност, везану пре свега за Зенонове парадоксе (апорије). Том односу према бесконачности је допринело (а делом из тог односа и проистекло) стварање појма „величина". Под величином су најчешће подразумевали природан број или дуж, где је ово друго код њих општије јер броју одговара дуж али не и обратно. Тако су елегантно, преко геометрије (а без увођења бесконачности) заобишли део проблема везан за корен броја 2.

Чувени Зенонови парадокси оставили су великог трага и утицаја у грчкој математици. Пренели су из филозофије у математику потребу за доказивањем и то најмање из два разлога. Прво, докази (оповргавања) из филозофије служили су за углед математичарима, и друго, парадокси су проблематизовали саме основе математике и ни у шта се више није могло веровати на слепо.

Зенонова намера је била да потврди Парменидово учење да егзистира само јединствено и непокретно биће, а да је све остало привид. Да би показао да је то тако Зенон се послужио логичком методом свођења на противуречност. Тако су Елејци давно пре Хилберта и формалне логике егзистенцију сводили на непротивуречност! Парменид каже: „Све што знамо (тј. о чему можемо да мислимо) то и постоји, јер оно што не постоји о томе појма немамо". У том циљу Зенон у више примера, полазећи од супротних претпоставки да постоје кретање и мноштво током закључивања жели да дође до противуречности.

Као пример Зеноновог закључивања приказаћемо његов можда најпопуларнији парадокс: Ахил и корњача. Ту се Ахил трка са корњачом која је на остојању a_1 испред њега. Када Ахил стигне до места на коме се налазила корњача она се помери за a_2, када он опет стигне до тог новог места она се помери за a_3 итд. Иако ми знамо да ће Ахил стићи корњачу, са којом се креће у истом правцу, он је и неће стићи јер се наведени бесконачан процес приближавања неће никад завршити!

Овај парадокс, као уосталом и други, није никада дословно схваћен у сврху за коју је намењен. Мало коме је падало напамет да мноштва и кретања нема, али су нуђени (а и даље се нуде) разни одговори који треба да покажу да у ствари парадокса и нема. Аристотел је, један век касније, понудио одговор који подразумева потенцијално бесконачну дељивост континума, тј. у то време дужи. То становиште је данас дограђено прихватањем актуелне бесконачности ω. Читава прича се своди на проблем конвергенције, тј. на то да ће Ахил на *коначном растојању* $\sum a_n$ *стићи корњачу за коначно време* $\sum t_n$.

Овакав одговор данас задовољава већину математичара и нешто мању већину филозофа. Наравно овим решењем проблем је само пренет у теорију (бесконачних) скупова. Али какви све парадокси и проблеми тек настају у теорији скупова тек ћемо видети!

Разуме се, *слично као код парадокса ћелавца, ни овде се не ради ни о каквој бесконачности* у физичком смислу већ само о једној математичкој екстраполацији. Никаквих бесконачно много међукорака ту нема зато што, бар према савременим физичким теоријама, постоји најкраће позитивно растојање те процес приближавања не може ићи ad infinitum!

Али прва грчка реакција на ове парадоксе ишла је другим путем. Она је ишла у правцу одбацивања чак и потенцијалне бесконачности. Зашто су се Грци одлучили за тако нешто? Могу се дати многи одговори, а основни би био (а који смо већ напоменули) да су рано уочили њену парадоксалност.

Међутим, одговор можемо потражити и у грчком схватању појма броја и мере који води порекло из Питагорине школе. Основа свега код Питагорејаца су природни бројеви (а то су и једини бројеви за њих). Сваке две величине (нпр. дужи) се могу измерити неком трећом, а све скупа једном јединицом и која је уз то и најмања могућа величина. Дакле свакој дужи одговара један природан број. Слично се односи и на површине и запремине.

Јасно је да та јединична величина мора да буде „мала“ (тј. инфинитезимала) и недељива. Нешто као атом из кога се све гради. О таквим физички недељивим величинама „атомима“ и математички недељивим величинама „америма“ ћемо више говорити у наредном броју Тангенте. Посебно ћемо се осврнути на велики допринос атомисте Демокрита у геометрији.

Учење о „недељивим инфинитезималама“ (другим речима атомима) добија свој завршни облик у науку Хенократеса, данас доста заборављеног Платоновог наследника на Академији. А зашто је он заборављен биће нам јасније када се у наредном броју будемо срели са неким ставовима једног другог, кроз историју, знатно утицајнијег Платоновог ученика, и данас веома познатог и признатог Аристотела.

Хенократес је сматрао да се помоћу недељивих инфинитезимала могу објаснити Зенонови парадокси. Тако Ахил у коначном броју корака стиже корњачу. Наравно, тај број корака је „велики“ (јер само „велики“ број пута „мали“ број даје коначан број), али не и бесконачан (у смислу ω), јер је бесконачан број пута „мали“ број бесконачан број! Постигнута су (по Хенократесу) два циља: Објашњени су Зенонови парадокси и показано да је сумњива бесконачност (ω) непотребна! Напоменимо да је завршни облик ове аргументације (која се данас везује за тзв. финитисте) дао наш најпознатији филозоф Брана Петронијевић.

Колико су неки од Зенонових парадокса повезани са парадоксом ћелавца, а тиме и проблемом „малих“ и „великих“ бројева најбоље говори Зенонова апорија о мноштву: „Ако котарица кукурузног зрна просутог на камени под производи буку, онда то мора бити случај и када бацимо и једно зрно. Али, није тако“.

Ако број зрна која „праве буку“означимо као „велики“ број, а онај број зрна која „не праве буку“ као „мали“ број, онда Хенократес није могао другачије да објасни ову апорију него што смо ми објаснили парадокс ћелавца.

О манама Питагориног учења, првом „кориснику инфинитезималне методе“ Антифонту и Аристотеловој критици те методе, као и Аристотеловом концепту бесконачности говорићемо у наредном броју. Такође ћемо се осврнути на Еудоксов „метод исцрпљивања“ као и његову примену од стране Архимеда.

Објавено на 28.3.2023

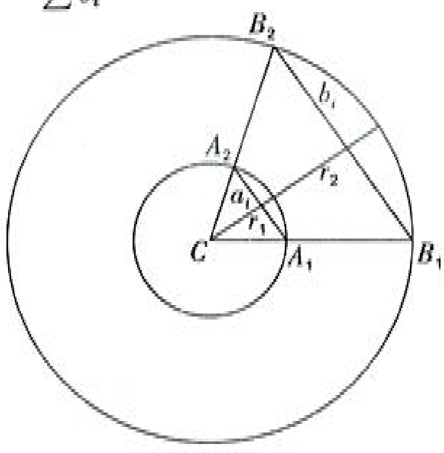
Прича о малим и великим бројевима (Трећи део)
Грци и бесконачност (наставак)

др Миодраг Рашковић, **Београд**

Познато је да су Грци још од V века пре нове ере користили инфинитезимале за решавање математичких проблема. То се пре свега односи на атомисте који су у основу свега ставили „мале" и недељиве атоме од којих је све састављено. Занимљиво је, иако мање познато, да атоми који нису били дељиви у физичком смислу још увек су могли бити дељиви у мислима до „математички" недељивих амера. Такво учење атомиста је, међутим, потпуно било у складу са питагорејским схватањем „да је све број" или, другим речима, да је све самериво најмањом величином.

Један од ретких грчких филозофа који су дали велики допринос математици био је свакако оснивач атомизма и његов најистакнутији представник Демокрит из Абдере (V на IV век). Он је помоћу инфинитезимала дошао (далеко пре Архимеда) до једног веома значајног резултата израженог на типично грчки начин као пропорција. А то је да се запремина призме и пирамиде једнаких основа и висина односе као $3 : 1$.

Као илустрацију начина мишљења атомиста показаћемо како је Демокрит доказивао да се обими кругова односе као њихови полупречници. Нека су одговарајући кругови O_1 и O_2 дати као концентрични (види сл. 1). Тада су очигледно троуглови CA_1A_2 и CB_1B_2 слични. Отуда је $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_i}{b_i}$ за $i = 1, \ldots, n$. На основу добро познате особине пропорције је $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i}$.



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_i}{b_i}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \approx \frac{O_1}{O_2}$$

Слика 1.

Очигледно је да би се са извођењем до овог места свако и данас сложио. Али одавде почиње „виша математика"! Демокрит идентификује круг са полигоном са „великим" бројем страна које су све по дужини „мале"!! Он одатле непосредно закључује да је

$$\frac{Obim(O_1)}{Obim(O_2)} = \frac{r_1}{r_2}!!!$$

Демокритов ученик и следбеник Антифон затим иде и корак даље и покушава да реши проблем квадратуре круга (тј. да за дати круг конструише, помоћу лењира и шестара, квадрат исте површине) на „атомистички начин". Он је размишљао отприлике овако: Ако је у круг уписан многоугао (нпр. троугао или квадрат) за њега, као и за сваку праволинијску фигуру, може да се конструише помоћу лењира и шестара квадрат исте површине. То остаје тачно и за полигон са „бесконачним" бројем страна, па тиме и за круг.

Наравно, многима се није допало овакво Антифоново закључивање. На њега се посебно обрушио Аристотел који у својој Физици даје квадратуру Антифона као пример за закључивање које следи из немогућих претпоставки и зато „спровођење такве квадратуре није посао за геометре".

У познатој и веома цењеној (такође и од стране аутора ових редова) књизи „Историја математике од најстаријих времена до почетка новог века" (под уредништвом славног руског историчара Јушкевича), аутор одговарајуће главе Башмакова истиче: „Стварно, при Антифоновој квадратури треба или да се претпостави, да је круг многоугао са много великим бројем страна, свака од којих је много мала, или да се сматра, да је број страна тог многоугла бесконачан. Ниоткуда иначе не следи, да ће својство, које је тачно за многоугао са коначним бројем страна, остати испуњено и за многоугао са бесконачним бројем страна. У оба случаја расуђивање Антифона је неприхватљиво."

Пре него што дамо „коментар на коментар", тј. пре него се мало осврнемо на оно што су Аристотел и Башмакова рекли, желимо да донекле упознамо читаоца са појмом Аристотелове непрекидности (континума) који је вековима био основ за разумевање простора и времена.

За разлику од атомиста који су дуж, кружну линију и сл. замишљали као дискретан низ атома (који се ређају слично као природни бројеви од 1 до неког n), Аристотел је дуж (па и кружну линију) замишљао сасвим другачије. Главна разлика је била у томе што је свака (било како мала) дуж била за њега дељива, или другим речима између сваке две тачке на дужи могла се убацити трећа (са њима различита) тачка. То дељење дужи је код њега потенцијално бесконачно, тј. иза сваке деобе може се направити следећа али се тај бесконачни процес никада не може завршити. Овакво гледање на дуж изгледа веома природно и прихватљиво и просто је данас тешко наћи човека који се неби сложио са њим. Али можемо изнети у вези са таквим гледањем две веома значајне примедбе.

Прво, јасно је то хипотетички неограничено дељење физички немогуће и да представља „само један математички концепт" који, као што ћемо видети, никада није био прихватљив за све математичаре-филозофе (као нпр. за финитисте који негирају сваку реалност бесконачности).

Друго, а у тесној вези са првим, Аристотелово схватање непрекидности је у неком смислу недовршено. Разлог томе је што се потенцијална бесконачност, која је овде дата као неки процес дељења дужи на све мање делове, у математици претвара у остварену , тзв. актуелну, бесконачност. То у нашем случају значи да је природно упитати се шта на крају, после свих тих деоба дужи , ми добијањамо у пресеку тог (пребројиво) бесконачног опадајућег „низа уметнутих одсечака чије дужине теже нули"?

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

Одговор може да буде и ништа, тј. празан скуп, али је за потребе математике боље да то буде тачно једна тачка.

На тај начин стижемо до појма Канторовог континума који је довршење Аристотеловог. Али ту тек долазимо до хијерархије бесконачности и тешких проблема и парадокса у теорији скупова о којима ће бити тек речи. Ти проблеми и парадокси бацају сенку на иначе данас веома прихваћену Канторову теорију.

Са становишта Аристотеловско-Канторовског схватања непрекидности (континума) прича коју је испричао Антифон изгледа стварно чудно ако не и сулудо. Али није све савим тако!

Прво, Антифон није имао ограничења (или бар она нису тако озбиљно била у његово време схваћена) да се конструкција може извршити само помоћу лењира и шестара. За ту „строгост" у захтевима најзаслужнији је, сматра се, био Аристотелов учитељ Платон. Свакако да то има везе са „Платоновим светом идеја" (као што су нпр. круг, дуж и др.), али о томе овде не можемо причати.

Са друге стране, позивајући се на физику, знамо да је број атома у васиони ограничен. То ограничење се свакако односи и на број атома у графитној оловци причвршћеној на шестар којим конструишемо. Зато можемо претпоставити да приликом описивања кружне линије ми у ствари у (физичком смислу) остављамо атоме угљеника у теменима неког многоугла са великим бројем страна. Слично се односи и на повлачење дужи.

Треће, и самих конструкција помоћу лењира и шестара има две врсте. Теоретских и практичних. Теоретски то је „коначан" број повлачења произвољних дужи и кружница. Практично, то нису баш тако произвољне дужи и кружнице, нити је тај њихов коначан број баш тако велики. Физичка ограничења су ту доста велика. Сада знамо, на примеру квадратуре круга, да при конструкцији немамо само физичких него и чисто принципијелних ограничења. Све то баца лоше светло на Платонов захтев.

Антифонова метода има како практичних тако и теоретских предности над Платоновско-Аристотеловским захтевом за конструкцијом помоћу лењира и шестара. Практична предност је у томе што квадратуру, ако већ знамо да не можемо да постигнемо лењиром и шестаром, можемо практично задовољавајуће, да обавимо за довољно велики многоугао који апроксимира круг.

Теоретски, тј. ако конструкцију схватимо довољно широко, Антифонова метода је могућа са становишта савремене нестандардне анализе (и то је донекле одговор Башмаковој). У њој важи тзв. принцип преливања који би адаптиран за ову прилику гласио: „Ако се нека конструкција може обавити једнобразно за произвољно велики коначан правилан многоугао са 2^n страна, то се онда може обавити и за неки хиперконачан (читај велики) многоугао са 2^H страна, где је H хиперконачан (читај велики) број". Под „конструкцијом" се овде подразумева хиперконачна (читај „велика") примена лењира и шестара. Добијена квадратура ће бити бесконачно блиска траженој, па се на прихватљив начин може и идентификовати са њом.

На крају рецимо да је Аристотел био потпуно у праву када је рекао да Антифонова квадратура није посао за геометре. Али он није знао да то важи уопште за сваку другу квадратуру круга, како су већ доказали алгебристи. Квадратура круга је посао за аналисте. Наравно Аристотел није могао ни да сања појаву Галоа и Робинсона као ни њихових теорија које су помогле да се ствари мало ближе осветле.

У наредном броју говорићемо о „методи исцрпљивања" као и односу Еудокса и Архимеда према „малим" и „великим" бројевима...

Прича о малим и великим бројевима (четврти део) Грци и бесконачност (наставак наставака)

др Миодраг Рашковић, **Београд**

Има једна ствар, коју без обзира на све нападе нико није оспорио Антифону. Он је очигледно претеча методе исцрпљивања (есхаустије) коју је увео Еудокс из Книдоса (408 п.н.е. до 355 п.н.е.). Еудокс је свакако био један од најзначајнијих грчких математичара који је припремио долазак Архимеда из Сиракузе (287 п.н.е. до 212 п.н.е.), крупе грчке математике.

Пре него што илуструјемо методу исцрпљивања и покажемо како она „озакоњује" резултате добијене „инфинитезималном методом", позабавимо се једном, за ту методу, значајном дефиницијом која ће се касније код Архимеда претворити у аксиому. Та, Архимедова аксиома улази у редовни курс математичке анализе и од одлучујућег је значаја за само заснивање поља реалних бројева.

У петој књизи Еуклидових Елемената чији је предмет теорија пропорција и која углавном потиче од Еудокса у дефиницији бр. 4 се каже: „Каже се да две величине имају размеру, једна спрам друге, ако могу увишестручене, прекорачити једна другу". То практично значи да ако a и b „имају размеру" и на пример a је мање од b, онда се дуж b може прекрити са довољним бројем дужи подударних са дужи a. Слично важи и за позитивне бројеве a и b „који имају размеру" и b је веће од a. Тада за неки природан број n, b је мање од na.

Занимљиво је какав је однос према овој дефиницији имао 50-тих година XX века наш познати математичар и један од водећих интелектуалаца свога времена Милош Радојчић. У својој књизи „Општа математика" на 95-тој страни даје један за то време типичан, али данас чини се сумњив, коментар: „Очигледно, у гометрији, две дужи увек имају размеру: преношењем мање дужи на описани начин можемо увек прекорачити другу дуж, ма како велика она била. То је тако очигледно, да ту чињеницу Еуклид и не помиње као једну засебну геометриску чињеницу, него само жели да дефинише израз имати размеру. Но то је засебна геометријска чињеница коју би требало било доказати, било увести међу постулате. Еуклид то није приметио. Тек Архимедес је то увидео и ту чињеницу поставио међу своје постулате, којима допуњава Еуклидове. Зато у савременој геометрији, где се та чињеница обично сматра постулатом (аксиомом) она назива често Архимедовим постулатом (или чак Еудоксовим)".

По Радојчићу испада да Еудокс ни сам није знао шта је хтео, јер дефинише нешто што је увек тачно и очигледно за сваке две величине! Са друге стране то је Еуклиду нешто толико јасно (да сваке две величине „имају размеру") да то чак и не истиче!! А то значи јасније него на пример појам тачке, који ипак није толико јасан па га дефинише.

Морамо да кажемо да би Радојчић био потпуно у праву само под условом када инфинитезимале **неби могле да постоје**. А у то је Радојчић, очигледно опијен успесима заснивања анализе у XIX веку, и веровао. То што су ифинитезимале на успешан начин избачене из анализе, убрзо је погрешно схваћено као доказ за њихово непостојање. О томе како оне у математици постоје (и то независно од филозофије) тек ћемо чути.

Да би читава ствар читаоцу била јаснија осврнућемо се на директну везу између нетривијалности релације „имати размеру" и постојања инфинитезимала. У ствари, лако се показује да је Архимедова аксиома (тј. сваке две величине a и b „имају размеру") еквивалентна са непостојањем инфинитезимала.

Наиме, уколико је a инфинитезимала већа од 0, тада је a мање од $\frac{1}{n}$ за свако n из N, па је тада na мање од 1. Отуда су a и 1 несамериви. Обратно, уколико су a и b већи од 0 и „немају размеру", тада је на пример b веће од na (за свако n из N), па је $\frac{b}{a}$ бесконачан елемент, а $\frac{a}{b}$ инфинитезимала.

Као што данас знамо, инфинитезимале **могу да постоје**, па одатле према предходном пасусу, неморају сваке две величине бити у сразмери! Значи премудри Еудокс није нужно увео тривијалну, и самим тим непотребну, дефиницију!!

Зашто Еудокс, иако му инфинитезимале у дотичној теорији нису биле потребне, није хтео сасвим да их заобиђе? Он је вероватно као и Радојчић, много касније, веровао у реалност математичких појмова. Отуда произилази да је он, највероватније, веровао у постојање инфинитезимала. (Напомена: До сличних размишљања о Еудоксовој дефиницији дошао је, независно од нас, а и наравно далеко пре нас, отац нестандардне анализе Абрахам Робинсон.)

Поставља се сада питање какав је то корак даље учинио, цео век касније, Архимед и зашто га није учинио већ сам Еудокс? Зашто сам није увео аксиому да сваке две дужи „имају размеру", *ако му инфинитезимале већ нису биле потребне*?

Већ смо рекли да је Еудокс веровао у инфинитезимале, а то је у његово време било прилично раширено веровање. Са друге стране, математика његовог времена се још увек није могла одвојити од онтолошких разматрања (па се оно у шта се веровало није могло занемарити, јер се имала у виду **само једна истина**). Математика, иако одвојена од филозофије, још увек је са њом била тесно повезана.

Тек Платонови и Аристотелови оштри напади на атомисте су могли подстаћи Архимеда *да избаци инфинитезимале* (*Напомена: Историчари кажу отприлике овако: Платон је водио жестоку и непомирљиву борбу са атомистима, која је ишла чак дотле да је сакупљао Демокритова дела и спаљивао их. То је сигурно један од разлога што су Демокритови радови тако ретки. Учитељеву битку против атомиста наставио је Аристотел тако да се у то време као и касније о радовима атомиста знало углавном из уста Платона, Аристотела и њихових верних следбеника. Проучавање оригиналних Демокритових дела свело се само на ужи круг, углавном епикурејаца блиских атомистима.*)

Нама се пак чини да је важније то што је велики Архимед почео да гледа на математику „другим очима" и да се, можда први, ослобађа питања њених „онтолошких основа". Томе су сигурно допринели његово бављење физиком и техником, као и слабљење утицаја филозофије у математици (али не и филозофа Платона и Аристотела!). Математика постаје за њега средство, инструмент, духовна направа, којим се постиже неки циљ, решава неки проблем. Он не преза ни од употребе проказених инфинитезимала, додуше само у почетној, креативној фази.

Слично је, као што ћемо видети, двадесет векова касније, али сада уводећи инфинитезимале, поступио Лајбниц и тако успео да створи диференцијални и интегрални рачун. „Спорна питања" о постојању инфинитезимала на крају је сасвим оставио по страни.

Наравно, до **скоро потпуног** одвајања од онтологије дошло је тек крајем XIX века, после великих открића (или боље рећи стварања) у геометрији. Мисли се пре свега на теорију Лобачевског. Отада имамо више, чак супростављених теорија, али једнако могућих. Те теорије нам дају различите погледе на (јединствену?) стварност и њихова корист у примени зависи од случаја до случаја. Наравно највећи кривац за све то је, вишезначан и у основи парадоксалан, појам бесконачности. Нешто од тога се могло прочитати већ у првом наставку, а нешто од тога ћемо чути и касније. Али прича је много дужа и дубља и не може до краја овде бити испричана.

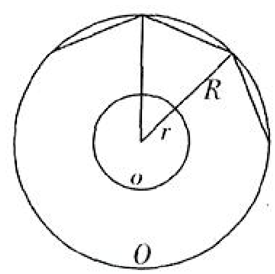
Покушајмо сада да илуструјемо „методу исцрпљивања“ која је увек служила за доказивање већ претпостављеног резултата. Зато јој је приписивана, поред логичке коректности, и некреативност. Та некреативност долази пре свега од тога што њену логичку основу чине метод елиминације претпоставки и свођење на противуречност.

Са друге стране, највећа вредност која се приписује овој Еудоксовој методи је да је она, као што ћемо ускоро да видимо у потпуном складу са Аристотеловом концепцијом континуума. Ова метода и ово гледање на континуум толико се међусобно подржавају да је дуго, многима (али наравно не и свима) било сасвим незамисливо свако друго гледање на ствар.

Као илустрацију примене ове методе, покажимо да се површине P и p кругова O и o односе као квадрати њихових полупречника R и r, тј. $\frac{P}{p} = \frac{R^2}{r^2}$. До ове једнакости можемо доћи на сличан начин како су то чинили атомиста Демокрит и његови ученици.

Да би се показала једнакост довољно је показати да не важе одговарајуће неједнакости. Њих ћемо елиминисати методом свођења на противуречност.

У том циљу претпоставимо да је $\frac{P}{p}$ веће од $\frac{R^2}{r^2}$. Тада постоји површина W тако да је $\frac{W}{p} = \frac{R^2}{r^2}$ и нека је $\varepsilon = P - W$. У кругове O и o упишимо правилне полигоне површина P_n и p_n са једнаким бројем страница и посматрајмо међуповршине изван полигона али у унутрашњости кругова.



Ако се број страница удвостручи онда је очигледно да се разматране површине (тј. разлике површина кругова и одговарајућих полигона) смањују за више од половине. Следствено на основу „својства исцрпљивости“ (који у ствари представља реципрочан вид својства „имати размеру“), а што у суштини није ништа друго него да се r^n (где је r мање од 1) може учинити довољно малим позитивним бројем (али који није инфинитезимала), површине се са довољним повећањем броја страна могу довољно смањити тако да буде $P - P_n < \varepsilon$.

Тада, будући да је $P - W = \varepsilon$, имамо да је $P_n > W$. На основу теорема о сличности троуглова лако се показује да је $\frac{P_n}{p_n} = \frac{R^2}{r^2}$. А како је било претпостављено $\frac{W}{p} = \frac{R^2}{r^2}$, имамо $\frac{P_n}{p_n} = \frac{W}{p}$.

Ако је $P_n > W$ што смо показали, онда морамо закључити да је $p_n > p$. Међутим, то је немогуће јер је p површина круга o док је p_n површина њему уписаног полигона. Зато се претпоставка $\frac{P}{p} > \frac{R^2}{r^2}$ мора одбацити.

Слично се показује да нас и претпоставка $\frac{P}{p} < \frac{R^2}{r^2}$ води у контрадикцију. Остаје, дакле, на основу закона трихотомије који важи за релацију поретка (тј. $a > b$ или $a = b$ или $a < b$) само могућност да буде $\frac{P}{p} = \frac{R^2}{r^2}$.

Овим наставком завршавамо причу о Грцима и у следећем броју ћемо се придружити средњевековним схоластичарима.

Објавено на 28.3.2023

Прича о малим и великим бројевима (пети део)
Гледање на бесконачност на крају старог века, у средњем веку и на почетку новог века

др Миодраг Рашковић, Београд

После пропасти хеленистичке цивилизације, појавила се нова јудео-хришћанска. Основна карактеристика ове нове, тек настајуће цивилизације, била је постојање једног свемогућег бога, тзв. монотеизам. То има свог одраза и у граматици тако да тог јединог бога пишемо са великим Б: Бог. (*Напомена*: Прва монотеистичка религија појавила се у Египту, али је због снажне реакције моћног свештенства, владајуће вишебожачке религије, ускоро у корену сасечена).

За разлику од грчких богова (а и осталих у другим религијама) који су били моћни у понеком конкретном домену, а сасвим обични у другима, често испреплетани разним „људским односима" са другим боговима, али и људима, овај нови бог је сасвим другачији. Он је пре свега апсолутан и неограничен у свим могућим позитивним особинама. Тако је он бесконачно моћан, бескрајно добар, бескрајно мудар и сл.

На рационалистичком западу, а о њему ћемо више касније, одмах се поставило следеће питање:**„Да ли Бог може да направи камен који не може да подигне?"**. Ово питање, на први поглед делује парадоксално. Јер, ако Бог може да направи такав камен онда није максимално јак, а ако не може онда није апсолутно моћан!

Наравно, одмах су нуђени разни одговори у циљу отклањања овог парадокса. Један од честих покушаја у том правцу, а који се и данас, на жалост, може чути, је образложење да Бог све може, па чак може и да не може?! Дај Боже да није логички противуречан!

Међутим, има и много зрелијих приступа. По нама је природније прићи богу као нечему што не подлеже нашој *људској ограниченој логици*. Одатле следи да је парадокс у ствари само у нашој немогућности да до краја (*посебно наглашавам*: **у рационалном смислу**) дођемо до, разумемо, схватимо и сл. Свевишњег бога.

Нама свакако не пада на памет да се упуштамо у теолошка разматрања овог проблема, ни овде ни другде, ако ни због чега другог бар зато што се у то не разумемо. Ипак, ако се овај проблем погледа „са световне стране" он је у ствари један парадокс бесконачности! Одговор је сличан. Бесконачности можемо прићи са ове или оне стране, из ове или оне потребе, али је не можемо (**наравно рационално**) спознати до краја.

И то су спознали свети оци на истоку врло рано. Али не и они на западу, који су заједно са другим смртницима (средњим) вековима „лупали главу" око овог и сличних проблема. Познати под заједничким именом схоластичари, они нису много помогли својој цркви, као што им је свакако била намера, али су значајно утицали да се развије наука и посебно логика (па и математичка). Посебно истичемо њихов непревазиђен значај развоју метафизике бесконачног. Тешко ломећи грчку паралу: **целина мора бити већа од дела** они су, што је за нас и најважније, први утрли пут примени идеје бесконачности у математици.

Упознајмо се сада мало ближе са неким мишљењима неких истакнутих схоластичара. Прво, подсетимо се да је на целу средњевековну мисао одлучујући утицај дуго имао Аристотел, велики противник остварене (актуаелне) бесконачности. Тако исто (о бесконачности) мисли и најистакнутији члан катехетске школе у Александрији, Ориген (185 или 186, 254 или 255) који негира постојање актуелне бесконачности.

Али, са друге стране, један од најзначајнијих хришћанских отаца Св. Августин (354 — 430) (*или Аугустин?*) у своме „*Граду божијем*“ третира низ свих целих бројева као актуелну бесконачност. По речима Георга Кантора, не може се енергичније стремити трансфинитном (читај бесконачном) и не може се трансфинитум боље дефинисати и засновати него што је то учинио свети Августин. Немамо разлога да не верујемо творцу теорије скупова, без обзира на његову очигледну потребу за потврдом властитих ставова у мислима великих људи из прошлости. (*Напомена*: Ипак делује помало парадоксално и подоста тужно да је исти тај Св. Августин изјавио:„Добар хришћанин треба да се клони математичара и свих оних који дају лажна пророчанства. Постоји опасност да су математичари већ склопили пакт са ђаволом, да помраче човеков ум и да га окују оковима Пакла“[1]. Бар једно је сигурно тачно: придаје се велики значај математичарима!

О актуелном бесконачном размишљао је и други велики католички мислилац Св. Тома Аквински (1224 — 1274) и дошао до прилично опречног става у односу на Св. Августина. Анализирајући Томино дело познати истричар филозофије Фредрик Коплстон отприлике каже: „У *De veritate* Светац примећује да би једино ваљани разлог да се каже да Бог није могао створити актуелно бесконачно мноштво била суштинска противречност у појму такве бесконачности. Али он оклева да донесе било какву одлуку у том проблему. У *Summa Theologica* он категорички тврди да не може постојати актуелно бесконачно мноштво, јер свако створено мноштво мора да има неки број, а бесконачно мноштво не представља одређен број“. Међутим, анализом и неких других дела Аквинског, Коплстон закључује да Св. Тома оклева око немогућности актуелног бесконачног мноштва.

Веома је занимљиво и мишљење познатог шкотског схоластичара Јована Дунса Скота (1265 — 1308). Он прво тврди да Бог мора да буде бесконачан зато што познаје бесконачно много интелигибилних (тј. спознатљивих) предмета и зато даје један, занимљиви на изглед врло прихватљив разлог:„Све ствари које су потенцијално бесконачне, тако да ако се узму једна за другом не могу да имају краја, јесу бесконачно актуелно, ако су истовремено актуелне“. Одатле се лако може закључити постојање скупа природних бројева, ако то већ и није била основна потка његовог размишљања!

Нови век донео је и ново гледање на појам бесконачности. Он се више не помиње само када се говори о егзистенцији Бога, мада и тога има, већ и онда када се решавају конкретни проблеми који се односе на израчунавање површина и запремина. Појам бесконачности постаје нераздвојиво везан са развојем математичке анализе и посебно испитивањем понашања многобројних кривих (тј. функција) које све развијенија пракса намеће.

У својим беседама (*Discorsi*, 1638) Галилео Галилеј (1564 — 1642) кроз уста свог јунака Саливата изричито каже:„број квадрата није мањи од множине свих бројева, а ова ипак није већа од првог“. Значи, целина је једнака делу!! Галилеј је ипак био веома обазрив и препоручивао да не треба без резерве преносити на бесконачност оне односе који су тачни за коначне скупове.

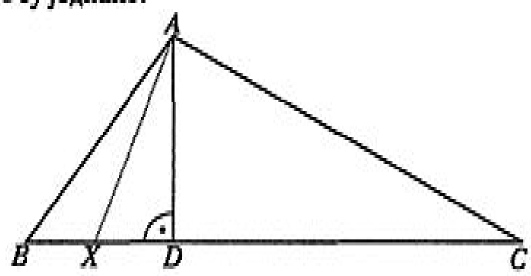
Да читалац не би стекао погрешан утисак и помислио да је бесконачност у XVI веку била већ прихваћена (а што се иначе никада није ни десило), напоменимо само да је велики италијански научник и познати страдалник Ђордано Бруно остао, до (трагичног) краја свог

[1] видети на страни 133 у књизи Милана Божића *Преглед историје и филозофије математике*

живота, финитиста, тачније атомиста. Он је чак знатно унапредио атомистичку теорију и извршио утицај на многе касније финитисте, као што је на пример и наш Бранислав Петронијевић.

Развијају се методе рада са бесконачно малим величинама и у томе предњаче Галилејеви следбеници Бонавентура Кавалијери (1598 – 1647) и Торичели (1608 – 1647). Занимљиво је видети како је Кавалијери дошао до свог познатог, а иначе потпуно тачног, *Кавалијеријевог принципа* по коме ће два тела исте висине, имати исте запремине, ако равни пресеци тих тела на једнаким растојањима од основа имају једнаке површине. Ево шта о његовој методи каже познати историчар математике Стројк: „Кавалијери је дао упрошћену варијанту рачуна бесконачно малих величина, која се заснива на схоластичкој представи недељивих величина, тј. таквим представама по којима тачка при кретању даје линију, а линија површ. Полазећи од тога, он је спајао дужи да би добио површ, а делове равни да би добио тело. Но, када је Торичели показао да се, полазећи од таквих представа, може доказати да се ма који троугао једном висином може поделити на два једнака дела, Кавалијери је дужи заменио „нитима", тј. „дужи" је претворио у делове површи веома мале ширине и тако стао на позицију атомистичке теорије".

У чему је све погрешио Кавалијери тешко је на овом месту рећи, али му је сигурно основна грешка у томе што је на недозвољив начин помешао Аристотелов континуум (данас би рекли реалних бројева) са дисконтинуумом атомиста. Наиме, ако се дуж схвати на Аристотелов (а и савремен) начин онда су сваке две дужи, како је то Кантор показао, једнакобројне, па тиме и $BD \sim DC$. Отуда то важи и за Кавалијеријеве нити, типа AX, па самим тим и површине троуглова BDA и DCA су једнаке.



Посветимо сада, на крају овог наставка, неколико редова славном и генијалном француском научнику, мислиоцу и поети Блезу Паскалу (1623 – 1662). Паскал је и у чисто математичком смислу био један од претеча Лајбница и Њутна у стварању диференцијалног и интегралног рачуна. Између осталог бавио се, веома успешно, и „проблемом одређивања тангенте на криву".

Али Паскал је не мање, макар можда само на Лајбница, утицао својим блиставим поетским надахнућем. У својим *Мислима*, у којима се бави пре свега моралним и религиозним питањима, он између осталог каже:„Јединица додата бесконачном не повећава га ниуколико, као ни стопа неку бесконачну меру; коначно се ништи кад се нађе пред бесконачним, и постаје просто ништа".

Мало даље Паскал додаје:„Ми познајемо, дакле, постојање и природу коначнога зато што смо коначни и просторни, као и оно. Ми знамо да бесконачност постоји, а не знамо му природу, јер оно има просторност као и ми, али не и границе као и ми. Али ми не познајемо ни постојање ни природу Бога, зато што он нема ни просторности ни граница".

Блез Паскал је био један од твораца француске књижевности и човек великих песничких

надахнућа. Али и када на узвишен и прелеп начин говори о човеку, његовим могућностима и достојанству он говори и о нашем односу према бесконачности:„Не треба од простора да тражим своје достојанство већ од правилности моје мисли. Нећу имати преимућство ако притежавам земљи[2]: Простором, васиона ме обухвата и гута као једну тачку; мишљу ја обухватам њу". Ова Паскалова мисао из *Мисли* значајно је утицала на Лајбница тако да он примећује: „То што је он рекао о двострукој бесконачности, само је увод у мој систем".

У следећем броју посветићемо пажњу почецима математичке анализе и посебно једном од њених твораца Готфриду Вилхелму Лајбницу (Leibnitz, 1646 — 1716)

Прича о малим и великим бројевима (шести део)
Leibnitz

др Миодраг Рашковић, **Београд**

Од изузетног значаја за схватање и посебно улогу појма бесконачности у науци (али и филозофији) представља мисао и дело славног немачког математичара и филозофа словенског порекла Голтфрида Вилхелма Лајбница (1646 — 1716). Биографија овог великог ума заслужује посебну пажњу и можда ће бити дата у једном од наредних бројева Тангенте. Овом приликом задржаћемо се, само на кратко, на његовом словенском пореклу. Први је код нас о томе писао Димитрије Нешић (професор Михајла Петровића Аласа на Великој школи), а затим Ђуро Курепа, Јован Кечкић и други. Основу за тврдњу да је Лајбниц словенског порекла представљало је писмо које је Лајбниц, пред смрт и у тренутку кризе, упутио руском цару, знаменитом, Петру Великом. Оно је објављено у једној словачкој (условно речено) енциклопедији из 60-тих година XIX века. Лајбниц почиње са: „Обраћам се Вама као Словен Словену ... ", а затим, између осталог, тврди да је писао историју понемченог словенског племена Бодрића (ободрита) [тј. Бодрих-Храбрих]. Он не тврди ту баш изричито да потиче од њих, али се то може претпоставити. (Интересантно је да се Бодрићи на најмање два начина могу повезати са Србима. Прво, део тог племена се у средњем веку, вероватно бежећи од германског прогона, населио у област Браничева, и друго постоји историјска литература, коју овде не бих наводио и на коју ми је указао мој син, Душан Рашковић, да су Бодрићи у ствари били посебан војнички сталеж у оквиру српског (Сорабског) племена. Наравно ту су Срби схваћени у ширем смислу, скоро као синоним за словенство.) Други важан доказ за словенско порекло Лајбница је правописне природе. Наиме, у самом запису Leibnitz крије се тајна. Група tz у словенским племенима се чита као ћ, тако да је у питању управо Лајбниħ!!! (Који је по некима изведен од Лубениħ, Лубеница!). Наравно данас се у Немачкој (а и уопште на западу) труде да избаце то ħ и краће пишу Leibniz (што се види и по бренду познатог кекса). Ипак око трећине записа његовог имена који се могу наћи путем Интернета је Leibnitz, што није ни тако лоше за овај историјски тренутак.

Лајбниц се сматра за човека који је дефинитивно створио математичку анализу преко своје „нове методе". Притом је био велики филозоф који је створио обиман и значајан математички систем у коме је покушао и да заснује појам бесконачно великих и бесконачно малих величина. У томе до краја није успео, а такође је код њега касније преовладало прагматично гледиште. Тако се Лајбниц оставио, како се каже „тих спорних питања" и посветио се развоју и примени своје (отклониво противречне) методе са којом је већ постигао велике успехе. *И показало се да није погрешио.* На тај *начин* је Лајбниц дефинитивно одвојио науку од филозофије „инструметализујући" појам бесконачности. Нешто слично урадио је у исто време и Њутн са појмом сила. Бесконачност је била дата само преко својих (нама корисних) *особина и начина рада са њима. Њена потпуна схваћеност као и њен реалитет више нису били* толико битни.

Ипак, Лајбниц је био изложен великим напорима и притисцима са свих страна и из многих разлога *то је имало за последицу и оно писмо* Петру Великом. *Један од разлога је била и та* „недореченост" у вези са бесконачношћу.

Лајбиц је имао и своје пријатеље и следбенике који су га бранили. Један од њих је био и извесни *Варигнон из* Париза, који са *нашао на муци како да брани Лајбницову теорију пред* бројним противницима. Лајбниц му у томе саветима помаже и у тој прилици, што је за нас врло значајно, бива принуђен да излаже своје погледе на бесконачност.

Дајемо сада један *прилично дуг цитата Лајбницовог писма Варигнону у хрватској варијанти* српског језика, јер смо га у тој форми затекли. Сматрамо да ће са језичке стране читаоцима бити довољно разумљив, а затим ћемо га коментарисати.

„. . . није потребно да се математичка анализа учини зависном од метафизичких расправа, да, дакле није потребно тврдити да у природи има црта које су, у својој строгости бесконачно мале, нити да има таквих које су бесконачно пута веће од обичних (али су ипак ограничене. То сам могао истакнути утолико више што бесконачно у строгом смислу има своје извориште, како верујем, у неограниченом, те ја без тог потоњег појма нисам кадар да пронађем прикладан разлог да га разликујем од коначног). Да бих избегао та суптилна питања, ја сам се задовољио тиме да бесконачно – будући да сам своја размишљања хтео да учиним опште разумљивим – разјасним помоћу неупоредивог, тј. посегнем за величинама неупоредиво већим или мањим од наших величина. Тако се, наиме, добијају колико год желите многи ступњеви неупоредивих величина, уколико се један неупоредиво много мањи елемент може при рачунању занемарити – ако се ради о установљењу једног неупоредивог много већег елемента. Тако се, на пример, делић магнетичке материје која се пробија кроз стакло не може упоредити са зрнцем песка, то се пак не може упоредити са Земљом, а Земљина се кугла не може упоредити са небеским сводом. Због тога сам ја већ пре тога у „ Acta eruditorum" за рачун са неупоредивима поставио неке помоћне теореме које се могу да примене како на бесконачно у строгом смислу, тако и на величине које, у односу према другима, не долазе у обзир.

При томе се ипак морамо обазирати на то да неупоредиво мале величине, узевши их у њиховом сасвим популарном смислу, нипошто нису константне и одређене, него да им, штавише, будући да се могу узети тако мале како се само жели, у геометријским разматрањима припада иста улога као и бесконачностима у строгом смислу. Ако би, наиме, неки *противник хтео да одрекне ваљаност нашим теоремама, онда наш рачун показује да је грешка* мања од било које дане величине, јер је у нашој моћи да у ту сврху можемо да смањујемо неупоредиво мало – оно се, наиме, увек може узимати тако мало како се само хоће. То би сигурно могло бити оно што Ви подразумевате под изразом неисцрпно и, нема сумње, у томе и лежи строги доказ нашег инфинитезималног рачуна. Његова предност лежи у томе што он непосредно и очигледно, на начин који јасно показује прави извор открића, даје оно што су стари, на пример Архимед, постизали околишањем уз помоћ индиректног доказивања. Тако се бесконачне и бесконачно мале црте – све да им не признајемо метафизичку строгост и реалност ствари – могу без сумње употребљавати као идеални појмови с којима се скраћује рачун, слично тзв. имагинарним коренима у обичној анализи, као на пример $\sqrt{-2}$."

Дали смо овај дужи цитат да би показали како је Лајбиц са ипак мало речи изнео обиље информација о бесконачности и свом погледу на њу. За потпуну анализу овога текста била би потребна читава једна мања студија. Ми ћемо се овде, само задовољити са неколико мањих коментара.

Пада прво у очи да је већ сам Лајбинц у то време уочио и истакао могућност избацивања инфинитезимала из анализе и на тај начин предвидео оно што ће Вајерштрас дефинитивно да уради. Много је, међутим, значајније да је Лајбниц, кроз упоређивања која је дао, указао на *искуствено (емпиријско)* порекло лајбницовске бесконачности (тј. инфинитезимала и њихових реципрочних вредности). Она и јесте (лајбницовска бесконачност), како он то сам каже опште разумљива зато што се слаже са нашим искуством. Из Лајбницовог *излагања се непосредно види, да појам лајбницовске бесконачности потиче од „великости"* (или несамеривости у неком интуитивном смислу) и да је та „великост" релативна.

Овде се још једанпут срећемо са парадоксом ћелавца. Јасно је, да се додавање или одузимање од Земље једног зрнца песка може занемарити и да после тог чина оно што настаје опет с правом називамо Земљом. Наравно, овакав приступ је прадоксалан ако претпоставимо да смо зрнце додавали „много" пута, рецимо у $10^{1000000}$ корака. Међутим ово је очигледно идеализација јер ми у реалности не можемо да учинимо толико корака. Број корака који ми можемо учинити је далеко мањи и можемо га схватити као елемент „свих остваривих природних бројева". (Узгред, ови „сви оствариви бројеви" су у каснијим математичким формализацијама појављују као пребројив скуп (у смислу Кантора).)

Веома је важно и Лајбицово мишљење да се на инфинитезимале може гледати као на „корисне фикције" слично као што су имагинарни корени (а осим неколико изузтака као што су e, π и сл. и скоро сви трансцедентни бројеви). На овај начин он је близак доцније Хилбертовом становишту према коме су бесконачни скупови идеални објекти придружени коначној математици.

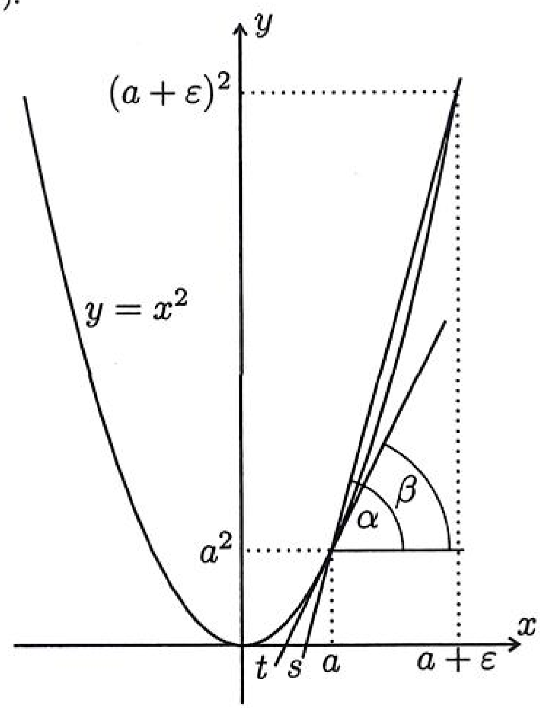
Као творац диференцијалног и интегралног рачуна Лајбниц је „на велика врата" вратио инфинитезимале у математику. Оне су прихваћене као „праве" бесконачности чија се егзистенција не мора „учинити зависном од метафизичих расправа", тј. како бисмо данас рекли, могу се одвојити од онтологије. Он их чак назива: „корисне фикције".

Инфинитезимале више нису као код атомиста недељиве и разликују се по степену бесконачности међу собом. Инфинитезимала a може бити бесконачно велика у односу на инфинитезималу b ако је $\frac{b}{a}$ инфинитезимала! Управо количници инфинитезимала и њихови бесконачни (ми би данас рекли хиперконачни) збирови чине срж Лајбницовог инфинитезималног (диференцијално-интегралног) рачуна.

У својеврсној алгебри за рад са инфинитезималама, коју је створио, он је зналачки замењивао једне бројеве њима бесконачно блиским (тј. таквим да им је разлика инфинитезимала). Отуда се стекао утисак да је инфинитезимале, којима је иначе могао и да дели, повремено идентификовао са нулом. То је стварало касније велику забуну и додатно неповрење у његову методу. Она је у основи, тиме, постала противуречна, али као што ћемо видети та противуречност је ипак отклоњива.

Да не бисмо остали само на причи илустроваћемо како је дејствовала та његова „нова метода“. Наравно, конкретан пример који дајемо, а односи се на тзв. „проблем тангенте“, већ је одавно био решаван на сличан начин од стране Паскала, па и раније.

Нека је дата функција $y = x^2$. Треба одредити коефицијент нагиба тангенте на ову параболу у тачки (a, a^2).



Означимо коефицијент нагиба са k_s сечице s. Тада је

$$k_s = \operatorname{tg}\alpha = \frac{(a+\varepsilon)^2 - a^2}{(a+\varepsilon) - a} = 2a + \varepsilon.$$

Када занемаримо ε добијамо $k_t = \operatorname{tg}\beta = 2a$ као коефицијент нагиба тангенте t.

На крају као закључак, можемо рећи, да Лајбницов (а и многих других, тога доба, које он својим именом симболизује) поглед на бесконачност и континуум представља СИНТЕЗУ између Демокритовог атомизма и Аристотеловог континуума.

Прича о малим и великим бројевима (осми део)
Нове геометрије

др Миодраг Рашковић, **Београд**

Данас је доста распрострањено мишљење да су се у XIX веку догодиле најзначајније ствари у математици. Ако се он продужи и на првих 30-ак година XX века, онда можемо то исто тврдити и за читаву науку. То се све поклапа са кулминацијом западне цивилизације и почецима њеног полаганог пропадања. Развитак технологије, данас, преузима примат над развојем математике и природних наука (а да не причамо о друштвеним наукама које су у тоталној декаденцији). Ни велики број научника и радова који они продукују данас не може да се мери са богатством фундаменталних идеја из наведеног периода.

Један од судбоносних тренутака XIX века било је стварање геометрије Лобачевског (коју је наравно створио велики и храбри (у научном смислу) руски математичар из Казања Лобачевски Николај Иванович $(1792-1856)$).

Лобачевски је заменио познати Еуклидов V постулат, који у једној формулацији гласи: „кроз дату тачку ван дате праве може се повући тачно једна права паралелна са датом", новом аксиомом у којој се тврди да кроз дату тачку постоје бар **две** праве паралелне датој!!! Све остале аксиоме је задржао као код Еуклида и као последицу добио занимљиву теорију која је еквиконзистентна са Еуклидовом геометријом, што значи да се у геометрији Лобачевског може извести контрадикција ако и само ако се то може урадити у Еуклидској геометрији (у шта нико не верује). Да видимо сада мало поближе шта ова последња аксиома значи. Показаћемо у ствари само онај проблематичнији део: Геометрија Лобачевског је непротивречна ако је таква и Еуклидска геометрија.

У том циљу поред једнакости $=$, уведимо још три предиката T, P и E, тако да $T(x)$ значи „*x је тачка*", $P(x)$ тврди „*x је права*" и $E(x,y)$ тврди „*x припада y*". Погледајмо сада како се, на пример, може да запише аксиома Еуклидске геометрије (а и Лобачевског) у равни: „кроз сваке две различите тачке x и y пролази једна права z". Одговарајућа предикатска формула је:

$$(1)\qquad (\forall x)(\forall y)\,(T(x)\wedge T(y)\wedge x\neq y\ \Rightarrow\ (\exists z)\,(P(z)\wedge E(x,z)\wedge E(y,z)).$$

Тако нешто слично, очигледно, можемо да урадимо и са осталим заједничким аксиомама, док би спорна аксиома о паралелности у случају геометрије Лобачевског изгледала овако:

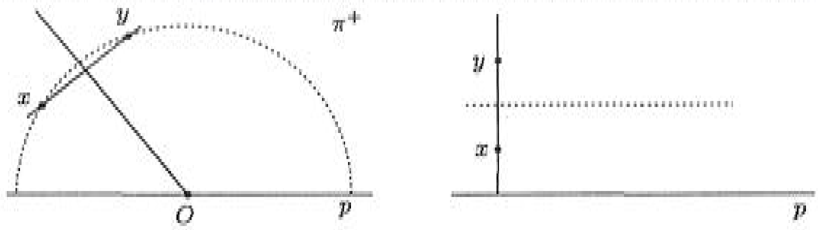
$$(2)\ (\forall x)(\forall y)\,(T(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y)\ \Rightarrow\ (\exists u)(\exists v)\,(u\neq v\wedge P(u)\wedge P(v)\wedge u\parallel y\wedge v\parallel y))$$

где је $u\parallel y$ замена за формулу $\neg(\exists w)(T(w)\wedge E(w,u)\wedge E(w,v))$ и слично за $v\parallel y$.

Овим преводима аксиома додајемо још два „захтева": *интересују нас само праве и тачке*, $(\forall x)\,(T(x)\vee P(x))$, и *ништа није и права и тачка у исто време*, $\neg(\exists x)\,(T(x)\wedge P(x))$.

А сада ћемо на тренутак да заборавимо на значење које предикати T, P и E имају и то само зато да бисмо им убрзо дали друго значење. Замислимо сада праву p која лежи у

Еуклидовој равни π и уочимо једну од полуравни које она одређује π^+. Нека сада $T(x)$ значи „*тачка x припада π^+*“, а $P(x)$ значи: „*x је полукруг који припада π^+ са центром на p*“. Такође, нека $E(x,y)$ значи:„*тачка x припада полукругу y*“. Као што видимо променили смо значење предиката P. Погледајмо сада шта нам тврде наведене аксиоме (1) и (2) (слике 1. и 2.). Прва каже: „Постоји полукруг са центром на p који пролази кроз тачке x и y“.

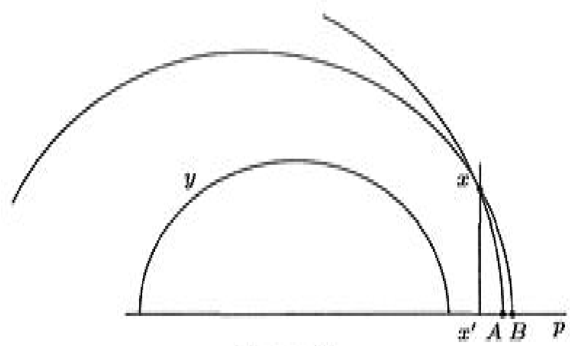


Слика 1.

Да би се убедили да то у Еуклидској геометрији важи довољно је конструисати симетралу дужи $\overline{xy}$ и наћи њен пресек O са p. Очигледно ће круг $k(O,\overline{OX})$ имати тражено својство. У случају да је дуж $\overline{xy}$ нормална на p можемо сматрати да је центар „у бесконачности“ и да се круг „дегенерише“ у нормалу.

Аксиома (2) ће тада рећи: „за сваки полукруг y и сваку тачку x ван тог полукруга, постоје бар два полукруга u и v који пролазе кроз тачку x и не секу полукруг y“.

Лако се можемо убедити да и ово представља доказиву чињеницу у оквиру Еуклидове геометрије. Довољно је наћи две довољно блиске тачке A и B подножју нормале x' повучене из x на p. Слично као у претходном случају можемо на p одредити центре полукругова $k(O_1, O_1A)$ и $k(O_2, O_2B)$ који садрже x и не секу y.



Слика 2.

Важно је сада напоменути да како се све аксиоме геометрије Лобачевског „преводе“ у теореме Еуклидске геометрије то онда исто важи и за све последице аксиома геометрије Лобачевског.

Ако би пак геометрија Лобачевског била противречна (тј. ако би у њој била доказива и теорема φ и њена негација $\neg\varphi$) онда би то био случај и са њеним „преводима“ у Еуклидској геометрији те би и следствено (како су преводи од φ и $\neg\varphi$ једни другом негација) Еуклидска геометрија била противречна.

Морамо сада дати једну веома значајну напомену. Читалац никако неби смео да помисли, имајући у виду ову интерпретацију која је једна од многих, да геометрија Лобачевског говори само о неким деловима Еуклидске геометрије; мада говори и о њима. *Геометрија Лобачевског говори* (слично геометрији Еуклида) *о односу правих и тачака, али из једног другог угла.*

На овај начин Лобачевски је задао одлучан ударац Кантовој теорији по којој је Еуклидска геометрија главни пример како ми на *нужан* и *јединствен* начин спознајемо реалност (како би он рекао синтетички и априори). Велики филозофски и посебан значај који је Еуклидска геометрија имала за Канта и који је изгубила, покушали су да надокнаде нови наивни емпиричари који су јој дали привилегован положај у нашој спознаји (интуицији). Теорију Лобачевског (као и Римана) они више схватају као неку логичку могућност, која је иначе лепа и занимљива али нема много везе са реалношћу.

Наше је пак мишљење (али и других) да је наша спознаја о бесконачном (а у то спада и однос између правих као бесконачности) противречна. Различите геометрије представљају формализације (или теоријске одразе) наших различитих (супротстављених) искустава. Чињеница је пак да је Еуклидска геометрија имала привилегован положај у историји, али то је само зато што је настала као компромис различитих искустава. Откриће Лобачевског имало је непроцењив значај за филозофију наука, али је веома утицало и на развој математике (и то посебно математичке логике). Математичке теорије (а оне друге, на пример физике, још пре) изгубиле су ореол *јединственог* тумачења стварности, али су оне најбоље међу њима веома примењиве у пракси (или ће тек вероватно бити).

Значај геометрије као основе за читаву математику (што је у Грчкој па све до XIV века и била; чак су и алгебарске једначине решаване геометријски), у XIX веку, што је још један парадокс, до краја је опао. То лепо примећује Абрахам Робинсон: „Иронија је судбине да одмах пошто је геометрија изгубила свој положај као база за сву математику њене аксиоматске основе су коначно добиле степен перфекције које су у јавним проценама поседовале још од Еуклида".

Другу важну карактеристику XIX века представља развитак математичке логике као самосталне математичке дисциплине али снажно повезане са осталим (математичким дисциплинама). Идеја и покушаја да се унапреди Аристотелова логика било је још код средњовековних сколастичара, али је најдубље у томе отишао Лајбниц. Нажалост његове идеје о формализацији (тачније алгебризацији) закључивања нису могле бити значајније остварене у то време, а нису чак ни имале касније значајну улогу на развој математичке логике јер нису са латинског преведене на време. Отуда је најзначајнији допринос у самом заснивању математичке логике свакако дао енглески математичар Џорџ Бул средином XIX века. Он је показао да са исказима можемо да рачунамо на сличан начин као са бројевима. Наравно, многи догађаји из тог времена, као и они који следе касније, као што су проблеми аксиоматизација геометрија, заснивања математике у теорији скупова, појава интуиционизма и слично, знатно су утицали да се развије знаменити предикатски рачун првог реда као и његове касније надоградње. Ми нажалост немамо овде много простора да се систематски бавимо развојем и улогом математичке логике али ћемо понешто од тога споменути када будемо дискутовали Канторову теорију скупова.

Управо смо стигли до трећег великог продора у XIX веку, до Канторове теорије скупова коју из више разлога називају „нова геометрија". Абрахам Робинсон је једном описао, а независно од њега слично приметили Коен и Херш задивљујућу аналогију између геометрије и Канторове теорије: „У XX веку, теорија скупова је добила позицију, коју је једном имала геометрија, да је била сматрана за базичну дисциплину математике у коју други делови могу бити утопљени. И у оквиру врло кратког времена, заснивање теорије скупова прошло је кроз еволуцију која је задивљујуће слична ранијој еволуцији заснивања геометрије. Прво, почетне претпоставке теорије скупова држане су за интуитивно јасне пошто су биле засноване на природним законима мишљења за чије потврђивање Кантор, у најмању руку, није имао потребу. Тада је теорија скупова базирана на постулатима, почев са експлицитном формулацијом најмање интуитивног међу њима, аксиоме избора. Ипак, у том тренутку су још увек требале да опишу „реалност", мишљену реалност једног идеалног, платонистичког света. И коначно, схватање да су подједнако конзистентни. потврђивање или одбацивање неких значајнијих претпоставки теорије скупова као што су континуум хипотеза, доводи, средином шездесетих, до ситуације у којој је веровање да теорија скупова описује објективну реалност било одбачено од стране многих математичара". Другим речима, оно што се са геометријом десило за две и по хиљаде година, то се са теоријом скупова десило за мање од сто година.

Па да видимо како изгледа та чувена и прелепа Канторова теорија скупова и шта је довело до проблема и развоја догађаја о којима надахнуто говори Робинсон. Читаоци који нису упознати са основним техничким детаљима у вези са овом теоријом упућују се на чланак *Теорија скупова* из овог броја Тангенте.

Инспирација за стварање ове теорије могла се наћи на много страна (*као што смо већ* видели Кантор хвали Светог Августина у том смислу), али кажу да је главну инспирацију Кантор добио бавећи се анализом. Тачније теоријом Фурјеових редова!?! У сваком случају, Кантор је почео да ради са бесконачним колективитетима објеката, као што су скуп природних бројева $\mathbb{N}$, скуп свих правих у равни (а које су пак свака за себе биле неки скупови тачака). Већи део теорије се заснива на једном значајном логичком принципу, а то је *принцип свеобухватности*. Свако својство $\varphi(x)$ (на пример: „x је троугао") на основу *принципа свеобухватности* одређује скуп свих елемената који имају својство φ, $y = \{x \mid \varphi(x)\}$.

Георг Кантор (1845-1918) одмах креће да упоређује скупове и једна од фундаменталних релација му је *еквивалентност* (једнакобројност) скупова $\sim$. Тако је $X \sim Y$ ако и само ако $(\exists f)\,(f : X \xrightarrow[\text{на}]{1\text{-}1} Y)$; или речима: скуп X је еквивалентан скупу Y ако и само ако постоји обострано-једнозначна функција f која пресликава скуп X **на** Y. На пример, $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, јер еквивалентност реализује функција $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Један од најлепших и најважнијих резултата до којих је Кантор дошао, уводећи притом у доказу нову и веома корисну методу *дијагонализације*, представља тврђење да се између природних бројева $\mathbb{N}$ и реалних бројева $\mathbb{R}$ не може успоставити еквиваленција; тј. $\neg\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$. Како је пак $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ то очигледно у Канторовом смислу $\mathbb{R}$ је бројнији од $\mathbb{N}$.

Његова хипотеза (до сада неразрешена, нити ће вероватно икада бити) је била да за сваки X такав да је $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ важи или $\mathbb{N} \sim X$ или $X \sim \mathbb{R}$. То је чувена Канторова хипотеза.

Али, ускоро су се појавили и проблеми у виду парадокса. Сам Кантор је већ уочио неке од њих али је за илустрацију најпогоднији већ чувени Раселов парадокс. Он чак и није био директно упућен Канторовој, већ једној другој (Фрегеовој) теорији коју је срушио и на чијим је темељима Расел подигао своју теорију типова. Расел показује да принцип свеобухватности није добар на следећи начин: уочава својство $\neg x \in x$ и пита се да ли $y = \{x \mid \neg x \in x\}$ може да буде скуп. Ако јесте, а то би на основу принципа свеобухватности требало буде, онда из $y \in y$ следи $\neg y \in y$ и обрнуто из $\neg y \in y$ следи $y \in y$, што заједно даје да y припада y ако и само ако му не припада, а што је очигледна контрадикција.

Наравно, Канторова теорија је била превише значајна да би се могла тек тако олако да одбаци. Чињено је више покушаја да се она спасе. Они су најчешће били усмерени у правцу да се „обузда" и „ограничи" највећи кривац, *принцип свеобухватности*, а да се притом сачувају све „добре" особине Канторове теорије скупова, као што је на пример могућност изградње математике у њој. Један од таквих покушаја, можда и најуспешнији, представља теорија **ZF**, описана у поменутом чланку *Теорија скупова*.

Важно је одмах истаћи три ствари. Прво, сви ти аксиоматски системи су (као дати у оквиру предикатског рачуна првог реда) непотпуни, тј. „смислено" им се може додати нова аксиома. Највећи логичар XX века Курт Гедел (1906-1978) је показао да никада не можемо до краја описати формулама све особине скупова чак и да их знамо. Друго, ми их до краја нужно не можемо ни знати, а зашто то ћемо донекле видети на примеру аксиоме избора. И треће, и то је показао Гедел, иако је сваки систем аксиома непотпун (значи недовољан да опише скупове), никако не можемо знати да није и противречан, тј. да из њега не следи нека контрадикција (парадокс). Према томе ми можемо само (с правом) да верујемо, да смо давањем **ZF** аксиома избегли противречност.

Договоримо се сада, да све теорије настале из Канторове теорије скупова (као на пример **ZF**) назовемо Канторовске теорије скупова. То је доста згодно јер ћемо једновремено продискутовати све њихове заједничке мане и врлине.

Аксиоме теорије скупова се обично деле на *аналитичке* (једнакости (екстензионалности)), пара, уније, партитивног скупа и т. д.) и *хипотетичке* (бесконачности, аксиома избора, континуум хипотеза и т. д.). Аналитичке аксиоме обично нису проблематичне све док се не помешају са хипотетичким. Оне говоре о добро познатим особинама које важе за коначне скупове (као на пример аксиома пара која тврди да за свака два скупа x и y постоји скуп z чији су x и y једини чланови) а онда се некритички преносе на бесконачне.

Аксиома бесконачности спада у хипотетичке (читај проблематичне) аксиоме зато што претпоставља оно што никакво искуство из физичког света не може да потврди. На основу ње ми можемо, на пример, да набројимо (наравно само у мислима) све природне бројеве $0, 1, 2, 3, \ldots$, па да чак наставимо то бројање пишући нове бројеве $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$ Она постаје нарочито „зла" када се комбинује са аксиомом партитивног скупа. Тако се може показати (слично као у Кнаторовом доказу за $\neg\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$) да $\neg\mathcal{P}(X) \sim X$, те отуда следи да је $\mathcal{P}(X)$ „веће бесконачности" него бесконачно X. То нас води једној огромној хијерахији (скали) бесконачних скупова, све већих и већих. Тих различитих растућих, бесконачноси има толико много да их има више од било ког бесконачног скупа. Наравно, никаквог оправдања за посматрање **свих** подскупова датог скупа $\mathcal{P}(X) = \{y \mid y \subset x\}$ у математици, која је постојала до појаве Кантора, нема. Тако, ако посматрамо раван као скуп тачака (а што иначе није нужно) онда је у њој умесно посматрати: праве, кругове, полигоне и слично, а никако **све** подскупове. Неке од Канторових теорија, ипак о томе воде рачуна, као на пример „теорија допустивих скупова".

Следећа важна хипотетичка аксиома је аксиома избора. Она тврди да кад имамо једну бесконачну колекцију непразних скупова $\{X_i \mid i \in I\}$, онда постоји скуп X чији су елементи тачно по један елемент из сваког скупа X_i. Притом у принципу не постоји поступак којим бирамо по један елемент. Ова аксиома има значајне примене у математици и неки основни ставови у анализи не могу бити доказани без ње. Применом аксиоме избора (краће **AC**) постиже се често и већа елегантност неких доказа. Са друге стране, њеном применом добијају се понекад чудни и неочекивани резултати. Један од њих је и познати Банах-Тарскијев парадокс по коме се лопта може поделити на коначно много делова, који поново када се саставе дају две нове лопте исте величине као полазна!?! Напоменимо да овај парадокс није типа контрадикције, где се тврде једновремено две супротне ствари (као што је на пример Раселов парадокс) већ математички резултат који противречи нашем искуству.

Гедел је показао да ако претпоставимо непротивречност **ZF** аксиома (што можемо само основано веровати) онда ће бити непротивречан и систем **ZF+AC** (тј. када на **ZF** додамо још акиому **AC**). Доказ који је он дао у основи је сличан већ скицираном доказу да из непротивречности геометрије Еуклида следи непротивречност геометрије Лобачевског и заснива се на интерпретацији. Американац Паул Коен је показао да ће бити непротивречно и **ZF+¬ AC**. Аналогија са геометријом постаје очигледна. Од тада се развијају две међусобно супротстављене теорије (можемо рећи математике). Прва је „већинска" у оквиру **ZF+AC** и друга „мањинска" **ZF+AD** (где је **AD** *аксиома детерминације* (ма шта то значило) а из које следи ¬ **AC**). Наравно, слично као и у геометрији, где је заједничко језгро Еуклидске геометрије и геометрије Лобачевског такозвана *апсолутна геометрија*, овде је заједничко језгро оно што се добија из **ZF**. Ово није једино место где се Кантрорве теорије скупова разилазе. Ако са **ZFC** означимо **ZF+AC**, тада су од интереса и теорије **ZFC+CH** и **ZFC+¬ CH**. Слично се дешава код многих других хипотетичких аксиома, о којима не можемо овде говорити. Све то показује колико је наше искуство о бесконачности слабо и противречно.

Међутим, поставља се питање одакле толика наша привржености теорији скупова и зашто нас „нико не може истерати из раја у који нас је Кантор довео", како каже велики немачки математичар Давид Хилберт. Одговор није лако дати а добрим делом вероватно лежи у униформности које нам ово генијално Канторово дело пружа. Скоро сви објекти доканторовске математике могу бити изграђени као делови Канторовских теорија. Пример су реални бројеви и инфинитезимале. Њихове дефиниције се чак донекле и мењају да би се ускладиле са канторовским теоријама, али ће о томе бити више речи касније.

У доканторовској теорији скупова било је више бесконачности као што је неограничена могућност конструкције објеката неке врсте (на пример троуглова), бесконачност као неограничено растућа количина, бесконачност правих и бесконачност као место где се срећу две паралелне праве итд. Заједничко свему томе је да се потенцијална бесконачност (као један бесконачан процес) актуелизује.

Тај процес актуелизације почео је раније. То се најбоље види на примеру праве. У Еуклидовим Елементима (писаним пре скоро 2350 година) права је дуж која се на обе стране (по потреби) може продужавати. Али још далеко пре Кантора она постаје актуелно бесконачна у оба правца. Код Кантора и Дедекинда права постаје скуп еквивалентан са $\mathbb{R}$. Према томе све бесконачности су постале бесконачни скупови.

Захваљујући настанку Канторове теорије скупова настале су нове области математике као што су топологија, теорија мере и слично. Скоро читава математика постала је део теорије скупова. Математика која се ослања на Канторову теорију скупова постала је математика канторовске теорије скупова. Тако не да се само проблем непротивречности појединих теорија своди на непротивречност теорије скупова, већ и обратно, „проблем бесконачности" Канторове теорије скупова преводи се на проблем појединих дисциплина. Зато вреди још једном поновити речи Абрахама Робинсона: „...схватање да су подједнако конзистентни потврђивање и одбацивање неких значајних претпоставки теорије скупова као што су континуум хипотеза, доводи, средином шездесетих, до ситуације у којој је веровање да теорија скупова описује објективну реалност било одбачено од старне многих математичара". Наравно, ни ове Робинсонове „многе математичаре" не треба превише озбиљно схватити, али код сваке важније математичке теореме поред њене лепоте и примењивости треба обратити пажњу и на нешто друго. А то је, који је то минималан (а тиме и нужан) део теорије скупова у коме се може доказати та теорема или чак изградити читава теорија. Наравно, што се мање хипотетичких аксиома користи то теорема (или теорија као скуп теорема) „поузданије" важи.

У следећем броју видећемо како се нова ситуација у теорији скупова (како канторовских тако и неких не-канторовских) одражава на проблем заснивања инфинитезималног рачуна и изворних Лајбницових идеја.

Прича о малим и великим бројевима (девети део)
Нестандардна анализа

др Миодраг Рашковић, **Београд**

Данас скоро опште прихваћен Вајерштрасов $\varepsilon - \delta$ рачун изазвао је, одмах после свог настајања, бурне реакције код дела немачке математичке јавности а и шире. Као један од његових главних критичара нарочито се помиње славни немачки математичар Кронекер. Он пре свега критикује употребу актуелне бесконачности и неодговарајућу примену закона искључења трећег (тј. универзално важење формула типа $\varphi \vee \neg\varphi$). То све има за последицу неконструктиван карактер анализе.

Као математички одговор проистекао из Кронекерове критике јављају се међусобно веома блиски, Брауеров интуиционизам и конструктивизам. Ми на жалост немамо довољно времена да о њима нешто подробније кажемо сем да обе ове теорије користе тзв. конструктивне реалне бројеве, дате преко израчунљивих низова. Тако низу $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ одговара реалан (а трансцендентан!) број e. Сваком реалном броју одговара један алгоритам, па их очигледно има само пребројиво и могу се срачунати до на произвољну децималу. Ипак чак ни њихово међусобно упоређивање није тако једноставно као у класичном случају.

Даље, дефиниције конвергенције и непрекидности (в. седми део) схватају се конструктивно. За тачно одређено ε израчунава се одговарајуће $\delta(\varepsilon)$.

Занимљиво је да у оквиру ових теорија, многе класичне теореме не важе. Тако, на пример, може се показати да постоји израчунљив, ограничен и монотоно растући низ рационалних бројева који нема израчунљиву горњу границу!!! Као последицу добијамо да у случају Кошијеве теореме не постоји алгоритам којим може да се одреди нула (тј. када је $f(x) = 0$) било које непрекидне израчунљиве функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ за коју је $f(a) \cdot f(b) < 0$!

Очигледно је да нас овакав приступ скучава и не дозвољава нам да правимо такав замах као у $\varepsilon - \delta$ рачуну. И то је главни разлог невелике популарности конструктивне анализе данас. Међутим, најновији радови (који нажалост нису шире познати) и који повезују интуиционизам са инфинитезималама, дају добру наду за већу примену конструктивизма.

У то време, било је покушаја да се заснује изворни Лајбницов рачун. Отприлике у исто време када се појавила Канторова теорија скупова, Боис-Рејмонд и Шулц су направили занимљиве покушаје заснивања не-Архимедових структура. И наш, већ поменути математичар из XIX века, Димитрије Нешић дао је један занимљив прилог у том смислу. Основна идеја у свим тим покушајима била је иста и слична Кошијевој. Инфинитезимале су биле схваћене као нула функције различитих брзина опадања. Али то није било довољно и задовољавајуће. Постоји такође и трећа не тако мала група (углавном „примењених математичара“) за које инфинитезимале као да никада нису ни биле протеране и забрањене. Овде се не ради о њиховом слабом математичком образовању (мада код појединаца сигурно и тога има) већ о снажној интуицији микро и макро процеса које се природно и лако „моделирају“ преко инфинитезимала.

* * *

Већ смо навели и коментарисали неке резултате до којих је дошао Гедел. Међутим, за нашу даљу причу, од великог је значаја његов први већи резултат (садржан у докторској дисертацији): **Став потпуности предикатског рачуна првог реда**: *Затворена формула φ је доказива из аксиома помоћу правила извођења ако и само ако је ваљана (тј. тачна у свим интерпретацијама).*

Наравно, да би се до краја објаснио садржај ове теореме потребан би био један мали курс математичке логике. Али нека читаоцу као примери (затворених) формула послуже формуле (1) и (2) из претходног броја Тангенте. Као примери интерпретација (тј. модела) за ове формуле могу послужити стандардна (еуклидска) и она дата помоћу полуравни π^+ и полукругова. Наравно ни једна од ових формула није ваљана у шта се лако можемо убедити ако $T(x)$ интерпретирамо као „x је природан број", $P(x)$ као „x је прост број", и $E(x, y)$ као „x дели y". Док је очигледно формула $\varphi \Rightarrow \varphi$ ваљана.

Овај Геделов резултат имао је одлучујућу улогу да се дефинитивно прихвати Сколемова идеја да се теорија скупова заснује у оквиру предикатског рачуна првог реда. [Погледајте како су аксиоме теорије скупова формулисане (написане) помоћу формула у чланку: Теорија скупова (прошли број Тангенте).]

Ово пак „сколемовско" заснивање Канторове теорије довело је до две веома интересантне и за саму Канторову теорију на први поглед парадоксалне последице. Прва је да ако аксиоме Канторове теорије скупова имају икакву интерпретацију (а то би била баш наша жељена теорија скупова, где интерпретирано $\in$ управо значи припадност) онда имају и интерпретацију која је пребројива. Ту не само да је $\underline{\mathbb{R}}$ пребројив него су такви и $\underline{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$, $\underline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))}$, итд. Ова чињеница која је од почетка збуњивала математичаре у ствари није прави парадокс, али свакако не иде у прилог, не само „сколемовском заснивању" већ и самој Канторовој теорији. Ствар је у томе што функција „пребројавања" $f : \underline{\mathbb{N}} \to \underline{\mathbb{R}}$ (где је $\underline{X}$ интерпретација скупа X у датом пребројивом моделу) не припада датом моделу.

Друга последица је за нас још интересантнија. Може се наиме слично показати да ако $\mathbf{ZFC}$ има икакав модел онда има и модел у коме се скуп свих природних бројева $\mathbb{N}$ интерпретира тако да $\mathbb{N}$ поред стандардних природних бројева $1, 2, 3, \ldots$ садржи и бесконачно велике бројеве „Лајбницовог типа". Тиме је у потпуности пропала и отпала Канторова опаска да се помоћу његове теорије може показати да „Лајбницове бесконачности" нема.

Ипак то је био само почетни ударац у том правцу. Завршни се догодио почетком 60–тих година прошлог века и задао га је поменути Абрахам Робинсон.

И то није случајно био он (мада је наравно то могао бити и неко други). Наиме Абрахам Робинсон се у добром делу своје математичке каријере бавио анализом; сумирао је редове, решавао обичне и парцијалне диференцијалне једначине и сл. било за време другог светског рата када се за потребе америчке војске бавио аеродинамиком или у неким другим приликама. Али овај велики математичар био је пре свега логичар и филозоф. Зато не чуди што је дао у основи (за професионалног логичара) једноставну примену логике на филозофски проблем заснивања анализе (са инфинитезималама).

Прецизније, ради се о примени, логичарима добро познатог, **Става компактности**. Став компактности је иначе једноставна последица тзв. **Проширеног става потпуности** (а који како само име каже представља једно уопштење горе поменуте Геделове теореме).

Да бисмо младом читаоцу донекле приближили Став компактности задржаћемо се на неколико уводних појмова. Под теоријом T подразумевамо скуп (било коначан или бесконачан) затворених формула. Теорија T је непротивречна ако се из ње, као скупа хипотеза, коришћењем аксиома и правила извођења не може извести контрадикција тј. формула $\varphi \wedge \neg\varphi$. Кажемо даље да теорија T има модел ако постоји нека математичка структура $\mathcal{A}$ у којој су испуњене (задовољене) све формуле из T. Коначно, **Став компактности** гласи: *Теорија T има модел ако и само ако сваки њен коначан подскуп T_0 има модел.*

Очигледно је да ако теорија T има модел $\mathcal{A}$, онда ће и њен сваки коначан подскуп T_0 имати исти тај модел $\mathcal{A}$. Други смер је много тежи и последица је Проширеног става потпуности.

Имајући на уму **Став компактности** Робинсон је (логичким) формулама у потпуности описао структуру реалних бројева; међу њима нашле су се и формуле: $2+2=4$, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $(\exists y)\,(y' = y)$, $(\forall x)\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и сл. Означимо, зато, тај (непребројив) скуп формула са T'. Нека је даље $T'' = \left\{0 < c < \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ и $T = T' \cup T''$. Уочимо коначан подскуп $T_0 \subset T$. Тада је очигледно и $T_0'' = T_0 \cap T'' = \left\{0 < c < \frac{1}{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$ коначан. Нека се c интерпретира као $\underline{c} = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$. Тада ће очигледно на структури реалних бројева важити T_0. На основу **Става компактности** и читав T има модел, али то не може бити структура реалних бројева. Та нова структура у којој важи T зове се структура хиперреалних бројева. У тој структури $\underline{c}$ је очигледно инфинитезимала. Том новом структуром, у ознаци $^*\mathbb{R}$, можемо се служити на сличан начин као што је то својевремено радио Лајбниц.

Робинсон је у основи показао да су Лајбницова расуђивања непротивречна под условом да је **ZFC** непротивречна. То је средином 60−тих година XX века доживљено као велики успех и одмах звучно названо као „рационална реконструкција Лајбницове анализе". Читава област се од тада зове *нестандардна анализа*.

Међутим, у размаку од годину-две догодио се други велики догађај у логици. Паул Коен је показао непротивречност за $\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{AC}$ (Зермело-Френкелова теорија са негацијом аксиоме избора). На тај начин читава Канторова теорија скупова је на неки начин доведена у питање. То што је нестандардна анализа сагласна са **ZFC**, неке математичаре није задовољило и они су тражили директан и мање проблематичан приступ бесконачно малим и бесконачно великим бројевима.

О томе ће бити више речи у следећем броју Тангенте.

Прича о малим и великим бројевима (десети део)
Алтернативна теорија скупова

др Миодраг Рашковић, **Београд**

Први који је приметио да извориште лајбницовске бесконачности лежи у великој коначности био је велики руски математичар Јесењин-Вољпин. Интересантно да је он то учинио четири године пре знамените Робинсонове „рационалне реконструкције анализе" о којој смо причали у прошлом наставку.

Јесењин-Вољпин је син великог руског песника (по нама и највећег светског) Сергеја Александровича Јесењина (сетите се само његове предивне поеме „Керуша"). Син песника обично буде и сам бар по мало песник. А некада, само песник, може досегнути некакве духовне висине, који се у математици очитују пре свега у стварању нових концепата (згледа).

На самом почетку свог знаменитог рада из 1957. године Јесењин-Вољпин духовито примећује да „чувене три тачке" у писању низа $a_1, a_2, \ldots$ треба интерпретирати, уместо са „до бесконачности", са „до изнемоглости". Тако он скреће пажњу на нашу идеализацију у раду са великим коначним бројевима коју назива „апстракцијом потенцијалне остваривости". Он додаје да та „апстракција" не прави проблеме свуда, и ту на пример истиче примену Геделових бројева у логици, која је недопустива у теорији алгоритама (тј. у рачунарству).

Ми се овде нећемо упуштати у његову суптилну анализу „великих коначности" повезану са Геделовим ставовима непотпуности, модалним логикама и другим појмовима и техникама.

Оно чему желимо да посветимо пажњу у овом одељку је тзв. Алтернативна теорија скупова (краће **AST**) која има за циљ да замени Канторову теорију скупова, као и све њене могуће формализације. Такође, **AST** треба да омогући **директно** и **природно** заснивање инфинитезималног рачуна које није било могуће у Канторовој теорији.

Творац ове теорије настале углавном седамдесетих и осамдесетих година XX века, је чешки математичар Павел Вопенка. До стварања своје оригиналне теорије Вопенка се истакао у свом раду на самој Канторовој теорији скупова, тако да се у његову част једна класа огромних (шта год то значило) кардинала назива по њему. Као водећи истраживач у теорији скупова он је осетио сву лепоту и величину генијалног Канторовог дела. То своје одушевљење он је више пута јавно изрекао, али је упоредо задржао критички однос према слабостима Канторове теорије. (О тим слабостима смо нешто више говорили у осмом наставку). Он није хтео да се бави само критиком већ да створи теорију која ће те слабости да превазиђе. При томе узимао је у обзир радове већ поменутих Лајбница, Болцана, Јесењин-Вољпина као и других математичара и филозофа.

Ми ћемо изложити део, основних и најважнијих, аксиома за **AST** дајући одговарајућу мотивацију за њихово извођење, а затим показати како се у оквиру **AST** могу природно засновати инфинитезимале.

Основни објекти ове теорије су класе, које означавамо великим словима: $X, Y, Z, \ldots$ Основна је релација *припадање* $\in$. Скупови су посебне класе. Они су елементи класа. Да је класа X скуп, краће записујемо $\mathrm{Set}(X)$ и према дефиницији скупа:

$$\mathrm{Set}(X) \Leftrightarrow (\exists Y)(X \in Y).$$

Због једноставнијег изражавања уводимо мала слова x, y, z, ... као ознаке за скупове. Праве класе су оне које нису скупови.

До сада је слична ситуација као и у Канторовој теорији скупова (са класама). Класе су схваћене као преобилне да би биле елементи других класа. Таква је на пример класа $X = \{x \mid x \notin x\}$, из чувеног Раселовог парадокса.

Полускупови су оно што одваја ову теорију од канторовских теорија скупова и због чега је она њима алтернативна. Полускупови су подкласе скупова. Чињеницу да је X полускуп краће записујемо са $\mathrm{Sms}(X)$, где је Sms скраћеница од енглеске речи semiset, што значи полускуп. Отуда,

$$\mathrm{Sms}(X) \Leftrightarrow (\exists x)(X \subset x).$$

Сваки скуп је тривијално полускуп, а полускуп који није скуп је прави полускуп. У **AST** се изричито тврди да прави полускупови постоје!

Аксиома егзистенције правог полускупа:

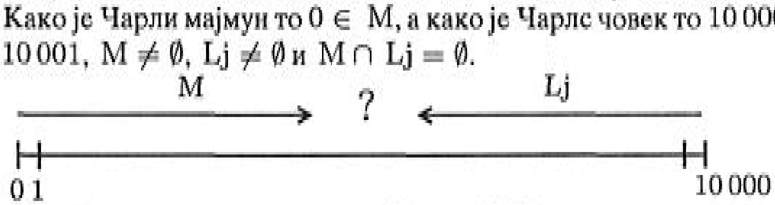
$$(\exists X)(\neg \mathrm{Set}(X) \wedge \mathrm{Sms}(X)).$$

Како оправдати чињеницу да део скупа (који како ћемо тек видети могу бити само коначни) може бити права класа?! То делује помало збуњујуће. Међутим, уколико скупове схватимо као потпуно одређене објекте, а класе као својства скупова, онда се основни мотив за увођење полускупова тражи у чињеници да *део одређеног не мора бити одређен*. Навешћемо познати Вопенкин пример са мајмуном Чарлијем и господином Чарлсом! Читалац ће сигурно у њему препознати само један облик парадокса ћелавца, али он лепо илуструје ту неодређеност полускупова, односно неодређеност релације припадања (датом полускупу).

Вопенка се наизглед помало шали са еволуционом теоријом, а у ствари је позива у помоћ! Он на почетку наводи чињеницу да постоји коначан низ мајмуна и људи, од мајмуна, назовимо га Чарли, који је живео на пример пре 200 000 година и господина Чарлса (који се може презивати Дарвин, мада то Вопенка не истиче), тако да је претходник отац наредном, при чему је син мајмуна мајмун, а син човека човек. Да би то више личило на математику представимо (кодирајмо) овај низ природним бројевима. Добићемо на пример низ $0, 1, 2, 3, \ldots, 9\,999, 10\,000$. Разумно је претпоставити да чланови овог низа формирају скуп. Уосталом у канторовским теоријама скупова (а видећемо да то важи и за ову) природне бројеве можемо (на начин како је то урадио фон Нојман) дефинисати тако да је

$$10\,001 = \{0, 1, \ldots, 10\,000\}.$$

Поделимо сада скуп 10 001 на две подкласе M и Lj, тако да су у M кодови мајмуна, а у Lj кодови људи. Како је Чарли мајмун то $0 \in \mathrm{M}$, а како је Чарлс човек то $10\,000 \in \mathrm{Lj}$. Отуда је $\mathrm{M} \cup \mathrm{Lj} = 10\,001$, $\mathrm{M} \neq \emptyset$, $\mathrm{Lj} \neq \emptyset$ и $\mathrm{M} \cap \mathrm{Lj} = \emptyset$.



На овом месту Вопенка тврди да класа $\mathrm{Lj} \subset 10\,001$ не може бити скуп (па је отуда полускуп). Јер, вели он, ако би Lj био скуп, имао би најмањи елемент m који би био кôд неког човека из низа, док би $m - 1$ био кôд мајмуна. Одатле би следило да је син мајмуна човек што је немогуће. Класа Lj, пак не мора имати најмањи елемент, па парадокса нема.

Скупови су формално коначни, односно за њих важи следећих шест аксиома Зермело-Френкелове теорије коначних скупова (краће $\mathbf{ZF}_{\text{fin}} = (\mathbf{ZF} - \infty) + \neg\infty)^*$. Са првих пет аналитичких аксиома читалац се срео у чланку *Теорија скупова* објављеном у Тангенти број 43, а шеста хипотетичка представља један облик аксиоме индукције за коначне скупове. Из ових аксиома следи негација аксиоме бесконачности, али и обратно, из негације аксиоме бесконачности (и осталих пет аналитичких) следи аксиома индукције за скупове.

Аксиома екстензионалности (једнакости) за скупове:

$$(\forall x, y)(x = y \;\Leftrightarrow\; (\forall z)(z \in x \;\Leftrightarrow\; z \in y)).$$

Аксиома празног скупа: $(\exists_1 x)(\forall y)(y \notin x)$
(Напомена: $(\exists_1 x) =$ *постоји тачно један* x).

Уводимо празан скуп, у ознаци $\emptyset$, на следећи начин: $x = \emptyset \;\Leftrightarrow\; (\forall y)(y \notin x)$.

Аксиома пара: $(\forall x, y)(\exists_1 z)(\forall u)(u \in z \;\Leftrightarrow\; u = x \lor u = y)$.

Аксиома уније: $(\forall x, y)(\exists_1 z)(\forall u)(u \in z \;\Leftrightarrow\; u \in x \lor u \in y)$.

Дефинишимо операције $\{\ ,\ \}$ (пар) и $\cup$ (унија):

$$z = \{x, y\} \;\Leftrightarrow\; (\forall u)(u \in z \;\Leftrightarrow\; u = x \lor u = y),$$

$$z = x \cup y \;\Leftrightarrow\; (\forall u)(u \in z \;\Leftrightarrow\; u \in x \lor u \in y).$$

Следеће две аксиоме односе се на сваку скуповну формулу (тј. формулу у којој учествују само скуповне променљиве) $\varphi(x)$.

Аксиома регуларности: $(\exists x)\varphi(x) \;\Rightarrow\; (\exists x)(\varphi(x) \land (\forall y \in x)\neg\varphi(y))$.

Аксиома индукција: $(\varphi(\emptyset) \land (\forall x, y)()\varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x \cup \{y\})) \;\Rightarrow\; (\forall x)\varphi(x)$.

Аксиома екстензионалности (једнакости) за класе (уопштава одговарајућу аксиому за скупове): $(\forall X, Y)(X = Y \;\Leftrightarrow\; (\forall x)(x \in X \;\Leftrightarrow \in X))$.

Морсеова аксиома: За сваку формулу $\varphi(x)$ која описује неко својство скупова постоји класа чији елементи имају то својство; $(\exists X)(\forall x)(x \in X \;\Leftrightarrow\; \varphi(x))$. То нам омогућује да дефинишемо $X = \{x \mid \varphi(x)\}$. У канторовским теоријама ово је врло снажна аксиома и често се избегава, док је овде пак она нужна јер је значај класа у $\mathbf{AST}$ већи.

Поставља се питање због чега се у $\mathbf{AST}$ инсистира на коначним скуповима? Вопенкин одговор је јасан: Нигде се у природи не могу срести бесконачни скупови! Међутим, неки од њих су велики па их „у неком смислу" можемо сматрати (а и сматрамо их у терминологији $\mathbf{AST}$-а) за бесконачне. Конкретније, за бесконачне (у смислу $\mathbf{AST}$) скупове сматрамо оне који садрже праву подкласу или другим речима полускуп. Таквих скупова, на основу аксиоме егзистенције правог полускупа, има. Остали су коначни. Према томе, скуп је коначан ако су његове подкласе скупови. Означимо са $\mathrm{Fin}(x)$ чињеницу да је x коначан скуп;

$$\mathrm{Fin}(x) \;\Leftrightarrow\; (\forall X \subseteq x)\mathrm{Set}(X).$$

Класа је коначна ако је коначан скуп.

У оквиру $\mathbf{AST}$ се на сличан начин (као код Кантора) дефинишу природни бројеви. Тако је x природан број ако $(\forall y, z \in x)(y \subseteq x \land (y \in z \lor y = x \lor z \in y))$. Отуда су $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$ природни бројеви. Означимо класу свих природних бројева са N.

---

* са ∞ је означена аксиома бесконачности (видети чланак *Теорија скупова* из броја 43)

Помоћу аксиоме индукције можемо да покажемо да је сваки скуп еквивалентан (мисли се истобројан) са неким природним бројем, тј.

$$(\forall x)(\exists_1 n \in N)(\exists f)(f : n \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} x).$$

Отуда лако следи да бесконачним скуповима одговарају бесконачни природни бројеви. Ако са FN означимо класу коначних природних бројева, тада је $FN = \{n \in N \mid \mathrm{Fin}(n)\}$ и $N \setminus FN \neq \emptyset$.

Очигледно је FN „почетни комад" од N (тј. прво дођу елементи из FN па онда бесконачни природни бројеви). Лако се покаже да је, слично као и N, FN затворен за $+, \cdot$ и сл. Такође, важи и нека врста теореме индукције на коначним скуповима

$$(*) \qquad (\emptyset \in Z \wedge (\forall x, y)(x \in Z \Rightarrow x \cup \{y\} \in Z)) \Rightarrow (\forall x)(\mathrm{Fin}(x) \Rightarrow x \in Z),$$

или речима: Ако је Z класа, такв ада $\emptyset \in Z$ и $x \cup \{y\} \in Z$, за све $x \in Z$ и све y, тада је сваки коначан скуп елемент од Z.

Ако се уочи $\alpha \in N \setminus FN$, онда се лако види да је $(\forall n \in FN) n < \alpha$, па је отуда $0 < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{n}$ за свако $n \in FN$, тј. $\dfrac{1}{\alpha}$ је очигледно инфинитезимала. Наравно $\dfrac{1}{\alpha}$, слично као и у Канторовој теорији, кодирамо преко појма уређен пар, на пример, $(1, \alpha) = \{\{1\}, \{1, \alpha\}\}$.

У **AST** се затим уводе још три веома значајне аксиоме, којима овде на жалост не можемо да посветимо више пажње. То су *аксиома продужења* (пролонгације), *аксиома кардиналности* и *аксиома доброг уређења*. Оне нам омогућују да у оквиру **AST** заснујемо и реалне бројеве, полазећи од рационалних, а до којих (мисли се на рационалне) долазимо на сличан начин као и у Канторовој теорији. Овде поред рационалних бројева $RN = \left\{\dfrac{m}{n} \mid m, n \in N \wedge n \neq 0\right\}$ посматрамо и коначне рационалне бројеве $FRN = \left\{\dfrac{m}{n} \mid m, n \in FN \wedge n \neq 0\right\}$, па због $FN \subsetneqq N$, имамо и $FRN \subsetneqq RN$, док је монада нуле $m(0) = \left\{x \in RN \mid (\forall n \in FN)\left(|x| < \dfrac{1}{n}\right)\right\}$. Све нам то омогућава да у оквиру **AST** развијемо диференцијално-интегрални рачун, теорију мере и сл.

Рецимо сада на крају нешто о домету ове теорије. На пример, шта је са бројем $10^{10^{10}}$ са почетка наше приче? Да ли је он коначан (тј. $10^{10^{10}} \in FN$) или није (тј. $10^{10^{10}} \in N \setminus FN$)?

Вопенка разликује ове две могућности. [Наравно, није овде само у питању $10^{10^{10}}$ већ било који „конкретан" (тј. изражен преко цифара и аритметичких операција) број.] На жалост (нашу, Вопенкину, али не и свих математичара) за сада елементи из скупа $N \setminus FN$ су тек неки недређени бројеви α, β и сл. Само у том случају, за сада постоји задовољавајућа теорија, а главни кривац за то је, нама свима тако драга, аксиома индукције (овде конкретно дата више у облику своје последице - теореме $(*)$).

* * *

Да погледамо сада мало поближе како се формирају аритметичке операције. Све се оне дефинишу рекурзивно (тј. индуктивно). Најједноставнија од њих - сабирање - своди се на додавање јединице или другим речима бројање:

$$a + 0 = a,\ a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Множење се своди на сабирање: $a \cdot 0 = 0,\ a \cdot 1 = a,\ a(b + 1) = ab + a$. Степеновање на множење: $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^{b+1} = a^b \cdot a$. За последицу имамо важење алгебарских закона (на пример, $a + b = b + a, a(b + c) = ab + ac$ итд.), али и

$$(\forall a, b \in FN)(a + b, a \cdot b, a^b \in FN),$$

а тиме и $10^{10^{10}} \in FN$.

Али ми можемо ићи и даље па увести нову операцију, коју ћемо назвати „солитирање", а која ће се, слично претходним, свести на степеновање

$$aS0 = 1,\ aS1 = a,\ aS(b + 1) = a^{aSb}.$$

Тако је

$$5S6 = 5^{5^{5^{5^{5^{5}}}}},$$

што је прилично велики број, али такође припада FN.

Ако ову последњу операцију напишемо мало општије (уместо aSb са $S(a, b)$) тада можемо добити још брже растућу функцију d:

$$d(a, 0) = 1,\ d(a, 1) = a,\ d(b + 1) = S(a, d(a, b)).$$

Тако је на пример $d(10, 3)$ кула која има укупно $\left.10^{\cdot^{\cdot^{10}}}\right\}$ 10 спратова броја 10.

Наравно, можемо да дефинишемо све брже ибрже растуће функције, тако да се следећа дефинише преко претходне:

$$d_{n+1}(a, 0) = 1,\ d_{n+1}(a, 1) = a,\ d_{n+1}(a, b + 1) = d_n(a, d_{n+1}(a, b)).$$

Читав тај низ функција можемо покрити једном функцијом са три аргумента $d(n, a, b) = d_n(a, b)$ и онда поставити питање какав је број

$$t = d\left(10^{10^{10}}, 10^{10^{10}}, 10^{10^{10}}\right)?$$

Једино што о њему на основу $(*)$ можемо да знамо је да је коначан, тј. елемент класе FN!!

Очигледно је да ако желимо да неки „конкретан" број (као што је на пример овај последњи) буде бесконачан (у смислу **AST**) морамо се одрећи индукције из које следи $(*)$.

Међутим, напустити индукцију у теорији коначних скупова (а то је исто што и аритметика) значи лишити се универзалне методе за доказивање свих битних карактеристика скупова (односно бројева). Могући пут би био да се замени ова „пуна" индукција неком својом слабијом варијантом, али и да се узму значајне и важне последице „пуне" индукције, које ипак немају довољну јачину из које би следило да је на пример t коначан број. Пут у овом правцу већ је направио амерички математичар Јан Мисељски. Колико далеко се може отићи не знамо.

Статиите прв пат се објавени во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во периодот од 2004 го 2007 година