Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 7
ОЛИМПИСКИ ТЕМИ – ПРВ ДЕЛ
(алгебра и теорија на броеви)

Скопје, 2019

Рецензент
Проф. д-р Сава Гроздев

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

51:373.3(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математички талент 7 : олимписки теми : (алгебра и теорија на броеви). Д. 1 / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 292 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 289-292

ISBN 978-608-4904-89-2

а) Математика - Основно образование - Задачи од натпревари
COBISS.MK-ID 111826442

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 7 е наменета за талентираните ученици по математика од основното образование и на извесен начин е продолжение на книгите *Математички талент* 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Меѓутоа, сметам дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 427 решени задачи во која во два одделни дела се обработени задачи од алгебрата и теоријата на броеви, приспособени за децата кои учествуваат на националните и меѓународните олимпијади за ученици до 15,5 годишна возраст.

Рецензентот д-р Сава Гроздев, придонесе со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно му благодарам.

И покрај вложениот напор, не можем да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје　　　　　　　　　　　　　　　Авторот
ноември, 2019 г.

I АЛГЕБРА

I.1 ТРАНСФОРМАЦИИ, ИДЕНТИТЕТИ И ФУНКЦИИ

1. Во низа се запишани броевите од 1 до 9 така што збирот на секој број на непарна позиција со неговите соседи (сосед) е еднаков на S. Определи ги сите можни вредности на S.

2. Четворица играчи A_1, A_2, A_3 и A_4 со седум коцки за не лути се човече ја играат следнава игра: A_1 ги фрла седумте коцки и потоа на секој од останатите тројца играчи му исплаќа $k-$ти дел од сумата која тој играч ја има во моментот, каде k е збирот на паднатите броеви на седумте коцки, потоа истото го прават играчите A_2, A_3 и A_4. На почетокот сите имале еднакви суми пари, а откако сите ги фрлиле коцките по еднаш, се покажало дека сумите кои ги имаат играчите се однесуваат како $3:3:2:2$ (сумата на A_1 спрема сумата на A_2 спрема сумата на A_3 спрема сумата на A_4). Определи го збирот на паднатите броеви на секој играч.

3. Ако a,b,c се реални броеви такви што
$$a+b+c=0 \text{ и } a^4+b^4+c^4=50, \qquad (1)$$
пресметај ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

4. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои постојат реални броеви x и y такви што
$$a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0, c^3+cx+y=0.$$
Докажи, дека $a+b+c=0$.

5. Нека n е природен број. Природните броеви a,b,c,d се помали или еднакви на n, при што d е најголемиот меѓу нив и важи
$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)=(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2. \qquad (1)$$
Докажи, дека $d=a+b+c$.

6. Разложи го на множители изразот
$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

7. За реалните броеви a,b,c и d важи

$$a+b+c+d=0$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0.$$

Докажи, дека збирот на некои два од овие броеви е еднаков на 0.

8. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што

$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

9. Нека n е природен број, $A=\underbrace{44...44}_{2n}$ и $B=\underbrace{88...88}_{n}$. Докажи, дека бројот $A+2B+4$ е точен квадрат.

10. Даден е 2013-аголник $A_1A_2...A_{2013}$. Неговите темиња се означени со броеви, така што збирот на броевите со кои се означени било кои 9 последователни темиња е константен и е еднаков на 300. Ако е познато дека темето A_{13} е означено со бројот 13, а темето A_{20} со бројот 20, да се определи со кој број е означено темето A_{2013}.

11. За секој подреден пар природни броеви (m,n) дефинираме операција

$$m*n=|37^m-29^n|.$$

а) Дали постои подреден пар (m,n) таков што $m*n=2014$?

б) Определи ја најмалата вредност на изразот $m*n$.

12. Дадени се броевите 1, 3, 5, 7 и 9. Нови пет броеви добиваме така што произволни четири броја a,b,c,d од претходната петорка ги заменуваме со броевите $\frac{a+b+c-d}{2}, \frac{a+b-c+d}{2}, \frac{a-b+c+d}{2}, \frac{-a+b+c+d}{2}$, а петтиот број останува непроменет. Дали со повеќекратно повторување на оваа постапка може да се добијат следниве пет брови:

а) 0, 2 , 4, 6, 8,

б) 3, 4, 5, 6, 7?

13. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

14. Нека a,b,c се реални броеви такви што $\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0$. Докажи, дека

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0.$$

15. Определи ја вредноста на изразот

$$w=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}\,.$$

16. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$. Ако

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=\tfrac{1007}{1008}\,,$$

докажи дека

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=2017\,.$$

17. Нека

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1997\cdot 1998} \text{ и } B=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+...+\frac{1}{1998\cdot 1000}\,.$$

Докажи, дека $\frac{A}{B}$ е природен број.

18. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+...+\frac{2009}{4\cdot 2009^4+1}\,.$$

19. а) Дадени се реални броеви a,b и c такви што $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Докажи, дека $a=b=c$.

б) Определи ја вредноста на изразот $x+y$, ако $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$ и изразот $-4x^2+36y-8$ прима најголема вредност.

20. Докажи, дека за секој природен број $n\geq 5$ постојат природни броеви p и q такви што важи $|\,p^2+2q^2-n\,|\leq\sqrt[4]{9n}$.

21. Дали постојат ненулти реални броеви $a_1,a_2,...,a_{10}$ за кои

$$(a_1+\tfrac{1}{a_1})(a_2+\tfrac{1}{a_2})....(a_{10}+\tfrac{1}{a_{10}})=(a_1-\tfrac{1}{a_1})(a_2-\tfrac{1}{a_2})....(a_{10}-\tfrac{1}{a_{10}})\,?$$

22. а) Определи ги сите цели броеви x, за кои е исполнето равенството $|\,x^2-1\,|+|\,x^2-4\,|=3x$.

б) Определи ги сите цели броеви x и a, за кои е исполнето равенството $|\,x^2-1\,|+|\,x^2-4\,|=ax$.

23. Дадена е равенката

$$|\,4-2x\,|-|\,x+1\,|=a-x\,. \qquad (1)$$

а) Реши ја равенката (1) за $a=5$.

б) Определи го бројот на решенијата на равенката (1) во зависност од вредноста на параметарот a .

24. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот

$$\begin{array}{l}(|x|+|y|-2)^2=1\\ y=ax+5\end{array} \qquad (1)$$

има точно три решенија.

25. Нека p е реален параметар таков што системот равенки

$$\begin{cases} p(x^2-y^2)=(p^2-1)xy \\ |x-1|+|y|=1 \end{cases}$$

има најмалку три различни реални решенија. Определи го p и реши го системот за тоа p .

26. Определи ги сите парови реални броеви (x,y) такви што

$$|x|+|y|=1340 \text{ и } x^3+y^3+2010xy=670^3.$$

27. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи, дека равенката $x^2+ax+a^2-6=0$ нема решенија во множеството реални броеви.

28. Реалните броеви a,b,c се такви што равенката $x^3+ax^2+bx+c=0$ има три реални корени. Докажи, дека ако $-2\le a+b+c\le 0$, тогаш барем еден од тие корени лежи во интервалот $[0,2]$.

29. Даден е полиномот $M(x)=ax+b$, каде a и b се параметри. Реши ја равенката $2M(x)=x-2016$, ако $M(x^2)-(M(x))^2\ge\frac{1}{4}$, за секој x.

30. Нека $p(x)$ е квадратен полином, за кој $|p(x)|\le 1$ за $x\in\{-1,0,1\}$. Докажи, дека $|p(x)|\le\frac{5}{4}$ за секој $x\in[-1,1]$.

31. Нека $P(x)$ е квадратен трином со водечки коефициент 1 таков што полиномите $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имаат заеднички корен. Докажи, дека $P(0)P(1)=0$.

32. Во тетратките на Петар и Киро се запишани по два броја: на почетокот 1 и 2 кај Петар, и 3 и 4 кај Киро. Во секоја минута Петар формира квадратен трином $f(x)$ чии корени се броевите запишани во неговата

тетратка, а Киро квадратен трином $g(x)$ чии корени се запишани во неговата тетратка. Ако равенката $f(x)=g(x)$ има два различни реални корени, тогаш едно од момчињата го заменува својот пар броеви со тие корени (во спротивно ништо не се случува). Ако во некој момент се појави бројот 5 во тетратката на Петар, кој е другиот број?

33. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=2008 \\ x^2+y^2+z^2=6024^2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2008}. \end{cases}$$

34. Нека $a\in\mathbb{R}$ и функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

1) $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$

2) $f(0)=\frac{1}{2}$.

Докажи, дека $f=\text{const}$.

35. Дадена е низата $a_1,a_2,...,a_n,...$ за која важи $a_1=0$ и $a_{n+1}=a_n+4n+3$. Определи го општиот член на низата во функција од n.

36. Определи ја вредноста на изразот

$$(...(((2*3)*4)*5)*...)*1995$$

каде $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$ за произволни позитивни броеви x и y.

37. Во научниот музеј се закачени портрети на научници кои живееле меѓу 1600 и 2008 година, секој од кои не живеел повеќе од 80 години. Васко ги помножил годините во кои тие се родиле, а Петар ги помножил години во кои тие починале. Се покажало, дека бројот кој го добил Петар е $\frac{5}{4}$ пати поголем од бројот кој го добил Васко. Определи го најмалиот број портрети.

38. За секој реален број x определуваме број $f(x)=ax+b$. Определи ја разликата $b-a$ ако е познато дека за секој x е исполнето равенството

$$f(x+1)=4f(x+4)+x.$$

39. Определи ги сите функции $f(x)=ax+b$ такви што

$$f(f(x))=(|a|+|b|+2)x+b^2-6b\text{, за секој } x\in\mathbb{R}.$$

40. Дали постои функција $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ таква што
$$(x+y)f(2yf(x)+f(y)) = x^3 f(yf(x)), \qquad (1)$$
за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$.

41. За секој природен број дефинираме
$$f(n) = \frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$
Пресметај го збирот
$$f(1)+f(2)+...+f(40).$$

42. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1 = \frac{1}{2}, a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1}, m > 1$. Пресметај го збирот $a_1 + a_2 + ... + a_k$, за произволен $k \in \mathbb{N}$.

I.2 ЕЛЕМЕНТАРНО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Нека x и y се реални броеви такви што $x^{2017} + y^{2017} > x^{2016} + y^{2016}$. Докажи, дека
$$x^{2018} + y^{2018} > x^{2017} + y^{2017}. \qquad (1)$$

2. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $a+b=1$. Докажи дека
$$a^a b^b + a^b b^a \le 1.$$

3. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+y+z$, ако x,y,z се реални броеви такви што $x \ge 4, y \ge 5, z \ge 6$ и $x^2 + y^2 + z^2 \ge 90$.

4. Нека x, y и z се реални броеви такви што $x, y, z \ge 1$. Докажи, дека
$$(x^2 - 2x + 2)(y^2 - 2y + 2)(z^2 - 2z + 2) \le (xyz)^2 - 2xy + 2.$$

5. а) Докажи, дека ако $a,b \in [0,1]$ и $a+b \le 1$, тогаш $a^2 + b^2 \le 1$.
б) Секои два од броевите x,y,z не се разликуваат за повеќе од 1 и $xy + yz + zx = 96$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот $A = x^2 + y^2 + z^2$.

6. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$M = a^2b^2(a^2 + b^2),$$

ако $a > 0$, $b > 0$ и $a + b = 2$. Кога таа се достигнува?

7. Докажи, дека ако $x + y + z = 1$, тогаш важи $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$. Кога важи знак за равенство?

8. Нека x и y се позитивни реални броеви такви што $x^3 + y^3 = 4xy$. Докажи дека
   а) $x + y \leq 4$,
   б) $x^2 + y^2 \leq 8$.

9. Ако за позитивните реални броеви a, b, c и d се исполнети условите $9ac \geq 3bd \geq ac$, докажи дека
$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)^2} \geq \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

10. Нека x, y, z се реални броеви такви што
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1.$$
Докажи дека
$$(1+x)(1+y)(1+z) \leq 4 + 4xyz.$$
Кога важи знак за равенство?

11. Нека $a, b, c, d \in (0,1)$. Докажи, дека
$$1 + ab + bc + cd + da + ac + bd > a + b + c + d.$$

12. Секои два од реалните броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 се разликуваат барем за 1. За некој реален број k се исполнети равенствата
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \text{ и } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$
Докажи, дека $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

13. Позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и k се такви, што
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 3k, a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 3k^2 \text{ и } a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 > 3k^3 + k.$$
Докажи, дека разликата на некои два од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ е поголема од 1.

14. Нека a, b, c се различни реални броеви.
   1) Пресметај ги вредностите на изразите
      а) $\frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} + \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ca}{c-a} + \frac{1+ca}{c-a} \cdot \frac{1+ab}{a-b}$.

б) $\frac{1-ab}{a-b}\cdot\frac{1-bc}{b-c}+\frac{1-bc}{b-c}\cdot\frac{1-ca}{c-a}+\frac{1-ca}{c-a}\cdot\frac{1-ab}{a-b}$.

2) Докажи го неравенството

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\geq\frac{3}{2}.$$

Дали може да важи знак за равенство?

15. Нека $x,y,z>-1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2.$$

16. Докажи, дека за секој природен број $n>1$ се точни неравенствата

$$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+...+\frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

17. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geq 1.$$

18. Нека $n\geq 2$ е природен број и нека за позитивните реални броеви $a_0,a_1,...,a_n$ важи

$$(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1})=a_{k-1}-a_{k+1},$$

за секој $k=1,2,...,n-1$. Докажи, дека $a_n<\frac{1}{n-1}$.

19. Нека $d,a_1,a_2,...,a_{2014}$ се реални броеви такви што

$$|a_1-1|=|a_2-2|=|a_3-3|=...=|a_{2014}-2014|=d$$

и $b_1\leq b_2\leq...\leq b_{2014}$ се броевите $a_1,a_2,...,a_{2014}$ подредени по големина. Докажи, дека $|a_k-b_k|\leq 2d$, за $k=1,2,...,2014$.

20. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што

$$x+y+z\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Докажи, дека

$$x+y+z\geq\frac{3}{x+y+z}+\frac{2}{xyz}.$$

21. Нека

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+...+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{\frac{1996\cdot 1997}{2}}}.$$

Докажи, дека $S>1001$.

22. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c+d=1.$$

Докажи, дека

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}+\frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2}+\frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2}+\frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{8}.$$

23. Докажи, дека за секои позитивни реални броеви a,b,c,d е точно неравенството

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3}\ge\frac{a+b+c+d}{4}.$$

24. а) Докажи, дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1 \qquad (1)$$

за секои реални броеви x,y,z такви шту ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

б) Докажи, дека знак за равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви x,y,z такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

25. Нека x,y и z се позитивни броеви.

а) Докажи, дека $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$.

б) Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A=\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{4}{x+y+z}.$$

26. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}+\frac{x^2+y^2}{z}\ge 2(x+y+z).$$

27. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a})\le 1.$$

28. Дадени се реални броеви $a_1,a_2,a_3>1$ и $S=a_1+a_2+a_3$. За $i=1,2,3$ важи $\frac{a_i^2}{a_i-1}>S$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_1}>1.$$

29. Нека $x,y,z\in(0,1)$ се такви што

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Докажи дека најмалку еден од броевите $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ е поголем или еднаков на $\frac{1}{4}$.

30. Докажи, дека ако a и b се реални броеви поголеми од -1, тогаш

$$\frac{1+a^6}{1+a}\cdot\frac{1+b^6}{1+b}\geq\frac{1+ab}{2}\cdot\frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

31. Определи ја најголемата можна вредност на збирот $z+x$ ако броевите x,y,zt ги задоволуваат условите

$$x^2+y^2=4$$
$$z^2+t^2=9$$
$$xt+yz\geq 6.$$

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c=1.$$

Докажи, дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6\geq 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}).$$

33. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што

$$x+y+z=4.$$

Определи ја најмалата вредност на зиразот

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}.$$

34. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што

$$x+y+z=4.$$

Определи ја најмалата вредност на изразот

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}.$$

35. Определи ја 2005-тата цифра после децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$, каде

$$a=0,\underbrace{444...444}_{2005}.$$

36. Докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+...+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}<1.$$

I.3 ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВАТА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

1. Нека S е множество од n различни реални броеви, а A_S е множеството од аритметичките средини на паровите броеви од S. За дадено $n\geq 2$ определи го најмалиот можен број елементи во множеството A_S.

2. Определи ја најмалата вредност на изразот
$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}},\ x>0.$$

3. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што
$$ab+bc+ca=1.$$
Докажи, дека
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3(a+b+c).$$
Кога важи знак за равенство?

4. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$
Кога важи знак за равенство?

5. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=1$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот
$$A(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}.$$

6. Нека x и y се реални броеви такви што
$$x(4-3x)+y(4-3y)=3xy.$$
Докажи, дека
$$0\leq x+y\leq\frac{16}{9}.$$

7. Нека x,y се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$4x^4+4y^3+5x^2+y+1\geq 12xy.$$

8. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи, дека
$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви, за кои е исполнето неравенството

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \le 4.$$

Докажи дека

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2} \ge 3.$$

10. Нека a, b, c се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)} \ge \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

11. Нека $a_i, i=1,2,...,n, (n\ge 2)$ се позитивни броеви такви што $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Докажи дека

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+...+a_{n-1}} \ge \frac{n}{2n-1}.$$

12. Докажи, дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2+3n+1)^n \ge 6^n (n!)^2.$$

13. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \le 1.$$

Докажи дека

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \ge 125.$$

Кога важи знак за равенство?

14. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b} \ge 3.$$

15. Нека $x_1, x_2, ..., x_{2017}$ се позитивни реални броеви такви што $\sum_{i=1}^{2017} x_i = 1$.

Определи ја најмалата константа K таква што

$$K \sum_{i=1}^{2017} \frac{x_i^2}{1-x_i} \ge 1.$$

16. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1.$$

Докажи, дека

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}+\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\leq\frac{1}{4}. \qquad (*)$$

17. Нека a,b,c е позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=1$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\geq 3.$$

Кога важи знак за равенство?

18. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи дека важи неравенството

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1.$$

19. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c\leq 3.$$

Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}.$$

20. Определи го најголемиот реален број k, за кој неравенството

$$(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\leq(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})(\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c})$$

е исполнето за произволни позитивни реални броеви.

21. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0.$$

22. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што

$$xy+yz+zx=3xyz.$$

Докажи, дека

$$x^2y+y^2z+z^2x\geq 2(x+y+z)-3.$$

Кога важи знак за равенство?

23. Докажи, дека за позитивните реални броеви a,b,c,d,e важи неравенството

$$\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{d}{c}+\tfrac{e}{d}+\tfrac{a}{e}\leq(\tfrac{a}{b})^4+(\tfrac{b}{c})^4+(\tfrac{c}{d})^4+(\tfrac{d}{e})^4+(\tfrac{e}{a})^4.$$

24. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{32y}+\frac{2}{z}$, каде x,y и z се позитивни реални броеви.

25. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq 1.$$

26. Докажи, дека за секои реални броеви x,y и z важи

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geq 0.$$

27. Нека $a,b,$ и c се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c\leq 3abc.$$

Докажи, дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq a+b+c.$$

28. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc(a+b+c)=3$. Докажи, дека

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8.$$

29. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2}+\frac{1}{b^5+c^5+a^2}+\frac{1}{c^5+a^5+b^2}\leq 1.$$

30. За позитивните реални броеви x,y,z важи $x\leq 2,\ y\leq 3$ и

$$x+y+z=11,.$$

Докажи, дека $\sqrt{xyz}\leq 6$.

31. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$(a+b)(b+c)(c+a)=1.$$

Докажи, дека

$$ab+bc+ca\leq\frac{3}{4}.$$

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2\geq\frac{3}{2}(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}).$$

33. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab}\leq 0.$$

34. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c\geq abc.$$

Докажи, дека

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}.$$

35. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 2017$. Докажи, дека

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}.$$

Кога важи знак за равенство?

36. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ се такви што

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Докажи дека

$$\frac{a}{3c(a^2-ab+b^2)} + \frac{b}{3a(b^2-bc+c^2)} + \frac{c}{3b(c^2-ca+a^2)} \leq \frac{1}{abc}.$$

Кога важи знак за равенство?

37. Нека a, b, c, d, e и f се реални броеви такви што

$$a + b + c + d + e + f = 10$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 + (e-1)^2 + (f-1)^2 = 6.$$

Определи ја најголемата вредност која може да ја прими бројот f.

38. Дадени се позитивните реални броеви a, b, c, d такви што

$$2(a + b + c + d) \geq abcd.$$

Докажи, дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd.$$

39. Определи ја најголемата вредност на изразот $a + b + c + abc$, каде a, b и c се ненегативни броеви такви што важи

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

40. Нека a, b и c се позитивни реални броеви за кои важи $abc = 1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3. \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

41. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{2}{a(a+b)} + \frac{2}{b(b+c)} + \frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}.$$

42. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2 \geq \frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

43. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1) \geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

44. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$.Докажи дека

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

Кога важи знак за равенство?

45. Докажи дека за a,b,c позитивни реални броеви е точно неравенството

$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17) \geq 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1).$$

Кога важи знак за равенство?

46. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{z^2+x^2+2y^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

47. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c+2=abc. \qquad (1)$$

Докажи, дека

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} \geq 2.$$

Кога важи равенство?

I.4 ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВОТО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

1. Определи ги сите броеви a и b такви што

$$2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1).$$

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \le \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што

$$x + y + z = 1.$$

Докажи дека

$$\frac{x}{y^2+z} + \frac{y}{z^2+x} + \frac{z}{x^2+y} \ge \frac{9}{4}.$$

4. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1} + \frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1} + \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \ge a + b + c + 3.$$

5. Определи го најмалиот реален број k за кој неравенството

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(d^2+1)} +$$
$$+\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} + \sqrt{(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} \ge$$
$$\ge 2(ab + bc + cd + ac + bd + ad) - k$$

важи за произволни реални броеви a, b, c и d.

6. Нека A е најголемиот меѓу позитивните рационални броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и a_7, за кои е исполнето

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 12 \quad \text{и}$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = 24.$$

Определи ги броевите, кога A прима можна најголема вредност.

7. Докажи, дека за произволни произволни реални броеви x, y, z е исполнето неравенството

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2} + \frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2} + \frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2} \ge 1.$$

8. Нека a, b, x, y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \ge \frac{3}{a+b}.$$

9. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви да $x + y + z = 1$. Докажи дека $A \ge B^2$, каде

$$A = \frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \text{ и } B = \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}} + \frac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}} + \frac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}.$$

10. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1.$$

11. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што

$$xy+yz+zx=x+y+z.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq 1.$$

Кога во претходното неравенство важи знак за равенство?

12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви, што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1.$$

13. Дадени се позитивни реални броеви a,b и c такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}}\leq \frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}.$$

14. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)}\geq 4(xy+yz+zx).$$

Збирот на левата страна на горното неравенство е еднаков на

$$(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)}+(y+z)\sqrt{(z+x)(x+y)}+(z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}.$$

15. Нека x, y, z се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Докажи, дека

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geq 0.$$

Кога важи знак за равенство?

16. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

17. Нека x, y и z се ненегативни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{x-y}{xy+2y+1}+\frac{y-z}{yz+2z+1}+\frac{z-x}{zx+2x+1}\geq 0.$$

18. Ако x, y и z се позитивни реални броеви, докажи ги неравенствата:

а) $(3x^2+2)(3y^2+2)\geq\frac{9}{2}(x+y)^2+3$

б) $(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2)\geq 9(x+y+z)^2$

19. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz\geq 1$. Докажи, дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0. \qquad (1)$$

20. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.$$

21. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$a^2+b^2+c^2=3.$$

Докажи, дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq \frac{3}{2}.$$

22. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(ab+bc+\frac{1}{ca})(bc+ca+\frac{1}{ab})(ca+ab+\frac{1}{bc})\geq(1+2a)(1+2b)(1+2c).$$

23. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c+d=8.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8+b-d}}+\frac{b}{\sqrt[3]{8+c-a}}+\frac{c}{\sqrt[3]{8+d-b}}+\frac{d}{\sqrt[3]{8+a-c}}\geq 4.$$

Кога важи знак за равенство?

24. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$(x^2+y+1)(x^2+z+1)(y^2+z+1)(y^2+x+1)(z^2+x+1)(z^2+y+1)\geq(x+y+z)^6.$$

25. Определи ги сите тројки позитивни реални броеви (x,y,z) кои ги задоволуваат условите

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=3$$

$$x+y+z\leq 12.$$

26. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1.$$

Докажи, дека

$$a+b+c\geq ab+bc+ca.$$

27. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $ab \geq 1$. Докажи, дека

$$(a + 2b + \tfrac{2}{a+1})(b + 2a + \tfrac{2}{b+1}) \geq 16\,.$$

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1 ДЕЛИВОСТ

1. Докажи, дека бројот

$$\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5$$

е точен квадрат.

2. Ако n е точен куб, тогаш n^2+3n+3 не е точен куб. Докажи!

3. Определи ги сите ненегативни цели броеви n за кои постојат такви цели броеви a и b што $n^2=a+b$ и $n^3=a^2+b^2$.

4. Даден е природен број $n\geq 3$. Докажи, дека од множеството $\{1,2,...,n\}$ може да се извадат два броја така што збирот на преостанатите броеви е точен квадрат.

5. а) Нека $k\in\mathbb{N}$. Докажи, дека бројот $(2k+1)^3-(2k-1)^3$ може да се запише како збир на три точни квадрати.

   б) Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека бројот $(2n+1)^3-2$ може да се запише како збир од $3n-1$ точни квадрати поголеми од 1.

6. Докажи, дека постојат бесконечно многу тројки последователни природни броеви, такви што секој од нив е збир на два точни квадрати.

7. Дадени се неколку различни природни броеви, кои се наоѓаат меѓу квадратите на два последователни природни броја. Докажи, дека сите нивни по парови производи се различни.

8. Докажи, дека природниот број c може да се запише како збир на квадрати на два цели броја ако и само ако и бројот $2c$ го има истото својство.

9. Ако $\frac{2^n-2}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ е цел број, тогаш и $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ е цел број. Докажи!

10. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број n таков што $m+n+1$ е точен квадрат и $mn+1$ е точен куб на некои природни броеви.

11. Нека a,b,c,d,e,f се ненулти цифри (може да има и еднакви) такви што броевите $\overline{abc}, \overline{def}$ и $\overline{abcdef}$ се точни квадрати.

    а) Докажи, дека бројот $\overline{abcdef}$ може барем на два начина да се запише како збир на три квадрати.
    б) Дади пример на вакви броеви.

12. Природните броеви a,b и c се такви, што броевите $a+c$ и $b+c$ се точни квадрати на два последователни природни броеви. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ исто така се точни квадрати на два последователни природни броеви.

13. Симон избрал два различни природни броја a и b и во тетратката ги запишал броевите $a, a+2, b$ и $b+2$. Потоа на таблата ги запишал шесте производи формирани од различните парови броеви запишани во тетратката. Колку најмногу точни квадрати запишал Симон на таблата?

14. Докажи, дека за секој природен број n постои природен број k таков што бројот $k \cdot 2^n + 17$ е точен квадрат.

15. Определи ги сите ненегативни цели броеви n, за кои бројот $a_n = 6\underbrace{00...0}_{n}4$ е точен квадрат.

16. Природните броеви k,m и n се такви што $m-n$ е прост број и
$$8(k^2 - mn) = 2(m^2 + n^2) + 5(m+n)k . \qquad (1)$$
    Докажи, дека $11k+3$ е точен квадрат.

17. Докажи, дека за секој природен број $n \geq 2$, постојат n различни природни броеви, такви што збирот на нивните квадрати е квадрат на природен број.

18. Докажи, дека $3^{4^5} + 4^{5^6}$ може да се запише како производ на два природни броја, секој од кои е поголем од 10^{2002}.

19. Определи ги сите цели броеви x за кои $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 7x + 5$ е точен квадрат на цел број.

20. Определи четирицифрен број $\overline{xyzt}$ кој е точен куб, ако цифрите му се различни и ги задоволуваат условите $2x = y - z$ и $y = t^2$.

21. Определи ги сите природни броеви n и k такви што n^n има k цифри, а k^k има n цифри.

22. Определи го најголемиот природен број p таков што бројот 5^7 може да се запише како збир на p последователни природни броеви.

23. Нека n е парен природен број кој нема множител точен квадрат поголем од 1, k е цел број, а p е прост број таков што $p < 2\sqrt{n}$, p не е делител на n и p е делител на $n+k^2$. Докажи, дека постојат различни природни броеви a,b,c такви што $n = ab+bc+ca$.

24. За природниот број n со $S(n)$ е означен збирот на неговите цифри. Дали постои природен број n за кој што важи
$$n+S(n)+S(S(n)) = 2011. \qquad (1)$$

25. Дали постои природен број n со следново својство: за произволни ненулти цифри a и b бројот $\overline{anb}$ е делив со $\overline{ab}$.

26. Ако m е цел број, докажи дека $\frac{m^5}{5}+\frac{m^3}{3}+\frac{7m}{15}$ исто така е цел број.

27. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови природни броеви (x,y) такви што $x(x+1) \mid y(y+1)$, но $x \nmid y$, $(x+1) \nmid y$, $x \nmid (y+1)$ и $(x+1) \nmid (y+1)$.

28. Дадена е бесконечна низа природни броеви $x_1, x_2, \ldots$ таква што за секој природен број s важи $x_{s+1} - x_s \le 3$. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови различни природни броеви m и n за кои x_m е делител на x_n.

29. Докажи, дека за секој природен број n постои број, составен од цифрите 1 и 2, кој е делив со 2^n.

30. Докажи, дека деветцифрен број, во чиј запис учествуваат сите цифри, освен нулата и кој завршува на цифрата 5, не може да биде точен квадрат на природен број.

31. Определи ги сите цели броеви m за кои m^2-m+1 е делител на m^3+m^2+7.

32. Определи ги сите природни броеви n, такви што $5^{n-1}+3^{n-1}$ е делител на 5^n+3^n.

33. Определи ги сите парови природни броеви (a,b), такви што ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b.

34. Докажи, дека за секој природен број n бројот:

    a) $a_n=3^{3n+3}-26n-27$ се дели со 26^2,

    b) $a_n=5^{n+1}-4n-5$ се дели со 16,

    c) $a_n=20^{2n}+16^{2n}-3^{2n}-1$ се дели со 323,

    d) $a_n=n^5-5n^3+4n$ се дели со 120, и

    e) $a_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ седелисо 133.

35. Дадени се n цели броеви, такви што производот на секој нив со збирот на останатите броеви зголемен за 1 е делив со збирот на сите n броеви. Докажи дека збирот на квадратите на дадените броеви е делив со нивниот збир.

36. Нека n е природен број таков што $24\,|\,n+1$. Докажи, дека збирот на сите позитивни делители на бројот n е делив со 24.

37. Нека a,b,c се природни броеви такви што $a-b$ е прост број и $3c^2=c(a+b)+ab$. Докажи, дека $8c+1$ е точен квадрат.

38. Најди ги сите прости броеви од обликот $\frac{\overset{2n}{11\ldots1}}{11}$, каде n е природен број.

39. Нека броевите u и v се такви што u^2+uv+v^2 е делив со 9. Докажи, дека броевите u и v се деливи со 3.

40. Определи ги сите природни броеви n кои се деливи со 11 и се такви што сите броеви кои се добиваат со произволна пермутација на нивните цифри повторно се деливи со 11.

41. Определи го најголемиот број кој е делив со 11 и чии цифри се различни.

42. Определи ги сите трицифрени броеви кои при делење со 11 даваат број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на почетниот број.
43. Дали постои природен број n, таков што збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $n(4n+1)$ е еднаков на 2017. Одговорот да се образложи!
44. Ако бројот 2^n+1, $n\in\mathbb{N}$ е прост, тогаш n е степен на бројот 2. Докажи!
45. Ако бројот 2^n+3^n, $n\in\mathbb{N}$ е прост, тогаш n е степен на бројот 2. Докажи!
46. Определи ги сите природни броеви n такви што $n2^{n+1}+1$ е точен квадрат.
47. Дали постојат три природни броеви, поголеми од 1 такви што квадратот на секој од нив намален за 1 е делив со секој од останатите два броја?
48. Ако разликата на кубовите на два последователни цели броја е еднаква на квадратот на некој цел број, докажи дека тој број е еднаков на збир на квадратите на два последователни цели броја.
49. Докажи, дека секој природен број поголем од 17 може да се запише како збир на три по парови заемно прости природни броеви поголеми од 1. Дали бројот 17 го има тоа својство?
50. Дали постојат три заемно прости броеви такви што квадратот на секој од нив се дели на збирот на другите два броја?
51. Нека a и b се заемно прости броеви. Докажи, дека збирот на количниците од делењето на броевите $a, 2a, 3a, ..., (b-1)a$ со бројот b е еднаков на $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$.
52. Нека природниот број n е таков што d_1 и d_2 се делители на n^2 и $d_1<n<d_2$. Докажи, дека $d_2-d_1\geq\sqrt{4n+1}$.
53. Дадени се различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{11}$ не помали од 2, чиј збир е еднаков на 407. Дали постои природен број n, за кој збирот на

остатоците при делењето на n со броевите $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ е еднаков на 2012?

54. Дадени се различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{10}$ кои се поголеми или еднакви на 3, чиј збир е еднаков на 678. Дали постои природен број n таков што збирот на остатоците при делењето на бројот n со броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}, 2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ е еднаков на 2012?

55. На почетокот на таблата се запишани 10 последователни природни броеви. Во еден чекор се произволно се избираат два броја (да ги означиме со a и b) и на нивно место се запишуваат броевите $a^2 - 2011b^2$ и ab. После неколку чекори на таблата не останал ниту еден од почетните броеви. Дали е можно новодобиените 10 броеви да се последователни 10 природни броја (запишани во некаков редослед)?

56. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите делители на природниот број n, каде $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Определи ги сите природни броеви, за кои $k \geq 4$ и $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$.

57. Определи ги сите природни броеви N кои ги задоволуваат следните услови:
   - N има точно 16 делители $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N$, и
   - делителот со индекс d_5, т.е. d_{d_5} е еднаков на $(d_2 + d_4)d_6$.

58. Дадени се $n, n > 3$ по парови заемно прости броеви. Познато е дека при делењето на производот на било кои $n-1$ од броевите со преостанатиот број се добива еден и ист остаток r. Докажи, дека $r \leq n-2$.

59. Определи ги сите прости броеви p такви што бројот $p(p+1)(p+3)$ е производ на два последователни природни броја.

60. Определи ги сите парови природни броеви $(m,n), m > n$ такви што $mn-1$ е делител на $n^3 - 1$.

61. Определи ги подредени парови природни броеви (m,n), за кои $\frac{n^3+1}{mn-1} \in \mathbb{N}$.

62. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се природни броеви.

63. Определи ги сите прости броеви p за кои $p+2, p+6, p+8, p+12$, $p+14$ се исто така прости броеви.

64. Определи ги сите природни броеви n такви што n^5+n^4+1 е прост број.

65. Определи ги сите природни броеви a и b такви што a^4+4b^4 е прост број.

66. Нека се p и q прости броеви, такви што $q\,|\,p-1$ и $p\,|\,q^3-1$. Докажи, дека $p=q^2+q+1$.

67. Определи ги сите прости броеви p, q, r, s такви што нивниот збир е прост број и броевите p^2+qr и p^2+qs се квадрати на природни броеви.

68. Определи ги сите прости броеви p и q за кои бројот $p^{q+1}+q^{p+1}$ е точен квадрат на природен број.

69. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот 11^n+2^n+1 е делител на $11^{n+1}+2^{n+1}+1$.

70. Природните броеви a, b и c се такви, што бројот $a+b+c$ се дели со 6, а бројот $ab+bc+ca$ се дели со 3. Докажи дека, бројот $a^n+b^n+c^n$ е делив со 6 за секој природен број $n\geq 2$.

71. Нека n е природен број. Докажи, дека ако n^5+n^4+1 има точно 6 различни природни делители, тогаш n^3-n+1 е точен квадрат на природен број.

72. Нека $q=\frac{3p-5}{2}$, каде p е непарен прост број. Да означиме

$$S_q=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Докажи, дека ако $\frac{1}{p}-2S_q=\frac{m}{n}, m,n\in\mathbb{Z}$, тогаш разликата $n-m$ е делива со p.

73. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1}-2^{n-1}$.

74. За природниот број n ќе велиме дека е *лош*. Ако не може да се претстави во облик $n=\frac{x^2-1}{y^2-1}$ за некои природни броеви x,y.

    Докажи, дека множеството лоши броеви е бесконечно.

75. Дали постои множество S од 2017 природни броеви за кое се исполнети условите:
    1) елементите на S се по парови заемно прости.
    2) секој збир на два или повеќе различни броеви од S е сложен број,

76. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $(ab+1)\,|\,(a^2-1)$.

77. Нека a,b,c,d се природни броеви, такви што $a>b>c>d$ и
$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c). \qquad (1)$$
    Докажи, дека $ab+cd$ не е прост број.

78. Природниот број може да се претстави како збир на своите $k>3$ различни прости делители. Докажи, дека n не може да биде заемно прост со бројот $(k-1)!$

79. Нека a и b се природни броеви такви што $ab\,|\,(a^2+b^2)$. Докажи, дека $a=b$.

80. Нека a и b се различни природни броеви поголеми од 10^6 и такви што $ab\,|\,(a+b)^3$. Докажи, дека $|a-b|>10^4$.

81. На таблата е запишан природен број. Ако на таблата веќе е запишан бројот x, тогаш можеме да допишеме $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. Докажи, дека ако во некој момент на таблата се појави бројот 2008, тогаш и првиот запишан број е 2008.

82. Определи го најмалиот природен број k за кој постои природен број $n\geq 100$ таков, што бројот $n(n+k)$ е точен квадрат.

83. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките
$$\frac{7}{n+9},\frac{8}{n+10},\frac{9}{n+11},\dots,\frac{30}{n+32},\frac{31}{n+33}$$
    е нескратлива.

84. Определи ги сите парови прости броеви p и q за кои $p^2 \mid q^3+1$ и $q^2 \mid p^6-1$.

85. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ е точен квадрат на прост број.

86. Нека a,b,c се природни броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ и d е нивниот најголем заеднички делител. Докажи, дека $abcd$ е точен квадрат.

87. Определи ги сите цели броеви a такви што $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}$ е рационален број.

88. Докажи, дека дропката $\frac{2n^2+n}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ не може да се скрати за ниту еден природен број n.

89. Докажи, дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати за ниту еден природен број n.

90. Нека m и n се заемно прости броеви. Познато е дека дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој природен број. Кој е тој број?

91. Докажи, дека секој природен број поголем од 6 може да се запише како збир на два заемно прости броеви поголеми од 1.

92. Ако $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, тогаш $\mathrm{NZD}(a+b,a^2+b^2)=1$ или 2. Докажи!

93. Дадени се броевите 1, 12, 123, …, 1234567890, 12345678901,… . Секој број се добива од предходниот така што му се допишува следната цифра, при што после 0 доаѓа 1 итн. Докажи, дека барем еден од овие броеви е делив со 1981.

94. Определи ги сите природни броеви x и y такви што

$$x+y+1 \mid 2xy \text{ и } x+y-1 \mid x^2+y^2-1.$$

95. Докажи, дека ако еден број е делив со 99, тогаш збирот на неговите цифри не може да биде помал од 18.

96. Нека $a,b \in \mathbb{Z}$. Докажи, дека

$$\mathrm{NZD}(a,b)=\mathrm{NZD}(a+b,\mathrm{NZS}(a,b)).$$

97. Определи ги сите парови природни броеви $(m,n), m>n$ такви што
$$\mathrm{NZS}(m^2+mn, mn-n^2)+\mathrm{NZS}(m-n, mn)=2^{2005}. \qquad (1)$$

98. Нека x и y се природни броеви за кои важи: $2x^2+x=3y^2+y$. Докажи, дека броевите $x-y, 2x+2y+1$ и $3x+3y+1$ се точни квадрати на природни броеви.

99. Докажи, дека секој природен број n може еднозначно да се претстави во облик $n=k^2m$, каде k и m се природни броеви и m не се дели со квадрат на природен број $p>1$.

100. Определи ги сите парови (a_n, a_{n+1}) од последователни членови на низата $a_n=2^n+49,\ n=1,2,...$ за кои $a_n=pq, a_{n+1}=rs$, каде p,q,r,s се прости броеви такви што $p<q, r<s$ и $q-p=s-r$.

101. Определи ги сите прости броеви a,b,c такви што
$$ab+bc+ca>abc. \qquad (1)$$

102. Нека a,b,c се ненулти цели броеви, $a\neq c$, такви што
$$\tfrac{a}{c}=\tfrac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$$
Докажи, дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

103. Природните броеви $m\geq 3$ и n се такви што $n>m(m-2)$. Определи го најголемиот природен број d таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k\in\{m,m+1,...,n\}$.

104. За еден природен број ќе велиме дека е *добар*, ако меѓу неговите делители има точно два прости броеви. Дали е можно 18 последователни природни броеви да бидат добри?

105. За природниот број n ќе велиме дека е *убав*, ако секој негов природен делител, зголемен за 1, е делител на бројот $n+1$. Определи ги сите убави природни броеви.

106. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и n не е точен квадрат на природен број. Докажи дека n е прост број ако и само ако на единствен начин може да се претстави како разлика на квадрати на природни броеви.

107. Определи ги сите природни броеви n, за кои $(n-1)!$ не е делив со n^2.

108. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови различни природни броеви m и n такви, што m и n имаат едни и исти прости делители, а исто така и $m+1$ и $n+1$ имаат едни и исти прости делители.

109. Докажи, дека множеството броеви од облик $a_n = n^2 + 1$, $n = 1, 2, ...$ содржи бесконечно многу сложени броеви од облик $a_n = a_k a_l$.

II.2 КОНГРУЕНЦИИ

1. Определи ги сите природни броеви m и n такви што разликата на квадратот на бројот m и производот на n и k е еднаква на 2, каде k е бројот кој се добива со допишување на цифрата 1 од лево на бројот n.

2. Нека p е прост број различен од 3, таков што и бројот $2p+1$ е прост. Докажи, дека бројот $4p+1$ е делив со 3.

3. Докажи дека ако $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{21}$, тогаш $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{441}$.

4. За секој подреден пар природни броеви (m,n) дефинираме операција $m * n = |37^m - 29^n|$.
   а) Дали постои подреден пар (m,n) таков што $m * n = 2014$?
   б) Определи ја најмалата вредност на изразот $m * n$.

5. Определи ги сите цели броеви n за кои постои цел број m таков што $n^2 + n - 1$ е делител и на $14m+5$ и на $20m-3$.

6. Определи ги сите прости броеви p и q и сите природни броеви $k > 1$ за кои броевите $p^k q + 1$ и $pq^k + 1$ се точни квадрати.

7. Докажи, дека за секој природен број n барем еден од броевите $A = 2n-1, B = 5n-1, C = 13n-1$ не е точен квадрат.

8. Дадена е низа $\{x_n\}$ таква што $x_1 \in \{5,7\}$ и $x_{n+1} \in \{5^{x_n}, 7^{x_n}\}$, за $n = 1, 2, \ldots$. Определи ги можните вредности на последните две цифри на x_{2009}.

9. Ако p е прост број, тогаш $p \,|\, \underbrace{11...1}_{p}\underbrace{22...2}_{p}...\underbrace{99...9}_{p} - 123456789$. Докажи!

10. Нека k е природен број и m е цел непарен број. Докажи, дека постои природен број n таков што бројот 2^k е делител на $n^n - m$.

11. За природниот број n ќе велиме дека е *специјален* ако ако постојат природни броеви a,b,c и d такви што $n = \frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$.

    а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.
    б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.

12. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $a\,|\,b^2, b\,|\,a^2$ и $a+1\,|\,b^2+1$.

13. Нека a,b,c се различни цифри. Докажи, дека $\overline{ab}\cdot\overline{bc}\cdot\overline{ca} \neq \overline{ba}\cdot\overline{ac}\cdot\overline{cb}$.

14. Докажи, дека бројот $2^n + 3^n$ не е точен куб на ниту еден природен број n.

15. Дали може броевите $1^1, 2^2, 3^3, ..., 2007^{2007}, 2008^{2008}$ да се распоредат во низа така што кога добиениот запис ќе го набљудуваме како еден број тој број да биде точен квадрат на природен број.

16. Определи ги сите природни броеви n такви што $5^n + 12^n$ е точен квадрат.

17. Докажи, дека не постојат цели броеви x и y такви што

$$x^5 + y^5 + 1 = (x+2)^5 + (y-3)^5. \qquad (1)$$

18. Нека $a,b \in \mathbb{N}$. Докажи, дека

$$(a+\tfrac{1}{2})^n + (b+\tfrac{1}{2})^n$$

    е природен број за само конечно многу природни броеви n.

19. Определи го најмалиот природен број M за кој бројот 2012 може да се запише како збир на кубови на M цели броеви.

20. Нека a е природен број и p е прост број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $a^{p^n} + p^n$ има барем два различни прости делители.

21. Нека k е природен број. Докажи, дека бројот $2^{2k-1} + 2^k - 1$ не е делив со 7.

22. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите
$$a_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2},\ n = 0,1,2,3,\dots .$$

23. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $19 \cdot 8^n + 17$ е сложен.

24. а) Определи ги сите природни броеви n, такви што $7 \mid (2^n - 1)$.

б) Докажи дека $7 \nmid (2^n + 1)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

25. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $n > m \geq 1$ и последните три цифри на бројот 1978^m се еднакви, соодветно, на последните три цифри на бројот 1978^n (во декаден запис).
Определи ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

26. а) Докажи дека постои природен број кој е делив со 2005 и чиј збир на цифри е еднаков на 2.
б) Нека x_n е природниот број кој се добива со последователно запишување на природните броеви од 1 до n (на пример, $x_1 = 1$, $x_2 = 12, x_3 = 123, x_4 = 1234, \dots, x_{12} = 123456789101112, \dots$). Докажи дека во низата $x_n, n \geq 1$ постојат бесконечно многу членови кои се деливи со 2005.

27. Нека n и p се природни броеви такви што $n > 1$ и p е прост број поголем од n. Ако $n \mid p-1$ и $p \mid n^3 - 1$, докажи дека $4p - 3$ е точен квадрат.

28. Определи го најголемиот природен број, кој е делител на $p^4 - 1$ за секој прост број $p > 3$.

II.3 ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $2x^3 + xy - 7 = 0$.

2. Определи ги сите цели броеви x такви што $x^2 + 3x + 24$ е точен квадрат.

3. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$1!+2!+3!+...+n!=y^2.$$

4. Докажи дека равенката
$$x_1+x_2+...+x_n=x_1x_2...x_n \quad (1)$$
има барем едно решение во множеството $\mathbb{N}$.

5. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.

6. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката
$$2x^2-y^{14}=1.$$

7. Определи ги целите броеви x и y такви што $x^2y=y^3+10$.

8. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $x^3-y^3=xy+61$.

9. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката
$$(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3+(x+4)^3=(x+10)^3.$$

10. Докажи, дека третиот степен на најголемиот од три последователни природни броеви е различен од збирот на третите степени на другите два броја.

11. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $y^2+5x^2=6$

12. Докажи дека равенката $x^2+(x+1)^2=y^2$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

13. Докажи дека равенката $(x+1)^3-x^3=y^2$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

14. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{Z}$ равенката $x^2+y^2-z^2=n$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$, за кои важи $x,y,z>1$.

15. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката
$$1+x+x^2+x^3+x^4=y^4. \quad (1)$$

16. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката
$$x^2+y^2=3(u^2+v^2).$$

17. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)\,.$$

18. Дадена е равенката $x^3-3xy^2+y^3=n$. Ако n е таков природен број, што дадената равенка има целобројно решение (x,y) докажи дека таа има барем три целобројни решенија. Докажи, дека за $n=2891$ оваа равенка нема ниту едно целобројно решение.

19. Докажи, дека равенката $x^{12}-11y^{12}+3z^{12}-8t^{12}=1971^{1970}$ нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

20. Докажи, дека равенката
$$4xy-x-y=z^2$$
нема решение во множеството $\mathbb{N}$, а има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

21. Докажи, дека равенката
$$x^2-2y^2+8z=3$$
нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

22. Докажи, дека равенката $x^2-y^3=7$ нема решенија во множеството $\mathbb{Z}$

23. Нека c е непарен природен број. Докажи, дека равенката
$$x^2-y^3=(2c)^3-1$$
нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

24. Докажи дека равенката $x^2+y^2=3^k$, нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

25. Докажи, дека постојат само конечен број тројки природни броеви (a,b,c) такви што $abc=2009(a+b+c)$.

26. Определи ги сите природни броеви m и n такви тшо
$$(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3\,. \qquad (1)$$

27. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$(x+y)^2(x^2+y^2)=2009\,.$$

28. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (x,y,z) такви што
$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=1\,.$$

29. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2=0\,.$$

30. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3+y^3=x^2+42xy+y^2.$$

31. Дали постои правоаголен триаголник чии должини на катетите се природни броеви, а неговата хипотенуза има должина 2016^{2017}. Одговорот да се образложи!

32. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3-y^3=999\,. \qquad (1)$$

33. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$z^2+1=xy(xy+2y-2x-4)\,.$$

34. Определи го најмалиот природен број n за кој постојат природни броеви a,b и c, ниту еден од кои не е точен квадрат и такви што

$$a^3+b^3+c^3-3abc=2013^n\,.$$

35. Дадени се два заемно прости природни броја m и n. Докажи, дека равенката $x^m u^n+y^m v^n=z^m w^n$ има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.

36. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3=(x-y)(3xy+1)\,.$$

37. Определи ги сите решенија на равенката

$$p-x^4=4$$

каде p е прост број, а x е цел број.

38. Нека p е прост број. Определи ги сите цели броеви x и y такви што

$$(2x+y)^3=p^2x(x+y)^2\,.$$

39. Нека $a,b\in\mathbb{Z}$ и $k\in\mathbb{N}$. Докажи, дека ако равенката $a^kx-b^ky=a-b$ има решение подреден пар (x,y) од последователни цели броеви, тогаш $|a-b|$ е точен $k-$ти степен.

40. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 = 2017^2 .$$

41. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството

$$a^3 + 4a = b^2 .$$

Докажи, дека бројот a е од видот $2t^2, t \in \mathbb{N}$.

42. Определи природен број n за кој постои цел број x таков што

$$499 \cdot (1997^n + 1) = x^2 + x .$$

43. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 3(x + y + z + u) .$$

44. Определи го најмалиот природен број k за кој равенката

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = 2007$$

има решение во множеството природни броеви.

45. Даден е природен број n . Определи ги сите подредени четворки цели броеви (x_1, x_2, x_3, x_4) такви што

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4^n .$$

46. Во множеството цели броеви, реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 2016^3 - 1 .$$

47. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 1599 .$$

48. Докажи, дека равенката $x^2 + 2y^2 + 98z^2 = \underbrace{77...7}_{2005}$ нема решенија во множеството цели броеви.

49. Докажи, дека ако a, b и c се цели броеви такви што бројот

$$\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$$

е точен квадрат на цел број, тогаш $a = b = c$.

50. Дадена е равенката $|x^2 - yz| + |y^2 - zx| + |z^2 - xy| = n$, каде x, y, z се цели и n е природен број.

а) Докажи дека равенката има решение за секој непарен природен број n .

б) Определи ги сите природни броеви m за кои равенката нема решение за $n=2^m$.

51. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $7p+1$ е квадрат на природен број.

52. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2-3p-1$ е точен куб на природен број.

53. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $p|30q-1$ и $q|30p-1$.

54. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^3-q^7=p-q.$$

55. Определи ги сите природни броеви a, b и c, за кои е исполнето равенството $a!b!=a!+b!+c!$.

56. Определи ги сите прости броеви p и q такви што
$$(2p-q)^2=17p-10q.$$

57. Определи ги сите парови прости броеви p и q такви што
$$p^6-q^9=p^3q^3+1.$$

58. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^3-q^5=(p+q)^2.$$

59. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1.$$

60. Определи го најмалиот прост број p за кој равенката
$$p(31x^2-x+24)=6y^3$$
нема решение во множеството цели броеви.

61. Докажи, дека равенката $m^2=n^5-4$ нема решенија во множеството цели броеви.

62. Определи ги сите природни броеви x, y и n, за кои е точно равенството

$$x^2+8xy+2x+12y^2-3=p^n,$$

каде p е прост број.

63. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{x^2+y^2}{z!}=\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}.$$

64. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x+y^2+(\mathrm{NZD}(x,y))^2=xy\cdot\mathrm{NZD}(x,y). \qquad (1)$$

65. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$(p+q)^p=(q-p)^{2q-1}. \qquad (1)$$

66. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^4+1=6^z.$$

67. Во множеството цели ненегативни броеви реши ја равенката

$$7^x-2\cdot 5^y=-1.$$

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3^x-5^y=z^2.$$

69. Во множеството природни броеви решија равенката

$$n^3-3^m=2015.$$

70. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3-5x+28=2^y(2^y+1).$$

71. За природните броеви M и n е познато дека бројот M е делив со сите природни броеви од 1 до n, но не е делив со $n+1, n+2$ и $n+3$. Определи ги сите можни вредности на n.

72. Определи ги сите природни броеви a,b,c такви што

$$a+b+c=15$$
$$(a-3)^2+(b-5)^2+(c-7)^2=540.$$

73. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2^x3^y+5^z=7^t. \qquad (1)$$

74. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$2^a \cdot 3^b + 9 = c^2 .$$

75. Во множеството цели ненегативни броеви реши ја равенката

$$9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y .$$

76. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$7^a = 4^b + 5^c + 6^d .$$

77. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $x^{5-x} = (6-x)^{1-x}$.

78. Определи ги сите природни броеви n , за кои бројот $2^n + 65$ е точен квадрат на природен број.

79. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x^y - 2^z = 1$.

80. Најди ги сите цели броеви x, y, z такви, што $x^2(x^2 + y) = y^{z+1}$.

81. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $2^x + 2^y + 2^z = 2336$.

82. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$2^a + 8b^2 - 3^c = 283.$$

83. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$3^y = 2^x + 5. \qquad (1)$$

84. Во множество ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z .$$

85. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$3^{2a+1}b^2 + 1 = 2^c .$$

86. Да се најдат сите парови природни броеви (m, n) такви што

$$m^n - n^m = 3.$$

87. Нека m и n се заемно прости природни броеви. Докажи, дека равенката $x^m u^n + y^m v^n = z^m w^n$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

88. Определи ги сите природни броеви x, y, z такви што

$$x > y + 1,\ \ y > z + 1 \text{ и } \tfrac{1}{x+1} + \tfrac{2}{y+2} + \tfrac{3}{z+3} = 1.$$

89. Докажи, дека равенката

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{p},\ p\in\mathbb{N}$$

има единствено решение во множеството $\mathbb{N}$ ако и само ако p е прост број.

90. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека ако равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{n}$$

има решение по x и y во множеството $\mathbb{N}$, тогаш n има барем еден делител од облик $4k-1, k\in\mathbb{N}$.

91. За кои природни броеви m равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=m, \qquad (1)$$

во множеството $\mathbb{Z}$ има има решение (x,y,z) такво што броевите x,y и z се по парови заемно прости.

92. Докажи, дека равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1 \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

93. Докажи, дека за $m=1$ и $m=3$ равенката

$$x^3+y^3+z^3=mxyz \qquad (1)$$

нема решенија во множеството $\mathbb{N}$ и определи ги сите нејзини решенија за $m=3$.

94. Докажи, дека равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{z}{x} \qquad (1)$$

нема решенија во множеството $\mathbb{N}$ ако и само ако равенката

$$u^3+v^3=w^3 \qquad (2)$$

нема решенија во множеството $\mathbb{N}$.

95. Докажи, дека равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=1 \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$, но има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

II.4 МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. Определи ги сите прости броеви p такви што $p\,|\,2^p+1$.

2. Најди го остатокот од делењето на бројот $(85^{74}+19^{99})^{16}$ со 13.

3. Ако a е цел број таков што $\mathrm{NZD}(a,35)=1$, тогаш бројот
$$A=(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$
се дели со 35. Докажи!

4. Ако a е цел број кој не се дели со 3, тогаш $a^{13}-a\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^{13}-2)$. Докажи!

5. Ако $11\nmid \mathrm{NZD}(m,n)$, тогаш броевите $m^5\pm 2n^5$ не се делат со 11. Докажи!

6. Докажи дека секој прост број p е делител на бесконечно многу броеви од видот 2^n-n.

7. Докажи го или негирај го тврдењето: За секој природен број $n\geq 2$ остатокот при делењето на 2^{2^n} со 2^n-1 е степен на бројот 4.

8. Определи ги сите прости броеви p такви што
$$13\,|\,(2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5).$$

9. Нека $x,y\in\mathbb{Z}$. Докажи, дека $\frac{4x^2+1}{y^2+2}\notin\mathbb{Z}$.

10. Докажи, дека бројот $2^n+3^n+5^n+6^n$ не е точен куб за ниту еден природен број n.

11. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството $\{n,n+1,$ $n+2,n+3,n+4,n+5\}$ може да се подели на две дисјунктни подмножества такви што производите на елементите во двете подмножества се еднакви.

12. Определи ги сите различни прости броеви p, q и r такви што
$$3p^4-5q^4-4r^2=26. \qquad (1)$$

13. Нека n е непарен природен број поголем од 1. Докажи, дека бројот 3^n+1 не е делив со n.

14. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (a,b,c) такви што бројот

$$N=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$$

е степен на бројот 2016.

15. Определи го најмалиот природен број n за кој равенката

$$2x^2+2xy+5y^2=2015n$$

има решение во множеството цели броеви.

16. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$x^y-y^x=xy^2-19 .$$

17. Нека p е прост број. Докажи, дека $7p+3^p-4$ не е точен квадрат.

18. Докажи, дека равенката

$$x^{2006}-4y^{2006}-2006=4y^{2007}+2007y$$

нема решенија во множеството природни броеви.

19. Нека се $p_1<p_2<...<p_{31}$ прости броеви. Докажи, дека ако

$$30\,|\,(p_1^4+p_2^4+...+p_{31}^4),$$

тогаш меѓу овие броеви има барем три последователни прости броеви.

20. Определи ги сите прости броеви p за кои $p\,|\,(7^p+13)$.

21. Нека p е прост број и $p=4k+3, k\in\mathbf{N}$. Ако m и n се цели броеви такви што m^2+n^2 се дели со p, тогаш m и n се делат со p. Докажи!

22. Нека p е прост број и $p=4k+1, k\geq 1$ е природен број. Докажи, дека важи $k^{2k}\equiv 1(\text{mod } p)$.

23. Определи ги сите прости броеви p, за кои постои природен број n таков да p е делител на 2^n+1 и p е помал од сите прости делители на n.

24. Докажи, дека за секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}}+19$ е сложен.

25. Ако p е прост број, тогаш $7p+3^p-4$ не е точен квадрат. Докажи!

26. Докажи, дека меѓу броевите $(2^{2n}+1)^2+2^2$, каде $n=1,2,...$ има бесконечно многу сложени броеви.

27. Докажи, дека од $5|(2a^3-3a^2b+2b^3)$ следува дека $5|a$ и $5|b$.

28. Да се определи петцифрен природен број n таков што збирот на неговите цифри е минимален и n^3-1 се дели со 2556.

29. Докажи, дека за секој природен број k постојат бесконечно многу природни броеви n, за кои броевите

$$2^n+3^n-1, 2^n+3^n-2,..., 2^n+3^n-k$$

се сложени.

30. Докажи го или оповргни го следново тврдење: За секој природен број $n\geq 2$ остатокот при делењето на 2^{2^n} со 2^n-1 е степен на 4.

31. Низата $a_1,a_2,...$ е определена со

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1, \quad (n=1,2,...).$$

Определи ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

32. Докажи, дека равенката $x^2+5=y^3$ нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

33. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$x^y-y^x=xy^2-19 .$$

II.5 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Множество од последователни природни броеви содржи точно 10 четврти степени и точно 100 кубови на природни броеви. Докажи, дека ова множество содржи барем 2000 точни квадрати на природни броеви.

2. Определи ги сите цифри a ($0 \le a \le 9$), за кои постои таков природен број n, што последните 2011 цифри на бројот $3^n - 1$ се еднакви на a.

3. На таблата се запишани природните броеви од 1 до 10. Избираме два од запишаните броеви x и y, ги бришиме и на нивно место го запишуваме бројот $\varphi(x+y)$, каде φ е функцијата на Ојлер (т.е. $\varphi(k)$ е бројот на природните броеви, помали или еднакви на k, кои се заемно прости с k; на пример, ако p е прост број, тогаш $\varphi(p) = p-1$). Опишаната операција ја реализираме, додека на таблата не остане еден број. Определи ја можната најмала вредност на последниот број.

4. За секој реален број x со $[x]$ го означуваме најголемиот цел број, кој е помал или еднаков на x. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот
$$[\frac{p^2+1}{2}]+[\frac{p^2+2}{3}]+[\frac{p^2+7}{8}]+[\frac{p^2+18}{24}]$$
е прост.

5. На таблата се запишани n природни броеви. Може да се допишуваат само броеви од видот $\frac{a+b}{a-b}$, каде a и b се веќе запишани броеви. Определи го најмалиот природен број n така што додавајќи броеви на погоре опишаниот начин може да се добие било кој природен број. За вака определениот број n определи ги почетните броеви (испитај ги сите можности).

6. За еден природен број ќе велиме дека е *силен*, ако е делив со квадратот на секој свој прост делител (за бројот 1 ќе сметаме дека е силен). Бројот на силните делители на еден број ќе го нарекуваме *сила* на тој број. Колку последователни природни броеви најмногу можеме да избереме така што ниту еден од нив да нема сила која е делива со
а) 2, б) 3 и в) 2015?

7. Докажи, дека сите сложени броеви помали или еднакви на 10^6 може да бидат наредени на кружница така што да нема соседни броеви кои се заемно прости.

8. На почетокот на таблата се запишани 10 последователни природни броеви. Во еден чекор се произволно се избираат два броја (да ги означиме со a и b) и на нивно место се запишуваат броевите

$a^2 - 2011b^2$ и ab. После неколку чекори на таблата не останал ниту еден од почетните броеви. Дали е можно новодобиените 10 броеви да се последователни 10 природни броеви (запишани во некаков редослед)?

9. Определи ги сите прости броеви p, за кои равенката
$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p.$$
има решение во множеството природни броеви.

10. Определи ги сите броеви p, q и r, такви што p и r се прости броеви, q е природен број и важи
$$(p+q+r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2.$$

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1 ТРАНСФОРМАЦИИ, ИДЕНТИТЕТИ И ФУНКЦИИ

1. Во низа се запишани броевите од 1 до 9 така што збирот на секој број на непарна позиција со неговите соседи (сосед) е еднаков на S. Определи ги сите можни вредности на S.

Решение. Ако редоследот на запишаните броеви е a,b,c,d,e,f,g,h,i, тогаш од условот следува дека $5S=45+b+d+f+h$. Бидејќи $10\le b+d+f+h\le 30$, добиваме дека S е еден од броевите 11, 12, 13, 14, 15. Од друга страна,

$$3S=a+b+d+e+f+h+i=45-(c+g),$$

од каде следува дека $S\neq 15$.

Лесно се гледа дека при подредувањето 925461738 важи $S=11$, при подредувањето 941832567 важи $S=13$ и при подредувањето 592347168 важи $S=14$.

Да претпоставиме дека $S=12$. Тогаш $c+g=9$. Ако низата a,b,c,d,e,f,g,h,i ја запишеме во обратен редослед, таа го има истото својство, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $c<g$. Ќе ги разгледаме сите можности.

1) Ако $c=1, g=8$, тогаш $f+h=4$, што не е можно.
2) Ако $c=2, g=7$, тогаш $f+h=5$, т.е. $\{f,h\}=\{1,4\}$. Ако $h=1$, тогаш $i=11$, што не е можно. Ако $f=1, h=4$, тогаш $i=8$, $b+d=10$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 10.
3) Ако $c=3, g=6$, тогаш $f+h=6$, т.е. $\{f,h\}=\{1,5\}$ или $\{2,4\}$. Ако $h\le 2$, тогаш $i\ge 10$, што е противречност. Ако $f=1, h=5$, тогаш $i=7$, $b+d=9$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 9. Ако $f=2, h=4$, тогаш $i=8, b+d=9$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 9.
4) Ако $c=4, g=5$, тогаш $f+h=7$, т.е. $\{f,h\}=\{1,6\}$. Ако $h=1$, тогаш $i=11$, што не е можно. Ако $h=6$, тогаш $i=6$, што повторно е

противречност.

Конечно, бараните вредности се $S=11, S=13$ и $S=14$.

2. Четворица играчи A_1, A_2, A_3 и A_4 со седум коцки за не лути се човече ја играат следнава игра: A_1 ги фрла седумте коцки и потоа на секој од останатите тројца играчи му исплаќа $k-$ти дел од сумата која тој играч ја има во моментот, каде k е збирот на паднатите броеви на седумте коцки, потоа истото го прават играчите A_2, A_3 и A_4. На почетокот сите имале еднакви суми пари, а откако сите ги фрлиле коцките по еднаш, се покажало дека сумите кои ги имаат играчите се однесуваат како $3:3:2:2$ (сумата на A_1 спрема сумата на A_2 спрема сумата на A_3 спрема сумата на A_4). Определи го збирот на паднатите броеви на секој играч.

Решение. Нека $S_k^{(m)}$ се парите на $k-$тиот играч, $k=1,2,3,4$, после фрлањето и плаќањето на $m-$тиот играч. Нека збирот на паднатите броеви на A_i е еднаков на a_i, $i=1,2,3,4$. Од правилата на играта следува, дека

$$S_k^{(m)} = S_k^{(m-1)} + \frac{1}{a_m} S_k^{(m-1)} = S_k^{(m-1)} \frac{1+a_m}{a_m}, \qquad (1)$$

за $k \neq m$ (т.е. кога A_k добива пари) и

$$\begin{aligned} S_k^{(k)} &= S_k^{(k-1)} - \frac{1}{a_k} \sum_{i \neq k} S_i^{(k-1)} = S_k^{(k-1)} - \frac{1}{a_k}(4S - S_k^{(k-1)}) \\ &= S_k^{(k-1)} \frac{1+a_k}{a_k} - \frac{4S}{a_k}, \end{aligned} \qquad (2)$$

кога A_k дава пари.

Со помош на (1) и (2) ги определуваме сумите кои четирите играчи ги имаат на крајот на играта. Имаме

$$\frac{6S}{5} = S_1^{(4)} = PS - \frac{4S(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

$$\frac{6S}{5} = S_2^{(4)} = PS - \frac{4S(1+a_3)(1+a_4)}{a_2 a_3 a_4}$$

$$\frac{4S}{5} = S_3^{(4)} = PS - \frac{4S(1+a_4)}{a_3 a_4}$$

$$\frac{4S}{5} = S_4^{(4)} = PS - \frac{4S}{a_4}$$

каде $P = \frac{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{a_1 a_2 a_3 a_4}$. Од првата и втората равенка добиваме

$a_2 = a_1 - 1$, а од третата и четвртата равенка добиваме $a_4 = a_3 - 1$. Сега од втората и третата равенка следува

$$\tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{a_4} - \tfrac{4(1+a_3)}{a_2 a_4}, \text{ т.е. } a_2 a_4 = 10(a_2 - a_4 - 2).$$

Од последната равенка следува дека $a_4 < 10$ (во спротивно левата страна е поголема од десната). Освен тоа, $a_4 \geq 7$ (имаме седум коцки, па збирот на паднатите броеви е најмалку 7). Сега лесно се определува дека единствена можност е $a_4 = 7, a_3 = 8, a_2 = 30, a_1 = 31$.

3. Ако a,b,c се реални броеви такви што

$$a+b+c=0 \text{ и } a^4+b^4+c^4=50, \qquad (1)$$

пресметај ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

Решение. Од $a+b+c=0$ следува $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$. Ако го квадрираме последното равенство добиваме

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)),$$

од каде следува

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8abc(a+b+c)) \\ &= 2(ab+bc+ca)^2-4abc(a+b+c)+8abc(a+b+c) \\ &= 2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c). \end{aligned}$$

Од последното равенство, ако ги искористиме условите следува

$$50 = 2(ab+bc+ca)^2, \text{ т.е. } (ab+bc+ca)^2 = 25.$$

Конечно, ако искористиме дека

$$ab+bc+ca = -\tfrac{a^2+b^2+c^2}{2} < 0,$$

од последното равенство добиваме $ab+bc+ca=-5$.

4. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои постојат реални броево x и y такви што

$$a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0, c^3+cx+y=0.$$

Докажи, дека $a+b+c=0$.

Решение. Ако од првото равенство го одземеме второто добиваме

$$0 = a^3+ax+y-b^3-bx-y = a^3-b^3+x(a-b) = (a-b)(a^2+ab+b^2+x),$$

па бидејќи $a \neq b$, добиваме дека важи $a^2+ab+b^2+x=0$. Аналогно, ако од првото равенство го одземеме третото равенство добиваме

$a^2+ac+c^2+x=0$. Сега, со одземање на последните две равенства наоѓаме

$$0=ab+b^2-ac-c^2=(b-c)(b+c)+a(b-c)=(b-c)(a+b+c).$$

Конечно, бидејќи $b\neq c$, од последното равенство следува

$$a+b+c=0.$$

5. Нека n е природен број. Природните броеви a,b,c,d се помали или еднакви на n, при што d е најголемиот меѓу нив и важи

$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)=(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2. \qquad (1)$$

Докажи, дека $d=a+b+c$.

Решение. а) Со непосредна проверка се добива дека за $a+b+c=d$ е исполнет условот (1). Нека претпоставиме дека $a+b+c>d$. Тогаш

$$d(a+b+c)>d^2$$
$$ab+cd>d^2-ad-bd+ab$$
$$ab+cd>(d-a)(d-b).$$

Аналогно добиваме дека

$$bc+ad>(d-b)(d-c) \text{ и } ac+bd>(d-a)(d-c).$$

Ако ги помножиме последните три неравенства добиваме дека

$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)>(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2,$$

што проптивречи на (1). Аналогно, ако претпоставиме дека $a+b+c<d$, повторно добиваме противречност на (1). Според тоа, $a+b+c=d$.

6. Разложи го на множители изразот

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

Решение. Забележуваме дека важи

$$(a+2b-3c)+(b+2c-3a)+(c+2a-3b)=0.$$

Нека x,y и z се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Тогаш

$$-z^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$$
$$=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+y^3-3xyz$$

па затоа точно е равенство

$$x^3+y^3+z^3=3xyz. \qquad (1)$$

Конечно, ако во (1) ставиме

$x=a+2b-3c,\ \ y=b+2c-3a,\ \ z=c+2a-3b$, добиваме дека

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3=$$
$$=3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b).$$

7. За реалните броеви a,b,c и d важи

$$a+b+c+d=0$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3=0.$$

Докажи, дека збирот на некои два од овие броеви е еднаков на 0.

Решение. Од $a+b+c+d=0$ следува дека $a+b+c=-d$. Ако последното равенство го степенуваме на трета добиваме

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3=-d^3.$$

Оттука и од вториот услов слеува

$$3a^2b+3ab^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2=0$$
$$3ab(a+b)+3ac(a+b)+3bc(a+b)+3c^2(a+b)=0$$
$$3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=0$$
$$3(a+b)(a(b+c)+c(b+c))=0$$
$$3(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Конечно, од последното равенство следува дека еден од множителите $a+b,b+c,c+a$ мора да е еднаков на нула.

8. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што

$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$400=20^2=(a+b+c+d)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+300,$$

па затоа $a^2+b^2+c^2+d^2=100$. Според тоа,

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=$$
$$=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$=3\cdot 100-2\cdot 150=0.$$

Оттука следува дека $a=b=c=d$ и како $a+b+c+d=20$, добиваме $a=b=c=d=5$.

Втор начин. Како и во првиот начин добиваме дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2=100.$$

Ако искористиме дека $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$, за секои $x,y \in \mathbb{R}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$, добиваме

$$150=ab+ac+ad+bc+bd+cd \le \tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)=150,$$

па затоа $a=b=c=d=5$.

9. Нека n е природен број, $A=\underbrace{44...44}_{2n}$ и $B=\underbrace{88...88}_{n}$. Докажи, дека бројот $A+2B+4$ е точен квадрат.

Решение. Имаме

$$A=\underbrace{44...44}_{2n}=4\cdot\underbrace{11...11}_{2n}=\tfrac{4}{9}\cdot\underbrace{99...99}_{2n}=\tfrac{4}{9}(10^{2n}-1).$$

Аналогно, $B=\frac{8}{9}(10^n-1)$. Според тоа,

$$A+2B+4=\tfrac{4}{9}(10^{2n}-1)+\tfrac{16}{9}(10^n-1)+4=\tfrac{4\cdot10^{2n}-4+16\cdot10^n-16+36}{9}$$

$$=\tfrac{(2\cdot10^n)^2+2\cdot2\cdot10^n\cdot4+4^2}{9}=(\tfrac{2\cdot10^n+4}{3})^2.$$

Збирот на цифрите на бројот $2\cdot10^n+4$ е 6, па затоа тој се дели со 3, што значи дека $\frac{2\cdot10^n+4}{3}$ е орироден број, со што тврдењето на задачата е докажано.

10. Даден е 2013-аголник $A_1A_2...A_{2013}$. Неговите темиња се означени со броеви, така што збирот на броевите со кои се означени било кои 9 последователни темиња е константен и е еднаков на 300. Ако е познато дека темето A_{13} е означено со бројот 13, а темето A_{20} со бројот 20, да се определи со кој број е означено темето A_{2013}.

Решение. Нека е a_i бројот со кој е означено темето A_i, $i=1,2,...,2015$. Од условот на задачата следува дека

$$a_1+a_2+...+a_9=a_2+a_3+...+a_9+a_{10},$$

па затоа $a_1=a_{10}$. Слично се добива дека $a_2=a_{11}, a_3=a_{12},...$. Според тоа,

$$a_1=a_{10}=a_{19}=...=a_{2008}=a_4=a_{13}=...=a_{2011}=a_7=a_{16}=...=a_{2005}=a_1$$
$$a_2=a_{11}=a_{20}=...=a_{2009}=a_5=a_{14}=...=a_{2012}=a_8=a_{17}=...=a_{2006}=a_2$$
$$a_3=a_{12}=a_{21}=...=a_{2010}=a_6=a_{15}=...=a_{2013}=a_9=a_{18}=...=a_{2007}=a_3.$$

Според тоа, секои три последователни броеви се еднакви, па затоа нивниот збир е еднаков на $300:3=100$. Но, $a_1=a_{13}=13, a_2=a_{20}=20$, па затоа $a_3=67$. Конечно, $a_{2013}=a_3=67$.

11. За секој подреден пар природни броеви (m,n) дефинираме операција

$$m*n=|37^m-29^n|.$$

а) Дали постои подреден пар (m,n) таков што $m*n=2014$?

б) Определи ја најмалата вредност на изразот $m*n$.

Решение. а) Бидејќи секој од броевите 37^m и 29^n при делење со 4 дава оистаток 1, следува дека $m*n$ е делив со 4. Но, 2014 не е делив со 4, па затоа не постои подреден пар (m,n) таков што $m*n=2014$.

б) Јасно, $m*n>0$. Од а) следува дека 4 е делител на $m*n$. За $m=n=1$ добиваме $m*n=8$. Ќе докажеме дека тоа е најмалата вредност, со тоа што ќе докажеме дека $m*n\neq 4$.

Ако $37^m-29^n=4$, тогаш $37^m-4=29^n$. Левата страна на последното равенство се дели со 3, а десната не се дели со 3, па затоа $m*n=37^m-29^n\neq 4$.

Ако $37^m-29^n=-4$, тогаш $29^n-37^m=4$. Цифрата на единиците на 29^n-37^m може да е 4, само ако цифрата на единиците на 29^n е 1, а на 37^m е 7, т.е. $n=2k$. Но, тогаш

$$37^m=29^n-4=(29^k-2)(29^k+2),$$

бидејќи множителите на десната страна се заемно прости броеви поголеми од 1, а 37 е прост број.

12. Дадени се броевите 1, 3, 5, 7 и 9. Нови пет броеви добиваме така што произволни четири броја a,b,c,d од претходната петорка ги заменуваме со броевите $\frac{a+b+c-d}{2}, \frac{a+b-c+d}{2}, \frac{a-b+c+d}{2}, \frac{-a+b+c+d}{2}$, а петтиот број останува непроменет. Дали со повеќекратно повторување на оваа постапка може да се добијат следниве пет брови:

а) 0, 2 , 4, 6, 8,

б) 3, 4, 5, 6, 7?

Решение. а) При замена на броевите со наведената трансформација имаме:

$$\frac{a+b+c-d}{2}+\frac{a+b-c+d}{2}+\frac{a-b+c+d}{2}+\frac{-a+b+c+d}{2}+e=a+b+c+d+e,$$

што значи дека збирот на броевите на почетните пет броја не се менува. Од друга страна $1+3+5+7+9=25\neq 20=0+2+4+6+8$, па затоа со наведените трансформации не може да се добие петорката 0, 2, 4, 6, 8.

б) Во случајов имаме исти збирови на почетните пет броеви и на броевите кои сакаме да ги добиеме, па зне можеме да заклучуваме како под а). Меѓутоа, може да се покаже дека

$$(\tfrac{a+b+c-d}{2})^2+(\tfrac{a+b-c+d}{2})^2+(\tfrac{a-b+c+d}{2})^2+(\tfrac{-a+b+c+d}{2})^2+e^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

што значи дека при замена на броевите со наведената трансформација збирот на квадратите на броевите не се менува. Од друга страна

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+7^2+9^2 &=1+9+25+49+81=165\neq 139\\ &=9+16+25+36+49=3^2+4^2+5^2+6^2+7^2,\end{aligned}$$

па затоа со наведените трансформации не може да се добие петорката 3, 4, 5, 6, 7.

13. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

Решение. Ако меѓу броевите a,b,c има два негативни, на пример a и b, тогаш $2b-\frac{1}{c}<0$ и тврдењето е тривијално. Затоа, можеме да претпоставиме дека $a,b,c>0$.

Нека претпоставиме дека

$$2a-\tfrac{1}{b}>1, 2b-\tfrac{1}{c}>1, 2c-\tfrac{1}{a}>1.$$

Ги воведуваме смените $a=\frac{y}{z}, b=\frac{z}{x}, c=\frac{x}{y}$ и тогаш претходните неравенства се еквивалентни со неравенствата

$$2y>z+x, 2z>x+y, 2x>y+z.$$

Последните две неравенства ги собираме и го добиваме неравенството

$$2x+2y+2z>2x+2y+2z,$$

што е противречност. Од добиената проитврречност следува дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

14. Нека a,b,c се реални броеви такви што

$$\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0.$$

Докажи, дека

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0\,.$$

Решение. Од условот на задачата следува

$$\frac{1}{bc-a^2}=-\left(\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}\right)=-\frac{ca-b^2+ab-c^2}{(ca-b^2)(ab-c^2)}\,.$$

Оттука следува

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}=\frac{a}{bc-a^2}\cdot\frac{b^2+c^2-ca-ab}{(ca-b^2)(ab-c^2)}=\frac{b^2a+c^2a-a^2b-a^2c}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)}\,.$$

Аналогно се добива дека

$$\frac{b}{(ca-b^2)^2}=\frac{c^2b+a^2b-b^2c-b^2a}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)} \text{ и } \frac{c}{(ab-c^2)^2}=\frac{a^2c+b^2c-c^2a-c^2b}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)}\,.$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$$\begin{aligned}&\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=\\&\quad=\frac{b^2a+c^2a-a^2b-a^2c+c^2b+a^2b-b^2c-b^2a+a^2c+b^2c-c^2a-c^2b}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)}=0\,.\end{aligned}$$

15. Определи ја вредноста на изразот

$$w=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}\,.$$

Решение. Нека

$$A=(a+b-c)^2,\ B=(c+b-a)^2,\ C=(c+a-b)^2 \text{ и}$$
$$D=(a-b)(b-c)(c-a)\,.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}w&=\frac{A}{(a-c)(b-c)}+\frac{B}{(b-a)(c-a)}+\frac{C}{(c-b)(a-b)}=\frac{-A(a-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D}\\&=\frac{A(a-c+c-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D}=\frac{(b-c)(A-B)+(c-a)(A-C)}{D}\\&=\frac{4b(b-c)(a-c)+4a(c-a)(b-c)}{D}=\frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{D}=4,\end{aligned}$$

бидејќи

$$\begin{aligned}A-B&=(a+b-c)^2-(c+b-a)^2\\&=(a+b-c+c+b-a)(a+b-c-c-b+a)\\&=4b(a-c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-C&=(a+b-c)^2-(c+a-b)^2\\&=(a+b-c+c+a-b)(a+b-c-c-a+b)\\&=4a(b-c).\end{aligned}$$

16. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$. Ако

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=\tfrac{1007}{1008},$$

докажи дека

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=2017.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}&=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(ab)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}\\&=\frac{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3}{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}\\&=\frac{\frac{1007}{1008}-3}{\frac{1007}{1008}-1}=2017.\end{aligned}$$

17. Нека

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1997\cdot 1998} \text{ и } B=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+...+\frac{1}{1998\cdot 1000}.$$

Докажи, дека $\frac{A}{B}$ е природен број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1997\cdot 1998}=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-2}{3\cdot 4}+...+\frac{1998-1997}{1997\cdot 1998}\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1998})\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{999})\\&=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+...+\frac{1}{1998\cdot 1000}\\&=\frac{1}{2998}(\frac{1998+1000}{1000\cdot 1998}+\frac{1997+1001}{1001\cdot 1997}+...+\frac{1000+1998}{1998\cdot 1000})\\&=\frac{1}{2998}(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998})\\&=\frac{2}{2998}(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1996}+...+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1000})\\&=\frac{1}{1499}(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1996}+...+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1000}).\end{aligned}$$

Сега лесно се гледа дека $\frac{A}{B}=1499$ и тоа е природен број.

18. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+...+\frac{2009}{4\cdot 2009^4+1}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}4k^4+1&=4k^4+4k^2+1-4k^2\\&=(2k^2+1)^2-(2k)^2\\&=(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)\\&=(k^2+(k+1)^2)(k^2+(k-1)^2),\end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned}\frac{k}{4k^4+1}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{4k}{4k^4+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k^2+(k-1)^2}-\frac{1}{k^2+(k+1)^2}\right),\end{aligned}$$

Сега добиваме

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+...+\frac{2009}{4\cdot 2009^4+1}=\\&=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{0^2+1^2}-\frac{1}{1^2+2^2}\right)+\left(\frac{1}{1^2+2^2}-\frac{1}{2^2+3^2}\right)+...+\left(\frac{1}{2008^2+2009^2}-\frac{1}{2009^2+2010^2}\right)\right)\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2009^2+2010^2}\right)=\frac{2009^2+2010^2-1}{4(2009^2+2010^2)}.\end{aligned}$$

19. а) Дадени се реални броеви a,b и c такви што $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Докажи, дека $a=b=c$.

б) Определи ја вредноста на изразот $x+y$, ако $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$ и изразот $-4x^2+36y-8$ прима најголема вредност.

Решение. а) Ако $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, тогаш од својствата на пропорциите следува $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$, од каде добиваме $a=b=c$.

б) Од условот

$$\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x},\text{ т.е. }\frac{x}{3y}=\frac{3y}{6x-15y}=\frac{6x-15y}{x},$$

ако го искористиме тврдењето под а) добиваме

$$x=3y=6x-15y.$$

Затоа $x+y=4y$ и

$$-4x^2+36y-8=-36y^2+36y-8=1-(36y^2-36y+9)=1-(6y-3)^2.$$

Јасно последниот израз прима најголема вредност ако и само ако $6y-3=0$, т.е. ако и само ако $y=\frac{1}{2}$. Конечно, $x+y=4y=4\cdot\frac{1}{2}=2$.

20. Докажи, дека за секој природен број $n\geq 5$ постојат природни броеви p и q такви што важи

$$|p^2+2q^2-n|\leq\sqrt[4]{9n}.$$

Решение. Нека q е природниот број за кој важи $2q^2\leq n<2(q+1)^2$. Тогаш

$$n-2q^2<4q+2\leq 4\sqrt{\tfrac{n}{2}}+2=2(\sqrt{2n}+1).$$

Понатаму, нека t е природниот број за кој важи $t^2\leq n-2q^2<(t+1)^2$. За p го земаме бројот t или $t+1$ во зависност од положбата на $n-2q^2$ во однос на средината на интервалот $[t^2,(t+1)^2]$. Ставаме

$$p=\begin{cases}t, & \text{ако } n-2q^2-t^2\leq t\\ t+1, & \text{ако } n-2q^2-t^2>t.\end{cases}$$

Тогаш имаме

$$|p^2+2q^2-n|\leq t\leq\sqrt{n-2q^2}\leq\sqrt{2(2\sqrt{n}+1)}.$$

Останува да забележиме дека $\sqrt{2(2\sqrt{n}+1)}\leq\sqrt[4]{24n}$ за секој $n\geq 5$.

21. Дали постојат ненулти реални броеви $a_1,a_2,...,a_{10}$ за кои

$$(a_1+\tfrac{1}{a_1})(a_2+\tfrac{1}{a_2})....(a_{10}+\tfrac{1}{a_{10}})=(a_1-\tfrac{1}{a_1})(a_2-\tfrac{1}{a_2})....(a_{10}-\tfrac{1}{a_{10}})\ ?$$

Решение. Броевите a_i и $\frac{1}{a_i}$, за $i=1,2,...,10$ се со ист знак, па затоа

$$|a_i+\tfrac{1}{a_i}|=|a_i|+|\tfrac{1}{a_i}|>\max\{|a_i|,|\tfrac{1}{a_i}|\}\geq|a_i-\tfrac{1}{a_i}|,$$

за $i=1,2,...,10$. Ако ги помножиме последните неравенства, добиваме

$$|a_1+\tfrac{1}{a_1}|\cdot|a_2+\tfrac{1}{a_2}|....|a_{10}+\tfrac{1}{a_{10}}|>|a_1-\tfrac{1}{a_1}|\cdot|a_2-\tfrac{1}{a_2}|....|a_{10}-\tfrac{1}{a_{10}}|,$$

што значи дека не постојат броеви $a_1,a_2,...,a_{10}$, кои го задоволуваат бараното равенство.

22. а) Определи ги сите цели броеви x, за кои е исполнето равенството $|x^2-1|+|x^2-4|=3x$.

б) Определи ги сите цели броеви x и a, за кои е исполнето равенството $|x^2-1|+|x^2-4|=ax$.

Решение. а) Од условот следува, дека $x>0$ и даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$(x+1)|x-1|+(x+2)|x-2|=3x.$$

1 *случај*. $x\in(0;1]$. Во овој интервал има само еден цел број $x=1$. Заменуваме и добиваме, дека $x=1$ е решение.

2 *случај*. $x\in(1;2]$. Во овој интервал има само еден цел број $x=2$. Заменуваме и добиваме $(2+1)|2-1|+(2+2)|2-2|=6\neq 3\cdot 1$, што значи дека $x=2$ не е решение.

3 *случај*. $x\in(2;+\infty)$. За целите броеви во овој интервал важи $x\geq 3$, па затоа $2x^2-3x=x(2x-1)\geq 3\cdot 5=15>5$, што значи дека во интервалот $(2;+\infty)$ задачата нема решение. Следствено, единствено решение е $x=1$.

б) От условот следува, дека x и a имаат еднакви знаци и $a\neq 0$. Доволно е да го разгледаме само случајот $a>0$ (и следствено $x>0$), бидејќи случајот $a<0$ е симетричен. Тогаш даденото равенство е еквивалентно на

$$(x+1)|x-1|+(x+2)|x-2|=ax.$$

1 *случај*. $x\in(0;1]$. Во овој интервал има само еден цел број $x=1$. Заменуваме и добиваме, дека $a=3$. Значи, $x=1$ и $a=3$ е решение. Од симетријата добиваме дека $x=-1$ и $a=-3$ исто така е решение.

2 *случај*. $x\in(1;2]$. Во овој интервал има само едно цел број $x=2$. Заменуваме и добиваме, дека $a=\frac{3}{2}$, кој не е цел број.

3 *случај*. $x\in(2;+\infty)$. Во овој случај добиваме $5=2x^2-ax=x(2x-a)$. Бидејќи 5 е прост број и $x>2$, единствената можност е $x=5$ и $2x-a=1$, т.е. $x=5$ и $a=9$. Значи, $x=5$ и $a=9$ е решение. Од симетријата добиваме, дека и $x=-5$ и $a=-9$ исто така е решение.

23. Дадена е равенката

$$|4-2x|-|x+1|=a-x. \qquad (1)$$

а) Реши ја равенката (1) за $a=5$.

б) Определи го бројот на решенијата на равенката (1) во зависност од вредноста на параметарот a.

Решение. а) За $x\in(-\infty,-1)$ дадената равенка го добива видот

$$4-2x-(-x-1)=5-x,\text{ т.е. } 5-x=5-x,$$

што очигледно е точно. За $x\in[-1,2)$ равенката го добива видот

$$4-2x-(x+1)=5-x,\text{ т.е. } 2x=2,$$

од каде наоѓаме $x=1$. За $x\in[2,+\infty)$ равенката се сведува на

$$2x-4-(x+1)=5-x,$$

од каде наоѓаме $x=5$. Значи, за $a=5$ решенија на равенката (1) се $x\in(-\infty,-1]\cup\{5\}$.

б) $x\in(-\infty,-1)$ дадената равенка го добива видот $5-x=a-x$, што очигледно е точно за $a=5$. За $x\in[-1,2)$ равенката го добива видот $2x=3-a$, па затоа $x=\frac{3-a}{2}$. Имаме $\frac{3-a}{2}\in[-1,2)$ ако и само ако $-1<a\le 5$. За $x\in[2,+\infty)$ равенката се сведува на $2x=5+a$, па затоа $x=\frac{5+a}{2}$. Имаме $\frac{5+a}{2}\in[2,+\infty)$ ако и само ако $a\ge -1$.

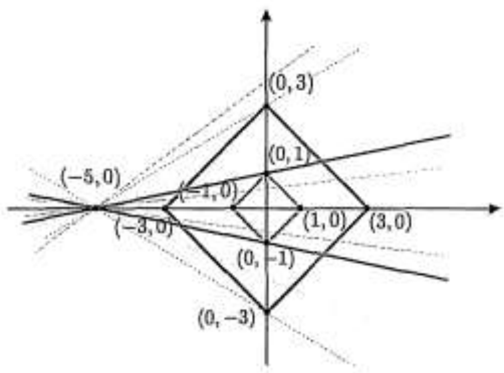
Според тоа, за $a<-1$ равенката (1) нема решенија. За $a=-1$ и $a>5$ равенката (1) има единствено решение. За $-1<a<5$ равенката (1) има две решенија и за $a=5$ таа има бесконечно многу решенија.

24. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот

$$\begin{aligned}&(|x|+|y|-2)^2=1\\&y=ax+5\end{aligned}\qquad(1)$$

има точно три решенија.

Решение. Од првата равенка на системот (1) добиваме $|x|+|y|-2=1$ или $|x|+|y|-2=-1$, т.е. $|x|+|y|=3$ или $|x|+|y|=1$. Да забележиме дека ако точката (x,y) припаѓа на графикот, т.е. на множеството за кое важи $|x|+|y|=3$ или $|x|+|y|=1$, тогаш и точките $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$ припаѓаат на графикот. Значи, графикот е симетричен во однос на координатните оски и центално симетричен во однос на координатниот почеток.



Од досега изнесеното следува дека тодолно е графикот да го определиме во првиот квадрант, во кој равенката $|x|+|y|=1$ го добива видот $x+y=1$, т.е. графикот е отсечката со крајни точки $(1,0)$ и $(0,1)$. Затоа, множеството точки кои ја задоволуваат равенката $|x|+|y|=1$ е квадрат со темиња $(1,0),(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$. Аналогно, множеството точки кои ја задоволуваат равенката $|x|+|y|=3$ е квадрат со темиња $(3,0),(0,3),(-3,0)$ и $(0,-3)$. Графикот на втората равенка е права која минува низ точката $(0,5)$. Јасно, оваа права ќе го сече графикот на првата равенка во (1) во точно три точки ако и само ако правата $y=ax+5$ минува низ точките $(0,1)$ и $(-1,0)$, т.е. ако и само ако $a=5$ или $a=-5$.

25. Нека p е реален параметар таков што системот равенки

$$\begin{cases} p(x^2-y^2)=(p^2-1)xy \\ |x-1|+|y|=1 \end{cases}$$

има најмалку три различни реални решенија. Определи го p и реши го системот за тоа p.

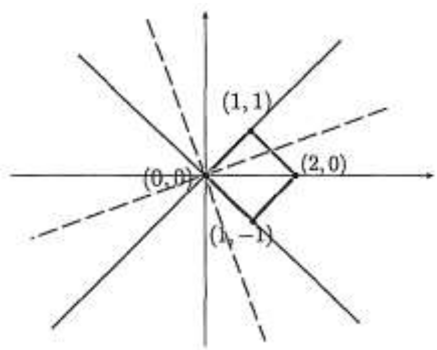
Решение. Ќе го определиме множеството точки кои ја задоволуваат равенката $|x-1|+|y|=1$. Ако ставиме $x-1=t$, тогаш ја добиваме равенката $|t|+|y|=1$, за која во претходната задача видовме дека множеството точки (t,y) кое ја задоволува е квадрат со темиња $(-1,0),(0,1),(1,0)$ и $(0,-1)$. Според тоа, множеството точки $(x-1,y)$ за кои важи $|x-1|+|y|=1$ е квадрат со темиња $(-1,0),(0,1),(1,0)$ и $(0,-1)$, што значи дека множеството точки (x,y) за кои важи $|x-1|+|y|=1$ е квадрат со темиња $(0,0),(1,1),(2,0)$ и $(1,-1)$.

Од првата равенка на системот следува

$$px^2-p^2xy+xy-py^2=0$$

$$(px+y)(x-py)=0,$$

т.е. $x=py$ или $y=-px$. Значи, множеството точки кои ја задоволуваат првата равенка на системот е унија на правите $x=py$ и $y=-px$, кои минуваат низ координатниот почеток и се заемно нормални (производот на нивни-



те коефициенти на правци е еднаков на -1).

Множеството точки кои ги задоволуваат двете равенки е еднакво на пресекот на погоре определените множества точки. Јасно, системот има повеќе од три решенија ако и само ако една од правите содржи некоја од страните на квадратот, односно ако и само ако $p=1$ или $p=-1$. Во првиот случај решение на системот е множеството $\{(x,x)\,|\,0\le x\le 1\}$, а во вториот случај решение на системот е множеството $\{(x,-x)\,|\,0\le x\le 1\}$.

26. Определи ги сите парови реални броеви (x,y) такви што

$$|x|+|y|=1340 \text{ и } x^3+y^3+2010xy=670^3.$$

Решение. Ќе го искористиме познатиот идентитет

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\tfrac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2),$$

со чија помош втората равенка ја запишуваме во видот

$$\begin{aligned}0&=x^3+y^3+(-670)^3-3\cdot(-670)xy\\&=\tfrac{1}{2}(x+y-670)((x-y)^2+(y+670)^2+(x+670)^2).\end{aligned}$$

Од овде следува дека

$$x+y=670 \text{ или } (x-y)^2+(y+670)^2+(x+670)=0.$$

Ако

$$(x-y)^2+(y+670)^2+(x+670)=0,$$

тогаш $x=y=-670$ и со непосредна проверка добиваме дека се исполнети условите на задачата.

Нека $x+y=670$. Ако $x\ge 0, y\ge 0$, тогаш

$$1340=|x|+|y|=x+y=670,$$

што не е можно, па во овој случај немаме решение. Ако $x<0, y<0$, тогаш

$$1340=|x|+|y|=-x-y=-670,$$

што повторно не е можно. Ако $x\ge 0, y<0$, тогаш $1340=x-y$ и како $x+y=670$, добиваме $x=1005, y=-335$. За $x<0, y\ge 0$, на потполно ист начин добиваме $x=-335, y=1005$.

27. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи, дека равенката $x^2+ax+a^2-6=0$ нема решенија во множеството реални броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека дадената равенка има решенија во множеството реални броеви. Равенката е еквивалентна со равенката

$$(x+\tfrac{a}{2})^2=6-\tfrac{3a^2}{4}.$$

Оттука следува $6-\frac{3a^2}{4}\geq 0$, односно $a^2\leq 8$. Но, a е позитивен реален број, па затоа $a^3\leq 8a$, т.е $6(a+1)\leq 8a$, од каде добиваме $a\geq 3$. Според тоа, $a^2\geq 9>8\geq a^2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решенија во множеството реални броеви.

28. Реалните броеви a,b,c се такви што равенката $x^3+ax^2+bx+c=0$ има три реални корени. Докажи, дека ако $-2\leq a+b+c\leq 0$, тогаш барем еден од тие корени лежи во интервалот $[0,2]$.

Решение. Нека x_1,x_2,x_3 се корените на полиномот

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c.$$

Тогаш

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Бидејќи

$$-1=-2+1\leq P(1)=1+a+b+c\leq 1+0=1,$$

добиваме дека

$$-1\leq(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\leq 1, \text{ т.е. } |1-x_1|\cdot|1-x_2|\cdot|1-x_3|\leq 1 .$$

Според тоа, барем зе едн корен, на пример x_1 ќе важи $|1-x_1|\leq 1$, што значи $0\leq x_1\leq 2$.

29. Даден е полиномот $M(x)=ax+b$, каде a и b се параметри. Реши ја равенката $2M(x)=x-2016$, ако $M(x^2)-(M(x))^2\geq\frac{1}{4}$, за секој x.

Решение. Од условот на задачата при $x=0$ имаме $M(0)-M^2(0)\geq\frac{1}{4}$, т.е. $M^2(0)-M(0)+\frac{1}{4}\leq 0$, па затоа $(M(0)-\frac{1}{2})^2\leq 0$. Оттука $M(0)=\frac{1}{2}$. Аналогно при $x=1$ имаме $M(1)-M^2(1)\geq\frac{1}{4}$, т.е. $M^2(1)-M(1)+\frac{1}{4}\leq 0$, па затоа $(M(1)-\frac{1}{2})^2\leq 0$, што значи $M(1)=\frac{1}{2}$. Од друга страна $M(0)=b$ и заклучуваме, дека $b=\frac{1}{2}$. Од $M(1)=a+b=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{2}$ наоѓаме $a=0$, т.е. $M(x)=\frac{1}{2}$, за секој x. Сега равенката $2M(x)=x-2016$ го прима обликот $1=x-2016$, од каде $x=2017$.

30. Нека $p(x)$ е квадратен полином, за кој $|p(x)|\le 1$ за $x\in\{-1,0,1\}$. Докажи, дека $|p(x)|\le\frac{5}{4}$ за секој $x\in[-1,1]$.

Решение. Да забележиме дека

$$p(x)=\frac{x(x+1)}{2}p(1)+(1-x^2)p(0)+\frac{x(x-1)}{2}p(-1)$$

(бидејќи квадратните полиноми од двете страни на равенството имаат еднаки вредности во три точки). За $0\le x\le 1$ имаме дека

$$|p(x)|\le\frac{x(x+1)}{2}+1-x^2+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{5}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2\le\frac{5}{4},$$

а за $-1\le x\le 0$ важи

$$|p(x)|\le-\frac{x(x+1)}{2}+1-x^2+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{5}{4}-(\frac{1}{2}+x)^2\le\frac{5}{4}.$$

Конечно, $|p(x)|\le\frac{5}{4}$ за секој $x\in[-1,1]$.

31. Нека $P(x)$ е квадратен трином со водечки коефициент 1 таков што полиномите $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имаат заеднички корен. Докажи, дека $P(0)P(1)=0$.

Решение. Нека t е заеднички корен на двата полиноми. Тогаш $0=P(P(P(t)))=P(P(0))$. Ако $P(x)=x^2+ax+b$, тогаш $P(0)=b, P(1)=a+b+1$ и значи

$$0=P(P(0))=P(b)=ab+b^2+b=b(a+b+1)=P(0)P(1).$$

32. Во тетратките на Петар и Киро се запишани по два броја: на почетокот 1 и 2 кај Петар, и 3 и 4 кај Киро. Во секоја минута Петар формира квадратен трином $f(x)$ чии корени се броевите запишани во неговата тетратка, а Киро квадратен трином $g(x)$ чии корени се запишани во неговата тетратка. Ако равенката $f(x)=g(x)$ има два различни реални корени, тогаш едно од момчињата го заменува својот пар броеви со тие корени (во спротивно ништо не се случува). Ако во некој момент се појави бројот 5 во тетратката на Петар, кој е другиот број?

Решение. Во секоја тетратка ќе го допишеме квадратниот трином чии корени се соодветните броеви. Нека во некој момент се запишани триномите $p(x)$ и $q(x)$. Тогаш равенката која се решава е од видот

$\alpha p(x) = \beta q(x)$, каде α и β се ненулти реални корени. Значи, добиените броеви се корени на полиномот $\alpha p(x) - \beta q(x)$. Ако некое од момчињата ги замени броевите, тогаш можеме да сметаме дека заедно со нив го запишал полиномот $\alpha p(x) - \beta q(x)$.

Нека $p_0(x) = (x-1)(x-2)$ и $q_0(x) = (x-3)(x-4)$. Од претходно изнесеното следува дека во секој чекор во секоја од тетратките е запишан трином од видот $\alpha p_0(x) + \beta q_0(x)$.

Според тоа, ако бројот 5 се појави во некоја од тетратките, тогаш во неа е запишан и триномот

$$a(x-5)(x-x_2) = \alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-3)(x-4).$$

За $x = 5$ добиваме $12\alpha + 2\beta = 0$, од каде наоѓаме

$$\alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-3)(x-4) = \alpha(-5x^2 + 39x - 70) = -\alpha(x-5)(5x-14).$$

Според тоа, вториот број е $x_2 = \frac{14}{5}$.

33. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 2008 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6024^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2008}. \end{cases}$$

Решение. Од првата и вората равенка следува

$$xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = \frac{2008^2 - 9 \cdot 2008^2}{2} = -4 \cdot 2008^2.$$

Од третата равенка следува

$$\frac{1}{2008} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{-4 \cdot 2008^2}{xyz},$$

па затоа $xyz = -4 \cdot 2008^3$. За полиномот

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz \\ &= t^3 - 2008t^2 - 4 \cdot 2008^2 t + 4 \cdot 2008^3 \end{aligned}$$

важи

$$\begin{aligned} P(t) &= t^2(t-2008) - 4 \cdot 2008^2(t-2008) = (t-2008)(t^2 - 4 \cdot 2008^2) \\ &= (t-2008)(t-4016)(t+4016). \end{aligned}$$

Секој полином на единствен начин се разложува на множители, па затоа еден од броевите x, y, z е еднаков на 2008, другиот е еднаков на 4016 и третиот е еднаков на -4016. Со непосредна проверка се добива дека секоја пермутација на подредената тројка $(-4016, 2008, 4016)$ е решение на дадениот систем.

34. Нека $a\in\mathbb{R}$ и функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

1) $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$

2) $f(0)=\frac{1}{2}$.

Докажи, дека $f=\text{const}$.

Решение. Ако во 1) ставиме $x=y=0$ добиваме $f(a)=\frac{1}{2}$. Тогаш за $x=0$ и произволно y добиваме

$$f(y)=\tfrac{1}{2}f(a-y)+\tfrac{1}{2}f(y),$$

од каде следува $f(y)=f(a-y)$. Сега равенството од условот може да се запише во видот

$$f(x+y)=2f(x)f(y),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Ако го искористиме последното равенство последователно добиваме

$$f(x+y)=2f(x)f(y)=2f(a-x)f(y)=f(a-x+y).$$

За $y=-x$ имаме

$$\tfrac{1}{2}=f(0)=f(a-2x)=f(2x).$$

Според тоа,

$$f(z)=f(2\tfrac{z}{2})=\tfrac{1}{2}, \text{ за секој } z\in\mathbb{R}.$$

35. Дадена е низата $a_1,a_2,...,a_n,...$ за која важи $a_1=0$ и $a_{n+1}=a_n+4n+3$. Определи го општиот член на низата во функција од n.

Решение. Ако ја искористиме формулата $a_{n+1}=a_n+4n+3$, за $n\geq 2$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+4(n-1)+3=a_{n-2}+4(n-2)+4(n-1)+2\cdot 3\\&=a_{n-3}+4(n-3)+4(n-2)+4(n-1)+3\cdot 3=...\\&=a_1+4[1+2+...+(n-1)]+3(n-1)\\&=2n(n-1)+3(n-1)\\&=(2n+3)(n-1).\end{aligned}$$

Јасно, $(2\cdot 1+1)(1-1)=0=a_1$, па затоа

$$a_n=(2n+3)(n-1), \text{ за секој } n\geq 1.$$

36. Определи ја вредноста на изразот

$$(\ldots(((2*3)*4)*5)*\ldots)*1995$$

каде $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$ за произволни позитивни броеви x и y.

Решение. Нека $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ и $n*=2*3*\ldots*n$. Непосредно се проверува дека $f(x*y)=f(x)f(y)$ и затоа

$$f(n*)=f(2)f(3)\ldots f(n)=(-1)^n\frac{2}{n(n+1)}.$$

Оттука

$$n*=\frac{1-f(n*)}{1+f(n*)}=\frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}.$$

Во случајов $1995*=\frac{1991009}{1991011}$

37. Во научниот музеј се закачени портрети на научници кои живееле меѓу 1600 и 2008 година, секој од кои не живеел повеќе од 80 години. Васко ги помножил годините во кои тие се родиле, а Петар ги помножил години во кои тие починале. Се покажало, дека бројот кој го добил Петар е $\frac{5}{4}$ пати поголем од бројот кој го добил Васко. Определи го најмалиот број портрети.

Решение. Нека n е бројот на портретите. Ако еден научник е роден во текот на годината a, тогаш односот на годината на смртта и годината на раѓање е помал или еднаков на $\frac{a+80}{a}$. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{x+80}{x}$, $x>0$. Ако $0<a<b$, тогаш важи

$$f(b)=\frac{b+80}{b}<\frac{a+80}{a}=f(a),$$

што значи дека функцијата $f(x)$ строго опаѓа за $x>0$. Затоа

$$f(a)\le\frac{1680}{1600}=\frac{21}{20}$$

за сите портрети. Според тоа,

$$\frac{5}{4}=\prod_a f(a)\le\left(\frac{21}{20}\right)^n.$$

Бидејќи $\left(\frac{21}{20}\right)^4=\frac{194481}{160000}<\frac{5}{4}$, заклучуваме дека $n\ge5$.

Останува да забележиме, дека ако годините се 1600-1680, 1680-1760, 1760-1840, 1840-1920 и 1920-2000, тогаш условот е исполнет. Според тоа, минималниот број портрети е 5.

38. За секој реален број x определуваме број $f(x)=ax+b$. Определи ја разликата $b-a$ ако е познато дека за секој x е исполнето равенството

$$f(x+1)=4f(x+4)+x.$$

Решение. Од условот на задачата следува дека за секој реален број x важи

$$a(x+1)+b=4[a(x+4)+b]+x,$$

т.е.

$$(3a+1)x+3(5a+b)=0.$$

Ако во (1) земеме $x=0$ добиваме дека $5a+b=0$. Сега, заменуваме во (1) и добиваме $(3a+1)x=0$, од каде за $x=1$ наоѓаме $3a+1=0$. Според тоа, $a=-\frac{1}{3}$ и $b=-5a=-5(-\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$, па затоа

$$b-a=\tfrac{5}{3}-(-\tfrac{1}{3})=2.$$

39. Определи ги сите функции $f(x)=ax+b$ такви што

$$f(f(x))=(|a|+|b|+2)x+b^2-6b, \text{ за секој } x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Од $f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$ и условот на задачата следува

$$a^2=|a|+|b|+2, (a+1)b=b^2-6b.$$

Ако $b=0$, тогаш $a^2=|a|+2$, од каде следува $a=\pm2$. Ако $b\neq0$, од втората равенка добиваме $b=a+7$. Тогаш ја добиваме равенката $a^2=|a|+|a+7|+2$ чии решенија се $a=-3$ (соодветно $b=4$) и $a=1+\sqrt{10}$ (соодветно $b=8+\sqrt{10}$).

Конечно, решенија на задачата се функциите

$$f(x)=\pm2x,\ f(x)=-3x+4 \text{ и } f(x)=(1+\sqrt{10})x+8+\sqrt{10}.$$

40. Дали постои функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ таква што

$$(x+y)f(2yf(x)+f(y))=x^3f(yf(x)), \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Решение. Нека претпоставиме дека таква функција постои. Ќе докажеме дека таа е инјекција. Нека $a\neq b$ и да претпоставиме дека $f(a)=f(b)$. Тогаш од

$$(a+y)f(2yf(a)+f(y))=a^3f(yf(a))$$

и

$$(b+y)f(2yf(a)+f(y))=(b+y)f(2yf(b)+f(y))$$
$$=b^3 f(yf(b))=b^3 f(yf(a))$$

следува дека $\frac{a+y}{b+y}=\frac{a^3}{b^3}$, за секој y, што очигледно не е можно.

Нека $y=x^3-x>0$. Добиваме

$x^3 f(2(x^3-x)f(x)+f(x^3-x))=x^3 f((x^3-x)f(x))$.

Ако последното равенство го поделиме со $x^3\neq 0$ и искористиме дека f е инјекција добиваме

$$2(x^3-x)f(x)+f(x^3-x)=(x^3-x)f(x),$$

т.е.

$$(x^3-x)f(x)+f(x^3-x)=0,$$

што не е можно, бидејќи $x^3-x>0,\ f(x)>0,\ f(x^3-x)>0$. Конечно, не постои функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ таква што важи (1).

41. За секој природен број дефинираме

$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$

Пресметај го збирот

$$f(1)+f(2)+...+f(40).$$

Решение. Имаме

$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2n+1+\sqrt{(2n+1)(2n-1)}+2n-1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2n+1}^2+\sqrt{(2n+1)(2n-1)}+\sqrt{2n-1}^2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2n+1}^3-\sqrt{2n-1}^3}{\sqrt{2n+1}^2-\sqrt{2n-1}^2}=\frac{\sqrt{2n+1}^3-\sqrt{2n-1}^3}{2}.$$

Според тоа,

$$f(1)+f(2)+...+f(40)=\frac{\sqrt{3}^3-\sqrt{1}^3}{2}+\frac{\sqrt{5}^3-\sqrt{3}^3}{2}+...+\frac{\sqrt{81}^3-\sqrt{79}^3}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{81}^3-\sqrt{1}^3}{2}=\frac{729-1}{2}=364.$$

42. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1=\frac{1}{2},\ a_m=\frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1},\ m>1$. Пресметај го збирот $a_1+a_2+...+a_k$, за произволен $k\in\mathbb{N}$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a_m = \frac{1}{2m+\frac{1}{a_{m-1}}}. \qquad (1)$$

Нека $b_m = \frac{1}{a_m}, m \in \mathbb{N}$. Од (1) следува дека $b_m = 2m + b_{m-1}$. Оттука со математичка индукција добиваме $b_m = m(m+1)$. Значи,

$$a_m = \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1},$$

па затоа

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

I.2 ЕЛЕМЕНТАРНО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Нека x и y се реални броеви такви што $x^{2017} + y^{2017} > x^{2016} + y^{2016}$. Докажи, дека

$$x^{2018} + y^{2018} > x^{2017} + y^{2017}. \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека

$$x^{2017} + y^{2017} \geq x^{2018} + y^{2018}.$$

Ако ги собереме последното неравенство и неравенството

$$x^{2017} + y^{2017} > x^{2016} + y^{2016}$$

последователно добиваме

$$2x^{2017} + 2y^{2017} > x^{2018} + y^{2018} + x^{2016} + y^{2016}$$

$$0 > x^{2018} - 2x^{2017} + x^{2016} + y^{2018} - 2y^{2017} + y^{2016}$$

$$0 > x^{2016}(x-1)^2 + y^{2016}(y-1)^2$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува неравенството (1).

2. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $a+b=1$. Докажи дека

$$a^a b^b + a^b b^a \leq 1.$$

Решение. Имаме

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}1-a^ab^b-a^bb^a &= a^aa^b+b^ab^b-a^ab^b-a^bb^a\\ &= a^a(a^b-b^b)-b^a(a^b-b^b) \qquad (1)\\ &= (a^a-b^a)(a^b-b^b).\end{aligned}$$

Сега, ако $a\le b$, тогаш $a^a\le b^a$ и $a^b\le b^b$, а ако $a\ge b$, тогаш $a^a\ge b^a$ и $a^b\ge b^b$. Затоа производот на десната страна во (1) е ненегативен, што значи дека $a^ab^b+a^bb^a\le 1$.

3. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+y+z$, ако x,y,z се реални броеви такви што $x\ge 4, y\ge 5, z\ge 6$ и $x^2+y^2+z^2\ge 90$.

Решение. Нека $x=4+a, y=5+b, z=6+c$. Тогаш $a,b,c\ge 0$ и важи

$$(4+a)^2+(5+b)^2+(6+c)^2\ge 90 \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2+8a+b^2+10b+c^2+12c\ge 13.$$

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c+6)^2 &= a^2+12a+b^2+12b+c^2+12c+2ab+2bc+2ca+36\\ &\ge a^2+8a+b^2+10b+c^2+12c+36\\ &\ge 13+36.\end{aligned}$$

Според тоа, $(a+b+c+6)^2\ge 49$, од каде следува дека $a+b+c+6\ge 7$, т.е. $a+b+c\ge 1$. Последното неравенство е еквивалелнтно со неравенството $x+y+z\ge 16$ и како во последното неравенство знак за равенство важи за $x=4, y=5, z=6$, заклучуваме дека бараната најмала вредност на изразот $x+y+z$ е 16.

4. Нека x,y и z се реални броеви такви што $x,y,z\ge 1$. Докажи, дека

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2)\le (xyz)^2-2xy+2.$$

Решение. Ставаме $a=x-1, b=y-1$ и $c=z-1$ и дадено неравенство го запишуваме во видот

$$\begin{aligned}(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) &\le [(a+1)(b+1)(c+1)-1]^2+1\\ &= (abc+ab+bc+ca+a+b+c)^2+1.\end{aligned} \qquad (1)$$

Последното неравенство ќе го докажеме ако го искористиме неравенството

$$(A^2+1)(B^2+1)\le [(A+1)(B+1)-1]^2+1=(AB+A+B)^2+1,$$

кое се докажува директно, ако се ослободиме од заградите. Ако последното неравенство го примениме за $(A,B)=(a,b)$, а потоа за $(A,B)=(ab+a+b,c)$ го добиваме неравенството (1).

5. а) Докажи, дека ако $a,b\in[0,1]$ и $a+b\le 1$, тогаш $a^2+b^2\le 1$.

б) Секои два од броевите x,y,z не се разликуваат за повеќе од 1 и $xy+yz+zx=96$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот $A=x^2+y^2+z^2$.

Решение. а) Имаме $a^2+b^2\le a^2+(1-a)^2=2a(a-1)+1\le 1$.

б) Имаме

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0\,,$$

па затоа

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\ge 96\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=4\sqrt{2}$. Значи, најмалата вредност на A е 96.

Да ја определиме најголемата вредност на A. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x\le y\le z$. Тогаш $z-y+y-x=z-x\le 1$ и од а) следува дека

$$(z-y)^2+(y-x)^2+(x-z)^2\le 1+1=2\,.$$

Ако поделиме со 2 добиваме дека

$$A=x^2+y^2+z^2\le 1+xy+yz+zx=97\,.$$

Знак за равенство важи, на пример, за $x=5, y=z=6$. Според тоа, најголемата вредност на A е 97.

6. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$M=a^2b^2(a^2+b^2)\,,$$

ако $a>0$, $b>0$ и $a+b=2$. Кога таа се достигнува?

Решение. Да ставиме $a=1+x$. Тогаш

$$b=2-a=2-(1+x)=1-x\,.$$

Условите $a>0$ и $b>0$ се еквивалентни со $x\in(-1;1)$. Добиваме, дека

$$M=(1+x)^2(1-x)^2((1+x)^2+(1-x)^2) \text{ за } x\in(-1;1)\,.$$

Имаме

$$M=(1+x)^2(1-x)^2(2+2x^2)=2(1-x^2)^2(1+x^2)=2(1-x^2)(1-x^4)$$

и задачата се сведува на наоѓање на најголемата вредност на $M=2(1-x^2)(1-x^4)$, за $x\in(-1;1)$. Бидејќи $x^2\geq 0$ и $x^4\geq 0$, очигледно најголемата вредност на $1-x^2$, както и на $1-x^4$, е 1. Заклучуваме, дека можната најголемата вредност на M е 2 и таа се достигнува за $x=0$, т.е. за $a=b=1$.

7. Докажи, дека ако $x+y+z=1$, тогаш важи $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $x=\frac{1}{3}+a,\ y=\frac{1}{3}+b,\ z=\frac{1}{3}+c$. Од условот на задачата следува $a+b+c=0$. Ако искористиме дека $u^2\geq 0$, за секој реален број, тогаш од претходно изнесеното следува

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(\tfrac{1}{3}+a)^2+(\tfrac{1}{3}+b)^2+(\tfrac{1}{3}+c)^2\\&=3\cdot\tfrac{1}{9}+2\cdot\tfrac{1}{3}(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)\\&=\tfrac{1}{3}+(a^2+b^2+c^2)\geq\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

8. Нека x и y се позитивни реални броеви такви што $x^3+y^3=4xy$. Докажи дека

а) $x+y\leq 4$ б) $x^2+y^2\leq 8$.

Решение. а) За секои позитивни реални броеви x и y точно е неравенството $x^2+y^2\geq 2xy$, т.е. неравенството $x^2+y^2-xy\geq xy$. Затоа

$$4xy=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq xy(x+y),$$

од каде следува $x+y\leq 4$.

б) Имаме

$$\begin{aligned}(x+y)(x^3+y^3)-(x^2+y^2)^2&=x^4+xy^3+yx^3+y^4-x^4-2x^2y^2-y^4\\&=xy(x^2-2xy+y^2)\\&=xy(x-y)^2.\end{aligned}$$

Од последното равенство следува дека за секои позитивни реални броеви x и y важи

$$(x+y)(x^3+y^3)\geq(x^2+y^2)^2,$$

и ако земеме предвид дека $x^3+y^3=4xy$ и $x^2+y^2\geq 2xy$ добиваме дека

$$4xy(x+y)\geq(x^2+y^2)^2\geq 2xy(x^2+y^2),$$

па затоа $x^2+y^2\leq 2(x+y)$. Конечно, од а) следува дека $x^2+y^2\leq 8$.

9. Ако за позитивните реални броеви a, b, c и d се исполнети условите $9ac\geq 3bd\geq ac$, докажи дека

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)^2}\geq\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Решение. Неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$4(ab+cd)(ad+bc)-3(ac+bd)^2\geq 0$$

$$4(a^2bd+ab^2c+acd^2+bc^2d)-3(ac+bd)^2\geq 0$$

$$4((ab^2c+acd^2)+(a^2bd+bc^2d))-3(ac+bd)^2\geq 0$$

$$4(ac(b^2+d^2)+bd(a^2+c^2))-3(ac+bd)^2\geq 0$$

$$4(ac(b^2+d^2)+bd(a^2+c^2)-4abcd)+16abcd-3(ac+bd)^2\geq 0$$

$$4(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+16abcd-3(ac+bd)^2\geq 0$$

$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+48abcd-9(ac)^2-18abcd-9(bd)^2\geq 0$$

$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+30abcd-9(ac)^2-9(bd)^2\geq 0$$

$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+3(10abcd-3(ac)^2-3(bd)^2)\geq 0$$

$$12(ac(b-d)^2+bd(a-c)^2)+3(3ac-bd)(3bd-ac)\geq 0.$$

Конечно, од условот на задачата следува точноста на последното неравенство, што значи и на неравенството (1).

10. Нека x,y,z се реални броеви такви што $x^2+y^2+z^2-2xyz=1$. Докажи дека

$$(1+x)(1+y)(1+z)\leq 4+4xyz.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот на задачата и познатите неравенства $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ и $a^2+1\geq 2a$, добиваме

$$1+2xyz=x^2+y^2+z^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$3+3xyz=\tfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)+\tfrac{3}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$3+3xyz=x^2+y^2+z^2+\tfrac{1}{2}[(x^2+1)+(y^2+1)+(z^2+1)]$$

$$\geq xy+yz+zx+x+y+z.$$

Во последното неравенство на двете страни додаваме $1+xyz$ и добиваме

$$4+4xyz \ge 1+xy+yz+zx+x+y+z+xyz$$
$$=(1+x)(1+y)(1+z),$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.

11. Нека $a,b,c,d \in (0,1)$. Докажи, дека

$$1+ab+bc+cd+da+ac+bd > a+b+c+d\ .$$

Решение. Ако $a+b+c \le 1$, тогаш даденото неравенство можеме да го запишеме во видот

$$1-(a+b+c)+d((a+b+c)-1)+ab+bc+ca>0$$
$$(1-(a+b+c))(1-d)+ab+bc+ca>0$$

што во случајов е точно неравенство.

Ако $a+b+c>1$, тогаш

$$d(a+b+c)>d\ .$$

За да го докажеме даденото неравенство доволно е да го докажеме неравенството

$$1+ab+bc+ca>a+b+c, \qquad (1)$$

бидејќи со собирање на последните две неравенства го добиваме даденото неравенство.

Ако $a+b \le 1$, тогаш

$$(1-(a+b))(1-c)+ab>0$$
$$1-(a+b)+c((a+b)-1)+ab>0$$
$$1+ab+bc+ca-a-b-c>0$$

што и требаше да се докаже. Ако $a+b>1$, тогаш $c(a+b)>c$ и како $(1-a)(1-b)>0$, т.е. $1+ab>a+b$, со собирање на добиените неравенства добиваме дека и во овој случај е точно неравенството (1).

12. Секои два од реалните броеви a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 се разликуваат барем за 1. За некој реален број k се исполнети равенствата

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \text{ и } a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2\ .$$

Докажи, дека $k^2 \ge \frac{25}{3}$.

Решение. Без ограничување на општиста можеме да сметаме дека $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$. Според условот, $a_{i+1}-a_i \ge 1$, за секој $i=1,2,3,4$ Според тоа, $a_j-a_i \ge j-i$, за $1 \le i<j \le 5$. Добиваме

$$\sum_{1\le i<j\le 5}(a_j-a_i)^2 \ge \sum_{1\le i<j\le 5}(j-i)^2 = 4\cdot 1^2+3\cdot 2^2+2\cdot 3^2+4^2=50\ ,$$

па затоа

$$4\sum_{i=1}^{5}a_i^2-2\sum_{1\le i<j\le 5}a_ia_j \ge 50\,. \qquad (1)$$

Од друга страна, според условот имаме

$$\sum_{i=1}^{5}a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le 5}a_ia_j=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2=4k^2\,. \qquad (2)$$

Ако ги собереме (1) и (2) добиваме

$$5\sum_{i=1}^{5}a_i^2=10k^2\ge 50+4k^2$$

па затоа $6k^2\ge 50,$ т.е. $k^2\ge\frac{25}{3}$.

13. Позитивните реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ и k се такви, што

$a_1+a_2+...+a_n=3k,\ a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=3k^2$ и $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3>3k^3+k$.

Докажи, дека разликата на некои два од броевите $a_1,a_2,...,a_n$ е поголема од 1.

Решение. Ги множиме равенството

$$a_1+a_2+...+a_n=3k \qquad (1)$$

и неравенството

$$a_1^3+a_2^3+...+a_n^3>3k^3+k$$

и го добиваме неравенството

$$a_1^4+a_2^4+...+a_n^4+a_1^3a_2+a_1a_2^3+a_1^3a_3+a_1a_3^3+...+a_{n-1}^3a_n+a_{n-1}a_n^3>9k^4+3k^2\,. \qquad (2)$$

Го квадрираме равенството

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=3k^2, \qquad (3)$$

и добиваме

$$a_1^4+a_2^4+...+a_n^4+2a_1^2a_2^2+2a_1^2a_3^2+...+2a_{n-1}^2a_n^2=9k^4\,. \qquad (4)$$

Ако од неравенството (2) го одземеме равенството (4) добиваме

$$a_1^3a_2-2a_1^2a_2^2+a_1a_2^3+a_1^3a_3-2a_1^2a_3^2+a_1a_3^3+...+a_{n-1}^3a_n-2a_{n-1}^2a_n^2+a_{n-1}a_n^3>3k^2,$$

$$a_1a_2(a_1-a_2)^2+a_1a_3(a_1-a_3)^2+...+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n)^2>3k^2\,. \qquad (5)$$

Нека препоставиме, дека разликата на секои два броја не е поголема од 1. Тогаш квадратот на нивната разлика не е поголем од 1, па од неравенството (5) следува

$$a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n > 3k^2 . \qquad (6)$$

Ако го одземеме равенството (3) од квадратот на равенството (1) ќе добиеме

$$2a_1a_2 + 2a_1a_3 + ... + 2a_{n-1}a_n = 6k^2 ,$$

што противречи на (6). Од добиената противречност следува дека разликата на некои два од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ е поголема од 1.

14. Нека a,b,c се различни реални броеви.

1) Пресметај ги вредностите на изразите

а) $\frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} + \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ca}{c-a} + \frac{1+ca}{c-a} \cdot \frac{1+ab}{a-b}$.

б) $\frac{1-ab}{a-b} \cdot \frac{1-bc}{b-c} + \frac{1-bc}{b-c} \cdot \frac{1-ca}{c-a} + \frac{1-ca}{c-a} \cdot \frac{1-ab}{a-b}$.

2) Докажи го неравенството

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{3}{2} .$$

Дали може да важи знак за равенство?

Решение. 1) а) После сведување на заеднички именител и средување добиваме дека вредноста на изразот е еднаква на 1.

б) После сведување на заеднички именител и средување добиваме дека вредноста на изразот е еднаква на -1.

2) Ќе ги користиме познатите неравенства $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ и $x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx)$, кои важат за секои реални броеви x, y, z , како и равенството $2(t^2 + u^2) = (t+u)^2 + (t-u)^2$. Имаме

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\right) &= \left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1+bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1+ca}{c-a}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1-bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1-ca}{c-a}\right)^2 \\
&\geq \frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} + \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ca}{c-a} + \frac{1+ca}{c-a} \cdot \frac{1+ab}{a-b} \\
&\quad + (-2)\left(\frac{1-ab}{a-b} \cdot \frac{1-bc}{b-c} + \frac{1-bc}{b-c} \cdot \frac{1-ca}{c-a} + \frac{1-ca}{c-a} \cdot \frac{1-ab}{a-b}\right) \\
&= 1 + (-2) \cdot (-1) = 3.
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи за $a = -\sqrt{3}, b = 0, c = \sqrt{3}$.

15. Нека $x, y, z > -1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2 .$$

Решение. Од неравенството $\frac{1+y^2}{2} \geq y$ следува $\frac{1+y^2}{2} + 1 + z^2 \geq 1 + y + z^2$. Бидејќи $y > -1$ двете страни на последното неравенство се позитивни, па затоа важи

$$\frac{1}{1+y+z^2} \geq \frac{1}{\frac{1+y^2}{2}+1+z^2}.$$

Последното неравенство го множиме со $1+x^2$ и после средувањето го добиваме неравенството

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}.$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)} \text{ и } \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)} + \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)} + \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}.$$

Очигледно, бараното неравенство ќе го докажеме ако докажеме дека

$$\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)} + \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)} + \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)} \geq 1.$$

Воведуваме замена $1+x^2 = a, 1+y^2 = b, 1+z^2 = c$. Јасно, $a,b,c > 1$ и сега треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1,$$

за кое претходно видовме дека важи. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 1$.

16. Докажи, дека за секој природен број $n > 1$ се точни неравенствата

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Решение. Имаме $n^2 < n^2+1 < n^2+2 < \ldots < n^2+n$, па затоа важи

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} > \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$
$$= \frac{1}{n^2+n}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{2}.$$

Слично, имаме

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

17. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geq 1.$$

Решение. Бидејќи $\frac{1}{t^2+t+1}\geq\frac{1}{t^2+|t|+1}$, можеме да сметаме дека $a\geq b\geq c>0$. Прво ќе докажеме дека

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}\geq\frac{2}{ab+\sqrt{ab}+1}.$$

Ако замениме $x=\sqrt{a},\ y=\sqrt{b}$, го добиваме еквивалентното неравенство

$$(x-y)^2[(x+y)^2(xy)^2-1+(xy-1)(x^2+xy+y^2)]\geq 0$$

кое е точно, бидејќи $xy\geq 1$, па затоа $x+y\geq 2$. Според тоа, доволно е да го докажеме даденото неравенство кога $a=b$. Тогаш $c=\frac{1}{a^2}$, па добиваме дека неравенството кое треба да го докажеме е еквивалентно со неравенството $a^4-a^3-a+1\geq 0$, т.е. со неравенството

$$(a-1)^2(a^2+a+1)\geq 0,$$

кое очигледно е исполнето. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

18. Нека $n\geq 2$ е природен број и нека за позитивните реални броеви $a_0,a_1,...,a_n$ важи

$$(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1})=a_{k-1}-a_{k+1},\ \text{за секој}\ k=1,2,...,n-1.$$

Докажи, дека $a_n<\frac{1}{n-1}$.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{a_k+a_{k+1}}=\frac{1}{a_{k-1}+a_k}+1,\ \text{за секој}\ k>0.$$

Сега со индукција следува дека $\frac{1}{a_k+a_{k+1}}=\frac{1}{a_0+a_1}+k$, за $k>0$, од што добиваме $\frac{1}{a_n+a_{n-1}}>n-1$, па затоа $a_n<a_n+a_{n-1}<\frac{1}{n-1}$.

19. Нека $d,a_1,a_2,...,a_{2014}$ се реални броеви такви што

$$|a_1-1|=|a_2-2|=|a_3-3|=...=|a_{2014}-2014|=d$$

и $b_1\leq b_2\leq...\leq b_{2014}$ се броевите $a_1,a_2,...,a_{2014}$ подредени по големина. Докажи, дека $|a_k-b_k|\leq 2d$, за $k=1,2,...,2014$.

Решение. Бидејќи $|a_k-b_k|\leq|a_k-k|+|b_k-k|=d+|b_k-k|$, доволно е да докажеме дека $|b_k - k| \le d$, за $k = 1,2,...,2014$. Навистина, ако на пример $b_k < k - d$, тогаш лесно се добива дека броевите $a_k, a_{k+1},...,$ a_{2014} се поголеми од b_k, што е противречност бидејќи во низата има најмногу $2014 - k$ броеви поголеми од b_k. Аналогно, ако $b_k > k + d$, тогаш броевите $a_k, a_{k-1},...,a_1$ се помали од b_k, што повторно е противречност. Според тоа, $|a_k - b_k| \le 2d$, за $k = 1,2,...,2014$.

20. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што

$$x + y + z \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Докажи, дека

$$x + y + z \ge \frac{3}{x+y+z} + \frac{2}{xyz}.$$

Решение. Од условот на задачата следува

$$(x + y + z)xyz \ge xy + yz + zx. \qquad (1)$$

Ако во познатото неравенство $\frac{(a+b+c)^2}{3} \ge ab + bc + ca$ ставиме $a = xy,$ $b = yz, c = zx$, добиваме

$$\frac{(xy+yz+zx)^2}{3} \ge xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy = xyz(x + y + z). \qquad (2)$$

Сега од (1) и (2) следува

$$\frac{(xy+yz+zx)^2}{3} \ge xy + yz + zx,$$

од каде наоѓаме дека

$$xy + yz + zx \ge 3. \qquad (3)$$

Понатаму, од (1) и (3) добиваме $x + y + z \ge \frac{xy+yz+zx}{xyz} \ge \frac{3}{xyz}$, т.е. добиваме

$$\frac{2(x+y+z)}{3} \ge \frac{2}{xyz}. \qquad (4)$$

Сега од неравенството $\frac{(x+y+z)^2}{3} \ge xy + yz + zx$ и неравенството (3) следува

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \frac{3}{x+y+z}. \qquad (5)$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (4) и (5) го добиваме бараното неравенство.

21. Нека

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{1996\cdot 1997}{2}}}.$$

Докажи, дека $S>1001$.

Решение. Броителите на сите собирци се од видот

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n+1-n}{n(n+1)})$$
$$=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1}).$$

Затоа

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{1996\cdot 1997}{2}}}=\frac{1}{2(1-\frac{1}{2})}+\frac{1}{2(1-\frac{1}{3})}+\ldots+\frac{1}{2(1-\frac{1}{1997})}$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{2}{3}}+\ldots+\frac{1}{\frac{1996}{1997}})=\frac{1}{2}(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{1997}{1996})=\frac{1}{2}(\frac{1+1}{1}+\frac{2+1}{2}+\ldots+\frac{1996+1}{1996})$$
$$=\frac{1}{2}(1+1+1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\ldots+1+\frac{1}{1996})=\frac{1}{2}(1997+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996}).$$

Ќе докажеме дека $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996}>5$. Имаме

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\frac{1}{5}>\frac{1}{8},\frac{1}{6}>\frac{1}{8},\frac{1}{7}>\frac{1}{8},\frac{1}{9}>\frac{1}{16},\ldots,\frac{1}{15}>\frac{1}{16},\frac{1}{17}>\frac{1}{32},\ldots,$$
$$\frac{1}{1025}>\frac{1}{2048},\ldots,\frac{1}{1996}>\frac{1}{2048},$$

па затоа

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996}>\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+32\cdot\frac{1}{64}+64\cdot\frac{1}{128}+$$
$$+128\cdot\frac{1}{256}+256\cdot\frac{1}{512}+512\cdot\frac{1}{1024}+972\cdot\frac{1}{2048}$$
$$=10\cdot\frac{1}{2}+\frac{972}{2048}>5.$$

Конечно, од претходните неравенства следува

$$S=\frac{1}{2}(1997+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996})>\frac{1}{2}(1997+5)=\frac{2002}{2}=1001.$$

22. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што

$$a+b+c+d=1.$$

Докажи, дека

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}+\frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2}+\frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2}+\frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2}\geq\frac{1}{8}.$$

Решение. Да забележиме дека после сведување под заеднички именител неравенството

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}\geq\frac{a}{4}-\frac{b+c}{16}\qquad(1)$$

е еквивалентно со очигледното неравенство

$$(b+c)(2a-b-c)^2 \geq 0.$$

Сега, бараното неравенство се добива ако го собереме неравенството (1) со трите аналогни неравенства.

23. Докажи, дека за секои позитивни реални броеви a,b,c,d е точно неравенството

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3} \geq \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Решение. Неравенството

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} \geq \frac{5}{8}a-\frac{3}{8}b \qquad (1)$$

е еквивалентно со неравенството

$$3(a^4+b^4) \geq 2(a^3b+a^2b^2+ab^3),$$

кое очигледно е точно. Ако (1) го собереме со аналогните неравенства добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3} &\geq \\ \geq \frac{5(a+b+c+d)}{8}-\frac{3(b+c+d+a)}{8}& \\ =\frac{a+b+c+d}{4}&.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=d$.

24. а) Докажи, дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \qquad (1)$$

за секои реални броеви x,y,z такви шту ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

б) Докажи, дека знак за равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви x,y,z такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

Решение. а) Воведуваме смена $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$ и условот на задачата го добива обликот $a+b+c=ab+bc+ca+1$, а неравенството (1) го добива обликот

$$a^2+b^2+c^2 \geq 1. \qquad (2)$$

Понатаму, имаме

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+2$$
$$=(a+b+c-1)^2+1\ge 1,$$

т.е. точно е неравенството (2), при што знак за равенство важи ако и само ако $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$.

б) Треба да докажеме, дека постојат бесконечно многу тројки $a,b,c\in\mathbb{Q}$ такви што $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$. Ако во второто равенство замениме $c=1-a-b$ добиваме $a^2+ab+b^2-a-b=0$. Во последното равенство земаме $b=ta$ и истото го добива обликот $(t^2+t+1)a^2=(t+1)a$, од каде наоѓаме $a=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ и $b=\frac{t^2+t}{t^2+t+1}$. Сега, $c=1-a-b=\frac{-t}{t^2+t+1}$. Според тоа, за $(a,b,c)=(\frac{t+1}{t^2+t+1},\frac{t^2+t}{t^2+t+1},\frac{-t}{t^2+t+1})$ важи знак за равенство за секој $t\in\mathbb{Q}$.

25. Нека x,y и z се позитивни броеви.

а) Докажи, дека $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$.

б) Определи ја најмалата вредност на изразот $A=\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{4}{x+y+z}$.

Решение. а) Имаме

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$$
$$x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)\ge 0$$
$$2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)-6(xy+yz+zx)\ge 0$$
$$2(x+y+z)^2\ge 6(xy+yz+zx)$$
$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx),$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

б) Од $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$ следува дека $\frac{1}{xy+yz+zx}\ge\frac{3}{(x+y+z)^2}$, т.е. дека

$$A\ge\frac{3}{(x+y+z)^2}-\frac{4}{x+y+z}.$$

Да означиме $t=\frac{1}{x+y+z}$. Имаме $A\ge 3t^2-4t\ge 3(t-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}\ge-\frac{4}{3}$, при што знак за равенство важи за $t=\frac{2}{3}$, т.е. за $x=y=z=\frac{1}{2}$. Притоа, најмалата вредност на A е $-\frac{4}{3}$.

26. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}+\frac{x^2+y^2}{z}\geq 2(x+y+z)\,.$$

Решение. Даденото неравенство ќе го запишеме во облик

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{z}\geq 2(x+y+z)\,. \qquad (1)$$

Имаме $x^2+y^2-xy\geq xy$, па затоа

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)\geq xy(x+y)\,,$$

односно $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$.

Аналогно добиваме $\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y}\geq y+z$ и $\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{z}\geq x+z$. Ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме неравенството (1).

27. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a})\leq 1\,.$$

Решение. Од $abc=1$ следува дека $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ за некои $x,y,z>0$. Даденото неравенство се сведува на неравенството

$$\frac{x-y+z}{y}\cdot\frac{y-z+x}{z}\cdot\frac{z-x+y}{x}\leq 1\,. \qquad (1)$$

Ги воведуваме ознаките $p=z-x+y, q=x-y+z, r=y-z+x$ и неравенството (1) го запишуваме во обликот

$$8pqr\leq (p+q)(q+r)(r+p)\,. \qquad (2)$$

Меѓу броевите p,q,r најмногу еден е негативен. На пример, ако $p<0$, тогаш левата страна на (2) е негативна, а десната страна е позитивна. Ако $p,q,r\geq 0$, тогаш неравенството (2) се добива со множење на неравенствата $p+q\geq 2\sqrt{pq}, q+r\geq 2\sqrt{qr}$ и $r+p\geq 2\sqrt{rp}$.

28. Дадени се реални броеви $a_1,a_2,a_3>1$ и $S=a_1+a_2+a_3$. За $i=1,2,3$ важи $\frac{a_i^2}{a_i-1}>S$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_1}>1\,.$$

Решение. Од $\frac{a_1^2}{a_1-1}>S$ и $a_1>1$ следува

$$a_1^2 > S(a_1-1) = (a_1-1)(a_1+a_2+a_3) = a_1^2 + a_1(a_2+a_3) - (a_1+a_2+a_3)\,,$$

т,е.

$$a_1+a_2+a_3 > a_1(a_2+a_3)\,.$$

Оттука следува

$$\tfrac{1}{a_2+a_3} > \tfrac{a_1}{a_1+a_2+a_3}\,.$$

Аналогно се докажува дека

$$\tfrac{1}{a_3+a_1} > \tfrac{a_2}{a_1+a_2+a_3} \text{ и } \tfrac{1}{a_1+a_2} > \tfrac{a_3}{a_1+a_2+a_3}\,.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме бараното неравенство.

29. Нека $x,y,z \in (0,1)$ се такви што $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Докажи дека најмалку еден од броевите $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ е поголем или еднаков на $\frac{1}{4}$.

Решение. Од неравенството $(2a-1)^2 \ge 0$ следува $a(1-a) \le \frac{1}{4}$. Затоа

$$(xyz)^2 = (x(1-x))(y(1-y))(z(1-z)) \le \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{64}\text{, т.е. } xyz \le \tfrac{1}{8}\,.$$

Од неравенството $xyz \le \frac{1}{8}$ следува дека најмалку еден од броевите x,y,z е помал од $\frac{1}{2}$. Без ограничување на општоста нека $x \le \frac{1}{2}$. Тогаш $1-x \ge \frac{1}{2}$.

Нека претпоставиме дека

$$(1-x)y < \tfrac{1}{4}, (1-y)z < \tfrac{1}{4}, (1-z)x < \tfrac{1}{4}\,.$$

Тогаш

$$y < \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{1-x} \le \tfrac{1}{4}\cdot 2 = \tfrac{1}{2}\,,$$

па затоа $1-y > \frac{1}{2}$. Аналогно заклучуваме дека $z < \frac{1}{2}$ и $1-z > \frac{1}{2}$. Сега,

$$\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} \ge xyz = (1-x)(1-y)(1-z) > \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}\,,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

30. Докажи, дека ако a и b се реални броеви поголеми од -1, тогаш

$$\tfrac{1+a^6}{1+a}\cdot\tfrac{1+b^6}{1+b} \ge \tfrac{1+ab}{2}\cdot\tfrac{1+a^4b^4}{2}\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$(\frac{1+x^2}{1+x})^2 \geq \frac{1+x^2}{2}, \quad (\frac{1+x^3}{1+x})^2 = (1-x+x^2)^2 \geq \frac{1+x^4}{2},$$

(после сведување под заеднички именител и средување на изразот второто неравенство го добива обликот $(x-1)^4 \geq 0$). Од друга страна

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2,$$

па затоа

$$\frac{1+a^2}{1+a} \cdot \frac{1+b^2}{1+b} \geq \sqrt{\frac{1+a^2}{2} \cdot \frac{1+b^2}{2}} \geq \frac{1+ab}{2}$$

$$\frac{1+a^6}{1+a^2} \cdot \frac{1+b^6}{1+a^2} \geq \sqrt{\frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+b^8}{2}} \geq \frac{1+a^4b^4}{2}$$

и останува да ги помножиме овие неравенства. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=1$.

31. Определи ја најголемата можна вредност на збирот $z+x$ ако броевите x, y, zt ги задоволуваат условите

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z^2 + t^2 = 9, \quad xt + yz \geq 6.$$

Решение. Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned} 36 &= (x^2+y^2)(z^2+t^2) = x^2z^2 + y^2t^2 + x^2t^2 + y^2z^2 \\ &= x^2z^2 - 2xzyt + y^2t^2 + x^2t^2 + 2xzyt + y^2z^2 \\ &= (xz-yt)^2 + (xt+yz)^2 \geq 36 + (xz-yt)^2. \end{aligned}$$

Оттука следува $(xz-yt)^2 \leq 0$, па затоа $xz-yt=0$, т.е. $xz=yt$. Сега имаме

$$\begin{aligned} 13 &= x^2+y^2+z^2+t^2 = x^2+2xz+z^2+y^2-2xz+t^2 \\ &= (x+z)^2 + y^2 - 2yt + t^2 = (x+z)^2 + (y-t)^2 \\ &\geq (x+z)^2. \end{aligned}$$

Значи, $x+z \leq \sqrt{13}$. Оваа вредност се достигнува кога $y=t$ и $z^2-x^2=5$, т.е. $z-x=\frac{5}{\sqrt{13}}$, односно за $z=\frac{9\sqrt{13}}{13}$, $x=\frac{4\sqrt{13}}{13}$, $y=t=\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи, дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6 \geq 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}).$$

Решение. Ако на десната страна на неравенството $1-a, 1-b, 1-c$ ги замениме со $b+c, c+a, a+b$, соодветно добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+6\geq 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}),$$

$$(\frac{b+c}{a}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}}+2)+(\frac{c+a}{b}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}}+2)+(\frac{a+b}{c}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{c}}+2)\geq 0,$$

$$(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{\frac{c+a}{b}}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-\sqrt{2})^2\geq 0.$$

Последното неравенство очигледно важи, со што го докажавме бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$, од што заради $a+b+c=1$ следува $a=b=c=\frac{1}{3}$.

33. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=4$. Определи ја најмалата вредност на зиразот $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}$.

Решение. Ако земеме предвид дека за секои ненегативни реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a}{\sqrt{a+1}+1}\geq\frac{a}{\sqrt{a+b+c+1}+1}$$

и го искористиме условот $x+y+z=4$, добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}-3 &= (\sqrt{2x+1}-1)+(\sqrt{2y+1}-1)+(\sqrt{2z+1}-1)\\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{2y}{\sqrt{2y+1}+1}+\frac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}\\ &\geq \frac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1}=\frac{8}{\sqrt{9}+1}=2.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}\geq 5.$$

Но, во последното неравенство знак за равенство важи, на пример, за $x=4,\ y=z=0$, па заклучуваме дека бараната минимална вредност на изразот е 5.

34. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=4$. Определи ја најмалата вредност на изразот $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}$.

Решение. Ако земеме предвид дека за секои ненегативни реални броеви a,b,c важи $\frac{a}{\sqrt{a+1}+1}\geq\frac{a}{\sqrt{a+b+c+1}+1}$ и до искористиме условот $x+y+z=4$, добиваме

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}-3=(\sqrt{2x+1}-1)+(\sqrt{3y+1}-1)+(\sqrt{4z+1}-1)$$
$$\geq(\sqrt{2x+1}-1)+(\sqrt{2y+1}-1)+(\sqrt{2z+1}-1)$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{2y}{\sqrt{2y+1}+1}+\frac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}$$
$$\geq\frac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1}=\frac{8}{\sqrt{9}+1}=2.$$

Според тоа,

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}\geq 5\,.$$

Но, во последното неравенство знак за равенство важи, на пример, за $x=4,\ y=z=0$, па заклучуваме дека бараната минимална вредност на изразот е 5.

35. Определи ја 2005-тата цифра после децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$, каде $a=0,\underbrace{444...444}_{2005}$.

Решение. Имаме

$$a=0,\underbrace{444...444}_{2005}=\frac{4}{9}\cdot 0,\underbrace{999...999}_{2005}$$
$$=\frac{4}{9}\cdot(1-0,\underbrace{000...000}_{2004}1)=\frac{4}{9}\cdot(1-\frac{1}{10^{2005}}).$$

Ако го искористиме неравенството

$$(1-\frac{1}{10^{2005}})^2<1-\frac{1}{10^{2005}}<1\,,$$

добиваме

$$\sqrt{a}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(1-\frac{1}{10^{2005}})}=\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10^{2005}}}<\frac{2}{3}<0,\underbrace{666...666}_{2004}7$$

и

$$\sqrt{a}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(1-\frac{1}{10^{2005}})}=\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10^{2005}}}>\frac{2}{3}\sqrt{(1-\frac{1}{10^{2005}})^2}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{1}{10^{2005}})=\frac{2}{3}\cdot 0,\underbrace{999...999}_{2005}=0,\underbrace{666...666}_{2005}.$$

Од последните две неравества следува дека првите 2005 цифри после децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$ се еднакви на 6.

36. Докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+...+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}<1\,.$$

Решение. *Прв начин.* За произволни природни броеви $n\neq 1\neq m$ важи

$$\begin{aligned}
&(n-1)(m-1)\ge 1 \quad &\Rightarrow\\
&nm-n-m+1\ge 1 \quad &\Rightarrow\\
&nm-n-m\ge 0 \quad &\Rightarrow\\
&nm\ge n+m,
\end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $n=m=2$. Тогаш за $n\ge 2$, имаме

$$\frac{1}{n(2014-n)}<\frac{1}{n+2014-n}=\frac{1}{2014},$$

од каде добиваме:

$$\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+...+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}<\frac{2}{2013}+\frac{2011}{2014}<\frac{3}{2014}+\frac{2011}{2014}=1.$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+...+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}=\\
&=\frac{1}{2014}\left(\frac{1+2013}{1\cdot 2013}+\frac{2+2012}{2\cdot 2012}+\frac{3+2011}{3\cdot 2011}+...+\frac{2012+2}{2012\cdot 2}+\frac{2013+1}{2013\cdot 1}\right)\\
&=\frac{1}{2014}\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2013}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2012}\right)+...+\left(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2013}+\frac{1}{1}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2014}\cdot 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right)\\
&=\frac{1}{2014}\left(3+\frac{2}{3}+...+\frac{2}{2012}+\frac{2}{2013}\right)\\
&<\frac{1}{2014}(3+\underbrace{1+1+...+1}_{2011})=1.
\end{aligned}$$

I.3 ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВАТА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

1. Нека S е множество од n различни реални броеви, а A_S е множеството од аритметичките средини на паровите броеви од S. За дадено $n\ge 2$ определи го најмалиот можен број елементи во множеството A_S.

Решение. Нека $x_1<x_2<...<x_n$, $x_i\in S$, за $i=1,2,...,n$. Тогаш

$$\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{x_1+x_3}{2}<...<\frac{x_1+x_n}{2}<\frac{x_2+x_n}{2}<\frac{x_3+x_n}{2}<...<\frac{x_{n-1}+x_n}{2}.$$

Во горните неравенства има $2n-3$ броеви, па значи бројот на елементите на A_S е поголем или еднаков на $2n-3$. Од друга страна, за $S=\{1,2,...,n\}$ имаме $A_S=\{\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2},...,\frac{2n-1}{2}\}$ што значи дека множеството A_S има $2n-3$ елементи.

Значи, најмалиот можен број елементи на A_S е $2n-3$.

2. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}},\; x>0 .$$

Решение. Ја воведуваме смената $x+\frac{1}{x}=t$. Тогаш

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=t^3-3t,$$
$$x^6+\frac{1}{x^6}=(x^3+\frac{1}{x^3})^2-2=(t^3-3t)^2-2=t^6-6t^4+9t^2-2,$$

па затоа

$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}}=\frac{t^6-(t^6-6t^4+9t^2-2)-2}{t^3+t^3-3t}=\frac{6t^4-9t^2}{2t^3-3t}$$
$$=3t=3(x+\frac{1}{x})\geq 3\cdot 2=6.$$

Значи, најмалата вредност на изразот е $A=6$ и таа се достигнува за $x=1$.

3. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3(a+b+c) .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} a^2b^2+b^2c^2&\geq 2ab^2c\\ b^2c^2+c^2a^2&\geq 2abc^2\\ c^2a^2+a^2b^2&\geq 2a^2bc. \end{aligned}\tag{1}$$

Ако ги собереме последните равенства, добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c) .$$

Во последното равенство на двете страни додаваме $2abc(a+b+c)$ и добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\geq 3abc(a+b+c)$$
$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c).$$

Според тоа, ако го искористиме условот $ab+bc+ca=1$, од последното равенство добиваме

$$ab+bc+ca=(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$
$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c} \geq 3(a+b+c).$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во равенствата (1) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $ab=bc=ca$, што значи ако и само ако $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a} \leq \tfrac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот на задачата, нераveството меѓу аритметичката и геометриската средина и познатото неравенство

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2,$$

последователно следува

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a} &= \tfrac{c}{ac+bc}+\tfrac{a}{ab+ac}+\tfrac{b}{bc+ab} = \tfrac{c\cdot abc}{ac+bc}+\tfrac{a\cdot abc}{ab+ac}+\tfrac{b\cdot abc}{bc+ab}\\ &= \tfrac{ac\cdot bc}{ac+bc}+\tfrac{ab\cdot ac}{ab+ac}+\tfrac{bc\cdot ab}{bc+ab} \leq \tfrac{ac+bc}{4}+\tfrac{ab+ac}{4}+\tfrac{ab+bc}{4}\\ &= \tfrac{ab+bc+ca}{2} \leq \tfrac{a^2+b^2+c^2}{2}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

5. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=1$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот

$$A(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}.$$

Решение. Имаме

$$A(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x} \geq x\sqrt{1}+y\sqrt{1}=x+y=1$$

и како $A(1,0)=1\cdot\sqrt{1+0}+0\cdot\sqrt{1+1}=1$, заклучуваме дека најмалата вредност на изразот $A(x,y)$ е 1.

Имаме $A(x,y) \geq 1 > 0$. Од условот на задача и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}A^2(x,y) &= (x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x})^2\\ &= x^2(1+y)+y^2(1+x)+2xy\sqrt{(1+x)(1+y)}\\ &= x^2+y^2+x^2y+y^2x+2xy\sqrt{1+x+y+xy}\end{aligned}$$

$$=(x+y)^2-2xy+xy(x+y)+2xy\sqrt{1+(x+y)+xy}$$
$$=1-xy+2xy\sqrt{2+xy}=1+xy(2\sqrt{2+xy}-1)$$
$$\leq 1+(\tfrac{x+y}{2})^2(2\sqrt{2+(\tfrac{x+y}{2})^2}-1)=1+\tfrac{1}{4}(2\sqrt{2+\tfrac{1}{4}}-1)=\tfrac{3}{2}$$

па затоа $A(x,y)\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$. Но, $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$, што значи дека најголемата вредност на изразот $A(x,y)$ е $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

6. Нека x и y се реални броеви такви што $x(4-3x)+y(4-3y)=3xy$. Докажи, дека

$$0\leq x+y\leq\tfrac{16}{9}.$$

Решение. Даденото равенство да го запишеме во видот

$$4(x+y)=3(x^2+xy+y^2).$$

Од

$$x^2+xy+y^2=(x+\tfrac{1}{2}y)^2+\tfrac{3}{4}y^2\geq 0$$

следува $x+y\geq 0$. Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$4(x+y)=3((x+y)^2-xy)=3(x+y)^2-3xy\geq 3(x+y)^2-3(\tfrac{x+y}{2})^2,$$

па затоа

$$9(x+y)^2\leq 16(x+y).$$

Конечно, ако $x+y>0$, тогаш од последното неравенство следува $x+y\leq\frac{16}{9}$, а ако $x+y=0$, тогаш тврдењето е очигледно.

7. Нека x,y се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$4x^4+4y^3+5x^2+y+1\geq 12xy.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$4x^4+1\geq 4x^2 \quad\text{и}\quad 4y^3+y=y(4y^2+1)\geq 4y^2.$$

Затоа

$$4x^4+4y^3+5x^2+y+1\geq 4x^2+4y^2+5x^2=9x^2+4y^2$$
$$\geq 2\sqrt{9x^2 4y^2}=12xy.$$

8. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи, дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Имаме

$$a+b+c-\frac{a}{b^2+1}-\frac{b}{c^2+1}-\frac{c}{a^2+1}=\frac{b}{b^2+1}ab+\frac{c}{c^2+1}bc+\frac{a}{a^2+1}ca$$
$$\leq\frac{ab+bc+ca}{2}\leq\frac{(a+b+c)^2}{6}$$

и останува да искористиме дека $a+b+c=3$.

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви, за кои е исполнето неравенството $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leq 4$. Докажи дека

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geq 3.$$

Решение. Даденото неравенство во условот е еквивалентно на неравенството

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\leq 2.$$

Ќе докажеме дека

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2}+\frac{2bc+2}{(b+c)^2}+\frac{2ca+2}{(c+a)^2}\geq 6. \qquad (1)$$

Имаме

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2}\geq\frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}=1+\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}.$$

Ако го собереме последното неравенство со соодветните неравенства за другите два собирци на левата страна во (1) добиваме

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2}+\frac{2bc+2}{(b+c)^2}+\frac{2ca+2}{(c+a)^2}\geq 3+\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}.$$

Според тоа, треба да докажеме дека

$$\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\geq 3.$$

Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина.

10. Нека a,b,c се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме,

$$\left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\right)^3 \ge \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}. \qquad (1)$$

Но, $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc$ и

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \ge (a+b)(b+c)(c+a),$$

па затоа

$$\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{3^3 \cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) се добива бараното неравенство.

11. Нека $a_i, i=1,2,...,n, (n \ge 2)$ се позитивни броеви такви што $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Докажи дека

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+...+a_{n-1}} \ge \frac{n}{2n-1}.$$

Решение. За секој $i=1,2,...,n$ важи

$$\frac{a_i}{1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n} = \frac{a_i}{2-a_i} = \frac{2}{2-a_i} - 1,$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n} \ge \frac{n^2}{2n-1}.$$

Ставаме $x_i = 2-a_i, i=1,2,...,n$ и добиваме

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n} \ge \frac{n^2}{2n-1},$$

каде $x_i > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2n - \sum_{i=1}^{n} a_i = 2n-1$. Според тоа, неравенството е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и хармонсиката средина

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}.$$

12. Докажи, дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2+3n+1)^n \ge 6^n (n!)^2.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n} \ge \sqrt[n]{(n!)^2}.$$

Од друга страна, ако го искористиме познатото равенство

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

добиваме дека горното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\frac{2n^2+3n+1}{6}\geq\sqrt[n]{(n!)^2},$$

кое пак е еквивалентно на бараното неравенство.

13. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\leq 1$.

Докажи дека

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\geq 125.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата добиваме

$$\frac{a}{1+a}=1-\frac{1}{1+a}\geq\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{2}{\sqrt{(1+b)(1+c)}}$$

$$\frac{b}{1+b}=1-\frac{1}{1+b}\geq\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+a}\geq\frac{2}{\sqrt{(1+c)(1+a)}} \text{ и}$$

$$\frac{c}{1+c}=1-\frac{1}{1+c}\geq\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}.$$

Последните три неравенства ги множиме и после средувањето добиваме дека

$$abc\geq 8. \tag{1}$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и неравенството (1) следува

$$\begin{aligned}(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)&=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2\\&\geq 1+3(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}}+3(a^4b^4c^4)^{\frac{1}{3}}+a^2b^2c^2\\&\geq 1+3\cdot 4+3\cdot 4^2+8^2=125.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=2$.

14. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3.$$

Решение. Од неравенствата $a^2+1\geq 2a, b^2+1\geq 2b, c^2+1\geq 2c$ следува

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\geq 3.$$

Ако на двете страни во последното неравенство додадеме 6, го добиваме еквивалентното неравенство

$$(2a+2b+2c)(\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a}+\tfrac{1}{a+b})\geq 9\,. \qquad (1)$$

Воведуваме смени $x=b+c, y=c+a, z=b+a$, па неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})\geq 9\,,$$

т.е. со неравенството меѓу аритметичката и хармониската среднина, со што доказот е завршен.

15. Нека $x_1,x_2,...,x_{2017}$ се позитивни реални броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{2017} x_i=1$.

Определи ја најмалата константа K таква што

$$K\sum_{i=1}^{2017}\frac{x_i^2}{1-x_i}\geq 1\,.$$

Решение. Ќе го разгледаме општиот случај кога $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1$. Имаме

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2-1}{1-x_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}=\sum_{i=1}^{n}(-1-x_i)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}=-n-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\,.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\geq\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}=\frac{n^2}{n-1}\,,$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-x_i}\geq -n-1+\frac{n^2}{n-1}=\frac{1}{n-1}\,.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=...=x_n$. Според тоа, најмалата константа K таква што

$$K\sum_{i=1}^{2017}\frac{x_i^2}{1-x_i}\geq 1$$

е $k=2017-1=2016$.

16. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}+\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\le\frac{1}{4}. \qquad (*)$$

Решение. Прво да забележиме дека од условот и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $a>1, b>1, c>1$ и $a-1=a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge\frac{2a}{\sqrt{bc}}$. Аналогно добиваме $b-1\ge\frac{2b}{\sqrt{ca}}$ и $c-1\ge\frac{2c}{\sqrt{ab}}$. Последните три равенства ги множиме и го добиваме неравенството

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}\le\frac{1}{8}. \qquad (1)$$

Понатаму, $\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a-1}}$, па затоа $a+1\ge2\sqrt{2(a-1)}$. Аналогно ги добиваме неравенствата $b+1\ge2\sqrt{2(b-1)}$ и $c+1\ge2\sqrt{2(c-1)}$. Последните три неравенства ги множиме и ако го искористиме неравенството (1) добиваме

$$(a+1)(b+1)(c+1\ge16\sqrt{2(a-1)(b-1)(c-1)}\ge16\sqrt{2\cdot8}=64,$$

од каде следува дека

$$\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\le\frac{1}{8}. \qquad (2)$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1) и (2) го добиваме неравенството (*).

17. Нека a,b,c е позитивни реални броеви, такви што

$$a+b+c=1.$$

Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\ge3.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sqrt{(a+2b)(b+2a)}\le\frac{a+2b+b+2a}{2}=\frac{3(a+b)}{2},$$

па затоа

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}\ge\frac{2}{3(a+b)}. \qquad (1)$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}\ge\frac{2}{3(b+c)} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\ge\frac{2}{3(a+c)}. \qquad (3)$$

Ако ги собереме неравенствата (1), (2) и (3) добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right). \quad (4)$$

Сега, прво од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, а потоа од условот $a+b+c=1$ следува

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 2\cdot\frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{a+b}}+\frac{1}{\frac{1}{b+c}}+\frac{1}{\frac{1}{c+a}}}=\frac{3}{a+b+c}=3. \quad (5)$$

Конечно, од неравенствата (4) и (5) следува бараното неравенство.

Јасно, знак за равенство следува ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

18. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи дека важи неравенството

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1.$$

Решение. Јасно, $1+b-c=a+2b>0$, а слично и $1+c-a>0$ и $1+a-b>0$.

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1+1+(1+b-c)}{3}\geq\sqrt[3]{1+b-c}$$

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\leq a\frac{3+b-c}{3}=a+\frac{ab-ac}{3}.$$

Аналогно добиваме

$$b\sqrt[3]{1+c-a}\leq b+\frac{bc-ba}{3}, \qquad c\sqrt[3]{1+a-b}\leq c+\frac{ca-cb}{3}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме условот $a+b+c=1$, го добиваме бараното неравенство.

19. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c\leq 3$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)\\&\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{a+b+c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{(a+2)+(b+2)+(c+2)}\geq\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=2.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$, па затоа бараната најмала вредност е 2.

20. Определи го најголемиот реален број k , за кој неравенството

$$(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a}) \le (\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})(\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c})$$

е исполнето за произволни позитивни реални броеви.

Решение. За $a=b=c$ добиваме $k \le \sqrt[3]{9}-1$. Ќе докажеме, дека $k=\sqrt[3]{9}-1$ е бараниот број.

За $A=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $B=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $A \ge 3$ и $B \ge 3$. Понатаму, за секој реален број $k \ge 0$ точни се неравенствата

$$9(k^3+1) \le (k^3+1)AB,\ 9k^2A \le 3k^2AB,\ 9kB \le 3kAB\,.$$

Ако ги собереме горните неравенства добуваме

$$9(k^3+k^2A+kB+1) \le (k+1)^3 AB \qquad \Leftrightarrow$$

$$9(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a}) \le (k+1)^3 AB\,,$$

кое за $k=\sqrt[3]{9}-1$ е еквивалентно на даденото неравенство.

21. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a} \ge 0\,.$$

Решение. Неравенството е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-a^3b^2c-b^3c^2a-c^3a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 0\,,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \ge a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b\,. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу срединитe следува

$$a^3b^3+a^3b^3+a^3c^3 \ge 3\sqrt[3]{a^3b^3 \cdot a^3b^3 \cdot a^3c^3} = 3a^3b^2c\,.$$

Конечно, ако ги собереме аналогните циклични неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

22. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xy+yz+zx=3xyz$. Докажи, дека

$$x^2y+y^2z+z^2x \ge 2(x+y+z)-3\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Равенството од условот е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3. \tag{1}$$

Од неравенството меѓу средините следува $x^2y+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{x^2y\cdot\frac{1}{y}}=2x$ и аналогно добиваме $y^2z+\frac{1}{z}\geq 2y$ и $z^2x+\frac{1}{x}\geq 2x$. Ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме равенството (1) го добиваме бараното неравенство.

Знак за равенство важи ако и само ако $x^2y=\frac{1}{y}$, $y^2z=\frac{1}{z}$ и $z^2x=\frac{1}{x}$, од каде лесно следува $x=y=z=1$.

23. Докажи, дека за позитивните реални броеви a,b,c,d,e важи неравенството

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{d}+\frac{a}{e}\leq(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4}{4}\leq\sqrt[4]{(\frac{a}{b})^4\cdot(\frac{b}{c})^4\cdot(\frac{c}{d})^4\cdot(\frac{d}{e})^4}=\frac{a}{e}$$

$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\leq\sqrt[4]{(\frac{a}{b})^4\cdot(\frac{b}{c})^4\cdot(\frac{c}{d})^4\cdot(\frac{e}{a})^4}=\frac{e}{d}$$

$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\leq\sqrt[4]{(\frac{a}{b})^4\cdot(\frac{b}{c})^4\cdot(\frac{d}{e})^4\cdot(\frac{e}{a})^4}=\frac{d}{c}$$

$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\leq\sqrt[4]{(\frac{a}{b})^4\cdot(\frac{c}{d})^4\cdot(\frac{d}{e})^4\cdot(\frac{e}{a})^4}=\frac{c}{b}$$

$$\frac{(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\leq\sqrt[4]{(\frac{b}{c})^4\cdot(\frac{c}{d})^4\cdot(\frac{d}{e})^4\cdot(\frac{e}{a})^4}=\frac{b}{a}.$$

Ако ги собереме овие неравенства го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=d=e$.

24. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{32y}+\frac{2}{z}$, каде x,y и z се позитивни реални броеви.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{32y}+\frac{2}{z}&=x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{64y}+\frac{3z^2}{64y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}\\&\geq 8\cdot\sqrt[8]{x\cdot\frac{y^2}{9x}\cdot\frac{3z^2}{64y}\cdot\frac{3z^2}{64y}\cdot\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{2z}}\geq 8\cdot\sqrt[8]{\frac{1}{2^{16}}}=8\cdot\frac{1}{2^2}=2.\end{aligned}$$

Најмалата вредност на дадениот израз се достигнува ако и само ако $x=\frac{y^2}{9x}=\frac{3z^2}{64y}=\frac{1}{2z}$, т.е. ако и само ако $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{4}$, $z=2$.

25. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq 1.$$

Решение. Воведуваме смени $a=x^3, b=y^3, c=z^3$. Јасно $xyz=\sqrt[3]{abc}=1$. Од неравеството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} a+b+1 &= x^3+y^3+xyz=(x+y)(x^2-xy+y^3)+xyz \\ &\geq (x+y)(2xy-xy)+xyz \\ &= xy(x+y)+xyz=xy(x+y+z) \\ &= \frac{x+y+z}{z}, \end{aligned}$$

па затоа

$$\frac{1}{a+b+1}\leq \frac{z}{x+y+z}.$$

Аналогно добиваме

$$\frac{1}{b+c+1}\leq \frac{x}{x+y+z} \text{ и } \frac{1}{c+a+1}\leq \frac{y}{x+y+z}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq \frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}=1.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

26. Докажи, дека за секои реални броеви x,y и z важи

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geq 0.$$

Решение. Ако на двете страни на даденото неравенство додадеме 3 добиваме дека тоа е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}+\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}+\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 3.$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}+\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}+\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{x^2+y^2+1}{2x^2+1}\cdot\frac{y^2+z^2+1}{2y^2+1}\cdot\frac{z^2+x^2+1}{2z^2+1}\geq 1. \qquad (1)$$

Повторно од неравеството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x^2+y^2+1=x^2+\tfrac{1}{2}+y^2+\tfrac{1}{2}\geq 2\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{2})(y^2+\tfrac{1}{2})}=\sqrt{(2x^2+1)(2y^2+1)}$$

$$y^2+z^2+1=y^2+\tfrac{1}{2}+z^2+\tfrac{1}{2}\geq 2\sqrt{(y^2+\tfrac{1}{2})(z^2+\tfrac{1}{2})}=\sqrt{(2y^2+1)(2z^2+1)}$$

$$z^2+x^2+1=z^2+\tfrac{1}{2}+x^2+\tfrac{1}{2}\geq 2\sqrt{(z^2+\tfrac{1}{2})(x^2+\tfrac{1}{2})}=\sqrt{(2z^2+1)(2x^2+1)}.$$

Конечно, ако ги помножиме последните три неравенства добиваме неравенство кое е еквивалентно со неравенството (1).

27. Нека $a,b,$ и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c\leq 3abc$. Докажи, дека

$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\leq a+b+c.$$

Решение. Бидејќи $a+b+c>0$ условот $a+b+c\leq 3abc$ е еквивалентен со неравенството

$$(a+b+c)^2\leq 3abc(a+b+c).$$

Сега од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}3abc(a+b+c)&\geq(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&=\tfrac{a^2+b^2}{2}+\tfrac{b^2+c^2}{2}+\tfrac{c^2+a^2}{2}+2(ab+bc+ca)\\&\geq\tfrac{2ab}{2}+\tfrac{2bc}{2}+\tfrac{2ca}{2}+2(ab+bc+ca)\\&=3(ab+bc+ca),\end{aligned}$$

т.е. $3abc(a+b+c)\geq 3(ab+bc+ca)$. Ако последното неравенство го поделиме со $abc>0$ го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$ и $a+b+c=3abc$, т.е. ако и само ако $a=b=c=1$.

28. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc(a+b+c)=3$. Докажи, дека

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8.$$

Решение. Од условот на задачата следува $a+b+c=\frac{3}{abc}$, па затоа

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(b(a+b+c)+ac)(c+a)$$

$$= (\frac{3}{ac} + ac)(c+a)$$
$$= (\frac{1}{ac} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ac} + ac)(c+a).$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (\frac{1}{ac} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ac} + ac)(c+a) \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{ac}{(ac)^3}} \cdot 2\sqrt{ac} = 8 .$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{1}{ac} = ac$ и $a = c$, т.е. ако и само ако $a = b = c = 1$.

29. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2} + \frac{1}{b^5+c^5+a^2} + \frac{1}{c^5+a^5+b^2} \leq 1 .$$

Решение. Прво да забележиме дека

$$a^5 + b^5 \geq ab(a^3 + b^3) . \tag{1}$$

Навистина,

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 \geq ab(a^3 + b^3) \quad &\Leftrightarrow \quad a^5 - a^4 b - ab^4 + b^5 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^4(a-b) - b^4(a-b) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a-b)(a^4 - b^4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a-b)^2(a^2 + b^2)(a+b) \geq 0. \end{aligned}$$

Од $abc = 1$ следува дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{a^5+b^5+abc^3} + \frac{1}{b^5+c^5+bca^3} + \frac{1}{c^5+a^5+cab^3} \leq 1.$$

Од (1) следува дека важи

$$a^5 + b^5 + abc^3 \geq ab(a^3 + b^3 + c^3) ,$$

и точни се аналогните две неравенства. Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува :

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2} + \frac{1}{b^5+c^5+a^2} + \frac{1}{c^5+a^5+b^2} \leq \frac{1}{a^3+b^3+c^3}(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}) = \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$
$$\leq \frac{a+b+c}{\frac{(a+b+c)^3}{9}} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \leq \frac{9}{(3\sqrt[3]{abc})^2} = 1.$$

30. За позитивните реални броеви x, y, z важи $x \leq 2, y \leq 3, x + y + z = 11$. Докажи, дека $\sqrt{xyz} \leq 6$.

Решение. Броевите x, y, z се позитивни, па затоа доволно е да докажеме дека $xyz \le 36$. Од условот на задачата имаме $z = 11 - x - y$, па затоа доволно е да го докажеме неравенството $xy(11 - x - y) \le 36$, кое е еквивалентно со неравенството

$$36 + x^2y + y^2x - 11xy \ge 0.$$

Ако ги искористиме неравенствата $x \le 2, y \le 3$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина последователно добиваме

$$\begin{aligned}36 + x^2y + y^2x - 11xy &= (x^2y + 12) + (y^2x + 18) + 6 - 11xy \\ &= (x^2y + 4 \cdot 3) + (y^2x + 9 \cdot 2) + 2 \cdot 3 - 11xy \\ &\ge (x^2y + 4y) + (y^2x + 9x) + xy - 11xy \\ &\ge 2\sqrt{x^2y \cdot 4y} + 2\sqrt{y^2x \cdot 9x} - 10xy \\ &= 4xy + 6xy - 10xy = 0,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = 2, y = 3$.

31. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 1.$$

Докажи, дека

$$ab + bc + ca \le \tfrac{3}{4}.$$

Решение. Да означиме $s = a + b + c$. Тогаш условот на задачата можеме да го запишеме во видот

$$\begin{aligned}1 &= (s - a)(s - b)(s - c) \\ &= s^3 - (a + b + c)s^2 + (ab + bc + ca)s - abc \\ &= (ab + bc + ca)s - abc,\end{aligned}$$

од каде добиваме

$$ab + bc + ca = \tfrac{1+abc}{a+b+c}.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a + b + c = \tfrac{1}{2}((a + b) + (b + c) + (c + a)) \ge \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)} = \tfrac{3}{2}$$

и

$$1 = (a + b)(b + c)(c + a) \ge 8\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = 8abc.$$

Од последните две неравенства следува $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{2}{3}$ и $abc \le \frac{1}{8}$, па затоа

$$ab+bc+ca=\frac{1+abc}{a+b+c}\leq\frac{2}{3}\cdot(1+\frac{1}{8})=\frac{3}{4}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{2}$.

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2\geq\frac{3}{2}(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}).$$

Решение. Ја воведуваме смената $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$, при што важи $xyz=1$ и даденото неравенство го добива видот

$$(x+y+z)^2\geq\frac{3}{2}(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}). \qquad (1)$$

Од друга страна, ако искористиме дека $xyz=1$, добиваме

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}).$$

Од последното равенство и од (1) следува дека за да го докажеме даденото неравенство треба да докажеме дека

$$2x^2+\frac{1}{x}+2y^2+\frac{1}{y}+2z^2+\frac{1}{z}\geq 3x+3x+3z. \qquad (2)$$

Меѓутоа, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2x^2+\frac{1}{x}=x^2+x^2+\frac{1}{x}\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}}=3x,$$

и аналогно $2y^2+\frac{1}{y}\geq 3y, 2z^2+\frac{1}{z}\geq 3z$, па ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (2). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x^2=\frac{1}{x}, y^2=\frac{1}{y}, z^2=\frac{1}{z}$, т.е. ако и само ако $x=y=z=1$, односно ако и само ако $a=b=c$.

33. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab}\leq 0.$$

Решение. Броевите $2a^2+bc, 2b^2+ca, 2c^2+ab$ се позитивни, па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^2-bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)+(b^2-ca)(2a^2+bc)(2c^2+ab)+$$
$$+(c^2-ab)(2a^2+bc)(2b^2+ca)\leq 0.$$

После множењето и средувањето на изразот на десната страна го добиваме еквивалентното неравенство

$$9a^2b^2c^2 - 3abc^4 - 3ab^4c - 3a^4bc \le 0 .$$

Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на броевите abc^4, ab^4c и a^4bc. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

34. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c \ge abc$. Докажи, дека $a^2+b^2+c^2 \ge abc\sqrt{3}$.

Решение. Прво од неравенстото меѓу аритметиочката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge \tfrac{1}{9}(a+b+c)^4 \ge 3(\tfrac{a+b+c}{3})^3(a+b+c)$$
$$\ge 3abc(a+b+c) \ge 3(abc)^2,$$

т.е. $a^2+b^2+c^2 \ge abc\sqrt{3}$.

35. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc = 2017$. Докажи, дека

$$\tfrac{a+b}{a^2+b^2} + \tfrac{b+c}{b^2+c^2} + \tfrac{c+a}{c^2+a^2} \le \tfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}} .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако прво го искористиме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и на крајот условот $abc = 2017$, последователно добиваме

$$\tfrac{a+b}{a^2+b^2} + \tfrac{b+c}{b^2+c^2} + \tfrac{c+a}{c^2+a^2} \le \tfrac{2}{a+b} + \tfrac{2}{b+c} + \tfrac{2}{c+a} \le \tfrac{1}{\sqrt{ab}} + \tfrac{1}{\sqrt{bc}} + \tfrac{1}{\sqrt{ca}}$$
$$= \tfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} + \tfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{abc}} + \tfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{abc}} = \tfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{2017}} + \tfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2017}} + \tfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{2017}}$$
$$= \tfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$, а ако замениме во $abc = 2017$, добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = \sqrt[3]{2017}$.

36. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ се такви што

$$a^2+b^2+c^2 = 3 .$$

Докажи дека

$$\frac{a}{3c(a^2-ab+b^2)}+\frac{b}{3a(b^2-bc+c^2)}+\frac{c}{3b(c^2-ca+a^2)}\le\frac{1}{abc}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $(a-b)^2\ge 0$ следува $a^2-ab+b^2\ge ab$, па затоа

$$\frac{a}{3c(a^2-ab+b^2)}\le\frac{a}{3cab}=\frac{1}{abc}\cdot\frac{a}{c}.$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{b}{3a(b^2-bc+c^2)}\le\frac{1}{abc}\cdot\frac{b}{3},\ \frac{c}{3b(c^2-ca+a^2)}\le\frac{1}{abc}\cdot\frac{c}{3}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства, а потоа ги искористиме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и условот на задчата добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a}{3c(a^2-ab+b^2)}+\frac{b}{3a(b^2-bc+c^2)}+\frac{c}{3b(c^2-ca+a^2)}&\le\frac{1}{abc}\cdot\frac{a+b+c}{3}\\&\le\frac{1}{abc}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\\&=\frac{1}{abc}\sqrt{\frac{3}{3}}=\frac{1}{abc}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство во $(a-b)^2\ge 0$, $(b-c)^2\ge 0$, $(c-a)^2\ge 0$ и во неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

37. Нека a,b,c,d,e и f се реални броеви такви што

$$a+b+c+d+e+f=10$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2+(f-1)^2=6.$$

Определи ја најголемата вредност која може да ја прими бројот f.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a+b+c+d+e+f=10 \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=20.$$

Тогаш, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$10-f=a+b+c+d+e\le 5\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{2}}=\sqrt{5(20-f^2)},$$

па затоа $2f(3f-10)\le 0$. Според тоа, бараната максимална вредност на f е $f_{\max}=\frac{10}{3}$ и се достигнува кога $a=b=c=d=e=\frac{4}{3}$.

38. Дадени се позитивните реални броеви a,b,c,d такви што

$$2(a+b+c+d)\ge abcd.$$

Докажи, дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \ge abcd .$$

Решение. Можни се два случаја.

Прв случај. Нека $abcd \ge 16$. Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина следува

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 4(\tfrac{a+b+c+d}{4})^2 \ge 4(\tfrac{abcd}{8})^2 \ge \tfrac{(abcd)^2}{16} \ge abcd .$$

Втор случај. Нека $abcd < 16$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 4\cdot\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} \ge \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd .$$

39. Определи ја најголемата вредност на изразот $a+b+c+abc$, каде a,b и c се ненегативни броеви такви што важи $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Решение. Условот на задачата не може да важи ако $a^2+b^2+c^2<3$. Навистина, тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $3(abc)^{\frac{2}{3}} \le a^2+b^2+c^2<3$, т.е. $abc<1$, па затоа ќе важи $a^2+b^2+c^2+abc<4$. Според тоа, $a^2+b^2+c^2 \ge 3$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$a+b+c+abc \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+abc \le a^2+b^2+c^2+abc=4 .$$

Во последното неравенство важи знак за равенство ако и само ако $a=b=c=1$, па значи бараната најголема вредност е 4.

40. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи, дека

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\tfrac{1}{1+a}+\tfrac{1}{1+b}+\tfrac{1}{1+c} \ge 3. \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{1}{2\sqrt{bc}} \ge \frac{1}{1+bc}$. Според тоа,

$$\tfrac{\sqrt{a}}{2}+\tfrac{1}{1+a} = \tfrac{1}{2\sqrt{bc}}+\tfrac{1}{1+a} \ge \tfrac{1}{1+bc}+\tfrac{1}{1+a} = \tfrac{1}{1+\frac{1}{a}}+\tfrac{1}{1+a}=1 .$$

На ист начин се докажува дека

$$\tfrac{\sqrt{b}}{2}+\tfrac{1}{1+b} \ge 1 \text{ и } \tfrac{\sqrt{c}}{2}+\tfrac{1}{1+c} \ge 1 .$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако

$$1=\sqrt{bc}\,,\ 1=\sqrt{ac}\ \text{ и }\ 1=\sqrt{ab}\,,$$

т.е. ако и само ако $a=1$, $b=1$ и $c=1$.

41. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\sqrt{2a(a+b)}\leq\frac{3a+b}{2}$, па затоа $a(a+b)\leq\frac{(3a+b)^2}{8}$. Аналогно се добиваат неравенствата

$$b(b+c)\leq\frac{(3b+c)^2}{8}\ \text{ и }\ c(c+a)\leq\frac{(3c+a)^2}{8}\,.$$

Оттука следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}\,. \qquad (1)$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$\sqrt{\frac{\frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}}{3}}\geq\frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3}$$

од кое после квадрирањето и множењето со 3 и од неравенството (1) добиваме

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{(\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a})^2}{3}\,. \qquad (2)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3}\geq\frac{3}{\frac{3a+b}{4}+\frac{3b+c}{4}+\frac{3c+a}{4}}=\frac{3}{a+b+c}\,.$$

Конечно, од неравенството (2) и последното неравенство следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{(\frac{9}{a+b+c})^2}{3}=\frac{27}{(a+b+c)^2}\,,$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

42. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)\,, \qquad (1)$$

а од неравенството меѓу артиметичката и геометриската средина имаме

$$4abc \le 2c(a^2+b^2)\,. \qquad (2)$$

Ги собираме неравенствата (1) и (2) и добиваме

$$(a+b)^2 + 4abc \le 2(a^2+b^2)(c+1)\,,$$

од каде го добиваме неравенството

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} \ge \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}\,. \qquad (3)$$

Понатаму, од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \frac{a^2+b^2}{2} \ge 2\sqrt{\frac{2}{c+1}} = \frac{4}{\sqrt{2(c+1)}} \qquad (4)$$

и $\frac{c+3}{8} = \frac{(c+1)+2}{8} \ge \frac{\sqrt{2(c+1)}}{4}$, т.е.

$$\frac{4}{\sqrt{2(c+1)}} \ge \frac{8}{c+3}\,. \qquad (5)$$

Сега од (3), (4) и (5) добиваме

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{8}{c+3}\,.$$

Конечно, ако го собереме последното неравенство со аналогните неравенства го добиваме бараното неравенство.

43. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1) \ge$$
$$\ge 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

Решение. Ќе искористиме дека за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^3+1)(x^2+x+x)\,, \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$a^3+1 \ge 2\sqrt{a^3\cdot 1} = 2\sqrt{a^3}$$
$$b^3+1 \ge 2\sqrt{b^3\cdot 1} = 2\sqrt{b^3}$$

$$c^3+1\geq 2\sqrt{c^3\cdot 1}=2\sqrt{c^3}$$

Ако ги помножиме последните три неравенства добиваме

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geq 8\sqrt{a^3b^3c^3}=8\sqrt{(abc)^3}=8\,. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)=$$
$$=(a^3+1)(a^2+a+1)(b^3+1)(b^2+b+1)(c^3+1)(c^2+c+1)$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$a^3=b^3=c^3=1,$$

т.е. ако и само ако $a=b=c=1$.

44. Нека a,b,c се позитивни реалнио броеви такви што $abc=1$.Докажи дека

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\geq 3(a+b+c+1)\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* Од неравенството

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

добиваме

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\geq(a+\tfrac{1}{b})(b+\tfrac{1}{c})+(b+\tfrac{1}{c})(c+\tfrac{1}{a})+(c+\tfrac{1}{a})(a+\tfrac{1}{b})$$
$$=(ab+1+\tfrac{a}{c}+a)+(bc+1+\tfrac{b}{a}+b)+(ca+1+\tfrac{c}{b}+c)$$
$$=ab+bc+ca+\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{b}{a}+3+a+b+c.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$ab+\tfrac{b}{a}\geq 2b,\ bc+\tfrac{c}{b}\geq 2c \text{ и } ca+\tfrac{a}{c}\geq 2a\,.$$

Така,

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\geq(ab+\tfrac{b}{a})+(bc+\tfrac{c}{b})+(ca+\tfrac{a}{c})+3+a+b+c$$
$$\geq 3(a+b+c+1).$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Втор начин. Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина следува

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\geq\frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}\,, \qquad (1)$$

а од неравенството меѓу аритемтичката и геометриската средина имаме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3. \qquad (2)$$

Сега од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq \frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}\geq\frac{(a+b+c+3)^2}{3}\\ &=\frac{(a+b+c)(a+b+c)+6(a+b+c)+9}{3}\\ &\geq\frac{(a+b+c)3\sqrt[3]{abc}+6(a+b+c)+9}{3}\\ &=\frac{9(a+b+c)+9}{3}=3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Трет начин. Користејќи го неравенството $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &= a^2+b^2+c^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\\ &\geq ab+ac+bc+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}.\end{aligned}$$

Јасно,

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{abc}{bc}+\frac{abc}{ca}+\frac{abc}{ab}=a+b+c$$

$$ab+\frac{a}{b}+bc+\frac{b}{c}+ca+\frac{c}{a}\geq 2a+2b+2c$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=3$$

Затоа

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (ab+\tfrac{a}{b})+(bc+\tfrac{b}{c})+(ca+\tfrac{c}{a})+a+b+c+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}\\ &\geq 2a+2b+2c+a+b+c+3=3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$

Четврт начин. Со замената $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$(\tfrac{x}{y}+\tfrac{z}{y})^2+(\tfrac{y}{z}+\tfrac{x}{z})^2+(\tfrac{z}{x}+\tfrac{y}{x})^2\geq 3(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{x}+1)$$

$$(x+z)^2x^2z^2+(y+x)^2y^2x^2+(z+y)^2z^2y^2\geq 3xyz(x^2z+y^2x+z^2y+xyz)$$

$$\begin{aligned}x^4z^2+2x^3z^3+x^2z^4+x^2y^4+2x^3y^3+x^4y^2+y^2z^4+2y^3z^3+y^4z^2 &\geq\\ \geq 3x^3yz^2+3x^2y^3z+3xy^2z^3+3x^2y^2z^2,&\end{aligned}$$

при што последното неравенство следува од очигледните неравенства

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\ge 3x^2y^2z^2.$$

$$x^4z^2+z^4x^2+x^3y^3\ge 3x^3z^2y$$

$$x^4y^2+y^4x^2+y^3z^3\ge 3y^3x^2z$$

$$z^4y^2+y^4z^2+x^3z^3\ge 3z^3y^2x$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$,т.е. $a=b=c=1$.

45. Докажи дека за a,b,c позитивни реални броеви е точно неравенството

$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17)\ge 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако двапати го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}(16a^2+8b+17)&=(16a^2+1)+8b+16\ge 8a+8b+16\\&=8(a+b+2)=8(a+1+b+1)\qquad (1)\\&\ge 8\cdot 2\sqrt{(a+1)(b+1)}=2^4\sqrt{(a+1)(b+1)}.\end{aligned}$$

На потполно ист начин добиваме

$$(16b^2+8c+17)\ge 2^4\sqrt{(b+1)(c+1)}\qquad (2)$$

$$(16c^2+8a+17)\ge 2^4\sqrt{(c+1)(a+1)}\,.\qquad (3)$$

Ако ги помножиме неравенства (1), (2) и (3) добиваме

$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17)\ge 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1)\,.$$

Во (1) знак за равенство важи кога $16a^2=1$ и $a=b$. Односно $a=b=\frac{1}{4}$. Со аналогни размислувања од (2) и (3) следува дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{4}$.

46. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{z^2+x^2+2y^2}}\le\frac{3}{2}\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако го искористиме познатото неравенство

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\,,$$

а потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина последователно добиваме

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{z^2+x^2+2y^2}}\le$$
$$\le\sqrt{\frac{xy}{xy+yz+zx+z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{xy+yz+zx+x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{xy+yz+zx+y^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+y)}}$$
$$\le\frac{\frac{x}{z+x}+\frac{y}{y+z}}{2}+\frac{\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}}{2}+\frac{\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+y}}{2}$$
$$=\frac{\frac{x+y}{x+y}+\frac{y+z}{y+z}+\frac{z+x}{z+x}+}{2}=\frac{3}{2}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

47. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што
$$a+b+c+2=abc. \qquad (1)$$
Докажи, дека
$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\ge 2.$$
Кога важи равенство?

Решение. *Прв начин.* Ако го искористиме условот (1), добиваме дека
$$(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1)=$$
$$=a+b+c+(a+b+c+2)+ab+ac+bc+1$$
$$=a+b+c+abc+ab+ac+bc+1$$
$$=(a+1)(b+1)(c+1)$$
Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува
$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}=\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})$$
$$\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(b+1)(c+1)(a+1)}}-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})$$
$$=3-\frac{(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=3-1=2.$$
Знак за равенството важи ако и само ако $a=b=c=2$.

Втор начин. Ако неравенството го помножиме со $(a+1)(b+1)(c+1)$ го добиваме еквивалентното неравенство:
$$a(a+1)(c+1)+b(b+1)(a+1)+c(c+1)(b+1)\ge 2(a+1)(b+1)(c+1)$$
кое може да се запише во облик
$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2\ge 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2.$$
Но, од неравенствата

$$a^2c+b^2a+c^2b \ge 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc$$
$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2 \ge 3abc+ab+bc+ca\ .$$

Сега, ако го примениме условот (1), добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2 \ge 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2\ .$$

I.4 ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВОТО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

1. Определи ги сите броеви a и b такви што

$$2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1)\ .$$

Решение. *Прв начин*. После множењето и средувањето дадената равенка го добива видот

$$a^2b^2-a^2b+2a^2-ab^2-2ab-a+2b^2-b+1=0$$
$$\tfrac{1}{2}a^2(b-1)^2+\tfrac{1}{2}b^2(a-1)^2+(a-b)^2+\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{2}(b-1)^2=0.$$

Квадрат на реален број е ненегативе, па затоа сите собирци на левата страна во последната равенка треба да се еднакви на нула, од каде добиваме дека $a=b=1$ е единствено решение.

Втор начин. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(1^2+1^2)(a^2+1) \ge (a+1)^2,$$
$$(1^2+1^2)(b^2+1) \ge (b+1)^2,$$
$$(a^2+1)(b^2+1) \ge (ab+1)^2.$$

Множејќи ги овие неравенства добиваме

$$4(a^2+1)^2(b^2+1)^2 \ge (a+1)^2(b+1)^2(ab+1)^2\ ,$$

од каде после коренувањето добиваме

$$2(a^2+1)(b^2+1) \ge (a+1)(b+1)(ab+1)\ .$$

Според тоа, a и b се решенија на дадената равенка ако и само ако во неравенствата важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $\frac{a}{1}=\frac{1}{1}=\frac{b}{1}=\frac{a}{b}$.

Оттука следува $a=b=1$.

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \le \frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Решение. Со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц на тројките $\sqrt{\frac{ab^2}{a+b}}, \sqrt{\frac{bc^2}{b+c}}, \sqrt{\frac{ca^2}{c+a}}$ и $\sqrt{a+b}, \sqrt{b+c}, \sqrt{c+a}$, а потоа користејќи го нераveството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}(\tfrac{ab^2}{a+b}+\tfrac{bc^2}{b+c}+\tfrac{ca^2}{c+a})((a+b)+(b+c)+(c+a)) &\ge (b\sqrt{a}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c})^2\\ &\ge (3\sqrt[3]{b\sqrt{a}\cdot c\sqrt{b}\cdot a\sqrt{c}})^2\\ &=(3\sqrt[3]{(\sqrt{abc})^3})^2=9abc\end{aligned}$$

т.е. го добиваме неравенството $2(\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a})(a+b+c)\ge 9abc$, од каде следува левото неравенство.

За да го докажеме десното неравенство, да забележиме дека од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}$ и ако ова неравенство го помножиме со b добиваме $\frac{ab^2}{a+b}\le\frac{ab+b^2}{4}$. Аналогно важи $\frac{bc^2}{b+c}\le\frac{bc+c^2}{4}$ и $\frac{ca^2}{c+a}\le\frac{ca+a^2}{4}$. Ако ги собереме последните три неравенства и искористиме дека

$$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2,$$

добиваме

$$\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\le\frac{ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2}{4}\le\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

3. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\ge\frac{9}{4}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y})(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y))\ge(x+y+z)^2.$$

Затоа доволно е да се докаже неравенството

$$9(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y))\le 4(x+y+z)^2$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$4(x^2+y^2+z^2)\ge xy+yz+zx+9(xy^2+yz^2+zx^2).$$

Но, $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$, па затоа доволно е да се докаже дека

$$x^2+y^2+z^2 \ge 3(xy^2+yz^2+zx^2).$$

Од $x^2 \cdot 1 = x^2(x+y+z) = x^3+x^2y+x^2z$ и слично за y и z, ако ги собереме неравенствата (кои следуваат од неравенствата меѓу аритметичката и геометриската средина)

$$x(x^2+z^2) \ge 2x^2z, \quad y(x^2+y^2) \ge 2xy^2, \quad z(z^2+y^2) \ge 2z^2y$$

се добива бараното нeравество.

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, па како $x+y+z=1$, следува дека знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

4. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}^+$. Докажи дека

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \ge a+b+c+3.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $3\sqrt[3]{a^2b^2} \le ab+a+b$, па затоа

$$\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1} \ge \frac{(b+1)(c+1)^2}{a+b+ab+1} = \frac{(b+1)(c+1)^2}{(a+1)(b+1)} = \frac{(c+1)^2}{a+1}.$$

Слично

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1} \ge \frac{(b+1)^2}{c+1}, \quad \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \ge \frac{(a+1)^2}{b+1}.$$

Според тоа, ако ги искористиме претходните неравенства и Енгеловиот принцип на минимум добиваме

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \ge \frac{(b+1)^2}{c+1}+\frac{(c+1)^2}{a+1}+\frac{(a+1)^2}{b+1}$$

$$\ge \frac{(a+b+c+3)^2}{a+b+c+3} = a+b+c+3,$$

што и требаше да се докаже.

5. Определи го најмалиот реален број k за кој неравенството

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(d^2+1)}+$$
$$+\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}+\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} \ge$$
$$\ge 2(ab+bc+cd+ac+bd+ad)-k$$

важи за произволни реални броеви a,b,c и d.

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}=\sqrt{[(a+b)^2+(ab-1)^2](c^2+1)}$$
$$\geq (a+b)c+ab-1$$

Ако последното неравенство го собереме со трите аналогни неравенства, го добиваме саканото неравенство со константа $k=4$. Знак за равенство ажи за $a=b=c=d=\sqrt{3}$, па затоа бараната најмала вредност е $k=4$.

6. Нека A е најголемиот меѓу позитивните рационални броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и a_7, за кои е исполнето

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=12 \quad \text{и}$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2=24.$$

Определи ги броевите, кога A прима можна најголема вредност.

Решение. *Прв начин.* Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека a_7 е најголемиот меѓу седумте броеви. Бидејќи

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=12-a_7 \text{ и}$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=24-a_7^2$$

важи

$$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2)=$$
$$=2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_5a_6)$$
$$=2a_7^2-24a_7+120.$$

Да го разгледаме изразот

$$(a_1-a_2)^2+\ldots+(a_1-a_6)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_5-a_6)^2,$$

во кој (после ослободување од заградите) имаме $5+4+3+2+1=15$ квадрати. Овој израз е еднаков на

$$5(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_6^2)-2\left(a_1a_2+\ldots+a_5a_6\right)$$

и од претходно изнесеното следува, дека

$$(a_1-a_2)^2+\ldots+(a_1-a_6)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_5-a_6)^2=$$
$$=5(24-a_7^2)-(2a_7^2-24a_7+120)=24a_7-7a_7^2.$$

Заклучаваме, дека $24a_7-7a_7^2=a_7(24-7a_7)\geq 0$ и бидејќи $a_7>0$, важи $a_7\leq\frac{24}{7}$. За да се убедиме, дека $A=\frac{24}{7}$, доволно е да ги определиме a_1, $a_2 \ldots$, a_6 кога $a_7=\frac{24}{7}$. За $a_7=\frac{24}{7}$ добиваме, дека

$$(a_1-a_2)^2+\ldots+(a_1-a_6)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_5-a_6)^2=0,$$

што е можно само ако $a_1=a_2=\ldots=a_6$. Сега од равенството

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=12$$

наоѓаме $a_1=a_2=\ldots=a_6=\frac{10}{7}$.

Втор начин. Како и при првиот начин, без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека a_7 е најголемиот меѓу седумте броеви. Од

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=12-a_7 \text{ и}$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=24-a_7^2$$

со помош на неравенството на Коши-Буњковски-Шварц добиваме:

$$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2=(1\cdot a_1+1\cdot a_2+1\cdot a_3+1\cdot a_4+1\cdot a_5+1\cdot a_6)^2$$
$$\le(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2)$$

т.е.

$$(12-a_7)^2\le 6(24-a_7^2)\Leftrightarrow 144-24a_7+a_7^2\le 144-6a_7^2 \Leftrightarrow 7a_7^2-24a_7\le 0$$
$$\Leftrightarrow a_7(7a_7-24)\le 0 \qquad \Leftrightarrow a_7\le\tfrac{24}{7}.$$

Заклучуваме, дека бараната можна најголема вредност е $\frac{24}{7}$. Знак за авенство во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц се достигнува за $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6$, т.е. за

$$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=\frac{12-\frac{24}{7}}{6}=\frac{10}{7}.$$

7. Докажи, дека за произволни произволни реални броеви x,y,z е исполнето неравенството

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\ge 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(1+\tfrac{y}{x}+\tfrac{z}{x})(1+xy+xz)\ge(1+y+z)^2.$$

Следствено

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}\ge\frac{x}{x+y+z}.$$

Конечно, ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенства, добиваме

$$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\ge\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1.$$

8. Нека a,b,x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}.$$

Решение. *Прв начин.* Десната страна на неравенството можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}=\frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}. \quad (1)$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите $\frac{x}{\sqrt{ayx+bzx}},\frac{y}{\sqrt{azy+bxy}},\frac{z}{\sqrt{axz+byz}}$ и $\sqrt{ayx+bzx},\sqrt{azy+bxy},\sqrt{axz+byz}$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}&\geq\frac{(x+y+z)^2}{axy+ayz+azx+bxy+byz+bzx}\\&=\frac{(x+y+z)^2}{a(xy+yz+zx)+b(xy+yz+zx)} \quad (2)\\&=\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}\end{aligned}$$

Од друга страна $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, па затоа $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}\geq 1$. Сега,

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}=\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+2\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}\geq 1+2=3,$$

од каде добиваме

$$\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{a+b}. \quad (3)$$

Конечно, од (1), (2) и (3) следува точноста на бараното неравенство.

Втор начин. Од Енгеловиот принцип на минимум и познатото неравенство

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$$

следува

$$\begin{aligned}\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}&=\frac{x^2}{axy+bxz}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}\\&\geq\frac{(x+y+z)^2}{axy+bxz+ayz+bxy+axz+byz}\\&\geq\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}\\&\geq\frac{3}{a+b}.\end{aligned}$$

9. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека $A \geq B^2$, каде

$$A=\frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \text{ и } B=\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}}+\frac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}}+\frac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}.$$

Решение. Од $x+y+z=1$ наоѓаме

$$\begin{aligned}1+xy+yz+zx &= (x+y+z)^2+xy+yz+zx\\ &= (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\end{aligned}$$

и ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за десната страна на даденото неравенство добиваме

$$\begin{aligned}A &= \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{1}{1-y}+\tfrac{1}{1-z})((x+3x^2)+(y+3y^2)+(z+3z^2))\\ &\geq \sqrt{\tfrac{3x^3+x}{9(1-x)}}+\sqrt{\tfrac{3y^3+y}{9(1-y)}}+\sqrt{\tfrac{3z^3+z}{9(1-z)}})^2.\end{aligned}$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека за секој реален број $s \in (0,1)$ е исполнето неравенството

$$\sqrt{\frac{3s^3+s}{9(1-s)}} \geq \frac{s\sqrt{s+1}}{\sqrt[4]{3+9s^2}}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3(9s^2-1)^2 \geq 0,$$

кое очигледно е точно. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

10. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2} \geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(yx+x^2+x^2)(\tfrac{y}{x}+\tfrac{z}{x}+\tfrac{z^2}{x^2}) \geq (y+\sqrt{zx}+z)^2,$$

од каде добиваме

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2} \geq \frac{x^2}{xy+xz+z^2}.$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2} \geq \frac{y^2}{yz+yx+x^2}, \quad \frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2} \geq \frac{z^2}{zx+zy+y^2}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$M=\frac{x^2}{xy+xz+z^2}+\frac{y^2}{yz+yx+x^2}+\frac{z^2}{zx+zy+y^2}\geq 1.$$

Повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$M((xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2))\geq (x+y+z)^2$$

и како

$$(xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2)=(x+y+z)^2$$

добиваме дека $M\geq 1$.

11. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што

$$xy+yz+zx=x+y+z.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq 1.$$

Кога во претходното неравенство важи знак за равенство?

Решение. Со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц на тројките $(x,\sqrt{y},1)$ и $(1,\sqrt{y},z)$ добиваме $\frac{1}{x^2+y+1}\leq\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}$. Аналогно важи $\frac{1}{y^2+z+1}\leq\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2}$ и $\frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}$. Со собирање на овие неравенства добиваме

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}=S.$$

Останува да докажеме дека $S\leq 1$, а тоа според условот на задачата е еквивалентно со $3+x+y+z\leq 2(xy+yz+zx)=2(x+y+z)$, т.е. со $x+y+z\geq 3$. Последното следува од $x+y+z=xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}$.

12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви, што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1.$$

Решение. Бидејќи $x^2+2\geq 2x+1$, доволно е да докажеме дека

$$L=\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\leq 1.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3-2L=\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\geq 1. \qquad (1)$$

Воведуваме замена $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ со што (1) се сведува на

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\geq 1. \qquad (2)$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува неравенството

$$(x+y+z)^2=\left(\sqrt{\frac{y}{2x+y}}\cdot\sqrt{y(2x+y)}+\sqrt{\frac{z}{2y+z}}\cdot\sqrt{z(2y+z)}+\sqrt{\frac{x}{2z+x}}\cdot\sqrt{x(2z+x)}\right)$$
$$\leq\left(\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\right)(y(2x+y)+z(2y+z)+x(2x+z))$$
$$=\left(\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\right)(x+y+z)^2$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

13. Дадени се позитивни реални броеви a,b и c такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}}\leq\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}.$$

Решение. Ќе докажеме дека изразот на левата страна на неравенството е помал или еднаков на 1, додека изразот на десната страна е поголем или еднаков на 1. Ако искористиме дека $abc=1$, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4ab^2c+4abc^2}}$$
$$\geq\frac{a^2}{\sqrt{a^4+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+b^4)+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+c^4)}}$$
$$=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}\geq\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ и } \frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}\geq\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ги собираме последните три неравенства и добиваме дека

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4b+4c}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^4+4c+4a}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^4+4a+4b}}\geq 1.$$

Останува да докажеме дека изразот на левата страна е помал или еднаков на 1. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}\leq\frac{1}{\sqrt{3ab^2+6}}=\sqrt{\frac{abc}{3ab^2+6abc}}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{b+2c}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{c}{b+2c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{b}{b+2c}\right).$$

Аналогно ги добиваме неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{c}{c+2a}\right) \text{ и } \frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-\frac{a}{a+2b}\right).$$

Од последните три неравенства и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+6}} &\le \frac{5}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}+\frac{a}{a+2b}\right)\\ &\le \frac{5}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{b(b+2c)+a(c+2a)+a(a+2b)}=1.\end{aligned}$$

14. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} \ge 4(xy+yz+zx).$$

Збирот на левата страна на горното неравенство е еднаков на

$$(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)}+(y+z)\sqrt{(z+x)(x+y)}+(z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(z+x)(z+y) \ge (z+\sqrt{xy})^2,$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} &\ge \sum_{cyc}[(x+y)z+(x+y)\sqrt{xy}]\\ &\ge \sum_{cyc}[(x+y)z+2xy]\\ &= 4(xy+yz+zx).\end{aligned}$$

15. Нека x,y,z се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Докажи, дека

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1} \ge 0.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \ge 3.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $|z|=\max\{|x|,|y|,|z|\}$. Тогаш, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} \ge \frac{2(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1}=\frac{2(1-z)^2}{x^2+y^2+1} \ge \frac{2(1-z)^2}{2z^2+1}=3-\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1},$$

што и требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=0$ или $(x,y,z)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$, до пермутации.

16. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Решение. Со смените $abc=k^3, a=\frac{ky}{x}, b=\frac{kz}{y}, c=\frac{kx}{z}$, за $k,x,y,z>0$ неравенство го добива видот $\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y} \geq \frac{3}{k^3+1}$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(ky+k^2z)+y(kz+k^2x)+z(kx+k^2y)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(k^2+k)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{k^2+k} \geq \frac{3}{k^3+1},$$

бидејќи $(x+y+z)^3 \geq 3(xy+yz+zx)$ и $k^2+k \leq k^3+1$. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ и $k=1$, т.е. $a=b=c=1$.

17. Нека x, y и z се ненегативни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{x-y}{xy+2y+1}+\frac{y-z}{yz+2z+1}+\frac{z-x}{zx+2x+1} \geq 0.$$

Решение. Нека

$$a=\frac{x-y}{xy+2y+1}, b=\frac{y-z}{yz+2z+1} \text{ и } c=\frac{z-x}{zx+2x+1}.$$

Тогаш $a+\frac{1}{a}=\frac{xy+x+y+1}{x-y}$ и оттука

$$\frac{a}{a+1}=\frac{x-y}{xy+x+y+1}=\frac{1}{y+1}-\frac{1}{x+1}.$$

Аналогно важи $\frac{b}{b+1}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{y+1}$ и $\frac{c}{c+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{z+1}$.

Понатаму, од

$$0<\frac{1}{x+1}, \frac{1}{y+1}, \frac{1}{z+1}<1$$

следува дека

$$\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1}<1,$$

па затоа $a+1, b+1, c+1$ се позитивни. Освен тоа, важи

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=0, \text{ т.е. } \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=3.$$

Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+1)+(b+1)+(c+1) \geq 3, \text{ т.е. } a+b+c \geq 0.$$

18. Ако x, y и z се позитивни реални броеви, докажи ги неравенствата:

а) $(3x^2+2)(3y^2+2)\geq\frac{9}{2}(x+y)^2+3$

б) $(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2)\geq 9(x+y+z)^2$

Решение. а) После ослободување од заградите и префрлање на една страна на сите ненулти членови добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$(3x^2-6xy+3y^2)+(18x^2y^2-12xy+2)\geq 0\,,$$

$$3(x-y)^2+2(3xy-1)^2\geq 0\,.$$

Јасно, последното неравенство е точно, што значи дека е точно и почетното неравенство

б) Од а) следува, дека

$$(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2)\geq 3(3z^2+2)(1+\tfrac{3}{2}(x+y)^2)$$

$$=3((\sqrt{3}z)^2+(\sqrt{2})^2)(1^2+(\tfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}})^2)$$

Сега е доволно да го примениме неравенството

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$$

кое важи позитивни реални броеви a, b, c и d (се проверува непосредно, но тоа е специјален случај на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц) за броевите

$$a=\sqrt{3}z\,,\ b=\sqrt{2},\ c=1 \text{ и } d=\tfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}\,,$$

од каде добиваме

$$(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2)\geq 3(\sqrt{3}z+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y)^2=9(x+y+z)^2\,.$$

19. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz\geq 1$. Докажи, дека

$$\tfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\tfrac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\tfrac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0\,. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $xyz\geq 1$ следува

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geq(x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2)^2\geq(x^2+y^2+z^2)\,,$$

т.е.

$$\tfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leq\tfrac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Ако го собереме ова неравенства со аналогните неравенства за

$\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}$ и $\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}$, го добиваме неравенството

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leq\frac{2(x^2+y^2+z^2)\leq xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\leq 3$$

кое е еквивалентно со неравенство (1).

20. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на тројките

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b+2c}},\sqrt{\frac{b}{c+2a}},\sqrt{\frac{c}{a+2b}}\right) \text{ и } \left(\sqrt{a(b+2c)},\sqrt{b(c+2a)},\sqrt{c(a+2b)}\right)$$

добиваме

$$\sqrt{a(b+2c)}\sqrt{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt{b(c+2a)}\sqrt{\frac{b}{c+2a}}+\sqrt{c(a+2b))}\sqrt{\frac{c}{a+2b}}\leq$$
$$\leq\sqrt{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}\cdot\sqrt{\frac{b}{c+2a}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}}.$$

Последното неравенство го квадрираме и после средувањето добиваме

$$(a+b+c)^2\leq 3(ab+bc+ca)\left(\frac{b}{c+2a}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right).$$

Сега, ако го искористиме неравенството $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$ од последното неравенство следува

$$(a+b+c)^2\leq(a+b+c)^2\left(\frac{b}{c+2a}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right),$$

од каде после скратувањето со $(a+b+c)^2\neq 0$ го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

21. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи, дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето натројките $\sqrt{1+ab},\sqrt{1+bc},\sqrt{1+ca}$ и $\frac{1}{\sqrt{1+ab}},\frac{1}{\sqrt{1+bc}},\frac{1}{\sqrt{1+ca}}$ добиваме

$$\sqrt{(1+ab+1+bc+1+ca)\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)}\geq$$
$$\geq\sqrt{1+ab}\,\frac{1}{\sqrt{1+ab}}+\sqrt{1+bc}\,\frac{1}{\sqrt{1+bc}}+\sqrt{1+ca}\,\frac{1}{\sqrt{1+ca}}=3$$

Последното неравенство го квадрираме и добиваме

$$(3+ab+bc+ca)(\tfrac{1}{1+ab}+\tfrac{1}{1+bc}+\tfrac{1}{1+ca})\geq 9\,.$$

Ако го искористиме неравенството $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ и условот $a^2+b^2+c^2=3$, добиваме

$$6=3a^2+b^2+c^2\geq 3+ab+bc+ca\,,$$

па затоа

$$6(\tfrac{1}{1+ab}+\tfrac{1}{1+bc}+\tfrac{1}{1+ca})\geq(3+ab+bc+ca)(\tfrac{1}{1+ab}+\tfrac{1}{1+bc}+\tfrac{1}{1+ca})\geq 9\,,$$

од каде го добиваме бараното неравенство. Лесно се гледа дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

22. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq(1+2a)(1+2b)(1+2c)\,.$$

Решение. Од условот $abc=1$ и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\sqrt{(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})}&=\sqrt{(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(\tfrac{1}{ab}+bc+ca)}\\&\geq\sqrt{ab}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{bc}+\tfrac{1}{\sqrt{ca}}\cdot\sqrt{ca}\\&=2+bc=bc(1+2a)\end{aligned}$$

Аналогно ги добиваме неравенствата

$$(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq ca(1+2b)\text{ и}$$

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq ab(1+2c)\,.$$

Ако ги помножиме последните три неравенства, добиваме

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq a^2b^2c^2(1+2a)(1+2b)(1+2c)\,,$$

од каде користејќи го условот $abc=1$ следува бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{ab}}}=\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{ca}}}{\sqrt{ca}}\,,\ \frac{\sqrt{bc}}{\frac{1}{\sqrt{bc}}}=\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{ca}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{ab}}}{\sqrt{ab}}\text{ и }\frac{\sqrt{ca}}{\frac{1}{\sqrt{ca}}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{bc}}}{\sqrt{bc}}\,,$$

т.е. ако и само ако $a=b=c=1$.

23. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=8$. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8+b-d}}+\frac{b}{\sqrt[3]{8+c-a}}+\frac{c}{\sqrt[3]{8+d-b}}+\frac{d}{\sqrt[3]{8+a-c}}\geq 4\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Даденото неравенство го делиме со 4 и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+b-d)}}+\frac{b}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+c-a)}}+\frac{c}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+d-b)}}+\frac{d}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+a-c)}}\geq 1\,. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+b-d)}}+\frac{b}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+c-a)}}+\frac{c}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+d-b)}}+\frac{d}{\sqrt[3]{8\cdot 8(8+a-c)}}\geq\\ &\qquad\geq\frac{3a}{24+b-d}+\frac{3b}{24+c-a}+\frac{3c}{24+d-b}+\frac{3d}{24+a-c}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Ќе докажеме дека

$$\frac{3a}{24+b-d}+\frac{3b}{24+c-a}+\frac{3c}{24+d-b}+\frac{3d}{24+a-c}\geq 1\,. \qquad (3)$$

Ако го искористиме Енгеловиот принцип на минимум, кој е еквивалентен на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned}&\frac{3a}{24+b-d}+\frac{3b}{24+c-a}+\frac{3c}{24+d-b}+\frac{3d}{24+a-c}=\\ &\qquad=\frac{3a^2}{a(24+b-d)}+\frac{3b^2}{b(24+c-a)}+\frac{3c^2}{c(24+d-b)}+\frac{3d^2}{d(24+a-c)}\\ &\qquad\geq\frac{3(a+b+c+d)^2}{a(24+b-d)+b(24c-a)+c(24+d-b)+d(24+a-c)}\\ &\qquad=\frac{3\cdot 8^2}{24(a+b+c+d)}=\frac{3\cdot 64}{24\cdot 8}=1.\end{aligned}$$

Конечно од неравенствата (2) и (3) следува неравенството (1), т.е. даденото неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=c, b=d$.

24. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$(x^2+y+1)(x^2+z+1)(y^2+z+1)(y^2+x+1)(z^2+x+1)(z^2+y+1)\geq(x+y+z)^6.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}(x^2+y+1)(z^2+y+1)&=(x^2+y+1)(1+y+z^2)\\ &\geq(x\cdot 1+\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}+1\cdot z)^2\\ &=(x+y+z)^2.\end{aligned}$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$(x^2+z+1)(y^2+z+1)\geq(x+y+z)^2,$$
$$(y^2+x+1)(z^2+y+1)\geq(x+y+z)^2.$$

Множејќи ги овие три неравенства го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 1$.

25. Определи ги сите тројки позитивни реални броеви (x, y, z) кои ги задоволуваат условите

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=3$$
$$x+y+z \le 12.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$36 \ge (\tfrac{1}{x}+\tfrac{4}{y}+\tfrac{9}{z})(x+y+z) \ge (\sqrt{x}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{x}}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{\tfrac{4}{y}}+\sqrt{z}\cdot\sqrt{\tfrac{9}{z}})^2 = 36,$$

па затоа во случајов важи знак за равенство. Знак за равенство во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи ако и само ако

$$\frac{x}{\frac{1}{x}}=\frac{y}{\frac{4}{y}}=\frac{z}{\frac{9}{z}}, \text{ т.е. } x^2=\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}$$

и бидејќи броевите се позитивни, важи $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$. Со замена во равенството на задачата добиваме дека решение на задачата е $x=2$, $y=4$, $z=6$. Провери!

26. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \ge 1.$$

Докажи, дека

$$a+b+c \ge ab+bc+ca.$$

Решение. Од неравенствот на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+b+a)(a+b+c^2) \ge (a+b+c)^2,$$
$$(b+c+1)(b+c+a^2) \ge (a+b+c)^2,$$
$$(c+a+1)(c+a+b^2) \ge (a+b+c)^2.$$

Затоа

$$\frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}+\frac{b+c+a^2}{(a+b+c)^2}+\frac{c+a+b^2}{(a+b+c)^2} \ge \frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \ge 1,$$

$$\frac{a+b+c^2+b+c+a^2+c+a+b^2}{(a+b+c)^2} \ge 1,$$

$$2(a+b+c)+a^2+b^2+c^2 \ge (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

$$a+b+c \ge ab+bc+ca.$$

27. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $ab \ge 1$. Докажи, дека

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})\geq 16\,.$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека $\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1}\geq 2$, па затоа

$$a+2b+\tfrac{2}{a+1}\geq \tfrac{a+3}{2}+2b$$

и слично

$$b+2a+\tfrac{2}{b+1}\geq 2a+\tfrac{b+3}{2}\,.$$

Ос последните две неравенства и од неравенствот на Коши-Буњаковски-Шварц, користејќи го условот $ab\geq 1$ добиваме

$$\begin{aligned}(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})&\geq (\tfrac{a+3}{2}+2b)(2a+\tfrac{b+3}{2})\\&=\tfrac{1}{4}(b+4a+3)(a+4b+2)\\&\geq \tfrac{1}{4}(\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}+3)^2\\&\geq \tfrac{1}{4}(1+4+3)^2=16.\end{aligned}$$

Втор начин. Бидејќи $ab\geq 1$, и од тоа што a и b се позитивни реални броеви, имаме

$$a+b\geq a+\tfrac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\tfrac{1}{a}}=2\,.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$\begin{aligned}a+2b+\tfrac{2}{a+1}&=b+(a+b)+\tfrac{2}{a+1}\geq b+2+\tfrac{2}{a+1}=(b+1)+\tfrac{2}{a+1}+1\\&=\tfrac{b+1}{2}+\tfrac{b+1}{2}+\tfrac{2}{a+1}+1=4\cdot\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}}.\end{aligned}$$

На потполно ист начи се добива дека

$$b+2a+\tfrac{2}{b+1}\geq 4\sqrt[4]{\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}\,.$$

Од последните две неравенства, неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и неравенството $ab\geq 1$, добиваме

$$\begin{aligned}(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})&\geq 16\cdot\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}\\&=16\cdot\sqrt[4]{\tfrac{b+1}{2}\tfrac{a+1}{2}}\\&\geq 16\cdot\sqrt[4]{\tfrac{2\sqrt{a}}{2}\tfrac{2\sqrt{b}}{2}}\\&=16\cdot\sqrt[8]{ab}\geq 16.\end{aligned}$$

Трет начин. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})=((a+b)+b+\tfrac{2}{a+1})((a+b)+a+\tfrac{2}{b+1})$$
$$\geq (a+b+\sqrt{ab}+\tfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}})^2.$$

Од друга страна, од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 2 \text{ и } \tfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geq \tfrac{4}{a+b+2},$$

па затоа

$$a+b+\sqrt{ab}+\tfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geq a+b+1+\tfrac{4}{a+b+2}$$
$$=\tfrac{(a+b+1)(a+b-2)}{a+b+2}+4\geq 4$$

со што е завршен доказот.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1 ДЕЛИВОСТ

1. Докажи, дека бројот

$$\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5$$

е точен квадрат.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5 &= \underbrace{11...11}_{1997}\cdot 10^{1999} + \underbrace{22...22}_{1998}\cdot 10+5\\ &= \tfrac{1}{9}(10^{1997}-1)\cdot 10^{1999} + \tfrac{2}{9}(10^{1998}-1)\cdot 10+5\\ &= \tfrac{1}{9}(10^{3996}+2\cdot 5\cdot 10^{1998}+25)\\ &= [\tfrac{1}{9}(10^{1998}+5)]^2 = (\tfrac{\overbrace{100...005}^{1997}}{3})^2 = \underbrace{33...33}_{1997}5^2.\end{aligned}$$

2. Ако n е точен куб, тогаш n^2+3n+3 не е точен куб. Докажи!

Решение. Нека n е точен куб и да претпоставиме дека n^2+3n+3 е точен куб. Тогаш $n(n^2+3n+3)$ е точен куб. Меѓутоа,

$$n(n^2+3n+3) = n^3+3n^2+3n = (n+1)^3-1$$

и како $n^3 < (n+1)^3-1 < (n+1)^3$, добиваме дека $n(n^2+3n+3)$ не е точен куб, што е противречност.

3. Определи ги сите ненегативни цели броеви n за кои постојат такви цели броеви a и b што $n^2=a+b$ и $n^3=a^2+b^2$.

Решение. Имаме

$$n^3 = a^2+b^2 \ge 2ab = (a+b)^2-(a^2+b^2) = (n^2)^2-n^3 = n^4-n^3,$$

од каде добиваме $2n^3 \ge n^4$, т.е. $2\ge n$. За $n=0$ наоѓаме $a=b=0$, за $n=1$ наоѓаме $a=0, b=1$ и за $n=2$ наоѓаме $a=b=2$. Според тоа, бараните броеви се $n=0,1,2$.

4. Даден е природен број $n\ge 3$. Докажи, дека од множеството $\{1,2,...,n\}$ може да се извадат два броја така што збирот на преостанатите броеви е точен квадрат.

Решение. Постои природен број m таков што $m^2 \le \frac{n(n+1)}{2} < (m+1)^2$.

Според тоа,

$$\frac{n(n+1)}{2} - m^2 < (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - m^2 \le 2m \le \sqrt{2n^2+n} \le 2n-1.$$

Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека секој број $k, k \le 2n-1$ може да се запише како збир на два различни броја од множеството $\{1,2,...,n\}$.

5. а) Нека $k \in \mathbb{N}$. Докажи, дека бројот $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$ може да се запише како збир на три точни квадрати.

б) Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека бројот $(2n+1)^3 - 2$ може да се запише како збир од $3n-1$ точни квадрати поголеми од 1.

Решение. а) Имаме

$$(2k+1)^3 - (2k-1)^3 = (4k)^2 + (2k+1)^2 + (2k-1)^2.$$

б) Од а) следува дека во равенството

$$(2n+1)^3 - 1 = (2n+1)^3 - (2n-1)^3 + (2n-1)^3 - (2n-3)^3 + ... + 3^3 - 1^3$$

секоја од $n-$те разлики на десната страна може да се запише како збир на три точни квадрати поголеми од 1. Понатаму,

$$3^3 - 1^3 = 4^2 + 3^2 + 1^2,$$

па затоа

$$(2n+1)^3 - 2 = 3^2 + 4^2 + \sum_{k=2}^{n} [(4k)^2 + (2k+1)^2 + (2k-1)^2],$$

и на десната страна во последното равенство има $3n-1$ собирци поголеми од 1.

6. Докажи, дека постојат бесконечно многу тројки последователни природни броеви, такви што секој од нив е збир на два точни квадрати.

Решение. За секој природен број n важи:

$$n^2 + n^2 = 2n^2 \text{ и } (n-1)^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2.$$

Затоа, доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу природни броеви n, такви што за некои цели броеви a и b важи релацијата

$$(n-a)^2 + (n-b)^2 = 2n^2 + 1,$$

односно

$$2n(a-b)=a^2+b^2-1.$$

Ако за произволен број b земеме $a=b+1$ *и* $n=b(b+1)$, тогаш

$$2n(a-b)=a^2+b^2-1,$$

што значи дека тврдењето е точно.

7. Дадени се неколку различни природни броеви, кои се наоѓаат меѓу квадратите на два последователни природни броја. Докажи, дека сите нивни по парови производи се различни.

Решение. Нека $n^2<a<b<c<d<(n+1)^2$ и $ad=bc$. Тогаш,

$$(a+d)^2-(d-a)^2=4ad=4bc<4bc+(b-c)^2=(b+c)^2,$$

односно $a+d>b+c$. Исто така ,

$$\begin{aligned}(d-a)^2&>(a+d)^2-(b+c)^2\\&=(a+d+b+c)(a+d-b-c)\\&>a+d+b+c>4n^2,\end{aligned}$$

т.е. $d-a>2n$. Но, $d-a<(n+1)^2-(n^2+1)=2n$, што е противречност.

8. Докажи, дека природниот број c може да се запише како збир на квадрати на два цели броја ако и само ако и бројот $2c$ го има истото својство.

Решение. Нека бројот c може да се запише како збир на квадрати на два цели броја x и y, т.е. $c=x^2+y^2$. Но, $x-y$ и $x+y$ се цели броеви и за нив важи $(x-y)^2+(x+y)^2=2c$, што значи дека и бројот $2c$ може да се запише како збир на квадрати на два цели броја.

Обратно, нека $2c=a^2+b^2$, за некои цели броеви a и b. Бидејќи бројот a^2+b^2 е парен број добиваме дека или a^2 и b^2 се парни броеви или a^2 и b^2 се непарни броеви. Според тоа, и во двата случаи $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$ се цели броеви и притоа важи

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}=c,$$

односно и бројот c може да се запише како збир на квадрати на два цели броја.

9. Ако $\frac{2^n-2}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ е цел број, тогаш и $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ е цел број. Докажи!

Решение. Означуваме $2^n = a$, $\frac{2^n-2}{n} = m$ и добиваме $a = mn+2$. Понатаму,

$$\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1} = \frac{2^{a-1}-2}{a-1} = \frac{2^{mn+1}-2}{a-1} = \frac{2((2^n)^m-1)}{a-1}$$
$$= \frac{2(a^m-1)}{a-1} = 2(a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + a + 1),$$

т.е. $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ цел број.

10. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број n таков што $m+n+1$ е точен квадрат и $mn+1$ точен куб на некои природни броеви.

Решение. Нека $m \in \mathbb{N}$. За бројот $n = m^2 + 3m + 3$ важи

$m+n+1 = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$ и $mn+1 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3$

што и требаше да се докаже.

11. Нека a, b, c, d, e, f се ненулти цифри (може да има и еднакви) такви што нроевите $\overline{abc}, \overline{def}$ и $\overline{abcdef}$ се точни квадрати.

а) Докажи, дека бројот $\overline{abcdef}$ може барем на два начина да се запише како збир на три квадрати.

б) Дади пример на вакви броеви.

Решение. Нека $\overline{abc} = m^2, \overline{def} = n^2$ и $\overline{abcdef} = p^2$. Бидејќи цифрите се ненулти важи $11 \le m, n \le 31$. Значи, $p^2 = 1000m^2 + n^2$.

а) Имаме $1000 = 900 + 100 = 30^2 + 10^2 = 324 + 676 = 18^2 + 26^2$, па затоа

$$p^2 = (30^2 + 10^2)m^2 + n^2 = (30m)^2 + (10m)^2 + n^2,$$
$$p^2 = (26^2 + 18^2)m^2 + n^2 = (26m)^2 + (18m)^2 + n^2,$$

со што тврдењето е докажано.

б) Пример на такви броеви е $225625 = 475^2, 225 = 15^2, 625 = 25^2$.

12. Природните броеви a, b и c се такви, што броевите $a+c$ и $b+c$ се точни квадрати на два последователни природни броеви. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ исто така се точни квадрати на два последователни природни броеви.

Решение. Нека $a+c = k^2$ и $b+c = (k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$a = k^2 - c \text{ и } b = (k+1)^2 - c,$$

па затоа

$$ab+c=(k^2-c)[(k+1)^2-c]+c=c^2-[k^2+(k+1)^2-1]c+[k(k+1)]^2$$
$$=c^2-2k(k+1)c+[k(k+1)]^2=[k(k+1)-c]^2=(k^2+k-c)^2$$

и

$$ab+a+b+c=(k^2-c)[(k+1)^2-c]+k^2-c+(k+1)^2-c+c$$
$$=c^2-[k^2+(k+1)^2+1]c+[k(k+1)]^2+k^2+(k+1)^2$$
$$=c^2-2(k^2+k+1)c+[k(k+1)]^2+2k(k+1)+1$$
$$=c^2-2(k^2+k+1)c+[k(k+1)+1]^2$$
$$=c^2-2(k^2+k+1)c+(k^2+k+1)^2=(k^2+k+1-c)^2$$

што и требаше да се докаже.

13. Симон избрал два различни природни броја a и b и во тетратката ги запишал броевите $a, a+2, b$ и $b+2$. Потоа на таблата ги запишал шесте производи формирани од различните парови броеви запишани во тетратката. Колку најмногу точни квадрати запишал Симон на таблата?

Решение. Бидејќи два точни квадрати не се разликуваат за 1, добиваме дека броевите $a(a+2)=(a+1)^2-1$ и $b(b+2)=(b+1)^2-1$ не се точни квадрати. Освен тоа, ab и $a(b+2)$ не може истовремено да се точни квадрати, бидејќи во тој случај производот $a^2b(b+2)$ ќе биде точен квадрат, што значи дека и бројот $b(b+2)$ ќе биде точен квадрат. Аналогно, меѓу броевите $(a+2)b$ и $(a+2)(b+2)$ има најмногу еден точен квадрат. Според тоа, на таблата има најмногу два точни квадрати.

Два точни квадрати се добиваат на пример за $a=2, b=16$ и тогаш $a(b+2)=6^2$ и $(a+2)b=8^2$.

14. Докажи, дека за секој природен број n постои природен број k таков што бројот $k\cdot 2^n+17$ е точен квадрат.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=1$ земаме $k=4$ и добиваме $4\cdot 2^1+17=25=5^2$, т.е. тврдењето важи.

За $n=2$ земаме $k=2$ и добиваме $2\cdot 2^2+17=25=5^2$, т.е. тврдењето важи.

За $n=3$ земаме $k=1$ и добиваме $1\cdot 2^3+17=25=5^2$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека за некој природен број $n\geq 3$ постои природен број k таков што бројот $k\cdot 2^n+17=m^2$.

Ако во индуктивната претпоставка $k=2t, t\in\mathbb{N}$, тогаш за бројот $n+1$ имаме $m^2=k\cdot 2^n+17=2t\cdot 2^n+17=t\cdot 2^{n+1}+17$, што значи дека во овој случај тврдењето важи.

Ако во индуктивната претпоставка k е непарен број, тогаш m е непарен и 2^{n-2} е парен број, па затоа $k+m+2^{n-2}=2k_1, k_1\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$\begin{aligned}k_1\cdot 2^{n+1}+17&=2k_1\cdot 2^n+17=(k+m+2^{n-2})\cdot 2^n+17\\&=k\cdot 2^n+17+m\cdot 2^n+2^{2n-2}\\&=m^2+2m\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1})^2\\&=(m+2^{n-1})^2\end{aligned}$$

што значи дека и во овој случај тврдењето важи. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број n.

15. Определи ги сите ненегативни цели броеви n, за кои бројот $a_n=6\underbrace{00...0}_{n}4$ е точен квадрат.

Решение. Нека го претставиме бројот a_n во видот $a_n=6\cdot 10^{n+1}+4$ и нека претпоставиме дека $a_n=y^2$ за некој цел број y. Тогаш

$$6\cdot 10^{n+1}=a_n-4=y^2-4=(y-2)(y+2).$$

Бидејќи броевите $y-2$ и $y+2$ истовремено не се делат со бројот 5, бројот 5^{n+1} е делител или на $y-2$ или на $y+2$.

<u>*Прв случај*</u>. 5^{n+1} е делител на $y-2$. Тогаш $y=k5^{n+1}+2$ за некој цел број $k\geq 1$ (бидејќи $a_n\geq 64$, важи $y\geq 8$). Оттука

$$6\cdot 10^{n+1}=6\cdot 2^{n+1}5^{n+1}=k5^{n+1}(k5^{n+1}+4)$$

и следствено $k5^{n+1}+4\leq 6\cdot 2^{n+1}$. Од последното неравенство добиваме

$$k2^{2n+2}+4<6\cdot 2^{n+1} \text{ и } k2^{n+1}+\tfrac{1}{2^{n-1}}<6,$$

што е можно само за $n=0$ и $n=1$.

<u>*Втор случај*</u>. 5^{n+1} е делител на $y+2$. Тогаш $y=k5^{n+1}-2$ за некој цел број $k\geq 1$. Оттука

$$6\cdot 10^{n+1}=6\cdot 2^{n+1}5^{n+1}=k5^{n+1}(k5^{n+1}-4)$$

и затоа

$$k5^{n+1}-4\leq 6\cdot 2^{n+1},\text{ т.е. } k5^{n+1}\leq 6\cdot 2^{n+1}+4.$$

Од последното неравенство добиваме

$$k2^{2n+2}<6\cdot 2^{n+1}+4 \text{ и } k2^{n+1}<6+\tfrac{1}{2^{n-1}},$$

што е можно само за $n=0$ и $n=1$.

Конечно, единствените можни точни квадрати се $a_0=64$ и $a_1=604$. Но $24^2<604<25^2$, па затоа бројот a_n е точен квадрат само ако $n=0$.

16. Природните броеви k,m и n се такви што $m-n$ е прост број и

$$8(k^2-mn)=2(m^2+n^2)+5(m+n)k. \qquad (1)$$

Докажи, дека $11k+3$ е точен квадрат.

Решение. Нека $p=m-n$ и $q=m+n$. Тогаш

$$m^2+n^2=\tfrac{p^2+q^2}{2} \text{ и } mn=\tfrac{q^2-p^2}{2}.$$

Со замена во условот (1) добиваме

$$8k^2-2q^2+2p^2=p^2+q^2+5qk,$$

т.е.

$$p^2=3q^2+5qk-8k^2=(q-k)(3q+8k).$$

Според условот на задачата p е прост број, па од $3q+8k>q-k$ следува $q-k=1$ и $3q+8k=p^2$. Според тоа,

$$p^2=3(k+1)+8k=11k+3,$$

со што задачата е решена.

17. Докажи, дека за секој природен број $n\geq 2$, постојат n различни природни броеви, такви што збирот на нивните квадрати е квадрат на природен број.

Решение. Нека $n\geq 2$ е произволен природен број, $a_1\geq 3$ е произволен непарен број, а $a_2,a_3,\dots,a_{n-1}$ се произволни парни броеви, такви што $a_1<a_2<a_3<\dots<a_{n-1}$. Тогаш,

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_{n-1}^2=2k+1,$$

за некој природен број k. Ако избереме $a_n = k$, тогаш

$$a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 .$$

Покрај тоа, од

$$(a_{n-1} - 1)^2 \geq (3-1)^2 > 2$$

се добива дека

$$\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2 + (a_{n-1} - 1)^2 > 2 ,$$

што е еквивалентно со

$$a_n = k = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 1\right) > a_{n-1} ,$$

па сите броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се меѓусебно различни.

Забелешка. Задачата може да се реши и со примена на математичка индукција. За $n = 2$, тоа се броевите 3 и 4, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Претпоставуваме дека постојат $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, така што

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = k^2 .$$

Тогаш,

$$(5k)^2 = (5a_1)^2 + (5a_2)^2 + \ldots + (5a_n)^2 = (3a_1)^2 + (4a_1)^2 + (5a_2)^2 + \ldots + (5a_n)^2$$

и при тоа важи $3a_1 < 4a_1 < 5a_2 < \ldots < 5a_n$.

18. Докажи, дека $3^{4^5} + 4^{5^6}$ може да се запише како производ на два природни броја, секој од кои е поголем од 10^{2002}.

Решение. Имаме $3^{4^5} = (3^{4^4})^4$ и $4^{5^6} = \frac{4^{5^6+1}}{4} = \frac{2^{2(5^6+1)}}{4} = \frac{1}{4}(2^{\frac{5^6+1}{2}})^4$, што значи дека дадениот број е од облик $m^4 + \frac{1}{4}n^4$, каде $m = 3^{4^4}$ и $n = 2^{\frac{5^6+1}{2}}$. Сега, бидејќи n е парен, т.е. $\frac{1}{2}n^2$ е природен број, тврдењето на задачата следува од равенството

$$m^4 + \tfrac{1}{4}n^4 = m^4 + m^2n^2 + \tfrac{1}{4}n^4 - m^2n^2 = (m^2 + \tfrac{1}{2}n^2)^2 - (mn)^2$$
$$= (m^2 - mn + \tfrac{1}{2}n^2)(m^2 + mn + \tfrac{1}{2}n^2)$$

и неравенствата

$$m^2+mn+\frac{1}{2}n^2>m^2-mn+\frac{1}{2}n^2=(m-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2}{4}>\frac{n^2}{4}$$

$$=2^{5^6-1}>2^{10008}>(2^4)^{2002}<10^{2002}.$$

19. Определи ги сите цели броеви x за кои $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-7x+5$ е точен квадрат на цел број.

Решение. Имаме

$$f(x)=(x^2-3x)^2+(2x^2-7x+5)>(x^2-3x)^2,$$

за $x\geq 3$ или $x\leq 0$. Понатаму,

$$f(x)=(x^2-3x+2)^2-(2x^2-5x-1)<(x^2-3x+2)^2,$$

за $x\geq 3$ или $x<0$. Според тоа, при $x\geq 3$ или $x\leq 0$ можно е само $f(x)=(x^2-3x+1)^2$, што повлекува $x=4$. За $x=0,1,2$ со проверка се добива дека $f(1)=4$. Значи, решенија се $x_1=1$ и $x_2=4$.

20. Определи четирицифрен број $\overline{xyzt}$ кој е точен куб, ако цифрите му се различни и ги задоволуваат условите $2x=y-z$ и $y=t^2$.

Решение. Од $y=t^2$ имаме $t\leq 3$, т.е. $t=0,1,2,3$. Јасно $t=0$ и $t=1$ не е можно. При $t=2$ имаме $y=4$ *и* $2x=4-z$. Но, тогаш за z имаме $z=0,2,4$ и за x добиваме $x=2,1,0$, соодветно, што противречи на условот на задачата.

Нека $t=3$. Имаме $y=9$ и од $2x=y-z$ добиваме $2x=9-z$. Можни се следниве случаи:

- $z=1,\ x=4$, т.е. $\overline{xyzt}=4913=17^3$,
- $z=3,\ x=3$, што противречи на условот на задачата,
- $z=5,\ x=2$, т.е. $\overline{xyzt}=2953\neq n^3$, и
- $z=7,\ x=1$, т.е. $\overline{xyzt}=1793\neq n^3$, и

Значи, бараниот број е $4913=17^3$

21. Определи ги сите природни броеви n и k такви што n^n има k цифри, а k^k има n цифри.

Решение. Ако n^n има k цифри, а k^k има n цифри, тогаш

$$10^{k-1}\leq n^n<10^k \text{ и } 10^{n-1}\leq k^k<10^n.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме $n \ge k$.Тогаш $n^n < 10^n$, т.е. $n < 10$ и $k < 10$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $n = k$ и $k = 1,8,9$.

22. Определи го најголемиот природен број p таков што бројот 5^7 може да се запише како збир на p последователни природни броеви.

Решение. Со n да го означиме првиот од $p-$те последователни природни броеви. Тогаш

$$5^7 = n + (n+1) + ... + (n + p - 1) = np + (1 + 2 + ... + (p-1) = np + \frac{p(p-1)}{2},$$

$$2 \cdot 5^7 = p(2n - 1 + p). \qquad (1)$$

Бидејќи $p < 2n - 1 + p$, од последното равенство следува дека $p^2 < 2 \cdot 5^7$, т.е. $p < 5^3\sqrt{10}$. Но, $p \,|\, 2 \cdot 5^7$, па затоа најголемиот можен број е $p = 2 \cdot 5^3 = 250$. Сега од (1) наоѓаме $n = \frac{5^4 - 2 \cdot 5^3 + 1}{2} = 188$.

23. Нека n е парен природен број кој нема множител точен квадрат поголем од 1, k е цел број, а p е прост број таков што $p < 2\sqrt{n}$, p не е делител на n и p е делител на $n + k^2$. Докажи, дека постојат различни природни броеви a,b,c такви што $n = ab + bc + ca$.

Решение. Бидејќи n е парен број, $p \ne 2$ и исто така p не е делител на k . Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $0 < k < p$. За $a = k$ и $b = p - k$ од равенството $n = ab + bc + ca$ следува

$$c = \frac{n - k(p-k)}{p} = \frac{n+k^2}{p} - k.$$

Според тоа, c е цел број и останува да докажеме дека $c > 0$ и $c \ne a,b$. Од $\frac{n}{k} + k \ge 2\sqrt{n} > p$, следува $n + k^2 > pk$, па затоа $c > 0$.

Ако $c = a$, тогаш $\frac{n+k^2}{p} - k = k$, т.е. $n = k(2p - k)$. Бидејќи n е парен, добиваме дека и k е парен, па затоа $4 \,|\, n$, што противречи на условот дека n нема множител точен квадрат поголем од 1. Ако $c = b$, тогаш $n = p^2 - k^2$ и повторно бидејќи n е парен, а p е непарен следува дека k е непарен. Сега, $n = p^2 - k^2$ се дели со 4, што е противречност. Според тоа, a,b,c се различни природни броеви за кои важи равенството $n = ab + bc + ca$.

24. За природниот број n со $S(n)$ е означен збирот на неговите цифри. Дали постои природен број n за кој што важи

$$n+S(n)+S(S(n))=2011. \qquad (1)$$

Решение. Од критериумот за деливост со е следува дека при делење со 3 броевите n и $S(n)$ даваат ист остаток. Понатаму, при делење со 3 броевите $S(n)$ и $S(S(n))$ даваат ист остаток. Според тоа, броевите $n, S(n)$ и $S(S(n))$ при делење со 3 даваат ист остаток, па затоа левата страна на (1) е делива со 3. Но, бројот 2011 не е делив со 3, што значи дека не постои природен број n за кој е исполнето равенството (1).

25. Дали постои природен број n со следново својство: за произволни ненулти цифри a и b бројот $\overline{anb}$ е делив со $\overline{ab}$.

Решение. Нека претпоставиме дека постои природен број $n=\overline{n_1n_2...n_k}$ со саканото својство. Тогаш $4\,|\,12\,|\,\overline{1n2}$, па затоа $4\,|\,\overline{n_1 2}$. Аналогно $4\,|\,24\,|\,\overline{2n4}$, па затоа $4\,|\,\overline{n_1 4}$. Според тоа, $4\,|\,(\overline{n_1 4}-\overline{n_1 2})=2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои природен број со саканото својство.

26. Ако m е цел број, докажи дека $\frac{m^5}{5}+\frac{m^3}{3}+\frac{7m}{15}$ исто така е цел број.

Решение. Бидејќи производот на пет последователни цели броеви е делив со 5, а производот на три последователни цели броеви е делив со 3 од

$$\frac{m^5}{5}+\frac{m^3}{3}+\frac{7m}{15}=\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{5}+\frac{(m-1)m(m+1)}{3}+m^3$$

непосредно следува дека $\frac{m^5}{5}+\frac{m^3}{3}+\frac{7m}{15}$ е цел број.

27. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови природни броеви (x,y) такви што $x(x+1)\,|\,y(y+1)$, но $x \nmid y$, $(x+1)\nmid y$, $x\nmid (y+1)$ и $(x+1)\nmid (y+1)$.

Решение. Такви се на пример броевите

$$x=36k+14,\ y=(12k+5)(18k+7),\ \text{за } k=0,1,2,3,\dots .$$

Навистина, $x(x+1)\,|\,y(y+1)$ бидејќи

$$x(x+1)=6(12k+5)(18k+7)=6y \text{ и } 6\,|\,(y+1).$$

Останатите својства на броевите x и y се проверуваат непосредно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

28. Дадена е бесконечна низа природни броеви $x_1, x_2, ...$ таква што за секој природен број s важи $x_{s+1} - x_s \leq 3$. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови различни природни броеви m и n за кои x_m е делител на x_n.

Решение. Доволно е да докажеме дека некој член на низата е делител на друг член на низата (зошто?). Од условот следува дека меѓу секои три последователни природни броеви барем еден е член на низата.
Нека a е член на низата и да ги разгледаме броевите

$$b = a + a(a+1)(a+2),\ b+1 = a+1+a(a+1)(a+2) \text{ и}$$
$$b+2 = a+2+a(a+1)(a+2).$$

Бидејќи $a\,|\,b$, ако b е член на низата, тогаш тврдењето е докажано. Нека b не е член на низата. Тогаш еден од броевите $b+1$ или $b+2$ е член на низата. Нека $b+1$ е член на низата (вториот случај се разгледува аналогно). Да ги разгледаме броевите

$$c = b + b(b+1)(b+2),\ c+1 = b+1+b(b+1)(b+2) \text{ и}$$
$$c+2 = b+2+b(b+1)(b+2).$$

Ако c е член на низата, тогаш $a\,|\,c$ и тврдењето е докажано, а ако $c+1$ е член на низата, тогаш $b+1\,|\,c+1$ и тврдењето е докажано. Затоа, нека $c+2$ е член на низата. Да ги разгледаме броевите

$$d = c + c(c+1)(c+2),\ d+1 = c+1+c(c+1)(c+2) \text{ и}$$
$$d+2 = c+2+c(c+1)(c+2).$$

Ако d е член на низата, тогаш $a\,|\,d$ и тврдењето е докажано. Ако $d+1$ е член на низата, тогаш $b+1\,|\,d+1$ и тврдењето е доказано и ако $d+2$ е член на низата, тогаш $c+2\,|\,d+2$ и тврдењето е докажано.

29. Докажи, дека за секој природен број n постои број, составен од цифрите 1 и 2, кој е делив со 2^n.

Решение. Тврдењето ќе го покажеме со индукција по n.

За $n=1$,бараниот број е 2. Ако $A = 2^n B$ е $n-$цифрен број составен од цифрите 1 и 2 и е делив со 2^n, тогаш еден од броевите $2\cdot 10^n + A$ или $10^n + A$ е делив со 2^{n+1}, бидејќи еден од броевите $5^n + B$ и $2\cdot 5^n + B$ е парен.

Броевите $2\cdot 10^n + A$ и $10^n + A$ се составени од цифрите 1 и 2.

30. Докажи, дека деветцифрен број, во чиј запис учествуваат сите цифри, освен нулата и кој завршува на цифрата 5, не може да биде точен квадрат на природен број.

Решение. Да претпоставиме, дека постои квадрат на природен број $D=A^2$ кој ги задоволува условите на задачата. Бројот A, очигледно завршува на цифрата 5, т.е. $A=10a+5$. Затоа $D=100a(a+1)+25$ завршува на 25. Бројот $a(a+1)$ завршува или на 2 или на 6 или на 0. Затоа третата цифра од десно на бројот D е еднаква на 6. Значи $D=1000k+625$. Според тоа, бројот D е делив со 125, па значи и со 5^4. Но, тогаш бројот k е делив со 5, т.е. четвртата цифра на бројот D е или 0 или 5, што противречи на условот на задачата.

31. Определи ги сите цели броеви m за кои m^2-m+1 е делител на m^3+m^2+7.

Решение. Од

$$m^3+m^2+7=(m^2-m+1)(m+2)+(m+5)$$

следува дека m^2-m+1 е делител на $m+5$. Очигледно едно решение на задачата е $m=-5$.

Нека $m\neq-5$. Тогаш од $m^2-m+1 \mid m^3+m^2+7$ следува

$$|m^2-m+1|\leq|m+5|.$$

Но, $m^2-m+1=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, па затоа $m^2-m+1\leq|m+5|$. Имаме две можности: $m^2-m+1\leq m+5$ или $m^2-m+1\leq -m-5$.

Ако $m^2-m+1\leq -m-5$, тогаш $m^2+6\leq 0$, што е противречност.

Ако $m^2-m+1\leq m+5$, тогаш $m^2-2m-4\leq 0$, т.е. $(m-1)^2\leq 5$, од каде добиваме $m\in\{-1,0,1,2,3\}$. Со непосредна проверка добиваме дека само $m=0$ и $m=1$ го задоволуваат условот на задачата.

Конечно $m\in\{-5,0,1\}$.

32. Определи ги сите природни броеви n, такви што $5^{n-1}+3^{n-1}$ е делител на 5^n+3^n.

Решение. За кој било природен број $n\in\mathbb{N}$, имаме

$$5(5^{n-1}+3^{n-1})=5^n+(3+2)3^{n-1}=5^n+3^n+2\cdot 3^{n-1}>5^n+3^n.$$

Според тоа $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}<5$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Од друга страна, на сличен начин имаме

$$3(5^{n-1}+3^{n-1})=3\cdot 5^{n-1}+3^n<5^n+3^n,$$

па според тоа $3<\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}$.

Бидејќи $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}\in\mathbb{N}$ и $3<\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}<5$, се добива

$$\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}=4.$$

Последната равенка е еквивалентна со $5^{n-1}=3^{n-1}$, од каде добиваме дека $n=1$.

33. Определи ги сите парови природни броеви (a,b), такви што ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b.

Решение. Нека ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b. Тогаш, бројот

$$b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7)=b^2-7a$$

е делив со ab^2+b+7. Понатаму, од $a\geq 1$, следува

$$ab^2+b+7>b^2-7a.$$

Ако $b^2-7a\geq 0$, тогаш од претходно изнесеното следува дека $b^2-7a=0$. Значи, $b=7c$, $a=7c^2$ и лесно се проверува дека парот $(7c^2,7c)$, $c\in\mathbb{N}$ ги задоволува условите од задачата. Да претпоставиме дека $b^2-7a<0$. Тогаш $7a-b^2>0$ е помал од $7a$ и е делив со ab^2+b+7, што е можно само ако $b=1$ или $b=2$, бидејќи во спротивно $ab^2+b+7>9a$. Лесно се гледа дека случајот $b=2$ не е можен, а за $b=1$ ги добиваме подредените парови (11,1) и (49,1).

34. Докажи, дека за секој природен број n бројот:

a) $a_n=3^{3n+3}-26n-27$ се дели со 26^2,

b) $a_n=5^{n+1}-4n-5$ се дели со 16,

c) $a_n=20^{2n}+16^{2n}-3^{2n}-1$ се дели со 323,

d) $a_n=n^5-5n^3+4n$ се дели со 120, и

e) $a_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ седелисо 133.

Решение. а) За $n=1$ имаме $a_1=626=26^2$. Нека претпоставиме, дека $26^2 \mid a_k$. Сега, од

$$a_{k+1}=3^{3(k+1)+3}-26(k+1)-27=27(3^{3k+3}-26k-27)-676(k-1)$$
$$=27a_k-26^2(k-1)$$

и од индуктивната претпоставка следува дека $26^2 \mid a_{k+1}$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува $26^2 \mid a_n$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Останатите тврдења се докажуваат аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

35. Дадени се n цели броеви, такви што производот на секој нив со збирот на останатите броеви зголемен за 1 е делив со збирот на сите n броеви. Докажи дека збирот на квадратите на дадените броеви е делив со нивниот збирот.

Решение. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се дадените броеви. Да означиме

$$S_1=x_1+x_2+...+x_n,\quad S_2=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\ . \qquad (1)$$

Според условот на задачата важи

$$x_1(S_1-x_1+1)=y_1S_1$$
$$x_2(S_1-x_2+1)=y_2S_1$$
$$..............................$$
$$x_n(S_1-x_n+1)=y_nS_1$$

каде $y_1,y_2,...,y_n$ се цели броеви. Ако ги собереме последните равенства и ги искористиме равенствата (1) добиваме

$$S_1^2-S_2+S_1=YS_1,$$

каде $Y=y_1+y_2+...+y_n$. Според тоа, $S_2=S_1(S_1+1-Y)$, па затоа $S_1 \mid S_2$.

36. Нека n е природен број таков што $24 \mid n+1$. Докажи, дека збирот на сите позитивни делители на бројот n е делив со 24.

Решение. Ако $24 \mid n+1$, тогаш $n=24k-1$, за некој природен број k. Нека a и b се комплементарни делители на бројот n, т.е. $ab=n=24k-1$. Тогаш броевите a и b не се деливи со 2 и со 3, бидејќи десната страна не последното равенство не е делива со 2 и со 3. Да го разгледаме производот

$$a(a+b)=a^2+ab=a^2-1+24k=(a-1)(a+1)+24k\ .$$

Бројот a не е делив со 2, па затоа броевите $a-1$ и $a+1$ се последователни парни броеви и нивниот произвоd е делив со 8. Од друга страна, еден од броевите $a-1, a, a+1$ е делив со 3, а како бројот a не е делив со 3, заклучуваме дека производот $(a-1)(a+1)$ е делив и со 3. Според тоа, $24 \mid a(a+b)$. Од $\mathrm{NZD}(24,a)=1$ следува $24 \mid a+b$, што значи дека збирот на комплементарните делители е делив со 24.
Ако n не е точен квадрат, тогаш ги комбинираме позитивните делители на бројот n кои се помали од $\sqrt{n}$ со нивните комплементарни делители кои се поголеми од $\sqrt{n}$ и добиваме дека во овој случај збирот на сите позитивни делители на бројот n е делив со 24. Ако n е точен квадрат, т.е. $a^2 = 24k-1$, тогаш од претходните разгледувања следува дека $8 \mid (a-1)(a+1) = 24k-2$, што е противречност.

37. Нека a,b,c се природни броеви такви што $a-b$ е прост број и $3c^2 = c(a+b)+ab$. Докажи, дека $8c+1$ е точен квадрат.

Решение. Нека $a-b=p$, каде според условот на задачата p е прост број. Имаме

$$\begin{aligned}12c^2 &= 4c(a+b)+4ab = 4c(a+b)+(a+b)^2-(a-b)^2\\ &= 4c(a+b)+(a+b)^2-p^2\end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned}p^2+16c^2 &= 4c^2+4c(a+b)+(a+b)^2,\\ p^2+16c^2 &= (2c+a+b)^2,\\ p^2 &= (6c+a+b)(a+b-2c).\end{aligned}$$

Јасно, $a+b-2c>0$ и $a+b+6c>a+b-2c$, па бидејќи p е прост број од последното равенство следува $6c+a+b=p^2$ и $a+b-2c=1$. Според тоа,

$$p^2 = 6c+a+b = 6c+2c+1 = 8c+1,$$

што и требаше да се докаже.

38. Најди ги сите прости броеви од обликот $\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}$, каде n е природен број.

Решение. Ако го искористиме равенството: $\overbrace{11\ldots1}^{k} = \frac{10^k-1}{9}$, добиваме

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{10^{2n}-1}{11\cdot 9}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot 9}.$$

За $n=1$, важи $\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{11}{11}=1$ и тоа не е прост број. За $n=2$, имаме

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{(10^2-1)(10^2+1)}{11\cdot 9}=\frac{101\cdot 99}{99}=101,$$

и 101 е прост број. Ќе покажеме дека за $n>2$, бројот $\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}$ е сложен. Можни се два случаја: бројот n е парен и бројот n е непарен.

Прв случај. Нека n е парен број. Тогаш при делење на бројот 10^{2k} со 9 и 11 се добива остаток 1. Но, $\text{NZD}(9,11)=1$, па затоа 10^n-1 е делив со 99, што значи дека бројот

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot 9}=\frac{10^n-1}{99}(10^n+1)$$

е производ на два природни броја поголеми од 1, т.е. е сложен број.

Втор случај. Нека n е непарен. Тогаш при делење на бројот 10^{2k+1} со 11 се добива остаток -1, т.е. $10^{2k+1}+1$ е делив со 11, а бројот $10^{2k+1}-1$ е делив со 9. Значи, бројот

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot 9}=\frac{10^{2k+1}-1}{9}\cdot\frac{10^{2k+1}+1}{11}$$

е производ на два природни броја поголеми од 1, т.е. тој е сложен број.

39. Нека броевите u и v се такви што u^2+uv+v^2 е делив со 9. Докажи, дека броевите u и v се деливи со 3.

Решение. Очигледно

$$u^2+uv+v^2=(u-v)^2+3uv=9x,\ \ x\in\mathbb{Z},$$

т.е.

$$(u-v)^2=3(3x-uv),$$

што значи $3\,|\,(u-v)^2$. Бидејќи 3 е прост број, добиваме дека $3\,|\,u-v$, т.е. $u-v=3y,\ y\in\mathbb{Z}$. Понатаму $9y^2+3uv=9x$, па значи $3\,|\,uv$, односно еден од броевите u и v е делив со 3. Бидејќи $3|u-v$ заклучуваме дека и другиот број е делив со 3.

40. Определи ги сите природни броеви n кои се деливи со 11 и се такви што сите броеви кои се добиваат со произволна пермутација на нивните цифри повторно се деливи со 11.

Решение. Од $11|n$ следува дека бројот n мора да е најмалку двоцифрен. Нека $n=\overline{a_k a_{k-1}...a_0}$, каде $a_i, 0 \le i \le k$ се цифри и $a_k \ne 0$. Јасно, $k \ge 1$.

Ќе докажеме дека сите цифри во бројот n се еднакви. Имено, според условот на задачата и бројот

$$n' = \overline{a_k a_{k-1}...a_{i+1}a_{i-1}a_i a_{i-2}...a_0}$$

(n' е добиен од n со промена на местата на цифрите a_{i-1} и a_i) е делив со 11. Значи $11|n-n'$, што значи дека $11|10^{i-1}(\overline{a_i a_{i-1}} - \overline{a_{i-1}a_i})$. Според тоа, $11|10^{i-1}\cdot 9(a_i - a_{i-1})$ и како $\text{NZD}(10^{i-1}\cdot 9, 11)=1$, следува дека $11|a_i - a_{i-1}$, т.е. $a_i = a_{i-1}$.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека $n = a \cdot \underbrace{11...11}_{k+1}$, па како $11|n$ добиваме дека k е непарен број.

41. Определи го најголемиот број кој е делив со 11 и чии цифри се различни.

Решение. Ќе докажеме дека постојат десетцифрени броеви од облик $\overline{98765abcde}$, каде (a,b,c,d,e) е некоја пермутација на множеството $\{0,1,2,3,4\}$ кои се деливи со 11. Најголемиот меѓу нив е бараниот број.

За да бројот од наведениот облик биде делив со 11, потребно и доволно е бројот

$$\begin{aligned} A &= (9+7+5+b+d)-(8+6+a+c+e) \\ &= 7+b+d-(10-(b+d)) = 2(b+d)-3 \end{aligned}$$

да биде делив со 11. Од условите за b и d следува $1 \le b+d \le 7$, односно $-1 \le A \le 11$, Бидејќи бројот A е делив со 11 и е непарен број, единствена можност е $A=11$, па затоа $b+d=7$. Значи (b,d) мора да е некоја пермутација на множеството $\{3,4\}$, а (a,c,e) некоја пермутација на множеството $\{0,1,2\}$. Најголемиот број од опишаниот облик кој ги задоволува овие услови е бројот 9876524130.

42. Определи ги сите трицифрени броеви кои при делење со 11 даваат број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на почетниот број.

Решение. Бараниот број е трицифрен и е делив со 11, па може да се запише во облик $11u$ каде $10 \le u \le 90$, $u \in \mathbb{N}$. Нека $u = 10a + b$, $a, b \in \{0,1,2,...,9\}$.

Ако $a + b < 10$, тогаш бараниот број е од облик $100a + 10(a+b) + b$ и од условот на задачата следува

$$a^2 + (a+b)^2 + b^2 = 10a + b \text{ или } 2(a^2 + b^2 + ab - 5a) = b,$$

што значи дека b мора да е парен број т.е. $b \in \{0,2,4,6,8\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 5, b = 0$, т.е. бројот 550 ги задоволува условите на задачата.

Ако $a + b \ge 10$, тогаш бараниот број е $100(a+1) + 10(a+b-10) + b$ и од условот на задачата имаме

$$(a+1)^2 + (a+b-10)^2 + b^2 = 10a + b$$

или

$$2(a^2 + b^2 + ab - 14a - 10b + 50) = b - 1,$$

па затоа b мора да биде непарен број т.е. $b \in \{1,3,5,7,9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 7, b = 3$, т.е. бројот 803 ги задоволува условите на задачата.

Значи, единствени броеви кои ги задоволуваат условите од задачата се 550 и 803.

43. Дали постои природен број n, таков што збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $n(4n+1)$ е еднаков на 2017. Одговорот да се образложи!

Решение. Ако $n = 3k + 2$ или $n = 3k$, тогаш $n(4n+1)$ е делив со 3. Но број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3, па како 2017 не е делив со 3 овие два случаја отпаѓаат.

Нека $n = 3k + 1$. Тогаш бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 3. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот n. Да го разгледаме бројот $n(4n+1) - 2$. Ако последната цифра на бројот $n(4n+1)$ е поголема од 2, тогаш

$$S(n(4n+1) - 2) = S(n(4n+1)) - 2$$

па затоа

$$S(n(4n+1)) = S(n(4n+1)-2)+2 .$$

Но, бројот $n(4n+1)-2$ е делив со 3, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3. Значи, збирот на цифрите на бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 2 , па затоа не може да биде еднаков на 2017, бидејќи бројот 2017 при делење со 3 дава остаток 1.

Ако последната цифра на бројот $n(4n+1)$ е помала од 3, тогаш

$$S(n(4n+1)-2) = S(n(4n+1))-2+9$$

па затоа

$$S(n(4n+1)) = S(n(4n+1)-2)-7 .$$

Но, бројот $n(4n+1)-2$ е делив со 3, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3. Значи, збирот на цифрите на бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 2, па не може да биде еднаков на 2017, бидејќи бројот 2017 при делење со 3 дава остаток 1.

44. Ако бројот 2^n+1, $n \in \mathbb{N}$ е прост, тогаш n е степен на бројот 2. Докажи!

Решение. За $n=1$, бројот $2^1+1=3$ е прост и како $2^0=1$, добиваме дека тврдењето важи.

Нека $n>1$ природен број кој не е степен на бројот 2. Тогаш n е делив со некој непарен број $2m+1$, $m \geq 1$ т.е. постои природен број $a \geq 1$ таков што $n=(2m+1)a$. Но, тогаш важи

$$\begin{aligned} 2^n+1 &= 2^{(2m+1)a}+1 = (2^a)^{2m+1}+1^{2m+1} \\ &= (2^a+1)((2^a)^{2m}-(2^a)^{2m-1}+...-2^a+1) \end{aligned}$$

и

$$2^a+1>1,\ (2^a)^{2m}-(2^a)^{2m-1}+...-2^a+1>1,$$

што значи дека 2^n+1 не е прост број. Конечно, од претходно изнесеното следува тврдењето на задачата.

45. Ако бројот 2^n+3^n, $n \in \mathbb{N}$ е прост, тогаш n е степен на бројот 2. Докажи!

Решение. За $n=1$, бројот $2^1+3^1=5$ е прост и како $2^0=1$, добиваме дека тврдењето важи. Нека $n>1$ природен број кој не е степен на бројот 2. Тогаш n е делив со некој непарен број $2m+1$, $m \geq 1$ т.е. постои природен број $a \geq 1$ таков што $n=(2m+1)a$. Но, тогаш важи

$$2^n+3^n=2^{(2m+1)a}+3^{(2m+1)a}=(2^a)^{2m+1}+(3^a)^{2m+1}$$
$$=(2^a+3^a)((2^a)^{2m}-(2^a)^{2m-1}\cdot 3^a+\ldots-2^a\cdot(3^a)^{2m-1}+(3^a)^{2m})$$

и бидејќи $a\ge 1$ и $m\ge 1$ добиваме дека

$$1<5\le 2^a+3^a<2^{(2m+1)a}+3^{(2m+1)a}=2^n+3^n.$$

Според тоа, бројот 2^n+3^n има делител различен од 1 и 2^n+3^n, па затоа не е прост број. Конечно, од претходно изнесеното следува тврдењето на задачата.

46. Определи ги сите природни броеви n такци што $n2^{n+1}+1$ е точен квадрат.

Решение. Нека $n2^{n+1}+1=x^2$. Тогаш $x=2k+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$, па затоа $n2^{n-1}=k(k+1)$. Броевите k и $k+1$ се заемно прости, па затоа еден од нив сигурно е делив со 2^{n-1} и еден од нив сигурно е помал или еднаков на n. Значи, $k\le n$ и $k+1\ge 2^{n-1}$. Според тоа,

$$n+1\ge k+1\ge 2^{n-1}.$$

Ќе докажеме дека за $n\ge 4$ важи $2^{n-1}\ge n+1$.

За $n=4$ имаме $8=2^{4-1}\ge 5=4+1$, т.е. неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој $n\ge 4$. Тогаш,

$$2^{(n+1)-1}=2\cdot 2^{n-1}\ge 2(n+1)\ge n+2=(n+1)+1,$$

што значи дека неравенството е точно за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека е точно за секој природен број $n\ge 4$.

Од претходно изнесеното следува дека за $n\ge 4$ задачата нема решение.

Останува да ги провериме случаите $n=1,2,3$, при што важи

$$n2^{n+1}+1=3,17,49.$$

Според тоа, единствено решение е $n=3$.

47. Дали постојат три природни броеви, поголеми од 1 такви што квадратот на секој од нив намален за 1 е делив со секој од останатите два броја?

Решение. Нека броевите $a\ge b\ge c$ ги задоволуваат условите на задачата. Бидејќи $b\,|\,a^2-1$ заклучуваме дека a и b се заемно прости.

Затоа, бројот c^2-1, кој е делив и со a и со b, мора да е делив со ab. Според тоа, $c^2-1\geq ab$. Од друга страна $a\geq c$ и $b\geq c$, па затоа $ab\geq c^2>c^2-1$. Значи, $c^2-1\geq ab>c^2-1$, што е противречност.
Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат природни броеви со саканото својство.

48. Ако разликата на кубовите на два последователни цели броја е еднаква на квадратот на некој цел број, докажи дека тој број е еднаков на збир на квадратите на два последователни цели броја.

Решение. Од $y^2=(x+1)^3-x^3$ добиваме $3(2x+1)^2=(2y-1)(2y+1)$. Бидејќи $2y-1$ и $2y+1$ се заемно прости броеви, постојат две можности

$$2y-1=3m^2,\quad 2y+1=n^2 \tag{1}$$

$$2y-1=m^2,\quad 2y+1=3n^2, \tag{2}$$

каде m и n се заемно прости непарни броеви. Првиот случај отпаѓа, бидејќи во тој случај имаме $n^2-3m^2=2$, што не е можно. Во вториот случај, ако ставиме $m=2k+1$ добиваме

$$2y=4k^2+4k+2=2((k+1)^2+k^2).$$

49. Докажи, дека секој природен број поголем од 17 може да се запише како збир на три по парови заемно прости природни броеви поголеми од 1. Дали бројот 17 го има тоа својство?

Решение. Ако n е парен број поголем од 8, тогаш $n=6k, n=6k+2$ или $n=6k+4$, при што во првите два случаја k е природен број поголем од 1, а во третиот случај $k\in\mathbb{N}$. Имаме

$$6k=2+3+[6(k-1)+1],$$
$$6k+2=3+4+[6(k-1)+1],$$
$$6k+4=2+3+(6k-1),$$

што значи дека n е збир на три природни броеви поголеми од 1, кои се заемно прости по парови.
Нека n е непарен природен број поголем од 17. Можни се следниве случаи:

$$12k+1=[6(k-1)-1]+[6(k-1)+5]+9$$
$$12k+3=(6k-1)+(6k+1)+3,$$
$$12k+5=(6k-5)+(6k+1)+9,$$

$$12k+7=(6k-1)+(6k+5)+3,$$
$$12k+9=(6k-1)+(6k+1)+9,$$
$$12k+11=[6(k+1)-5]+[6(k+1)+1]+3,$$

при што во првите три случаи k е природен број поголем од 1, а во останатите три случаи $k\in\mathbb{N}$. Јасно, во секое од горните равенства собирците на десната страна се по парови заемно прости броеви.

Бројот 17 го нема бараното својство. Навистина, ако $17=a+b+c$, тогаш броевите a,b,c мора да се поголеми од 1, непарни и различни. Меѓутоа, $3+5+7=15<17$, $3+5+11=19>17$ и кога $3<a<b<c$ имаме $a\geq 5$, $b\geq 7$ и $c\geq 9$, па затоа $a+b+c\geq 5+7+9=21>17$.

50. Дали постојат три заемно прости броеви такви што квадратот на секој од нив се дели на збирот на другите два броја?

Решение. Нека претпоставиме дека постојат заемно прости броеви a,b и c такви што квадратот на секој од нив се дели со збирот на другите два броја. Прво, да забележиме дека $a+b, b+c$ и $c+a$ се заемно прости броеви. Навистина, нека на пример $a+b$ и $b+c$ се деливи на некој прост број p. Тогаш, бидејќи $(a+b)\,|\,c^2$ и $(b+c)\,|\,a^2$, следува дека c и a се деливи со p, па како $b=(a+b)-a$ добиваме дека b е делив со p, што е противречност.

Понатака, бидејќи $(b+c)\,|\,a^2$, добиваме дека бројот

$$(a+b+c)^2=a^2+(b+c)(2a+b+c)$$

е делив со $b+c$. Аналогно, овој број се дели со $a+b$ и $c+a$. Но, последните три броја се заемно прости, па затоа $(a+b+c)^2$ е делив со $(a+b)(b+c)(c+a)$. Тоа значи дека $(a+b+c)^2\geq(a+b)(b+c)(c+a)$. Од друга страна, јасно е дека броевите a,b и c не се помали од 2, па затоа

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+2abc\\&>(2a^2+2b^2+2c^2)+(2ab+2bc+2ca)>(a+b+c)^2,\end{aligned}$$

што е противречност.

51. Нека a и b се заемно прости броеви. Докажи, дека збирот на количниците од делењето на броевите $a, 2a, 3a,..., (b-1)a$ со бројот b е еднаков на $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

Решение. Ниту еден од броевите $a, 2a,...,(b-1)a$ не се дели со b, па затоа

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, & 1 \le r_1 < b, \\ 2a = bq_2 + r_2, & 1 \le r_2 < b, \\ 3a = bq_3 + r_3, & 1 \le r_3 < b, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (b-1)a = bq_{b-1} + r_{b-1}, & 1 \le r_{b-1} < b. \end{array} \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека за некои $k,l \in \{1,2,...,b-1\}$, $k \ne l$ важи $r_k = r_l$. Тогаш $la - ka = (l-k)a = b(q_l - q_k)$, т.е. $b \mid a(l-k)$ и бидејќи $\text{NZD}(a,b) = 1$, добиваме дека $b \mid (l-k)$, што противречи на $0 <| l-k |< b$. Според тоа, ако $k \ne l$, тогаш $r_k \ne r_l$, па затоа броевите $\{r_1, r_2,..., r_{b-1}\} = \{1,2,...,b-1\}$, што значи дека

$$r_1 + r_2 + ... + r_{b-1} = 1 + 2 + ... + (b-1) = \frac{b(b-1)}{2},$$

па затоа

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + ... + q_{b-1} &= \tfrac{1}{b}[a + 2a + ... + (b-1)a - (r_1 + r_2 + ... + r_{b-1})] \\ &= \tfrac{1}{b}[\tfrac{ab(b-1)}{2} - \tfrac{b(b-1)}{2}] = \tfrac{(a-1)(b-1)}{2}. \end{aligned}$$

52. Нека природниот број n е таков што d_1 и d_2 се делители на n^2 и $d_1 < n < d_2$. Докажи, дека $d_2 - d_1 \ge \sqrt{4n+1}$.

Решение. Ако $d_1 = n-k$, тогаш од $n-k \mid n^2 = n^2 - k^2 + k^2$ следува дека $n-k \mid k^2$, па затоа $k^2 + k - n \ge 0$, т.е. $(k+\frac{1}{2})^2 \ge \frac{4n+1}{4}$, од каде добиваме $k \ge \frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}$. Аналогно, за $d_2 = n+s$ следува дека $s^2 - s - n \ge 0$, од каде добиваме $s \ge \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$. Тогаш $d_2 - d_1 = s + k \ge \sqrt{4n+1}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $n = k(k+1)$.

53. Дадени се различни природни броеви $a_1, a_2,..., a_{11}$ не помали од 2, чиј збир е еднаков на 407. Дали постои природен број n, за кој збирот на остатоците при делењето на n со броевите $a_1, a_2,..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ е еднаков на 2012?

Решение. Нека претпоставиме дека постои таков природен број n.

Бидејќи најголемиот остаток при делењето со природен број m е еднаков на $m-1$, добиваме дека збирот на остатоците при делењето на произволен број со броевите $a_1, a_2, ..., a_{11}$ не е поголем од

$$a_1 - 1 + a_2 - 1 + ... + a_{11} - 1 = 407 - 11 = 396,$$

а збирот на остатоците при делењето на тој број со броевите $4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ не е поголем од

$$4a_1 - 1 + 4a_2 - 1 + ... + 4a_{11} - 1 = 4 \cdot 407 - 11 = 1617.$$

Ако сите остатоци се максималните можни, тогаш збирот им е еднаков на $396 + 1617 = 2013$. Бидејќи за дадениот број n тој збир е 2012, заклучуваме дека сите остатоци, освен еден се максимално можните, а еден остаток е за 1 помал од максимално можните.

Според тоа, за некој k еден од остатоците при делењето на n со броевите a_k и $4a_k$ е најголемиот можен остаток, а другиот е за 1 помал од најголемиот можен остаток. Тогаш еден од броевите $n+1$ и $n+2$ се дели со a_k, а другиот се дели со $4a_k$. Тоа значи, дека два заедно прости броеви $n+1$ и $n+2$ имаат делител $a_k \geq 2$, што е противречност. Конечно, не постои природен број n со саканото својство.

54. Дадени се различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{10}$ кои се поголеми или еднакви на 3, чиј збир е еднаков на 678. Дали постои природен број n таков што збирот на остатоците при делењето на бројот n со броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$, $2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ е еднаков на 2012?

Решение. Нека претпоставиме дека постои таков природен број n.

Бидејќи при делење со бројот m најголем можен остаток е $m-1$, добиваме дека збирот на остатоците од делењето на произволен број со броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$ не е поголем од $678 - 10 = 668$, а збирот на остатоците при делењето на тој број со броевите $2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ не е поголем од $2 \cdot 678 - 10 = 1346$. Ако сите остатоци се максимално можни, тогаш нивниот збир е еднаков на $668 + 1346 = 2014$.

Бидејќи за дадениот број n тој збир е 2012, можни се следниве случаи. *Случај* 1. Само еден остаток е за 2 помал од максималниот, а сите останати остатоци се максимални. Тогаш, за некој k едниот од остатоците при делење на n со a_k и $2a_k$ е максимално можниот, а другиот е за 2 помал од максимално можниот. Но, тоа значи дека еден од броевите $n+1$ и $n+3$ е делив со a_k, а другиот е делив со $2a_k$, што значи дека и двата се деливи со a_k. Според тоа, $a_k \mid (n+3)-(n+1)=2$, што противречи на $a_k \geq 3$.

Случај 2. Точно два остатоци се помали од максимално можниот. Тогаш, меѓу остатоците при делењето на n со парните броеви $2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ барем осум се максимални, т.е. тие се непарни броеви. Според тоа, n е непарен број затоа сите остатоци од делењето на n со $2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ се непарни броеви, што значи дека се максимално можни. Тоа значи, дека $n+1$ е делив со секој од броевите $2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ и затоа $n+1$ е делив со секој од броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Последното значи, дека сите 20 остатоци се максимално можни, што е противречност.

55. На почетокот на таблата се запишани 10 последователни природни броеви. Во еден чекор се произволно се избираат два броја (да ги означиме со a и b) и на нивно место се запишуваат броевите $a^2-2011b^2$ и ab. После неколку чекори на таблата не останал ниту еден од почетните броеви. Дали е можно новодобиените 10 броеви да се последователни 10 природни броја (запишани во некаков редослед)?

Решение. Нека претпоставиме, дека после неколку чекори на таблата се запишани десет последователни природни броеви, при што секој од броевите учествувал во барем еден чекор. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. За секој природен број k, после извршувањето на еден чекор, бројот на броевите, кои се делат со k не се намалува.

Доказ. Ако во операцијата учествувале броевите a и b, еден од кои е делив со k, тогаш и нивниот производ е делив со k. Освен тоа, ако и двата броја се деливи со k, тогаш и бројот $a^2-2011b^2$ е делив со k. ■

Да забележиме, дека во почетната и крајната ситуација има по пет броеви кои се деливи со 2 и по еден број, кој е делив со 10. Од лемата следува дека бројот на броевите, кои се деливи со 2 (или со 10) не се менува при примената на чекорите.

Нека во почетните 10 броеви a е најмалиот број, кој завршува на 5. Да го разгледаме првиот чекор во кој учествува бројот a. Ако вториот број во овој чекор е b и тој е непарен, тогаш еден од добиените броеви е парен и бројот на парните броеви ќе се зголемува,

што не е можно. Значи, b е парен и на таблата се појавува бројот ab кој е делив со 10. Ако притоа b не е делив со 10, тогаш бројот на броевите кои се деливи со 10 ќе се зголемува, што не е можно.
Според тоа, бројот b е делив со 10, и тогаш и двата броја во тој чекор ќе се деливи со 5. Новите два броја ќе се деливи со 25 и според лемата во последните 10 броеви ќе има барем два броја кои се деливи со 25. Последното не е можно за 10 последователни природни броеви.

56. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите делители на природниот број n, каде $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Определи ги сите природни броеви, за кои $k \geq 4$ и $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$.

Решение. Ако n е непарен број, тогаш и неговите делители се непарни броеви, од каде следува дека $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$ е парен број, што е противречност. Според тоа, n е парен број, $1 = d_1, d_2 = 2$ и $n = 5 + d_3^2 + d_4^2$. Тогаш, само еден од броевите d_3 и d_4 е парен. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.

1) Нека d_3 е парен, т.е. $d_3 = 2a, a > 1$. Тогаш a е делител на n кој е поголем од d_1 и е помал од d_3, па затоа $a = d_2 = 2$ и $d_3 = 4$. Според тоа, $n = 21 + d_4^2$, што не е можно бидејќи d се дели со 4.
2) Нека d_4 е парен, т.е. $d_4 = 2a, a > 1$. Ако $a = 2$, добиваме $d_4 = 4$ и од $2 = d_2 < d_3 < d_4 = 4$ следува $d_3 = 3$. Тогаш $n = 30$, кој не се дели со 4 и значи не е решение на задачата. Според тоа, a е делител на n кој е поголем од $d_2 = 2$ и помал од d_4, т.е. $a = d_3$. Значи, $n = 5(1 + d_3^2)$. Од $d_3 \mid n$ заклучуваме дека $d_3 \mid 5$, т.е. $d_3 = 5$. Тогаш $n = 130$ и тоа е единственото решение на задачата.

57. Определи ги сите природни броеви N кои ги задоволуваат следните услови:

- N има точно 16 делители $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N$, и
- делителот со индекс d_5, т.е. d_{d_5} е еднаков на $(d_2 + d_4)d_6$.

Решение. Прво да забележиме дека N нема повеќе од 4 прости различни делители и дека $d_2 = 2$.

Од условите на задачата следува дека $2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$, од каде $d_4 \geq 5$. Бидејќи $d_4 < d_5 \leq 2 + d_4$, следува дека

$$d_5 = 1 + d_4 \quad (1)$$

или

$$d_5 = 2 + d_4 \quad (2).$$

Ако е исполнето равенството (1) , тогаш $d_6 = 2 + d_4$, од каде следува дека $3 | N$, односно $d_3 = 3$. Бидејќи $6 | N$ мора $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 7$ и $d_6 = 8$, од каде следува дека $4 | N$ и $d_4 = 4$, што противречи на (1). Заначи, исполнето е равенството (2), односно $d_5 = 2 + d_4$. Ги разгледуваме следните случаи:

i) Ако $4 | N$, бидејќи $d_4 \geq 5$, добиваме $d_3 = 4$, од каде следува $8 | N$. Бидејќи $d_6 \geq 8$, мора $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Сите овие случаи водат до противречност. Имено,

- ако $d_4 = 8$, мора да е $d_5 = 10$, од каде следува $5 | N$ и $d_4 = 4$, што не е можно,
- ако $d_5 = 8$, имаме $d_4 = 6$, од каде следува $3 | N$ и следствено $d_3 = 3$, што не е можно,
- ако $d_6 = 8$, тогаш $d_5 = 7$, па затоа важи $d_4 = 5$ и $10 | N$. Но, $d_7 = (2+5)8 = 56 > 10$, што не е можно.

Значи 4 не е делител на N, па заклучуваме дека d_3 е прост делител.

ii) Ако $3 | N$, тогаш $d_3 = 3$. Бидејќи $6 | N$ и $d_4 \geq 6$, мора да биде $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 8$, па следува дека $4 | N$, што не е можно.

Значи 3 не е делител на N, па заклучуваме дека $d_3 \geq 5$ и $d_4 \geq 7$.

Бидејќи N и $2 + d_4$ не се деливи со 4, заклучуваме дека d_4 е непарен. Бидејќи $2 + d_4$ и d_4 не се деливи со 3, добиваме дека $d_4 = 3k + 2$, за некој цел број k и бидејќи d_4 е непарен следува дека $d_4 = 6l + 5$, за некој цел број l. Бидејќи $d_5 \leq 16$, мора да важи $7 \leq d_4 \leq 14$. Единствена можност е $d_4 = 11$ и $d_3 = 13$. Бидејќи $2d_3 | N$ и $2d_3 \geq d_4$, заклучуваме дека $d_3 \geq 6$. Бидејќи d_3 е прост и $d_3 < 11$, заклучуваме дека $d_3 = 7$. Конечно $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$.

58. Дадени се $n, n > 3$ по парови заемно прости броеви. Познато е дека при делењето на производот на било кои $n-1$ од броевите со преостанатиот број се добива еден и ист остаток r. Докажи, дека $r \leq n-2$.

Решение. Тврдењето е тривијално за $r = 0$ и затоа нека $r > 0$. Дадените броеви да ги означиме со $a_1, a_2, ..., a_n$ и нека $P = a_1a_2...a_n$, $P_i = \frac{P}{a_i}$, за $i = 1, 2, ..., n$. Јасно, бидејќи при делењето на P_i со a_i се добива остаток r, добиваме дека $a_i > r$.

Да го разгледаме бројот $S = P_1 + P_2 + ... + P_n - r$. Имаме

$$a_1 \mid S = (P_1 - r) + (P_2 + ... + P_n),$$

бидејќи и двата собирци се деливи со a_1. Аналогно $a_i \mid S$, за секој $i = 1, 2, ..., n$. Оттука и од условот следува дека $P = a_1a_2...a_n \mid S$. Бидејќи $S > a_1 - r > 0$, добиваме $S \geq P$ и тогаш $P_1 + P_2 + ... + P_n = S + r > P$. Според тоа, $\frac{P}{a_i} = P_i > \frac{P}{n}$, за некој i, од каде следува $a_i < n$, т.е. $a_i \leq n - 1$. Но, тогаш $r < a_i \leq n - 1$, т.е. $r \leq n - 2$.

59. Определи ги сите прости броеви p такви што бројот $p(p+1)(p+3)$ е производ на два последователни природни броја.

Решение. Нека $p(p+1)(p+3) = n(n+1)$. Бидејќи p е прост број добиваме дека p е делител на n или $n+1$.

Нека $p \mid n$, т.е. $n = pq$, каде $q \geq 2$. Тогаш $(p+1)(p+3) = q(pq+1)$, од каде следува $p^2 + (4 - q^2)p + 3 - q = 0$. Од последното равенство следува $p \mid q - 3$, т.е. $q = pk + 3$, $k \geq 0$ е цел број. Ако замениме во претходното равенство и скратиме со p го добиваме равенството $p = p^2k^2 + 6pk + 5 + k$, кое е можно само за $k = 0$ и соодветно $p = 5$. Сега $q = 3$ и $n = 15$.

Нека $p \mid n+1$, т.е. $n + 1 = pq$, каде $q \geq 2$. Тогаш

$$(p+1)(p+3) = q(pq-1),$$

од каде следува

$$p^2 + (4 - q^2)p + 3 + q = 0.$$

Сега имаме $p \mid q + 3$, т.е. $q = pk - 3$, $k \geq 1$ е цел број. Ако замениме во претходното равенство и скратиме со p го добиваме равенството

$$p = p^2k^2 - 6pk + 5 - k = k(p^2k - 6p - 1) + 5.$$

Бидејќи $p^2k - 6p - 1 > p$, кога $k \geq 4$ добиваме $1 \leq k \leq 3$. Со непосредна проверка се добиваат решенијата

$$p = 2, n = 5 \text{ и } p = 3, n = 8.$$

60. Определи ги сите парови природни броеви $(m,n), m>n$ такви што $mn-1$ е делител на n^3-1.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$mn-1\,|\,(n^3-1)m-n^2(mn-1)=n^2-m.$$

Исто така

$$mn-1\,|\,m(n^2-m)-(mn-1)n=n-m^2.$$

Ако $n>m^2$, тогаш $mn-1<n-m^2\le n-1$, па затоа $mn<n$, т.е. $m<1$, што не е можно.

Ако $n=m^2$, тогаш очигледно $m^3-1\,|\,m^6-1=(m^3-1)(m^3+1)$, па затоа паровите (m,m^2), $m>1$ се решение на задачата.

Ако $n<m^2$, тогаш од $mn-1\,|\,n^3-1$ следува $m\le n^2$. Понатаму, од $mn-1\,|\,m^2-n$ следува дека

$$mn-1<m^2-n<m^2-1,$$

т.е. $m>n$. Ако $n^2-m>0$, тогаш од $mn-1\,|\,n^2-m$ следува дека

$$mn-1\le n^2-m<n^2-1,$$

т.е. $m<n$, што е противречност. Според тоа, $m=n^2$, при што имаме $n^3-1\,|\,n^3-1$, па затоа сите парови $(n^2,n), n>1$ се решенија на задата.

Конечно, решение на задачата се подредените парови од видовите $(k,k^2),(k^2,k)$, за $k>1$.

61. Определи ги подредени парови природни броеви (m,n), за кои $\frac{n^3+1}{mn-1}\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $\frac{n^3+1}{mn-1}=t$, од каде добиваме $t+1=n(tm-n^2)$, што значи $n\,|\,(t+1)$. Ставаме $t=kn-1$ и добиваме $\frac{n^3+1}{mn-1}=kn-1$, што значи дека задачата се сведува на наоѓање природни броеви k,m и n за кои важи

$$n^3+1=(kn-1)(mn-1) \quad\Leftrightarrow\quad n^2-kmn+k+m=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$(m-1)(k-1)+(n-1)(km-n-1)=2. \qquad (1)$$

Од $k+m=n(km-n)$ следува $km-n>0$. Освен тоа важи $m-1\ge 0$, $k-1\ge 0$, $n-1\ge 0$ и $km-n-1\ge 0$, па затоа од (1) следува

$$(m-1)(k-1)\le 2 \text{ и } (n-1)(km-n-1)\le 2 .$$

Можни се следниве три случаи:

1) $(m-1)(k-1)=0$ и $(n-1)(km-n-1)=2$. Од првата равенка добиваме $m=1$ или $k=1$. Од втората равенка добиваме $km-n-1=2$ и $n-1=1$ или пак $n-1=2$ и $km-n-1=1$. И во двата случај добиваме $km=5$. Затоа, $k=1$ и $m=5$ или пак $k=5$ и $m=1$. Заменувајќи $km=5$ во втората равенка добиваме $n=2$ или $n=3$.
2) $(m-1)(k-1)=1$ и $(n-1)(km-n-1)=1$. Очигледно, во овој случај единствено решение е $k=m=n=2$.
3) $(m-1)(k-1)=2$ и $(n-1)(km-n-1)=0$. Од првата равенка добиваме $k=3$ и $m=2$ или пак $k=2$ и $m=3$. Заменувајќи $km=6$ во втората равенка добиваме $n=1$ или $n=5$.

Конечно, бараните подредени парови природни броеви се:

$$(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,5),(5,2),(3,5),(5,3) .$$

62. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се природни броеви.

Решение. За дадени природни броеви a и b бројот a^3b-1 можеме да го запишеме во обликот

$$a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1) .$$

Ако a и b се броеви кои го задоволуваат условот од задачата, тогаш $a+1|a^3b-1$ и $a+1|b(a^3+1)$, па затоа $a+1|b+1$.

Аналогно, b^3a+1 можеме да го запишеме во обликот

$$b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1) .$$

Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $b-1|b^3a+1$ и $b-1|a(b^3-1)$, па затоа $b-1|a+1$.

Сега, на потполно аналоген начин се добива дека $b-1|b+1$. Од равенството $b+1-(b-1)=2$, следува $b-1|2$, па имаме две можности.

Случај 1. Ако $b=2$, тогаш $a+1|b+1=3$ и единствена можност е $a=2$. Во овој случај единствено решение е $(a,b)=(2,2)$.

Случај 2. Ако $b=3$. Тогаш $a+1|b+1=4$, па имаме две можности $a=1$ или $a=3$. Решенија во овој случај се $(a,b)=(1,3)$ и $(a,b)=(3,3)$.

Конечно бараните подредени парови се $(a,b)\in\{(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

63. Определи ги сите прости броеви p за кои $p+2, p+6, p+8, p+12,$ $p+14$ се исто така прости броеви.

Решение. Со непосредна проверка се убедуваме дека не може да е $p<5$. За $p=5$ ги имаме простите броеви 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Ако $p=5k+1$, тогаш $5\,|\,p+14$. Ако $p=5k+2$, тогаш $5\,|\,p+8$. Ако $p=5k+3$, тогаш $5\,|\,p+12$ и ако $p=5k+4$, тогаш $5\,|\,p+6$.

Значи, единствено решение е $p=5$

64. Определи ги сите природни броеви n такви што n^5+n^4+1 е прост број.

Решение. За $n=1$ имаме $n^5+n^4+1=3$ и тоа е прост број. Ако $n>1$, тогаш

$$\begin{aligned} n^5+n^4+1 &= n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1 \\ &= n^3(n^2+n+1)-n(n^2+n+1)+(n^2+n+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^3-n+1) \end{aligned}$$

т.е. n^5+n^4+1 е производ на два броја поголеми од 1, што значи дека не е прост број.

65. Определи ги сите природни броеви a и b такви што a^4+4b^4 е прост број.

Решение. Имаме

$a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$.

Бидејќи $a^2+2b^2+2ab\geq 5>1$, добиваме дека a^4+4b^4 може да биде прост број само ако $a^2+2b^2-2ab=(a-b)^2+b^2=1$, т.е. само ако $a=b=1$.

Конечно, за $a=b=1$ имаме $a^4+4b^4=5$, што значи дека тоа е единствено решение на задачата.

66. Нека се p и q прости броеви, такви што $q\,|\,p-1$ и $p\,|\,q^3-1$. Докажи, дека $p=q^2+q+1$.

Решение. Од $q\,|\,p-1$ следува дека $q<p$ и бидејќи p е прост број, од $p\,|\,q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$ следува $p\,|\,q^2+q+1$. Нека $q^2+q+1=kp$ за $k>1$. Тогаш од $q\,|\,p-1$ добиваме $p-1=tq$, за некој $t\in\mathbb{N}$, па значи

$$q^2+q+1=k(tq+1)=ktq+k\ .$$

Според тоа $q\,|\,k-1$, односно $k\geq q+1$. Добиваме

$$q^2+q+1\geq (q+1)(tq+1)\geq q^2+2q+1,$$

што е противречност. Значи, $k=1$ и $q^2+q+1=p$.

67. Определи ги сите прости броеви p, q, r, s такви што нивниот збир е прост број и броевите p^2+qr и p^2+qs се квадрати на природни броеви.

Решение. Бидејќи $p+q+r+s$ е прост број, заклучуваме дека еден од броевите p, q, r, s е парен. Нека $q=2$. Тогаш $p^2+2r=a^2$ и $p^2+2s=b^2$, па затоа

$$2r=(a-p)(a+p)\ \text{и}\ 2s=(b-p)(b+p)\ .$$

Но, броевите a, b, p се непарни, па затоа $(a-p)(a+p)$ и $(b-p)(b+p)$ се деливи со 4, што не е случај со $2r$ и $2s$, бидејќи r и s се прости броеви поголеми од 2.

Нека $r=2$. Тогаш $p^2+2q=a^2$, т.е. $2q=(a-p)(a+p)$, што не е можно бидејќи бројот $(a-p)(a+p)$ е делив со 4, а бројот $2q$ не е делив со 4, бидејќи q е непарен прост број.

Аналогно добиваме дека $s\neq 2$.

Значи, $p=2$. Сега $qr=a^2-4$ и $qs=b^2-4$, па затоа

$$qr=(a-2)(a+2)\ \text{и}\ qs=(b-2)(b+2)\ .$$

Ако $a-2=1$, тогаш $a=3$, па затоа $a+2=5$ и задачата нема решенние. Аналогно е и за $b-2=1$.

Бидејќи $a\neq b$, имаме два случаи:

1) $q=a-2, r=a+2, q=b+2, s=b-s$. Сега имаме $a=q+2, b=q-2$, па затоа броевите $s=q-4, q, r=q+4$ се прости. Бидејќи еден од нив е делив со 3, заклучуваме дека тој мора да е еднаков на 3. Според тоа, $q=7, s=3, r=11$.

2) Ако $q=a+2, r=a-2, q=b-2, s=b+2$, тогаш размислувајќи на потполно иста начин добиваме $q=7, r=3, s=11$.

Значи, решенија се $(p,q,r,s)\in\{(2,7,3,11),(2,7,11,3)\}$.

68. Определи ги сите прости броеви p и q за кои бројот $p^{q+1}+q^{p+1}$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Лесно се гледа дека $p=q=2$ е решение на задачата. Нека $p^{q+1}+q^{p+1}=x^2$, $x\in\mathbb{N}$ и p е непарен број. Тогаш $p+1$ е парен број и

$$p^{q+1}=(x-q^{\frac{p+1}{2}})(x+q^{\frac{p+1}{2}}).$$

Ако $d=\mathrm{NZD}(x-q^{\frac{p+1}{2}},x+q^{\frac{p+1}{2}})$, тогаш d е степен на p и е делител на $2x$. Но, p е непарен број, па ако $d>1$, тогаш $p\,|\,x$, од каде следува дека $p\,|\,q^{\frac{p+1}{2}}$, т.е. $p\,|\,q$. Значи, $p=q$ и добиваме дека $2p^{p+1}=x^2$, што не е можно.

Според тоа, $d=1$ и $x-q^{\frac{p+1}{2}}=1, x+q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}$. Оттука, следува дека $2q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}-1$, што кога q е непарен број не е можно, бидејќи десната страна ќе се дели со 4, а левата не. Значи, $q=2$ и $2^{\frac{p+3}{2}}=p^3-1=(p-1)(p^2+p+1)$. Меѓутоа, $\mathrm{NZD}(p-1,p^2+p+1)=1$, па затоа $p-1=1$, т.е. $p=2$, што е противречност.

69. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот 11^n+2^n+1 е делител на $11^{n+1}+2^{n+1}+1$.

Решение. Нека n е таков што бројот 11^n+2^n+1 е делител на $11^{n+1}+2^{n+1}+1$. Тогаш бројот $a=11^n+2^n+1$ е делител на бројот $11a-11^{n+1}+2^{n+1}+1=9\cdot 2^n+10$. За $n=1$ добиваме $a=14$ и овој број е делител на $11^{1+1}+2^{1+1}+1=126$. Ќе докажеме дека за $n>1$ е исполнето неравенството $9\cdot 2^n+10<11^n+2^n+1$. Навистина, последното неравенство е еквивалентно со неравенството $8\cdot 2^n+9<11^n$, кое очигледно важи бидејќи

$$11^n=(8+3)\cdot 11^{n-1}=8\cdot 11^{n-1}+3\cdot 11^{n-1}>8\cdot 8^{n-1}+3\cdot 11>8\cdot 2^n+9.$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека единствено решение на задачата е $n=1$.

70. Природните броеви a, b и c се такви, што бројот $a+b+c$ се дели со 6, а бројот $ab+bc+ca$ се дели со 3. Докажи дека, бројот $a^n+b^n+c^n$ е делив со 6 за секој природен број $n\geq 2$.

Решение. *Прв начин*. За секои два природни броја t и n важи

$$t^{n+2}-t^n=t^n(t^2-1)=t^{n-1}\cdot t(t-1)(t+1)\,.$$

Оттука следува, дека $t^{n+2}-t^n$ се дели со 6, бидејќи $t(t-1)(t+1)$ е производ на три последователни природни броеви. Заклучуваме, дека за секој природен број n броевите $a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}$ и $a^n+b^n+c^n$ даваат еден и ист остаток при делење со 6. Следствено тврдењето на задачата ќе е докажано, ако го докажеме за $n=1$ (што е дадено по услов) и за $n=2$, што следува од равенството

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\,. \qquad (1)$$

Втор начин. Доволно е да докажеме, дека $a^n+b^n+c^n$ се дели со 2 и со 3. Деливоста со 2 следува од фактот, дека за секој природен број n броевите a и a^n, b и b^n, c и c^n имаат една и иста парност, од каде следува дека и броевите $a+b+c$ и $a^n+b^n+c^n$ имаат една и иста парност. Останува да искористиме, дека по услов бројот $a+b+c$ е парен. Ќе ја докажеме деливоста со 3. Од равенството (1) следува, дека $a^2+b^2+c^2$ се дели со 3, што значи дека тврдењето е докажано за $n=2$. Но квадратите на целите броеви при делење со 3 даваат остатоци 0 или 1. Заклучуваме, дека $a^2+b^2+c^2$ се дели со 3 ако и само ако a, b и c историемено се делат или не се делат со 3. Ако a, b и c се делат истовремено со 3, тогаш тврдењето на задачата е очигледно. Ако a, b и c не се делат истовремено со 3, тогаш за да $a+b+c$ се дели со 3, потребно е a, b и c да даваат еден и ист остаток при делење со 3. Но тогаш и a^n, b^n и c^n даваат един и ист остаток при делење со 3 и следствено $a^n+b^n+c^n$ се дели со 3, бидејќи по услов $a+b+c$ се дели со 3.

Трет начин. Од равенството (1) следува, дека тврдењето е точно за $n=2$. Бидејќи $a+b+c$ е парен, заклучуваме дека барем еден од броевите a, b и c е парен. Следствено бројот abc е парен. Тогаш за $n=3$ тврдењето следува од равенството:

$$a^3+b^3+c^3=(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-(ab+bc+ca)(a+b+c)+3abc\,.$$

За $n>3$ тврдењето следува по индукција од равенството:

$$a^n+b^n+c^n=(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})(a+b+c)-(ab+bc+ca)\cdot$$
$$\cdot(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2})+abc(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3}).$$

71. Нека n е природен број. Докажи, дека ако n^5+n^4+1 има точно 6 различни природни делители, тогаш n^3-n+1 е точен квадрат на природен број.

Решение. Еден природен број има точно шест природни делители ако и само ако нaговиот каноничен запис е p^5 или pq^2, каде p и q се прости броеви.

Имаме

$$n^5+n^4+1=(n^3-n+1)(n^2+n+1).$$

Понатаму, од $n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$ следува дека n^2+n+1 не е точен квадрат. Нека со d го означиме најголемиот заеднички делител на n^2+n+1 и n^3-n+1. Тогаш последователно добиваме

$$d\,|\,n(n^2+n+1)-(n^3-n+1)=n^2+2n-1$$

$$d\,|\,n^2+2n-1-(n^2+n+1)=n-2$$

$$d\,|\,n^2+n+1-n(n-2)=3n+1$$

$$d\,|\,3n+1-3(n-2)=7.$$

Според тоа, $d=1$ или $d=7$.

Прв случај. Ако $d=1$, тогаш

$$(n^3-n+1)(n^2+n+1)=pq^2$$

и единствена можност е

$$n^3-n+1=q^2 \text{ и } n^2+n+1=p,$$

При што првото од овие две равенства е тврдењето на задачата. Еден пример се добива за $n=3$.

Втор случај. Ако $d=7$ и

$$(n^3-n+1)(n^2+n+1)=pq^2$$

или p^5, тогаш еден од множителите од лево е еднаков на 7. Лесно се гледа дека во овој случај немаме решение.

72. Нека $q=\frac{3p-5}{2}$, каде p е непарен прост број. Да означиме

$$S_q=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Докажи, дека ако $\frac{1}{p}-2S_q=\frac{m}{n}, m,n\in\mathbb{Z}$, тогаш разликата $n-m$ е делива со p.

Решение. Имаме

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})$$
$$=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{3}{k+1}.$$

Според тоа,

$$2S_q=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2})-3(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{q+1})$$
$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\frac{3p-3}{2}}+\frac{1}{\frac{3p-1}{2}})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}})$$
$$=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+3}{2}}+\dots+\frac{1}{\frac{3p-3}{2}}+\frac{1}{\frac{3p-1}{2}}-1,$$

од каде добиваме

$$\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1+2S_q-\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+3}{2}}+\dots+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}+\dots+\frac{1}{\frac{3p-3}{2}}+\frac{1}{\frac{3p-1}{2}}$$
$$=(\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{3p-1}{2}})+(\frac{1}{\frac{p+3}{2}}+\frac{1}{\frac{3p-3}{2}})+\dots+(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1})$$
$$=\frac{2p}{\frac{p+1}{2}\cdot\frac{3p-1}{2}}+\frac{2p}{\frac{p+3}{2}\cdot\frac{3p-3}{2}}+\dots+\frac{2p}{(p-1)(p+1)}.$$

Конечно, бидејќи сите именители се заемно прости со p, од последното равенство следува дека $p\,|\,(n-m)$.

73. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1}-2^{n-1}$.

Решение. Нека $x,y\in\mathbb{N}$. Ако $x\,|\,y$, тогаш $3^x-2^x\,|\,3^y-2^y$, па затоа бројот n ќе го побараме во облик 3^s-2^s. За да важи $3^s-2^s\,|\,3^{n-1}-2^{n-1}$, доволно е да важи $s\,|\,n-1$, т.е. доволно е да важи $s\,|\,3^s-2^s-1$. Нека $s=2^t$. Бидејќи за секој природен број t важи $t\le 2^t$ добиваме $s\,|\,2^s$. Значи доволно е $2^t=s\,|\,3^s-1=3^{2^t}-1$. Последното ќе го докажеме со математичка индукција. За $t=1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $2^t\,|\,3^{2^t}-1$. Имаме,

$$3^{2^{t+1}}-1=(3^{2^t}-1)(3^{2^t}+1).$$

Според индуктивната претпоставка првиот множител на десната страна на последното равенство се дели со 2^t, а вториот множител е парен, добиваме дека $2^{t+1}\,|\,3^{2^{t+1}}-1$, па од принципот на математичка индукција следува дека $2^t\,|\,3^{2^t}-1$, за секој природен број t. Значи, за бројот $n=3^{2^t}-2^{2^t}$ важи $n\,|\,3^{n-1}-2^{n-1}$. Меѓутоа, за $t\geq 2$ важи

$$3^{2^t}-2^{2^t}=(3^{2^{t-1}}-2^{2^{t-1}})(3^{2^{t-1}}+2^{2^{t-1}})$$

и очигледно тоа е сложен број. Според тоа, постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1}-2^{n-1}$.

74. За природниот број n ќе велиме дека е *лош*. Ако не може да се претстави во облик $n=\frac{x^2-1}{y^2-1}$ за некои природни броеви x,y. Докажи, дека множеството лоши броеви е бесконечно.

Решение. Доволно е да докажеме, дека секој број од видот $n=p^2$, каде p е непарен прост број е лош. Нека го препоставиме спротивното, т.е. $(y^2-1)p^2=x^2-1$ за некои природни броеви x и y. Тогаш само еден од броевите $x+1$ и $x-1$ се дели со p.

Ако $p\,|\,x+1$, тогаш $p^2\,|\,x+1$, т.е. $x=kp^2-1$, за некој природен број k. Затоа

$$y^2=\tfrac{x+1}{p^2}(x-1)+1=k(kp^2-2)+1=k^2p^2-2k+1.$$

Но, $k^2p^2>k^2p^2-2k+1>k^2p^2-2kp+1=(kp-1)^2$, што не е можно.

Ако $p\,|\,x-1$, аналогно добиваме $x=kp^2+1, y^2=k^2p^2+2k+1$ и $(kp)^2<y^2<(kp+1)^2$, што повторно не е можно.

75. Дали постои множество S од 2017 природни броеви за кое се исполнети условите:

1) елементите на S се по парови заемно прости.
2) секој збир на два или повеќе различни броеви од S е сложен број,

Решение. Ќе докажеме дека множеството

$$S=\{2017!+1, 2\cdot 2017!+1, 3\cdot 2017!+1,..., 2017\cdot 2017!+1\}$$

ги задоволува условите на задачата.

Нека d е заеднички делител на броевите $i\cdot 2017!+1$ и $k\cdot 2017!+1$. Тогаш d е делител на бројот $(i-k)\cdot 2017!+1$. Но, $|i-k|<2018$, па затоа секој прост делител на d е помал од 2018, т.е. постои прост број

$p < 2018$ таков што $p \mid d$. Тоа значи дека $p \mid 2017!$. Сега $d \mid i \cdot 2017!+1$ и $p \mid d$ следува $p \mid i \cdot 2017!+1$ и како $p \mid 2017!$, добиваме дека $p \mid 1$, што е противречност. Според тоа, d нема прости делители, односно $d = 1$ и $\text{NZD}(i \cdot 2017!+1, k \cdot 2017!+1) = 1$, т.е. исполнет е условот 1).

Збирот на $k \geq 2$ броеви од S е

$$i_1 \cdot 2017!+1+i_2 \cdot 2017!+1+...+i_k \cdot 2017!+1 = (i_1+i_2+...+i_k) \cdot 2017!+k$$

и бидејќи $k \leq 2017$ тој е делив со k, т.е. е слошен број.

76. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $(ab+1) \mid (a^2-1)$.

Решение. Имаме $a(a+b) = a^2-1+ab+1$ и од $(ab+1) \mid (a^2-1)$ следува $(ab+1) \mid a(a+b)$. Но, $\text{NZD}(ab+1, a) = 1$, па затоа $(ab+1) \mid (a+b)$. Според тоа, $a+b \geq ab+1$, па затоа важи $(a-1)(b-1) \leq 0$, од каде добиваме $a = 1$ или $b = 1$. Според тоа,

$$(a,b) \in \{(1,n), (n,1) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

77. Нека a, b, c, d се природни броеви, такви што $a > b > c > d$ и

$$ac+bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c). \qquad (1)$$

Докажи, дека $ab+cd$ не е прост број.

Решение. Равенството (1) е еквивалентно на равенството

$$a^2-ac+b^2 = b^2+bd+d^2.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(ab+cd)(ad+bc) &= ac(b^2+bd+d^2)+bd(a^2-ac+c^2) \\ &= (ac+bd)(a^2-ac+c^2).\end{aligned} \qquad (2)$$

Нека претпоставиме дека $ab+cd$ е прост број. Од $a > b > c > d$ следува дека $ab+cd > ac+bd > ad+bc$ и како $ab+cd$ е прост број следува дека $\text{NZD}(ab+cd, ac+bd) = 1$. Сега, од (2) следува дека $ac+bd \mid ad+bc$, што противречи на $ac+bd > ad+bc$. Конечно, од добиената противречност следува дека $ab+cd$ не е прост број.

78. Природниот број може да се претстави како збир на своите $k > 3$ различни прости делители. Докажи, дека n не може да биде заемно прост со бројот $(k-1)!$

Решение. Нека претпоставиме дека постои природен број n кој може да се запише како збир на своите $k > 3$ различни прости делители и кој е заемно прост со бројот $(k-1)!$. Условот $\text{NZD}(n, (k-1)!) = 1$ значи дека n не е делив со ниту еден број помал од k, што значи дека сите негови прости делители се поголеми од k. Ако p е најголемиот прост делител на n и $p>k$, тогаш

$$n=p_1+p_2+...+p_k<kp.$$

Бидејќи $n=pq$, за некој $q>1$ (бројот n има $k>3$ различни прости делители), добиваме дека $q<k$, т.е. $q\leq k-1$. Затоа $q|(k-1)!$ и како $q|n$ добиваме дека $\text{NZD}(n,(k-1)!)\geq q>1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

79. Нека a и b се природни броеви такви што $ab|(a^2+b^2)$. Докажи, дека $a=b$.

Решение. Од $ab|(a^2+b^2)$ следува $\frac{a}{\text{NZD}(a,b)}|(a^2+b^2)$, т.е. $\frac{a}{\text{NZD}(a,b)}|b^2$

Бидејќи $\text{NZD}(\frac{a}{\text{NZD}(a,b)},b^2)=1$, заклучуваме дека $a=\text{NZD}(a,b)$. Аналогно се докажува дека $b=\text{NZD}(a,b)$, па затоа $a=b$.

80. Нека a и b се различни природни броеви поголеми од 10^6 и такви што $ab|(a+b)^3$. Докажи, дека $|a-b|>10^4$.

Решение. Без ограничување на општоста може да претпоставиме дека $a>b$. Ако $k=\text{NZD}(a,b)$, тогаш $a=km, b=kn$, при што $\text{NZD}(m,n)=1$ и $m>n$. Јасно,

$$|a-b|=a-b=k(m-n)\geq k.$$

Ќе докажеме дека $k>10000$. Нека претпоставиме дека $k\leq 10000$. Тогаш $m>n>100$. Бидејќи

$$ab|(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$

добиваме дека $ab|a^3+b^3$, односно дека $k^2mn|k^3(m^3+n^3)$. Од $\text{NZD}(m,n)=1$, следува

$$\text{NZD}(n,m^3+n^3)=\text{NZD}(m,m^3+n^3)=1,$$

па затоа од $k^2mn|k^3(m^3+n^3)$ следува $mn|k$. Од друга страна, важи

$$mn>100\cdot 100=10000\geq k,$$

што е противречност. Според тоа, $k>10000$, што значи дека $|a-b|\geq k>10^4$.

81. На таблата е запишан природен број. Ако на таблата веќе е запишан бројот x, тогаш можеме да допишеме $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. Докажи, дека

ако во некој момент на таблата се појави бројот 2008, тогаш и првиот запишан број е 2008.

Решение. Ќе ги разгледаме само броевите кои учествуваат во добивањето на бројот 2008. Да забележиме, дека сите броеви се позитивни и рационални.

Ако на таблата веќе е запишана нескратливата дропка $x=\frac{p}{q}$, тогаш може да допишеме $2x+1=\frac{2p+q}{q}$ или $\frac{x}{x+2}=\frac{p}{p+2q}$. Ако можеме да скратиме некоја од овие дропки, тогаш можеме да скратиме само со 2. Навистина,

$$\mathrm{NZD}(2p+q,q)=\mathrm{NZD}(2p,q)\le 2\,\mathrm{NZD}(p,q)$$

и

$$\mathrm{NZD}(p,p+2q)=\mathrm{NZD}(p,2q)\le 2\,\mathrm{NZD}(p,q).$$

Според тоа, збирот на броителот и именителот во нескратливиотзапис на секој од новите броеви е или $(2p+q)+q=p+(p+2q)=\ 2(p+q)$ или $\frac{2(p+q)}{2}=p+q$. Според тоа, збирот или се запазува или се удвојува. Бидејќи во дадениот момент тој е непарен број $2008+1=2009$, заклучуваме дека во ниту еден момент пред тоа немало удвојување, што значи дека и на почетокот тој збир бил 2009. Но, почетниот број е природен број, што значи дека неговиот именител е 1, па затоа почетниот број е $2009-1=2008$.

82. Определи го најмалиот природен број k за кој постои природен број $n\ge 100$ таков, што бројот $n(n+k)$ е точен квадрат.

Решение. Од $100(100+21)=110^2$ следува дека $k\le 21$. Нека претпоставиме дека $k\le 20$ и да ставиме $d=\mathrm{NZD}(n,k)$, $n=n_1d, k=k_1d$, каде $\mathrm{NZD}(n_1,k_1)=1$. Сега од $n(n+k)=\ n_1(n_1+k_1)d^2$ следува дека $n_1(n_1+k_1)$ е точен квадрат. Но, $\mathrm{NZD}(n_1,k_1+n_1)=1$, па затоа и броевите n_1 и n_1+k_1 се точни квадрати.

Од $k\le 20$ следува дека $d\le 20$, па затоа $n_1=\frac{n}{d}\ge\frac{100}{20}=5$. Но, n_1 е точен квадрат, па затоа $n_1\ge 9$. Бидејќи k_1 е разликата од n_1 до следниот точен квадрат имаме $k_1\ge 7$. Сега, од $k=k_1d\le 20$ следува дека $d\le 2$ и на иста начин како и претходно добиваме $n_1\ge 50$, т.е. $n_1\ge 64$, од каде следува $k_1\ge 17, d=1, n_1\ge 100$ и конечно $k_1\ge 21$, што е противречност, бидејќи $k_1 \le k \le 20$.

83. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \dots, \frac{30}{n+32}, \frac{31}{n+33}$$

е нескратлива.

Решение. Секоја од дадените дропки можеме да ја запишеме во видот $\frac{a}{a+n+2}$. Дропката $\frac{a}{a+n+2}$ ќе биде нескратлива ако и само ако $\mathrm{NZD}(a,n+2)=1$. Очигледно $n+2=2k+1$, бидејќи за $n+2=2k$ и $a=2m$ важи $\mathrm{NZD}(a,n+2)\ge 2\ne 1$. Исто така $n+2>31$. Имено, за $n+2\le 31$ секогаш може да се најде број $a=n+2$ за кој дропката $\frac{a}{a+n+2}=\frac{a}{a+a}$ може да се скрати. За $n+2=33$ добиваме дека $n+2$ се дели со 3, па постои број, на пример $a=30$ за кој дропката $\frac{30}{30+33}$ може да се скрати. За $n+2=35$, заради деливоста со 5, постои број $a=30$ за кој дропката $\frac{30}{30+35}$ може да се скрати. Најмалиот број $n+2$ со својство $\mathrm{NZD}(a,n+2)=1$ е бројот $n+2=37$ и тој е заемно прост со секој број помал или еднаков на 31. Затоа најмалиот број со неведеното својство е бројот $n=35$.

84. Определи ги сите парови прости броеви p и q за кои $p^2 \mid q^3+1$ и $q^2 \mid p^6-1$.

Решение. Ако $p=3$, од $q^2 \mid 3^6-1=2^3\cdot 7\cdot 11$ следува $q=2$ и тоа е едно решение на задачата.

Нека $p\ne 3$. Од $\mathrm{NZD}(q+1,q^2-q+1)=1$ или 3, заклучуваме дека $p^2 \mid q+1$ или $p^2 \mid q^2-q+1$, при што и во двата случаја важи $p<q$. За $p+1=q$ го добиваме решението $p=2, q=3$. Нека сега $q\ge p+2$.

Да го разгледаме условот

$$q^2 \mid p^6-1=(p-1)(p+1)(p^2-p+1)(p^2+p+1).$$

Бидејќи

$$\mathrm{NZD}(q,p-1)=\mathrm{NZD}(q,p+1)=1$$

добиваме $q^2 \mid (p^2-p+1)(p^2+p+1)$. Освен тоа,

$$\mathrm{NZD}(p^2-p+1,p^2+p+1)=\mathrm{NZD}(p^2+p+1,2p)=1,$$

па затоа $q^2 \mid p^2-p+1$ или $q^2 \mid p^2+p+1$. Првото не е можно бидејќи

$$p^2 - p + 1 < p^2 < q^2,$$

а од второто следува

$$(p+2)^2 \le q^2 \le p^2 + p + 1, \text{ т.е. } 3p + 3 < 0,$$

што е противречност.

85. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ е точен квадрат на прост број.

Решение. Нека $\frac{a^2(b-a)}{b+a} = p^2, a,b \in \mathbb{N}$ и p е прост број. Имаме $b = \frac{a(a^2+p^2)}{a^2-p^2} \in \mathbb{N}$. Ќе разгледаме два случаи:

1) Ако $\text{NZD}(a,p) = 1$, тогаш

$$\text{NZD}(a^2 + p^2, a^2 - p^2) \mid 2 \text{ и } \text{NZD}(a^2 - p^2, a) = 1$$

од каде следува дека задачата нема решение бидејќи $a^2 - p^2 > 2$, па b не е природен број.

2) Ако $\text{NZD}(a,p) \ne 1$, тогаш $a = kp, k \in \mathbb{N}$, па затоа

$$b = \frac{kp \cdot p^2(k^2+1)}{p^2(k^2-1)} = \frac{kp(k^2+1)}{k^2-1}.$$

Од $b \in \mathbb{N}$ следува $\text{NZD}(k^2+1, k^2-1) \mid 2$ и $\text{NZD}(k^2-1, k) = 1$, што значи дека $(k^2-1) \mid 2p$, односно $k^2 - 1 \in \{1, 2, p, 2p\}$.

- Ако $k^2 - 1 = 1$, тогаш $k^2 = 2$, што не е можно.
- Ако $k^2 - 1 = 2$, тогаш $k^2 = 3$, што не е можно.
- Ако $k^2 - 1 = p$, тогаш $(k-1)(k+1) = p$, од каде добиваме $k = 2, p = 3$, па затоа $a = kp = 6, b = 10$.
- Ако $k^2 - 1 = 2p$, тогаш $(k-1)(k+1) = 2p$. Бидејќи $k-1$ и $k+1$ се со иста парност и бидејќи десната страна е делива со 2, заклучуваме дека $k-1$ и $k+1$ се последователни парни броеви, па затоа еден од нив е делив со 4, а другиот со 2. Според тоа, левата страна е делива со 8, а десната не се дели со 8, што значи дека во овој случај задачата нема решение.

Конечно, единствено решение е $(a,b) = (6,10)$.

86. Нека a,b,c се природни броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ и d е нивниот најголем заеднички делител. Докажи, дека $abcd$ е точен квадрат.

Решение. Од условот на задачата следува дека $a=da_1, b=db_1, c=dc_1$, каде $\text{NZD}(a_1,b_1,c_1)=1$. Ако замениме во условот на задачата добиваме $c_1=\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}$. Нека $u=\text{NZD}(a_1,b_1)$. Тогаш $a_1=ua_2, b_1=ub_2$, каде $\text{NZD}(a_2,b_2)=1$. Според тоа, $c_1=\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{ua_2b_2}{a_2+b_2}$ и како $c_1\in\mathbb{N}$ и $\text{NZD}(a_2,a_2+b_2)=\text{NZD}(b_2,a_2+b_2)=1$ мора да важи $a_2+b_2\,|\,u$, т.е. постои $v\in\mathbb{N}$ таков што $u=v(a_2+b_2)$. Според тоа, $c_1=va_2b_2$, т.е. $v\,|\,c_1$ и како $v\,|\,u=\text{NZD}(a_1,b_1)$, добиваме дека $v\,|\,\text{NZD}(a_1,b_1,c_1)=1$, т.е. $v=1$. Затоа $c_1=a_2b_2$. Конечно,

$$abcd=d^4a_1b_1c_1=d^4u^2a_2^2b_2^2=(d^2ua_2b_2)^2,$$

што и требаше да се докаже.

87. Определи ги сите цели броеви a такви што $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}$ е рационален број.

Решение. Нека $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}=\frac{p}{q}$, каде p и q се природни броеви такви што $\text{NZD}(p,q)=1$. Ако го квадрираме последното равенство последователно добиваме

$$\frac{9a+4}{a-6}=\frac{p^2}{q^2}$$
$$9aq^2+4q^2=ap^2-6p^2$$
$$a(9q^2-p^2)=-6p^2-4q^2$$
$$a=\frac{-6p^2-4q^2}{9q^2-p^2}$$
$$a=\frac{54q^2-6p^2-58q^2}{9q^2-p^2}$$
$$a=6-\frac{58q^2}{9q^2-p^2}.$$

Од $a\in\mathbb{Z}$ следува дека $9p^2-q^2\,|\,58q^2$. Понатаму, од $\text{NZD}(p,q)=1$, следува $\text{NZD}(p^2,q^2)=1$, па затоа $\text{NZD}(9q^2-p^2,q^2)=1$. Според тоа, $9p^2-q^2\,|\,58$, што значи дека $(3q-p)(3q+p)\,|\,58$, односно

$(3q-p)(3q+p)\in\{1,2,29,58\}$. Решавајќи ги добиените системи равенки добиваме дека само решението на системот

$$\begin{cases}3q-p=1\\ 3q+p=29\end{cases}$$

е во множеството природни броеви, т.е. $p=14, q=5$ и притоа $a=-44$.

За вака определениот цел број $a=-44$ важи $\frac{9a+4}{a-6}=\frac{400}{50}=9>0$, што значи дека тој е единствено решение на задачата.

88. Докажи, дека дропката $\frac{2n^2+n}{3n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ не може да се скрати за ниту еден природен број n.
Решение. Треба да докажеме дека n и $3n+1$ се заемно прости и дека $3n+1$ и $2n+1$ се заемно прости. Имаме,

$$\text{NZD}(3n+1,2n+1)=\text{NZD}(2n+1,n)=\text{NZD}(n,1)=1,$$

што и требаше да се докаже.

89. Докажи, дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати за ниту еден природен број n.
Решение. Имаме

$$\text{NZD}(14n+3,21n+4)=\text{NZD}(14n+3,7n+1)=\text{NZD}(7n+2,7n+1)=1,$$

што значи дека броевите $21n+4$ и $14+3$ се заемно прости, т.е. дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати ниту за еден природен број n.

90. Нека m и n се заемно прости броеви. Познато е дека дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој природен број. Кој е тој број?
Решение. Нека дадената дропка може да се скрати со k , и тогаш

$$3n-m=kp,\ 5n+2m=ks,\ \text{NZD}(p,s)=1,\ k>1,\ k,p,s\in\mathbb{N}.$$

Од тука се добива $n=\frac{k(2p+s)}{11}$ и $m=\frac{k(3s-2p)}{11}$ и како m и n се заемно прости, следи дека $k=11$.

91. Докажи, дека секој природен број поголем од 6 може да се запише како збир на два заемно прости броеви поголеми од 1.
Решение. Ако n е непарен број поголем од 6, тогаш $n=2+(n-2)$ и притоа $\text{NZD}(2,n-2)=1$.

Нека $n=4k$, каде k е природен број поголем од 1. Тогаш

$$n=(2k-1)+(2k+1),\ 2k+1>2k-1>1 \text{ и}$$

$$\text{NZD}(2k-1,2k+1)=\text{NZD}(2k+1,2)=1.$$

Ако $n=4k+2$, каде k е природен број поголем од 1, тогаш

$$n=(2k-1)+(2k+3),\ 2k+3>2k-1>1 \text{ и}$$

$$\text{NZD}(2k-1,2k+3)=\text{NZD}(2k+3,4)=1.$$

92. Ако $\text{NZD}(a,b)=1$, тогаш $\text{NZD}(a+b,a^2+b^2)=1$ или 2. Докажи!

Решение. Ако $d\,|\,(a+b)$ и $d\,|\,(a^2+b^2)$, тогаш и бројот

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$$

е делив со d . Понатаму,

$$2a^2=2a(a+b)-2ab \text{ и } 2b^2=2b(a+b)-2ab$$

се деливи со d . Но, $\text{NZD}(a,b)=1$, па затоа $d\,|\,2$. Според тоа, секој заеднички делител на $a+b$ и a^2+b^2 е делител на 2, па затоа

$$\text{NZD}(a+b,a^2+b^2)=1 \text{ или } 2.$$

93. Дадени се броевите 1, 12, 123, …, 1234567890, 12345678901,… . Секој број се добива од предходниот така што му се допишува следната цифра, при што после 0 доаѓа 1 итн. Докажи, дека барем еден од овие броеви е делив со 1981.

Решение. Да ги разгледаме броевите од даденото множество од облик 12...9012...90...12...90. Такви броеви има бесконечно многу, а бидејќи можни остатоци при делење со 1981 има конечно многу, постојат два броја од наведениот облик кои даваат ист остаток при делење со 1981. Разликата на тие два броја е делива со 1981. Но, таа е од облик 12...9012..90...12. . .9000. ..0, т.е. еднаква е на некој број A од наведениот облик, помножен со некој степен на бројот 10. Од $\text{NZD}(10^k,1981)=1$ следува $1981\,|\,A$.

94. Определи ги сите природни броеви x и y такви што

$$x+y+1\,|\,2xy \text{ и } x+y-1\,|\,x^2+y^2-1.$$

Решение. Јасно, $x+y-1\,|\,(x+y-1)^2+2(x+y-1)=x^2+y^2-1+2xy$ и бидејќи $x+y-1\,|\,x^2+y^2-1$ добиваме $(x+y-1)\,|\,2xy$. Од друга страна имаме

$$\text{NZD}(x+y-1,x+y+1)=\text{NZD}(x+y-1,2)\le 2.$$

Нека $\text{NZD}(x+y-1,x+y+1)=2$. Тогаш од $x+y+1\,|\,2xy$ и $x+y-1\,|\,2xy$ следува $(x+y-1)(x+y+1)\,|\,4xy$, па затоа

$$4xy \geq (x+y+1)(x+y-1),$$

односно $4xy \geq (x+y)^2-1$, што значи $1 \geq (x-y)^2$.

Нека $\text{NZD}(x+y-1,x+y+1)=1$. Тогаш од $x+y+1\,|\,2xy$ и $x+y-1\,|\,2xy$ следува $(x+y-1)(x+y+1)\,|\,2xy$, па затоа

$$2xy \geq (x+y+1)(x+y-1),$$

односно $2xy \geq (x+y)^2-1$, што значи

$$1 \geq (x+y)^2 - 2xy = x^2+y^2 \geq (x-y)^2.$$

Значи, и во двата случаи важи $(x-y)^2 \leq 1$, па затоа постојат две можности:

a) $x=y$ и затоа од $x+y+1\,|\,2xy$ следува $2x+1\,|\,2x^2$. Понатаму, $\text{NZD}(x,2x+1)=1$ и $\text{NZD}(2,2x+1)=1$, па затоа $\text{NZD}(2x+1,2x^2)=1$ што значи $2x+1=1$, односно $x=0$, што противречи на $x \in \mathbb{N}$.

b) $x+1=y$ и притоа од условот добиваме $2(x+1)\,|\,2x(x+1)$ и $2x\,|\,2x(x+1)$, што е точно за секој $x \in \mathbb{N}$, што значи дека подредените парови од облик $(x,x+1)$, $x \in \mathbb{N}$ се решение на задачата.

95. Докажи, дека ако еден број е делив со 99, тогаш збирот на неговите цифри не може да биде помал од 18.

Решение. Нека x е збирот на цифрите на дадениот број кои се наоѓаат на непарните места, а y збирот на цифрите кои стојат на парните места. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме $x \geq y$. Но, тогаш $11\,|\,x-y$ и $9\,|\,x+y$.

Ако $x=y$, тогаш $9\,|\,2x$ и од $\text{NZD}(9,2)=1$ имаме $9\,|\,x$, односно $x=9k$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Значи, $x+y=2x=18k \geq 18$.

Ако $x>y$, тогаш од $11\,|\,x-y$ имаме $x-y=11k$,за некој $k \in \mathbb{N}$, т.е. $x=y+11k$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Од $9\,|\,x+y$ добиваме $x+y=9k_1$, за некој $k_1 \in \mathbb{N}$. Притоа случајот $k_1=1$ не е можен, бидејќи во тој случај имаме $x+y=9$ и $x=y+11k$, $k \in \mathbb{N}$ што е противречност со $x,y,k \in \mathbb{N}$. Значи $k_1 \geq 2$ и $x+y \geq 18$.

96. Нека $a,b \in \mathbb{Z}$. Докажи, дека $\text{NZD}(a,b)=\text{NZD}(a+b,\text{NZS}(a,b))$.

Решение. Нека $\text{NZD}(a,b)=d$ и $\text{NZD}(a+b,\text{NZS}(a,b))=d'$. Јасно, $d\,|\,d'$. Со k да го означиме максималниот степен со кој простиот множител p учествува во разложувањето на бројот d' на прости множители. Од $p^k\,|\,\text{NZS}(a,b)$ следува $p^k\,|\,a$ или $p^k\,|\,b$. Но, $p^k\,|\,(a+b)$ и како $p^k\,|\,a$ или $p^k\,|\,b$, добиваме $p^k\,|\,a$ и $p^k\,|\,b$, што значи дека $p^k\,|\,\text{NZD}(a,b)=d$. Ако претходното размилсување го повториме за сите прости делители на d' добиваме $d'|\,d$.

Конечно, од $d\,|\,d'$ и $d'|\,d$ следува $d=d'$, што и требаше да се докаже.

97. Определи ги сите парови природни броеви $(m,n), m>n$ такви што

$$\text{NZS}(m^2+mn,mn-n^2)+\text{NZS}(m-n,mn)=2^{2005}. \qquad (1)$$

Решение. Левата страна на е делива со m,n и $m-n$, па затоа $m=2^a$, $n=2^b$ и $m-n=2^c$. Очигледно $2^b(2^{a-b}-1)=2^c$, па затоа $a-b=1$. Со замена во (1) добиваме

$$\begin{aligned}2^{2005}&=\text{NZS}(2^{2a}+2^{2a-1},2^{2a-1}-2^{2a-2})+\text{NZS}(2^a-2^{a-1},2^{2a-1})\\&=2^{2a-1}+3\cdot 2^{2a-1}=2^{2a+1}.\end{aligned}$$

Според тоа, $a=1002, m=2^{1002}, n=2^{1001}$.

98. Нека x и y се природни броеви за кои важи: $2x^2+x=3y^2+y$. Докажи, дека броевите $x-y, 2x+2y+1$ и $3x+3y+1$ се точни квадрати на природни броеви.

Решение: Од $2x^2+x=3y^2+y$ добиваме:

$$x^2=x-y+3x^2-3y^2=(x-y)(3x+3y+1) \qquad (1)$$

$$y^2=x-y+2x^2-2y^2=(x-y)(2x+2y+1). \qquad (2)$$

Бидејќи броевите

$$3x+3y+1=3(x+y)+1 \text{ и } 2x+2y+1=2(x+y)+1$$

се заемно прости, добиваме

$$x-y=\text{NZD}(x^2,y^2)=\{\text{NZD}(x,y)\}^2,$$

т.е. $x-y$ е точен квадрат. Од (1) и (2) следува дека броевите $2x+2y+1$ и $3x+3y+1$ се точни квадрати.

99. Докажи, дека секој природен број n може еднозначно да се претстави во облик $n = k^2 m$, каде k и m се природни броеви и m не се дели со квадрат на природен број $p > 1$.

Решение. Нека k е најголемиот природен број за кој $k^2 | n$ и нека $n = k^2 m$. Бројот m не се дели на квадрат на природен број $p > 1$, бидејќи ако $m = p^2 t,\ m > 1$, тогаш добиваме $n = (kp)^2 t$ и $kp > k$, што е противречност.

Нека $n = k^2 m$ и $n = a^2 b$ се две такви претставувања. Земаме $d = \text{NZD}(k, a)$ и нека $k = dk_1$ и $a = da_1$, $\text{NZD}(k_1, a_1) = 1$. Сега, од $n = d^2 k_1^2 l = d^2 a_1^2 b$ следува $k_1^2 l = a_1^2 b$ и како $\text{NZD}(k_1, a_1) = 1$ добиваме $k_1^2 | b$. Но, од условот за b следува $k_1^2 = 1$, т.е. $k_1 = 1$. Аналогно, се докажува дека $a_1 = 1$. Значи, $k = a = d$, од каде следува дека $m = b$, што значи дека двете претставувања се совпаѓаат.

100. Определи ги сите парови (a_n, a_{n+1}) од последователни членови на низата $a_n = 2^n + 49,\ n = 1, 2, ...$ за кои $a_n = pq, a_{n+1} = rs$, каде p, q, r, s се прости броеви такви што $p < q, r < s$ и $q - p = s - r$.

Решение. Да означиме $q - p = s - r = x > 0$.Тогаш $a_n = p(p + x)$ и $a_{n+1} = r(r + x)$ и од $a_{n+1} > a_n$ следува дека $r > p$. Од друга страна $a_{n+1} - 2a_n = -49$, т.е. $a_{n+1} < 2a_n$, што значи $r(r + x) < 2p(p + x)$. Според тоа, $2p(p + x) > r(r + x) > r(p + x)$, па затоа $2p > r$.

Бидејќи $a_n = 2^n + 49$ е делив со 3 ако и само ако n е непарен број, од $\min\{p, q, r, s\} = p$ следува дека $p = 3$. Оттука и од $2p > r$ следува дека $r = 5$. Тогаш од $a_{n+1} = 2a_n - 49$ наоѓаме $x = 56$ и конечно $a_7 = 3 \cdot 59 = 2^7 + 49$ и $a_8 = 6 \cdot 61 = 2^8 + 49$. Според тоа, единствено решение е подредениот пар (a_7, a_8).

101. Определи ги сите прости броеви a, b, c такви што

$$ab + bc + ca > abc. \tag{1}$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \le b \le c$. Ако $a \ge 3$, тогаш $ab + bc + ca \le 3bc \le abc$, што е противречност. Бидејќи a е прост број имаме $a = 2$. Сега од неравенството

(1) добиваме $2b+2c+bc>2bc$, т.е. $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}$. Ако $b\geq 5$, тогаш $c\geq 5$ и $\frac{1}{2}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{2}{5}$, што е противречност. Според тоа, $b<5$ и притоа имаме

1) $b=2$ и c е произволен прост број, или
2) $b=3$ и $c=3$, или $b=3$ и $c=5$.

102. Нека a,b,c се ненулти цели броеви, $a\neq c$, такви што

$$\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$$

Докажи, дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

Решение. Равенството $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ е еквивалентно со равенството

$$(a-c)(b^2-ac)=0.$$

Понатаму, од $a\neq c$ следува $b^2=ac$, па затоа

$$a^2+b^2+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c-b)(a+c+b).$$

Според тоа, ако $a^2+b^2+c^2$ е прост број, тогаш можни се следниве четири случаи

1) $a+c-b=1$ и $a+b+c=a^2+b^2+c^2$,
2) $a+b+c=1$ и $a+c-b=a^2+b^2+c^2$,
3) $a+c-b=-1$ и $a+b+c=-(a^2+b^2+c^2)$,
4) $a+b+c=-1$ и $a+c-b=-(a^2+b^2+c^2)$.

Во првите два случаја имаме $a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0$, од каде следува

$$(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1.$$

Но, a, b и c се ненулти цели броеви, такви што a и c се со ист знак, па затоа последното равенство следува $a=c=1$, што противречи на $a\neq c$. Во вторите два случаја имаме

$$(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1$$

и од истите причини како и претходно добиваме $a=c=-1$, што противречи на $a\neq c$.

Конечно, од добиената противречност следува дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

103. Природните броеви $m \geq 3$ и n се такви што $n > m(m-2)$. Определи го најголемиот природен број d таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k \in \{m, m+1, ..., n\}$.

Решение. Ќе докажеме, дека бараниот број е $d = m-1$. Навистина, d е делител на $n!$ и за секој $k \geq m$ важи дека k не е делител на $m-1$, т.е. $d = m-1$ ги задоволува условите на задачата.
Да претпоставиме дека d е таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k \in \{m, m+1, ..., n\}$. Ќе докажеме дека $d \leq m-1$. Нека $d = p_1 p_2 ... p_t$, каде $p_i, 1 \leq i \leq t$ се прости броеви (не задолжително различни). Од првиот услов за d следува дека $p_i \leq n$ за секој i. Од вториот услов за d следува дека $p_i \notin \{m, m+1, ..., n\}$. Според тоа, $p_i \leq m-1$ за секој i. Секој од броевите $p_1, p_1 p_2, ..., p_1 p_2 ... p_t$ е делител на d и следствено сите не припаѓаат на множеството $\{m, m+1, ..., n\}$. Освен тоа, $p_i \leq m-1$. Нека $j \leq t$ е најголемиот број за кој $p_1 p_2 ... p_j \leq m-1$. Ако $j < t$ имаме

$$p_1 p_2 ... p_j p_{j+1} \leq (m-1) p_{j+1} \leq (m-1)(m-1) = m(m-2) + 1 \leq n,$$

и тогаш $p_1 p_2 ... p_j p_{j+1} \leq m-1$, што противречи на максималноста на j. Значи, $p_1 p_2 ... p_t \leq m-1$, со што доказот е завршен.

104. За еден природен број ќе велиме дека е *добар*, ако меѓу неговите делители има точно два прости броеви. Дали е можно 18 последователни природни броеви да бидат добри?

Решение. Нека претпоставиме, дека постојат 18 последователни добри броеви. Меѓу овие броеви има 3 кои се делат со 6 и нека тоа се броевите $6n, 6(n+1)$ и $6(n+2)$. Јасно, во каноничното разложување на овие броеви се само простите броеви 2 и 3. Бидејќи само еден од броевите $n, n+1$ и $n+2$ се дели со 3, другите 2 се степени на бројот 2, што значи дека тоа се броевите 1 и 2, или броевите 2 и 4, т.е. $n \leq 2$. Но, тогаш бројот 13 се наоѓа меѓу разгледуваните 18 броеви, а бројот 13 не е добар број, што е противречност.

105. За природниот број n ќе велиме дека е *убав*, ако секој негов природен делител, зголемен за 1, е делител на бројот $n+1$. Определи ги сите убави природни броеви.

Решение. Јасно, бројот 1 е решение на задачата. Решение на задачата се и сите непарни прости броеви. Навистина, ако $n = p$, тогаш делителите зголемени за 1 се 2 и $p+1$, па како бројот $p+1$ е парен, следува $2|(p+1)$ и $(p+1)|(p+1)$.

Нека претпоставиме, дека некој сложен број n е решение. Бидејќи $1|n$, заклучуваме дека $1+1=2|(n+1)$, па затоа n е непарен број. Нека $n=ab$, каде $a\geq b>2$. Тогаш $(a+1)|(n+1)$ и бидејќи $n+b=(a+1)b$, добиваме дека $(a+1)|(n+b)$, па затоа

$$(a+1)|[n+b-(n+1)]=b-1.$$

Но, $b-1>0$, па затоа $(b-1)\geq(a+1)$, што е противречност.

106. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и n не е точен квадрат на природен број. Докажи дека n е прост број ако и само ако на единствен начин може да се претстави како разлика на квадрати на природни броеви.

Решение. За секој непарен број n точно е равенството

$$n=(\tfrac{n+1}{2})^2-(\tfrac{n-1}{2})^2. \qquad (1)$$

Нека n е непарен прост број и нека

$$n=a^2-b^2=(a-b)(a+b), a>b .$$

Тогаш $a-b=1, a+b=n$, па затоа $a=\frac{n+1}{2}$ и $b=\frac{n-1}{2}$, т.е. претставувањето (1) е единствено. Обратно, нека n е непарен сложен број, т.е.

$$n=ab, 1<a<b<n .$$

Тогаш

$$n=(\tfrac{a+b}{2})^2-(\tfrac{b-a}{2})^2$$

е претставување на n како разлика на квадрати на два природни броја кое е различно од (1).

107. Определи ги сите природни броеви n, за кои $(n-1)!$ не е делив со n^2.

Решение. Ако $n=ab$, каде $a\geq 3, b\geq 3$ и $a\neq b$, тогаш во производот $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)$ влегуваат множителите $a, 2a, b, 2b$, па значи $(n-1)!$ е делив со $a^2b^2=n^2$.

Ако $n=p^2$, каде p, $p\geq 5$ е прост број, тогаш $p^2-1\geq 4p$ и во производот $(p^2-1)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p^2-1)$ влегуваат броевите $p,2p,3p$ и $4p$, т.е. тој е делив со $p^4=n^2$.

Остануваат две можности:

i) n е прост број и во овој случај $(n-1)!$ не е делив со n;

ii) $n=9$ и во овој случај $8!$ не е делив со 81.

108. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови различни природни броеви m и n такви, што m и n имаат едни и исти прости делители, а исто така и $m+1$ и $n+1$ имаат едни и исти прости делители.

Решение. Лесно се проверува дека за секој $k>1$ броевите $m=2^k-2$ и $n=2^k(2^k-2)$ имаат исти прости делители, а исто важи и за броевите $m+1=2^k-1$ и $n+1=(2^k-1)^2$.

109. Докажи, дека множеството броеви од облик $a_n=n^2+1$, $n=1,2,...$ содржи бесконечно многу сложени броеви од облик $a_n=a_k a_l$.

Решение. За $k=m-1$ и $l=m$ имаме

$$\begin{aligned} a_k a_l &= a_{m-1}a_m = [(m-1)^2+1][m^2+1] = [m(m-1)]^2 + m^2 + (m-1)^2 + 1 \\ &= (m^2-m)^2 + 2(m^2-m) + 1 + 1 = (m^2-m+1)^2 + 1 = a_{m^2-m+1} \end{aligned}$$

т.е. при $k=m-1$, $l=m$ и $n=m^2-m+1$ важи $a_n=a_k a_l$.

II.2 КОНГРУЕНЦИИ

1. Определи ги сите природни броеви m и n такви што разликата на квадратот на бројот m и производот на n и k е еднаква на 2, каде k е бројот кој се добива со допишување на цифрата 1 од лево на бројот n.

Решение. Нека бројот n има t цифри. Тогаш $k=10^t+n$, па од услвот на задачата добиваме

$$m^2-nk=2$$

$$m^2-n(10^t+n)=2$$

$$m^2-n^2=10^t n+2.$$

Бројот на десната страна на последното равенство е парен, па затоа броевите m и n мора да се со иста парност. Според тоа, бројот $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$ е делив со 4. За $t\geq 2$, важи $10^t+2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, што значи дека десната страна не е делива со 4. Значи, за $t\geq 2$ задачата нема решение. Нека $t=1$. Тогаш од $4\,|\,10n+2=2(5n+1)$ следува дека n е непарен број. Едноцифрени непарни броеви се 1, 3, 5, 7 и 9, при што за m ги добиваме броевите 13, 41, 77, 121 и 163, соодветно. Од овие броеви само 121 е точен квадрат, па затоа $m=11$ и $n=7$ е единствено решение на задачата.

2. Нека p е прост број различен од 3, таков што и бројот $2p+1$ е прост. Докажи, дека бројот $4p+1$ е делив со 3.

Решение. Имаме $\text{NZD}(2p+1,3)=1$, па затоа $(2p+1)^2 \equiv 1(\text{mod}\, 3)$, од каде следува $p(4p+1) \equiv 0\ (\text{mod}\, 3)$ и како $\text{NZD}(p,3)=1$ со делење на последната конгруенција со p добиваме $4p+1 \equiv 0\ (\text{mod}\, 3)$, што и требаше да се докаже.

3. Докажи дека ако $x^2+y^2 \equiv 0(\text{mod}\, 21)$, тогаш $x^2+y^2 \equiv 0(\text{mod}\, 441)$.

Решение. Ќе докажеме дека x и y се делат како со 3, така и со 7, од што непосредно следува тврдењето на задачата. Навистина, ако $x=3a+r$ и $y=3b+s$, каде $r,s \in \{0,1,2\}$, тогаш

$$x^2+y^2 \equiv r^2+s^2(\text{mod}\, 3),$$

од што следува

$$r^2+s^2 \equiv 0(\text{mod}\, 3).$$

Но, $r,s \in \{0,1,2\}$, па затоа последната конгруенција е можна ако само ако $r=s=0$, т.е. x и y се делат со 3.

Аналогно се докажува дека x и y се делат со 7.

4. За секој подреден пар природни броеви (m,n) дефинираме операција $m*n=|37^m-29^n|$.

а) Дали постои подреден пар (m,n) таков што $m*n=2014$?

б) Определи ја најмалата вредност на изразот $m*n$.

Решение. а) Од $37 \equiv 29 \equiv 1(\text{mod}\, 4)$ следува дека $37^m \equiv 29^n \equiv 1(\text{mod}\, 4)$, што значи дека $m*n$ е делив со 4. Но, 2014 не е делив со 4, па затоа не постои подреден пар (m,n) таков што $m*n=2014$.

б) Јасно, $m*n>0$. Од а) следува дека 4 е делител на $m*n$. За $m=n=1$ добиваме $m*n=8$. Ќе докажеме дека тоа е најмалата вредност, со тоа што ќе докажеме дека $m*n \neq 4$.

Ако $37^m-29^n=4$, тогаш $37^m-4=29^n$. Левата страна на последното равенство е делива со 3, а десната не е делива со 3, па затоа

$m*n=37^m-29^n\neq 4$.

Ако $37^m-29^n=-4$, тогаш $29^n-37^m=4$. Цифрата на единиците на 29^n-37^m може да е 4, само ако цифрата на единиците на 29^n е 1, а на 37^m е 7, т.е. $n=2k$. Но, тогаш $37^m=29^n-4=(29^k-2)(29^k+2)$, бидејќи множителите на десната страна се заемно прости броеви поголеми од 1, а 37 е прост број.

5. Определи ги сите цели броеви n за кои постои цел број m таков што n^2+n-1 е делител и на $14m+5$ и на $20m-3$.

Решение. Од условот на задачата следува дека n^2+n-1 е делител на

$$10(14m+5)-7(20m-3)=71.$$

Бидејќи

$$n^2+n-1=(n+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{5}{4}>-2$$

и 71 е прост број, можни се три случаи $n^2+n-1=-1,\ 1$ или 71. Во првиот и вториот случај $n=-1,0,1$ и 2 (тврдењето важи за секој цел број m).

Во третиот случај решенија на равенката $n^2+n-1=71$ се $n=-9$ и $n=8$. Тогаш $14m+5\equiv 0(\mathrm{mod}\,71)$, после множењето со 5 е еквивалентно со $m\equiv 25(\mathrm{mod}\,71)$, а $20m-3\equiv 0(\mathrm{mod}\,71)$ после множењето со 32 е еквивалентно со $m\equiv 25(\mathrm{mod}\,71)$. Според тоа, сите броеви кои при делење со 71 даваат остаток 25 го задоволуваат условот на задачата.
Конечно, $n=-9,-1,0,1,2,8$ се решенија на задачата.

6. Определи ги сите прости броеви p и q и сите природни броеви $k>1$ за кои броевите p^kq+1 и pq^k+1 се точни квадрати.

Решение. Нека $p^kq+1=x^2$ и $pq^k+1=y^2$, каде $x,y\in\mathbb{N}$. Ако еден од броевите p или q е еднаков на 2, на пример $p=2$, а q е непарен, тогаш равенството $2q^k+1=y^2$ дава противречност по модул 4 (провери). Ако $p=q=2$, тогаш од $2^{k+1}=(x-1)(x+1)$ следува дека $x-1$ и $x+1$ се степени на бројот 2, што е можно само за $x=3$ и соодветно $k=2$.

Нека p и q се непарни прости броеви. Тогаш x и y се парни броеви и

$$\mathrm{NZD}(x-1,x+1)=\mathrm{NZD}(y-1,y+1)=1,$$

па од равенствата $p^k q=(x-1)(x+1)$ и $pq^k=(y-1)(y+1)$ следува дека се можни четири случаи.

1) $p^k=x-1, q=x+1, q^k=y-1, p=y+1$, од каде следува дека $q-p^k=p-q^k=2$, т.е. $p^k+p=q^k+q$. Според тоа, $p=q$, од каде добиваме $p=2$, противречност.

2) $p^k=x+1, q=x-1, q^k=y+1, p=y-1$, што на потполно ист начин како во 1) доведува до противречност.

3) $p^k=x-1, q=x+1, q^k=y+1, p=y-1$, од каде следува $q-p^k=q^k-p=2$, односно $p+q=p^k+q^k$, што не е можно.

4) $p^k=x+1, q=x-1, q^k=y-1, p=y+1$, што на потполно ист начин како во 3) доведува до противречност.

7. Докажи, дека за секој природен број n барем еден од броевите $A=2n-1,\ B=5n-1,\ C=13n-1$ не е точен квадрат.

Решение. Ќе користиме дека точен квадрат на природен број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.

Ако $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ или $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, тогаш $A\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, па затоа A не е точен квадрат.

Ако $n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, тогаш $B\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, па затоа B не е точен квадрат.

Нека $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$. Тогаш $A=8t+1, B=4(5t+1), C=4(13t+3)$. Нека претпоставиме дека A,B,C е точни квадрати. Ако B е точен квадрат, тогаш бројот $5t+1$ е точен квадрат. Слично, ако C е точен квадрат, тогаш и бројот $13t+3$ е точен квадрат. Според тоа, важи

$$8t+1=x^2,\ 5t+1=y^2,\ 13t+1=z^2.$$

Оттука следува дека

$$x^2+y^2=z^2-1.$$

Но, $z^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ или $z^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, па затоа $x^2+y^2\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ или $x^2+y^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$. Понатаму, ако земеме предвид дека точен квадрат на природен број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4, од последните конјруенции следува дека $x^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ и $y^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, што противречи на $x^2=8t+1\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$.

8. Дадена е низа $\{x_n\}$ таква што $x_1 \in \{5,7\}$ и $x_{n+1} \in \{5^{x_n}, 7^{x_n}\}$, за $n = 1, 2, \ldots$. Определи ги можните вредности на последните две цифри на x_{2009}.

Решение. Имаме $7^k \equiv 7, 49, 43, 1 (\mathrm{mod}\, 100)$ за $k \equiv 1, 2, 3, 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, соодветно и $5^k \equiv 25 \ (\mathrm{mod}\, 100)$ за $k \geq 2$.

За $x_n, n = 2009$ можни се следниве случаи

1) Ако $x_n = 7^{x_{n-1}} = 7^{5^{x_{n-2}}}$, тогаш $5^{x_{n-2}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ и затоа $x_n \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 100)$.

2) Ако $x_n = 7^{x_{n-1}} = 7^{7^{x_{n-2}}}$, тогаш $7^{7^{x_{n-2}}} \equiv (-1)^{x_{n-2}} \equiv -1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ и затоа $x_n \equiv 43 (\mathrm{mod}\, 100)$.

3) Ако $x_n = 5^{x_{n-1}}$, тогаш $x_n \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 100)$.

9. Ако p е прост број, тогаш $p \mid \underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$. Докажи!

Решение. За $p = 2, p = 3, p = 5$ тврдењето непосредно следува од признаците за деливост со броевите 2,3 и 5. Нека $p > 5$. Тогаш имаме

$$\begin{aligned} N &= \underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789 \\ &= (10^p - 1) + \tfrac{8}{9}10^p(10^p - 1) + \tfrac{7}{9}10^{2p}(10^p - 1) + \ldots + \tfrac{1}{9}10^{8p}(10^p - 1). \end{aligned}$$

Според тоа, $10^p - 1 \equiv 10 - 1 = 9 (\mathrm{mod}\, p)$, односно $\frac{10^p - 1}{9} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, па затоа

$$\begin{aligned} N &\equiv 9 + 8 \cdot 10^p + 7 \cdot 10^{2p} + \ldots + 10^{8p} \\ &\equiv 9 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2 + \ldots + 10^8 \\ &\equiv 123456789 (\mathrm{mod}\, p), \end{aligned}$$

што всушност и требаше да се докаже.

10. Нека k е природен број и m е цел непарен број. Докажи, дека постои природен број n таков што бројот 2^k е делител на $n^n - m$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. За $k = 1$ можеме да земеме n да е произволен непарен број. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е таков што $n_0^{n_0} \equiv m (\mathrm{mod}\, 2^k)$. Јасно, бројот n_0 е непарен.

Ако $n_0^{n_0} \equiv m (\mod 2^{k+1})$, тогаш нема што да се докажува. Во спротивно ќе докажеме дека бројот $n = n_0 + 2^k$ го има саканото својство.

Имаме, $n_0^{n_0} - m = 2^k d$, каде d е непарен број и затоа

$$n_0^{n_0} - m - 2^k = 2^k (d-1)$$

се дели со 2^{k+1}. Тогаш

$$n^n = n^{n_0 + 2^k} = n^{n_0} n^{2^k} \equiv n^{n_0} \equiv (n_0 + 2^k)^{n_0} \equiv n_0^{n_0} + \binom{n_0}{1} n_0^{n_0 - 1} 2^k$$

$$\equiv m + 2^k + n_0^{n_0} 2^k = m + (n_0^{n_0} + 1) 2^k \quad (\mod 2^{k+1}).$$

Според тоа, $n^n - m \equiv (n_0^{n_0} + 1) 2^k \equiv 0 \ (\mod 2^{k+1})$.

11. За природниот број n ќе велиме дека е *специјален* ако ако постојат природни броеви a, b, c и d такви што $n = \frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3}$.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.

б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.

Решение. а) Ако земеме $a = nc, b = nd$ добиваме дека

$$\frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3} = n^3 \frac{c^3 + 2d^3}{c^3 + 2d^3} = n^3,$$

што значи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот n^3 е специјален.

б) Нека претпоставиме дека $2014 = \frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3}$, за некои природни броеви a, b, c и d, т.е. дека $a^3 + 2b^3 = 2 \cdot 19 \cdot 53 (c^3 + 2d^3)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\text{NZD}(a, b, c, d) = 1$. Имаме $x^3 \equiv 0, \pm 1, \pm 7, \pm 8 (\mod 19)$, па затоа $a^3 + 2b^3 \equiv 0 (\mod 19)$ ако и само ако $19 \mid a, b$. Но, тогаш од $19^3 \mid a^3 + 2b^3$ следува дека $19^2 \mid c^3 + 2d^3$, од каде следува $19 \mid c, d$, што противречи на $\text{NZD}(a, b, c, d) = 1$.

12. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $a \mid b^2, b \mid a^2$ и $a + 1 \mid b^2 + 1$.

Решение. Нека $b^2 = ca$. Од условот на задачата следува $b^2 = ca \mid a^4$ и $a + 1 \mid ca + 1$, а тоа е еквивалелнтно со $c \mid a^3$ и $a + 1 \mid c - 1$. Нека $c = d(a+1) + 1,\ d \in \mathbb{N}_0$. Од $a^3 \equiv -1 (\mod a + 1)$ следува

$$\frac{a^3}{c} \equiv -1(\text{mod } a+1)\text{, т.е. } \frac{a^3}{c} = e(a+1)-1,$$

за некој $e \in \mathbb{N}$. Според тоа, $a^3 = (e(a+1)-1)(d(a+1)+1)$, од каде после множењето и скратувањето со $a+1$ добиваме

$$a^2 - a + 1 = de(a+1) + (e-d).$$

Оттука добиваме

$$e - d \equiv a^2 - a + 1 \equiv 3(\text{mod}\, a+1),$$

па затоа

$$e - d = k(a+1) + 3,\ de = a - 2 - k,\ (k \in \mathbb{Z}). \qquad (1)$$

Можни се следниве три случаи:

1) $k \notin \{-1, 0\}$. Во овој случај од (1) следува $de < |e-d| - 1$, што е можно само за $d = 0$. Сега $c = 1$ и $b^2 = a$, па затоа $(a,b) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{N}$.

2) $k = -1$. Од (1) следува $a = d + 1$. Сега $c = a^2$ и $b^2 = a^3$, па затоа $(a,b) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{N}$.

3) $k = 0$. Од (1) следува $a = d^2 + 3d + 2$. Сега $c = d(a+1) + 1 = (d+1)^3$ и $b^2 = ca = (d+1)^4(d+2)$. Според тоа, $d + 2 = t^2$, за некој $t \in \mathbb{N}$, па затоа $(a,b) = (t^2(t^2-1), t(t^2-1)^2), t \geq 2$.

13. Нека a,b,c се различни цифри. Докажи, дека $\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} \neq \overline{ba} \cdot \overline{ac} \cdot \overline{cb}$.

Решение. Бидејќи цифрите a,b,c се различни, заклучуваме дека ниту еден од броевите $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}, \overline{ba}, \overline{ac}, \overline{cb}$ не е делив со 11. Имаме

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a+b),$$

па затоа

$$\overline{ab} \equiv -\overline{ba}(\text{mod}11).$$

Аналогно,

$$\overline{bc} \equiv -\overline{cb}(\text{mod}11) \text{ и } \overline{ca} \equiv -\overline{ac}(\text{mod}11).$$

Множејќи последните три конгруенции добиваме

$$\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} \equiv -\overline{ba} \cdot \overline{ac} \cdot \overline{cb}(\text{mod}11). \qquad (1)$$

Ако $\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} = \overline{ba} \cdot \overline{ac} \cdot \overline{cb}$, тогаш

$$\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} \equiv \overline{ba} \cdot \overline{ac} \cdot \overline{cb}(\text{mod}11). \qquad (2)$$

Ако ги собереме конгруенциите (1) и (2) добиваме

$2\cdot\overline{ab}\cdot\overline{bc}\cdot\overline{ca}\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$.

Броевите 2 и 11 се заемно прости и 11 е прост број, па од последната конгрунеција следува дека некој од броевите $\overline{ab},\overline{bc}$ или $\overline{ca}$ е делив со 11, што противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

14. Докажи, дека бројот 2^n+3^n не е точен куб на ниту еден природен број n.

Решение. Имаме

$$(3k)^3\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$$
$$(3k+1)^3=27k^3+27k^2+9k+1\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$$
$$(3k-1)^3=27k^3-27k^2+9k-1\equiv -1(\mathrm{mod}\,9)$$

што значи дека точен куб на природен број при делење со 9 дава остатоци 0, 1 или -1.

Ако $n=1$, тогаш $2^1+3^1=5$ и тоа не е точен куб.

За $n\geq 2$ важи $3^n\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$. Затоа за $n\geq 2$ при делење со 9 збирот 2^n+3^n дава остатоци $4,-1,-2,-4,1$ или 2, а како точен дава остатоци 0, 1 или -1, заклучуваме дека n мора да биде од облик $6m$ или $6m+3$, односно дека n мора да биде делив со 3 и $n=3k$ за некој природен број k. Оттука следува дека $2^{3k}+3^{3k}=a^3$. Понатаму,

$$\begin{aligned}(3^k+1)^3&=3^{3k}+9\cdot 3^{2k}+3\cdot 3^k+1>3^{3k}+9\cdot 8^k\\&>3^{3k}+2^{3k}>(3^k)^3\end{aligned},$$

па затоа

$$(3^k+1)^3>a^3>(3^k)^3$$
$$3^k+1>a>3^k,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

15. Дали може броевите $1^1,2^2,3^3,...,2007^{2007},2008^{2008}$ да се распоредат во низа така што кога добиениот запис ќе го набљудуваме како еден број тој број да биде точен квадрат на природен број.

Решение. Лесно се гледа дека ако $3\,|\,x$, тогаш $x^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ и ако $3\nmid x$, тогаш $x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Оттука следува дека

$$(6k+1)^{6k+1} = ((6k+1)^{3k})^2 \cdot (6k+1) \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3$$
$$(6k+2)^{6k+2} = ((6k+1)^{3k+1})^2 \equiv 1 \pmod 3$$
$$(6k+3)^{6k+3} \equiv 0 \pmod 3$$
$$(6k+4)^{6k+4} = ((6k+1)^{3k+2})^2 \equiv 1 \pmod 3$$
$$(6k+5)^{6k+5} = ((6k+1)^{3k+2})^2 \cdot (6k+5) \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 3$$
$$(6k+6)^{6k+6} \equiv 0 \pmod 3.$$

Понатаму, природен број n е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3. Затоа бројот A кој се добива со запишување во некој редослед на броевите $1^1, 2^2, 3^3, ..., 2007^{2007}, 2008^{2008}$ ќе даде ист остаток при делење со 3, како и збирот на броевите $1^1, 2^2, 3^3, ..., 2007^{2007}, 2008^{2008}$. Овие броеви ќе ги поделиме на шест класи: $(6k+1)^{6k+1}, (6k+2)^{6k+2}, (6k+3)^{6k+3}, (6k+4)^{6k+4}$, $(6k+5)^{6k+5}$ и $(6k+6)^{6k+6}$. Од претходно изнесеното следува дека за секој k важи

$$\sum_{i=1}^{6} (6k+i)^{6k+i} \equiv 1+1+0+1+2+0 \equiv 2 \pmod 3.$$

Бидејќи $2008 = 334 \cdot 6 + 4$, добиваме

$$\begin{aligned} A &\equiv 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 2007^{2007} + 2008^{2008} \\ &= (1^1 + 2^2 + ... + 6^6) + (7^7 + 8^8 + ... + 12^{12}) + ... \\ &\quad + (1999^{1999} + 2000^{2000} + ... + 2004^{2004}) + \\ &\quad + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 2007^{2007} + 2008^{2008} \\ &\equiv 334 \cdot 2 + 1 + 1 + 0 + 1 = 674 \equiv 2 \pmod 3). \end{aligned}$$

Според тоа, при делење со 3 бројот A дава остаток 2, па како за секој природен број x важи $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ или $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, заклучуваме дека бројот A не може да биде квадрат на природен број.

16. Определи ги сите природни броеви n такви што $5^n + 12^n$ е точен квадрат.

Решение. Ако $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш $5^n = 5 \cdot 5^{2(k-1)} \equiv 2 \pmod 3$, па затоа $5^n + 12^n \equiv 2 \pmod 3$. Меѓутоа, за секој $x \in \mathbb{N}$ важи $x^2 \equiv 0$ или $1 \pmod 3$. Според тоа, за $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ бројот $5^n + 12^n$ не може да биде точен квадрат.

Нека $n=2k, k\in\mathbb{N}$ важи $5^{2k}+12^{2k}=x^2$, т.е. $5^{2k}=(x-12^k)(x+12^k)$. Притоа, ако $5\,|\,x-12^k$ и $5\,|\,x+12^k$, добиваме

$$5\,|\,(x+12^k)-(x-12^k)=2\cdot 12^k,$$

што не е можно. Затоа еден од множителите е еднаков на 1, а другиот на 5^{2k}. Бидејќи $x-12^k<x+12^k$, заклучуваме дека $x-12^k=1$ и $x+12^k=5^{2k}$. Според тоа,

$$2\cdot 12^k+1=5^{2k}=25^k. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека за $k\geq 2$ важи $2\cdot 12^k+1<25^k$.

Навистина, за $k=2$ имаме $2\cdot 12^2+1=289<625=25^2$.
Нека претпоставиме дека важи за некој $k\geq 2$. Тогаш за $k+1$ имаме

$$25^{k+1}=25\cdot 25^k>25(2\cdot 12^k+1)=2\cdot(25\cdot 12^k)+25>2\cdot 12^{k+1}+1,$$

Па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој $k\geq 2$.
Последното значи дека равенството (1) не е можно за $k\geq 2$. Останува да провериме за $k=1$, при што лесно се гледа дека равенството (1) е точно.
Конечно, од претходните разгледувања следува дека единствено решение на задачата е $n=2$.

17. Докажи, дека не постојат цели броеви x и y такви што

$$x^5+y^5+1=(x+2)^5+(y-3)^5. \qquad (1)$$

Решение. Од $x^5-x=x(x-1)(x+1)(x^2+1)$ следува дека $2\,|\,x^5-x$. Понатаму,

- ако $x\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $x^5-x\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$,
- ако $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $x^5\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, па затоа $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,5)$,
- ако $x\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $x^5\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$, па затоа $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,5)$,
- ако $x\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $x^5\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$, па затоа $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,5)$, и
- ако $x\equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш $x^5\equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$, па затоа $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,5)$.

Според тоа, за секој цел број x важи $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,2)$ и $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,5)$ и како $\mathrm{NZD}(2,5)=1$ добиваме $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,10)$.
Од претходно изнесеното следува дека

$x^5 + y^5 + 1 \equiv x + y + 1 \pmod{10}$ и $(x+2)^5 + (y-3)^5 \equiv x + y - 1 \pmod{10}$.

Конечно, ако постојат цели броеви x и y такви што важи (1), тогаш од последните две конгруенции следува $2 \equiv 0 \pmod{10}$, што е противречност. Значи, не постојат цели броеви x и y такви што е исполнето равенството (1).

18. Нека $a, b \in \mathbb{N}$. Докажи, дека $(a+\frac{1}{2})^n + (b+\frac{1}{2})^n$ е природен број за само конечно многу природни броеви n.

Решение. Јасно, $(a+\frac{1}{2})^n + (b+\frac{1}{2})^n$ е природен број ако и само 2^n е делител на $(2a+1)^n + (2b+1)^n$.

Ако $n = 2k$, тогаш добиваме дека бројот $2^n = 4^k$ треба да е делител на бројот

$$(2a+1)^n + (2b+1)^n = (4a^2 + 4a + 1)^k + (4b^2 + 4b + 1)^k \equiv 2 \pmod 4,$$

што не е можно бидејќи $4 \nmid 2$. Според тоа, за $n = 2k$ броевите од видот не се природни броеви.

Ако $n = 2k+1$, тогаш

$$\begin{aligned}(2a+1)^n + (2b+1)^n &= (2a+1)^{2k+1} + (2b+1)^{2k+1} \\ &= (2+1+2b+1)((2a+1)^{2k} - (2a+1)^{2k-1}(2b+1) + \\ &\quad + (2a+1)^{2k-2}(2b+1)^2 - \ldots + (2b+1)^{2k}).\end{aligned}$$

Во втората заграда на последното равенство имаме наизменично собирање и одземање на $2k+1$ непарни броеви, што значи дека имаме непарен број. Затоа во овој случај од $2^n \mid (2a+1)^n + (2b+1)^n$ следува $2^n \mid (2a+2b+2)$. Но, каноничното разложување на бројот $2a+2b+2$ содржи конечно многу степени на бројот 2, па затоа не може да постојат бесконечно многу непарни броеви n такви што

$$2^n \mid (2a+2b+2), \text{ т.е. } 2^n \mid (2a+1)^n + (2b+1)^n.$$

19. Определи го најмалиот природен број M за кој бројот 2012 може да се запише како збир на кубови на M цели броеви.

Решение. Нека бројот 2012 е запишан како збир на кубови на M цели броеви. Лесно се проверува дека за произволен цел број x важи

$$x^3 \equiv 0,1 \text{ или } -1 \pmod 9.$$

Од друга страна $2012 \equiv 9 \pmod 9$, па затоа $M \geq 4$. Но, едно можно претставување на 2012 како збир на четири кубови е

$$2012=(-4)^3+5^3+(-25)^3+26^3,$$

па затоа $M=4$.

20. Нека a е природен број и p е прост број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $a^{p^n}+p^n$ има барем два различни прости делители.

Решение. Ако $p\,|\,a$, тогаш $a^{p^n}+p^n=p^n(pA+1)$, каде A е природен број и тврдењето очигледно важи. Затоа нека претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a,p)=1$.

Нека p е непарен, $n=pk$ и $a^{p^{n-1}}=x,\ p^k=y$. Тогаш

$$a^{p^n}+p^n=x^p+y^p=(x+y)(x^{p-1}-x^{p-2}y+...-xy^{p-2}+y^{p-1})$$

и да претпоставиме дека овој број има не повеќе од еден прост делител, т.е. дека е еднаков на q^t за некој прост број q и некој природен број t. Очигледно $q\neq p$. Од $q\,|\,x+y$ следува дека $x\equiv -y(\mathrm{mod}\,q)$ и тогаш

$$x^{p-1}-x^{p-2}y+...-xy^{p-2}+y^{p-1}\equiv py^{p-1}(\mathrm{mod}\,q)$$

не е делив со q, што е противречност.

Нека $p=2$ и $n=4k+2, k\in\mathbb{N}, a^{2^{n-2}}=u, 2^k=v$. Тогаш

$$a^{2^n}+2^n=u^4+4v^4=(u^2+2uv+v^2)(u^2-2uv+v^2).$$

Двата множители на десната страна се заемно прости и поголеми од 1, па значи имаат различни прости делители.

21. Нека k е природен број. Докажи, дека бројот $2^{2k-1}+2^k-1$ не е делив со 7.

Решение. Бидејќи $2^3\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$ имаме:

- ако $k\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $2k-1\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, па

$$2^{2k-1}+2^k-1\equiv 2^2+2^0-1\equiv 4(\mathrm{mod}\,7),$$

- ако $k\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $2k-1\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, па

$$2^{2k-1}+2^k-1\equiv 2^1+2^1-1\equiv 3(\mathrm{mod}\,7),$$

- ако $k\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $2k-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, па

$$2^{2k-1}+2^k-1\equiv 2^0+2^2-1\equiv 4(\bmod 7)\,.$$

Од тука следува тврдењето на задачата.

22. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите

$$a_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2},\ n=0,1,2,3,\dots.$$

Решение. Имаме $a_n=1+9+25=35=5\cdot 7$. Разгледуваме конгруенција по модул 5 и добиваме

$a_n=2^{3n}+3^{6n+2}\equiv 2^{3n}+9^{3n+1}\equiv 2^{3n}+(-1)^{3n+1}(\bmod 5)$.

За $n=1$ имаме $a_1\equiv 9\not\equiv 0(\bmod 5)$, па затоа 5 не е заеднички делител на дадените броеви. Од друга страна

$$\begin{aligned}a_n&=8^n+9\cdot 9^{3n}+25\cdot 25^{3n}\\&\equiv 1+2\cdot 2^{3n}+4\cdot 4^{3n}\\&\equiv 1+2\cdot 8^n+4\cdot 64^n\\&\equiv 1+2\cdot 1^n+4\cdot 1^n\\&\equiv 0\ (\bmod 7).\end{aligned}$$

Затоа 7 е делител на a_n, за секој $n=0,1,2,3,\dots$. Според тоа, најголемиот заеднички делител на броевите $a_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$, $n=0,1,2,3,\dots$ е 7.

23. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот $19\cdot 8^n+17$ е сложен.

Решение. Секој природен број n може да се претстави во еден од облиците $2k, 4k+1$ и $4k+3$, $k\in\mathbb{N}$. Ако $n=2k$, тогаш

$$19\cdot 8^{2k}+17=19\cdot 64^k+17\equiv 19+17\equiv 0(\bmod 3)\,.$$

Ако $n=4k+1$, тогаш

$$\begin{aligned}19\cdot 8^{4k+1}+17&=152\cdot 8^{4k}+17=143\cdot 8^{4k}+9\cdot 64^{2k}+17\\&\equiv 9\cdot 64^{2k}+17\equiv 9\cdot(-1)^{2k}+17\equiv 0(\bmod 13).\end{aligned}$$

Ако $n=4k+3$, тогаш

$$\begin{aligned}19\cdot 8^{4k+3}+17&=20\cdot 8^{4k+3}-8^{4k+3}+17=20\cdot 8^{4k+3}-512\cdot 8^{4k}+17\\&=20\cdot 8^{4k+3}-515\cdot 8^{4k}+3\cdot 8^{4k}+17\\&\equiv 3\cdot 64^{2k}+17\equiv 3\cdot(-1)^{2k}+17\equiv 0(\bmod 5).\end{aligned}$$

24. а) Определи ги сите природни броеви n, такви што $7\,|\,(2^n-1)$.

б) Докажи дека $7 \nmid (2^n+1)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. а) Ако $n \equiv 0 (\bmod 3)$, тогаш $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$2^n = (2^3)^k \equiv 1 (\bmod 7),$$

па $2^{3k}-1$ е делив со 7.

Ако $n = 3k+i$, за $i = 1, 2$ тогаш $2^{3k+i}-1 = 2^i(2^{3k}-1)+2^i-1$. Бидејќи е $2^{3k}-1$ е делив со 7, а 2^i-1 не е делив со 7 добиваме дека $2^{3k+i}-1$, за $i = 1, 2$ не е делив со 7.

Значи, 2^n-1 е делив со 7 ако и само ако n е делив со 3.

б) Секој природен број n може да се запише во обликот $3k+i$, $i = 0,1,2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогаш $2^n+1 = 2^i(2^{3k}-1)+2^i+1$. Првиот собирок е делив со 7, а според а) вториот собирок не е делив со 7.

Значи, 2^n+1 не е делив со 7, за секој $n \in \mathbb{N}$.

25. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $n > m \geq 1$ и последните три цифри на бројот 1978^m се еднакви, соодветно, на последните три цифри на бројот 1978^n (во декаден запис).

Определи ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

Решение. Според условот на задачата бројот $1978^m(1978^{n-m}-1)$ е делив со $1000 = 8 \cdot 125$. Бидејќи бројот $1978^{n-m}-1$ е непарен, а 1978 е парен добиваме $8 | 1978^m$ и $125 | (1978^{n-m}-1)$. Но, $1978 = 2 \cdot 989$ па од првиот услов следува $m \geq 3$, а од вториот услов

$$1 \equiv 1978^{n-m} \equiv (-2)^{n-m} (\bmod 5).$$

Ова е можно само за $n-m = 4k$, $k \geq 1$. Останува да се определи најмалиот природен број k, таков што бројот $1978^{4k}-1$ е делив со 125. Од $1978^4 \equiv 6 (\bmod 125)$ добиваме $6^k \equiv 1 (\bmod 125)$. Најмалиот таков број е 25, па решението на задачата е $m = 3$, $n = 103$.

26. а) Докажи дека постои природен број кој е делив со 2005 и чиј збир на цифри е еднаков на 2.

б) Нека x_n е природниот број кој се добива со последователно запишување на природните броеви од 1 до n (на пример, $x_1 = 1$, $x_2 = 12$, $x_3 = 123, x_4 = 1234, ..., x_{12} = 123456789101112, ...$). Докажи, дека во низата $x_n, n\geq 1$ постојат бесконечно многу членови кои се деливи со 2005.

Решение. а) Доволно е да докажеме дека $401|10^n+1$ за некој $n\in\mathbb{N}$, бидејќи тогаш $2005|10^{n+1}+10$. Имаме

$$10^5\equiv -250(\bmod 401),\ 10^{10}\equiv -56(\bmod 401),\ 10^{20}\equiv -72(\bmod 401),$$
$$10^{25}\equiv -45(\bmod 401),\ 10^{50}\equiv 20(\bmod 401),\ 10^{100}\equiv 1(\bmod 401),$$

па доволно е да земеме $n=100$.

б) За произволен цел број $m\geq 0$ да го разгледаме бројот $N=10^{200m+99}$. Од претходно изнесеното имаме $10N\equiv -1(\bmod 401)$. За $N\leq n<10N-2$ важи

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \overline{x_n(n+1)(n+2)} = 100N^2x_n+10N(n+1)+(n+2)\\ &\equiv x_n-(n+1)+(n+2)=x_n+1(\bmod 401), \end{aligned}$$

па затоа $x_{N+2k}\equiv x_{N+k}(\bmod 401)$, за $0\leq k<N$. Постои $k, 0\leq k<2005$ таков, што

$$k\equiv -x_n(\bmod 401) \text{ и } k\equiv 0(\bmod 5).$$

Но, тоагаш од претходно изнесеното следува $x_{N+2k}\equiv 0(\bmod 2005)$. Така,за секој m добивме n со $10^{200m+99}\leq n<10^{200m+100}$ таков што $2005|x_n$.

27. Нека n и p се природни броеви такви што $n>1$ и p е прост број поголем од n. Ако $n|p-1$ и $p|n^3-1$, докажи дека $4p-3$ е точен квадрат.

Решение. Од својствата на деливост, бидејќи $n|p-1$ добиваме $p-1\geq n$, т.е. $p\geq n+1>n$. Условот $p|n^3-1$, можеме да го запишеме во облик $p|(n-1)(n^2+n+1)$, и бидејќи p е прост број $p>n$, добиваме $p|n^2+n+1$. Од својствата на деливост, постои природен број k таков што $n^2+n+1=pk$. Условот $n|p-1$ можеме да го запишеме $p\equiv 1\ (\bmod n)$. Од својствата на конгруенции добиваме

$$pk\equiv k\ (\bmod n),$$

па според тоа

$$n^2+n+1\equiv k\,(\bmod n).$$

Јасно е дека

$$n^2+n+1\equiv 1 \ (\text{mod } n),$$

па повторно од својствата конгруенции $k\equiv 1\,(\text{mod } n)$. Сега

$$p=an+1 \text{ и } k=bn+1$$

за некои природни броеви $a>0$ и $b\geq 1$. Тогаш,

$$(an+1)(bn+1)=n^2+n+1$$
$$abn^2+(a+b)n+1=n^2+n+1$$
$$abn+(a+b)=n+1.$$

Ако $b\geq 1$, тогаш $abn+(a+b)\geq n+2>n+1$, што е спротивно на последното равенство. Значи, $b=0, k=1$ и $p=n^2+n+1$, од каде добиваме

$$4p-3=4(n^2+n+1)-3=4n^2+4n+1=(2n+1)^2,$$

што и требаше да се докаже.

28. Определи го најголемиот природен број, кој е делител на p^4-1 за секој прост број $p>3$.

Решение. Бидејќи $p>3$ е прост број, важи $p\equiv \pm 1(\text{mod}\,3)$, од што следува дека $p^4\equiv 1(\text{mod}\,3)$. Од друга страна, p е непарен број, па затоа

$$p\equiv \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ \ \pm 7(\text{mod}\,2^4).$$

Со непосредна проверка се добива дека за секој можен остаток важи $p^4\equiv 1(\text{mod}\,2^4)$. Според тоа, $3\cdot 2^4$ е делител на p^4-1, за секој прост број p. Конечно, бидејќи $\text{NZD}(5^4-1, 7^4-1)=3\cdot 2^4$ добиваме дека бараниот најголем природен број е $3\cdot 2^4=48$.

II.3 ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $2x^3+xy-7=0$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x(2x^2+y)=7,$$

од каде следува дека $x\,|\,7$, т.е. можни вредности за x се $-7,-1,1$ и 7. Ако овие вредности ги замениме во равенката, за y соодветно добиваме $-99, -9, 5$ и -97. Според тоа, дадената равенка има четири решенија: $(1,5); (7,-97)$, $(-1,-9)$ и $(-7,-99)$.

2. Определи ги сите цели броеви x такви што $x^2+3x+24$ е точен квадрат.

Решение. Задачата се сведува на наоѓање на целобројните решенија на равенката $x^2+3x+24=y^2$, која е еквивалентна на равенката
$$(2x+2y+3)(2x-2y+3)=3\cdot 29.$$
Значи, можни се следните случаи $2x+2y+3=\pm 1, \pm 3, \pm 29, \pm 81$ и на нив соодветните вредности за $2x-2y+3$. Решавајќи ги соодветните системи добиваме $x\in\{-23,-8,5,20\}$.

3. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката
$$1!+2!+3!+...+n!=y^2.$$
Решение. Бидејќи $5!=120$, добиваме дека $n!$ завршува на 0 за секој $n\geq 5$. Според тоа бројот $1!+2!+3!+...+n!$ завршува на 3 за $n\geq 5$. Но, y^2 не завршува 3 за ниту еден природен број y, па значи за $n\geq 5$ равенката нема решение. Со непосредна проверка за $n\leq 4$ се добива дека решенијата на дадената равенка се $n=1,\ y=1$ и $n=3,\ y=3$.

4. Докажи дека равенката
$$x_1+x_2+...+x_n=x_1x_2...x_n \tag{1}$$
има барем едно решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. За $n=1$ решение на (1) е било кој природен број. За $n=2$ едно решение е $x_1=x_2=2$. За $n>2$ едно решение е $x_1=x_2=...=x_{n-2}=1$, $x_{n-1}=2$ и $x_n=n$.

Забелешка. Од претходната задача следува дека за секој природен број n постојат n природни броеви чиј збир е еднаков на нивниот производ.

5. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$(2x+1)^2=(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1$$
и на равенката
$$(2x+1)^2=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y).$$

Ако y е цел број различен од $-1,0,1$ и 2, тогаш

$$3y^2+4y+1>0 \text{ и } y^2-2y>0.$$

Но тоа значи

$$(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2.$$

Според тоа $(2x+1)^2$ лежи меѓу два последователни квадрати што е противречност. Со непосредна проверка за $y=-1,0,1$ и 2 добиваме дека единствени решенија на дадената равенка се

$$(0;-1),(-1;-1),(0;0),(-1;0),(5;2) \text{ и } (-6;2).$$

6. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$2x^2-y^{14}=1.$$

Решение. Ставаме $y^2=z$ и дадената равенка ја запишуваме во видот

$$2x^2=(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1).$$

Бидејќи најголемиот заеднички делител на двата множители на десната страна е делител на 7 (зошто?), а 7 не е делител на $z+1=y^2+1$ (зошто?), овие два множители се заемно прости и очигледно $z+1$ е парен број. Значи, $z+1=2a^2$, $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=b^2$, каде a и b се заемно прости броеви и $x=ab$.

Равенката $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=b^2$ се решава стандардно со методот на заклучување меѓу точни квадрати. Имаме

$$(16z^3-8z^2+6z-5)^2<16b^2<(16z^3-8z^2+6z-4)^2,$$

кога $z\geq 4$. Сега, од $y^2=z$ следува дека единствена можност е $z=1$, од каде го добиваме единственото решение $(x,y)=(1,1)$.

7. Определи ги целите броеви x и y такви што $x^2y=y^3+10$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $x^2=y^2+\frac{10}{y}$, бидејќи не постои решение од облик $(x,0)$. Ако (x,y) е решение на равенката, тогаш $y|10$. Делители на 10 во множеството на целите броеви се $\{-1,1,-2,2,-5,5\}$.

- Ако $y=1$ равенката го добива обликот $x^2=11$, која нема решение во множеството на целите броеви.

- Ако $y=-1$ равенката го добива обликот $x^2=-9$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $x=-2$ равенката го добива обликот $x^2=-1$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $x=2$ равенката го добива обликот $x^2=9$. Нејзини решенија во $\mathbb{Z}$ се $x=3$ и $x=-3$.
- Ако $x=-5$ равенката го добива обликот $x^2=23$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $x=5$ равенката го добива обликот $x^2=27$, која нема решение во множеството цели броеви.

Значи, единствени решенија во множеството на целите броеви на дадената равенка се $(3,2)$ и $(-3,2)$.

8. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $x^3-y^3=xy+61$.

Решение. Јасно $x>y$. Ставаме $x=y+d$ и добиваме

$$(3d-1)y^2+(3d^2+d)y+d^3=61. \qquad (1)$$

Од $y\geq 1$ следува

$$(3d-1)+(3d^2+d)+d^3\leq(3d-1)y^2+(3d^2+d)y+d^3=61,$$

односно $d^3+3d^2+4d-1\leq 61$. Според тоа, $d\leq 3$. Со непосредна проверка за $d=1,2,3$ од (1) добиваме дека единствено решение е $y=5$ па затоа $x=6$.

9. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3+(x+4)^3=(x+10)^3.$$

Решение. Со смената $x=t+10$ дадената равенка ја трансформираме во равенката

$$3t(t^2+40t+240)=0.$$

Бидејќи $t^2+40t+230\neq 0$, за секој $t\in\mathbb{Z}$, од последната равека следува $t=0$. Според тоа, во множеството $\mathbb{Z}$ единствено решение на дадената равенка е $x=10$.

10. Докажи, дека третиот степен на најголемиот од три последователни природни броеви е различен од збирот на третите степени на другите два броја.

Решение. Нека претпоставиме дека за некој број x важи

$$(x-1)^3+x^3=(x+1)^3.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката $x^2(x-6)=2$. Која нема решение во множеството на природните броеви, бидејќи за $1\le x\le 6$ левата страна на последната равенка е помала или еднаква на нула, а за $x>6$ таа е поголема или еднаква на 49.

11. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $y^2+5x^2=6$

Решение. За $y=2k$ равенката е еквивалентна со равенката $4k^2-6=5x^2$, која нема целобројни решенија, бидејќи $4k^2-6$ е делив со 2, а не е делив со 4, додека бројот $5x^2$ е или непарен или е делив со 4.

За $y=2k+1$ ја добиваме равенката $4k(k+1)=5(x^2+1)$, која исто таа нема целобројни решенија. Имено бројот $5(x^2+1)$ е или непарен или при делење со 4 дава остаток 2 , а бројот $4k(k+1)$ е делив со 8.

12. Докажи дека равенката

$$x^2+(x+1)^2=y^2$$

има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2x+1)^2-2y^2=-1, \tag{1}$$

која во множеството $\mathbb{N}$ има решение $x=3, y=5$. Понатаму, ако го искористиме идентитетот

$$[2(3x+2y+1)+1]^2-2(4x+3y+2)^2=(2x+1)^2-2y^2$$

заклучуваме, дека ако x и y се решенија на (1), тогаш

$$x_1=3x+2y+1>x \text{ и } y_1=4x+3y+2>y$$

се решенија на (1). Според тоа, равенката (1) има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$, па затоа и почетната равенка има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

13. Докажи дека равенката $(x+1)^3-x^3=y^2$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2y)^2-3(2x+1)^2=1, \tag{1}$$

која во множеството $\mathbb{N}$ има решение $x=7, y=13$. Понатаму, ако го искористиме идентитетот

$$[2(7y+12x+6)]^2-3[2(4y+7x+3)+1]^2=(2y)^2-3(2x+1)^2$$

заклучуваме, дека ако x и y се решенија на (1), тогаш

$$x_1=4y+7x+3>x \text{ и } y_1=7y+12x+6>y$$

се решенија на (1). Според тоа, равенката (1) има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$, па затоа и почетната равенка има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

14. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{Z}$ равенката $x^2+y^2-z^2=n$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$, за кои важи $x,y,z>1$.

Решение. Тврдењето на задачата непосредно следува од равенствата

$$2k-1=(2l^2-k)^2+(2l)^2-(2l^2-k+1)^2,$$

$$2k=(2l^2+2l-k)^2+(2l+1)^2-(2l^2+2l-k+1)^2,$$

за секој $k\in\mathbb{Z}$ и за секој $l>k, l\in\mathbb{N}$.

15. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$1+x+x^2+x^3+x^4=y^4. \qquad (1)$$

Решение. Очигледно $x=0, y=\pm1$ и $x=-1, y=\pm1$ се решенија на равенката (1).

Нека $x>0, y$ е решение на (1). Тогаш

$$x^4<y^4<(1+x)^4, \text{ т.е. } x<|y|<x+1,$$

што не е можно во множеството $\mathbb{N}$.

Нека $x<-1, y$ е решение на (1). Ако ставиме $x=-1-u$, тогаш $u>0$ и добиваме $u^4+3u^3+4u^2+2u+1=y^4$, од каде следува

$$u^4<y^4<(1+u)^4, \text{ т.е. } u<|y|<u+1,$$

што повторно не е можно во множеството $\mathbb{N}$.

Конечно, единствени решенија на (1) се $x=0, y=\pm1$ и $x=-1, y=\pm1$.

16. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2+y^2=3(u^2+v^2).$$

Решение. Четворката $(0,0,0,0)$ е едно решение на равенката. Ако постои уште едно решение, тогаш постои и решение за кое збирот x^2+y^2 е најмал. Бидејќи, квадратите на целите броеви при делење со

3 даваат остатоци 0 и 1, следи дека збирот x^2+y^2 може да е делив со 3 само ако x и y се деливи со 3, па тогаш $x=3x_1$, $y=3y_1$, односно

$$u^2+v^2=3(x_1^2+y_1^2),$$

па од

$$u^2+v^2=\tfrac{1}{3}(x^2+y^2)<x^2+y^2,$$

следи дека добивме решение со помал збир на квадратите на првите две координати. Значи, единствено решение на дадената равенка е $(0,0,0,0)$.

17. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

Решение. Очигледно дека броевите x и y мора да се со иста парност, затоа $u=\frac{x+y}{2}$ и $v=\frac{x-y}{2}$ се цели броеви. Сега дадената равенка се сведува на равенката

$$4u^3+4uv^2=8(3u^2+v^2+1),$$

односно на равенката

$$(u-2)(u^2+v^2)=4u^2+2.$$

Но, тоа значи $u>2$, односно $4u^2+2<5(u^2+v^2)$, т.е. $u-2<5$. Со непосредна проверка за $u=3,4,5,6$ добиваме $u=5$ и $v=\pm3$, односно $x=8,\ y=2$ или $x=2, y=8$.

18. Дадена е равенката $x^3-3xy^2+y^3=n$. Ако n е таков природен број, што дадената равенка има целобројно решение (x,y) докажи дека таа има барем три целобројни решенија. Докажи, дека за $n=2891$ оваа равенка нема ниту едно целобројно решение.

Решение. Бидејќи

$$x^3-3xy^2+y^3=(y-x)^3-3x^2y+2x^3=(y-x)^3-3(y-x)x^2-x^3$$

ако парот (x,y) е целобројно решение на равенката, тогаш паровите $(y-x,-x)$ и $(-y,x-y)$ се решенија на дадената равенка. Случајот кога било кои два пара се еднакви меѓу себе повлекува $x=y=0$, што не е можно бидејќи $n\in\mathbb{N}$.

Сега претпоставуваме

$$x^3-3xy^2+y^3=2891\equiv(\bmod 9). \tag{1}$$

Лесно се гледа, дека можните остатоци на кубовите на целите броеви при делење со 9 се 0 или ± 1, што противречи на (1), т.е. дадената равенка нема решение за $n = 2891$.

19. Докажи, дека равенката $x^{12} - 11y^{12} + 3z^{12} - 8t^{12} = 1971^{1970}$ нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Ќе докажеме дека за произволни цели броеви x, y, z, t разликата меѓу левата и десната страна на равенката не се дели со 13. Навистина $1971 \equiv 8 (\mathrm{mod} 13)$. Од друга страна $1970 = 12k + 2$. Согласно теоремата од Ферма имаме

$$1971 \equiv 1971^{12k+2} \equiv (1971^{12})^k 1971^2 \equiv 1 \cdot 8^2 \equiv -1 (\mathrm{mod} 13).$$

1) Ако x, y, z, t не се делат со 13, тогаш согласно со теоремата на Ферма имаме

$$x^{12} - 11y^{12} + 3z^{12} - 8t^{12} \equiv 1 - 11 + 3 - 8 \equiv -2 (\mathrm{mod} 13)$$

Бидејќи $-2 \neq -1\ (\mathrm{mod} 13)$, јасно е дека во овој случај равенката нема решение.

2) Ако, на пример $x \equiv 0 (\mathrm{mod} 13)$ и y, z, t не се делат со 13, тогаш $0 + 13 + 3 - 8 \equiv -3 \neq -1 (\mathrm{mod} 13)$ и повторно равенката нема решение.

Аналогно се разгледуваат и останатите случаи, кога барем еден од броевите x, y, z, t се дели со 13.

20. Докажи, дека равенката

$$4xy - x - y = z^2$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$, а има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Ако природните броеви x, y, z ја задоволуваат равеката (1), тогаш

$$(4x - 1)(4y - 1) = (2z)^2 + 1,$$

па затоа природниот број $4x - 1 \geq 3$ ќе има прост делител p од облик $4k + 3$. Според тоа, $(2z)^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$ и како $p = 4k + 3$ добиваме

$$(2z)^{p-1} = (2z)^{2(2k-1)} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p),$$

што противречи на теоремата на Ферма. Според тоа, равенката (1) нема решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Ако $n \in \mathbb{N}$, тогаш лесно се проверува дека броевите

$$x = -1,\ y = -5n^2 - 2n \text{ и } z = -5n - 1$$

ја задоволуваат равенката (1), што значи дека таа има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

21. Докажи, дека равенката

$$x^2-2y^2+8z=3$$

нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Нека (a,b,c) е решение на дадената равенка. За b можни се два случаи:

1) ако $b=2k$, тогаш $a^2\equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$, што не е можно бидејќи $a^2\equiv 0,1,4$ $(\mathrm{mod}\,8)$, за секој $a\in\mathbb{Z}$, и
2) ако $b=2k+1$, тогаш $a^2\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$, што повторно не е можно.

22. Докажи, дека равенката $x^2-y^3=7$ нема решенија во множеството $\mathbb{Z}$

Решение. Нека (x,y) е решение на дадената равенка. Очигледно, броевите x и y се со различна парност, т.е. можни се следниве случаи:

1) y е парен, а x е непарен. Тогаш $x^2\equiv 7(\mathrm{mod}\,8)$, што не е можно бидејќи од $x=4k\pm 1$ следува $x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, и
2) x е парен, а y е непарен. Тогаш $y=2k+1$ и освен тоа

   $x^2+1=8+y^3=(2+y)((y-1)^2+3)=(2k+3)(4k^2+3)$.

   Но, бројот $4k^2+3$ има делител од облик $p=4a+3$, што следува дека производ на броеви од облик $4a+1$ е број од истиот облик. Значи,

   $$x^2\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)\text{, т.е. } 1\equiv (x^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$$

   што е противречност.

23. Нека c е непарен природен број. Докажи, дека равенката

$$x^2-y^3=(2c)^3-1$$

нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Имаме

$$x^2+1=(2c)^3+y^3=(y+2c)(y^2-2cy+4c^2)=(y+2c)[(y-c)^2+3c^2].$$

Од $c^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$ следува $3c^2\equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$. Ако y е непарен број, тогаш $y-c$ е парен број, па затоа $(y-c)^2+3c^2$ е број од облик $4k+3$. Но, тоа значи дека $(y-c)^2+3c^2$ има делител од облик $4l+3$,кој е делител на x^2+1, што не е можно. Ако пак y е парен, тогаш $x^2=(2c)^3+y^3-1\equiv-1(\mathrm{mod}\,8)$, што не е можно.

Забелешка. Од претходно изнесеното следува дека постојат бесконечно многу природни броеви кои не може да се претставаат во облик x^2-y^3. За $c=1$, всушност ја добиваме претходната задача.

24. Докажи дека равенката $x^2+y^2=3^k$, нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Да го разгледаме изразот a^2+b^2, каде a и b се природни броеви. Секој од броевите a и b може да се претстави во облик $3s, 3s+1$ или $3s+2$.

Ако a и b се од облик $3s$, на пример, $a=3a_1, b=3b_1$, тогаш

$$a^2+b^2=3^2(a_1^2+b_1^2),$$

па како $a^2+b^2=3^k$, тогаш $a_1^2+b_1^2=3^{k-2}$. Освен тоа ако и еден од броевите a или b е од облик $3s$, тогаш и другиот број мора да е од облик $3s$. Повторувајќи ја постапката добиваме дека a и b треба произволен број пати да се деливи со 3, од што следува $a=b=0$, противречност.

Значи, ниту еден од броевите a и b не е од облик $3s$. Според тоа, имаме

1) Ако $a=3a_1+1, b=3b_1+1$, тогаш $a^2+b^2=3A+2\neq 3^k$,

2) Ако $a=3a_1+1, b=3b_1+2$, тогаш $a^2+b^2=3A+2\neq 3^k$,

3) Ако $a=3a_1+2, b=3b_1+1$, тогаш $a^2+b^2=3A+2\neq 3^k$,

4) Ако $a=3a_1+2, b=3b_1+2$, тогаш $a^2+b^2=3A+2\neq 3^k$.

Значи, $x^2+y^2=3^k$ нема решение во множеството на природни броеви.

25. Докажи, дека постојат само конечен број тројки природни броеви (a,b,c) такви што $abc=2009(a+b+c)$.

Решение. За секои природни броеви x,y и z постојат 6 нивни пермутации. Според тоа, доволно е да докажеме дека постојат конечен број тројки $a\geq b\geq c$ за кои $abc=2009(a+b+c)$. Имаме

$$abc = 2009(a+b+c) \leq 2009 \cdot 3a = 6027a\,,$$

од каде следува $bc \leq 6027$. Јасно, имаме конечен број парови (b,c) за кои $bc \leq 6027$. Бидејќи $a = \frac{2009(b+c)}{bc-2009}$, добиваме дека за секој таков пар постои најмногу еден природен број a за кој $abc = 2009(a+b+c)$. Конечно, постојат конечен број тројки со саканото својство.

26. Определи ги сите природни броеви m и n такви тшо

$$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека m и n се приодни броеви кои го задоволуваат условот (1), кој е еквивалентне на условот

$$(m^2+n+n^2+m)^2 - (m^2+n-n^2-m)^2 = 8(m-n)^3$$

т.е. на условот

$$(m^2+n+n^2+m)^2 = (m-n)^2[8(m-n)+(m+n-1)^2]\,.$$

Од последното равенство следува дека $8(m-n)+(m+n-1)^2$ е точен квадрат. Но, $m > n$, па затоа $(m+n-1+2s)^2 = 8(m-n)+(m+n-1)^2$, за некој природен број s. Тогаш $s(m+n-1+s) = 2(m-n)$ и бидејќи $m+n-1+s > m-n$, заклучуваме дека $s < 2$. Според тоа, $s=1$ и оттука следува дека $m = 3n$. Но, сега левата страна на (1) е поголема од $m^3 = 27n^3$, додека десната страна е еднаква на $16n^3$, што е противречност. Според тоа, не постојат природни броеви кои го задоволуваат условот (1).

27. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x+y)^2(x^2+y^2) = 2009\,.$$

Решение. Нека $x+y=s, xy=p$. Тогаш равенката го добива видот

$$s^2(s^2-2p) = 2009 = 7^2 \cdot 41\,.$$

Бидејќи 7 е прост број, можни се два случаја $s^2 = 1$ или $s^2 = 7^2$.

Ако $s^2 = 1$, тогаш $1-2p = 2009$, од каде наоѓаме $p = -1004$. Понатаму, од $s^2 = 1$ следува $s=1$ или $s=-1$. Ако $s=1$, тогаш добиваме $-4 \cdot 251 = -1004 = xy = x(1-x)$ и лесно се гледа дека последната равенка нема решение во множеството цели броеви. Ако $s=-1$, тогаш $-4 \cdot 251 = -1004 = xy = x(-1-x) = -x(1+x)$ и последната равенка повторно нема решение во множеството цели броеви.

Ако $s^2 = 7^2$, тогаш $49 - 2p = 41$, т.е. $p = 4$. Значи, треба да важи $x + y = \pm 7$ и $xy = 4$, што во множеството цели броеви не е можно, бидејќи тогаш од $xy = 4$ следува дека

$$(x, y) \in \{(1,4), (2,2), (4,1), (-1,-4), (-2, 2-2), (-4,-1)\},$$

а збирот на броевите од овие подредени парови е различен од ± 7.
Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

28. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (x, y, z) такви што

$$xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) = 1.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) = \\
&= xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - y^2 + y^2 - x^2) \\
&= xy(x^2 - y^2) - zx(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) - zx(y^2 - z^2) \\
&= x(x^2 - y^2)(y - z) + z(y^2 - z^2)(y - x) \\
&= (x - y)(y - z)(x(x + y) - z(y + z)) \\
&= (x - y)(y - z)(x^2 - z^2 + y(x - z)) \\
&= (x - y)(y - z)(x - z)(x + y + z)
\end{aligned}$$

па затоа почетната равенка е еквивалентна со равенката

$$(x - y)(y - z)(x - z)(x + y + z) = 1.$$

Оттука заклучуваме дека $x - y, y - z, z - x \in \{-1, 1\}$, и како збир на три непарни броја е непарен број добиваме дека мора да важи

$$(x - y) + (y - z) + (z - x) \neq 0,$$

што не е можно. Значи, дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

29. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0.$$

Решение. Јасно, едно решение на дадената равенка е $a = b = c = d = 0$.
Нека претпоставиме дека дадената равенка има некое дрго решение.
Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека
$\mathrm{NZD}(a, b, c, d) = 1$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2(a^2 + 5b^2) = (2c + d)^2 + 5d^2. \qquad (1)$$

Ќе разгледуваме конгруенции по модул 5. Притоа да забележиме дека за секој $p\in\mathbb{Z}$ важи $p^2\equiv 0,1$ или $4(\text{mod}\,5)$. Од (1) следува дека

$$2a^2\equiv(2c+d)^2(\text{mod}\,5).$$

Ако $a^2\equiv 1(\text{mod}\,5)$, тогаш $(2c+d)^2\equiv 2(\text{mod}\,5)$ што е противречност.

Ако $a^2\equiv 4(\text{mod}\,5)$, тогаш $(2c+d)^2\equiv 3(\text{mod}\,5)$ што е противречност.

Значи, $a^2\equiv 0(\text{mod}\,5)$ и тогаш $(2c+d)^2\equiv 0(\text{mod}\,5)$, од каде следува дека $a\equiv 0(\text{mod}\,5)$ и $2c+d\equiv 0(\text{mod}\,5)$. Воведуваме замени $a=5x$ и $2c+d=5y$, со што ја добиваме равенката

$$2(5x^2+b^2)=5y^2+d^2.$$

На потполно ист начин како и претходно заклучуваме дека $b\equiv 0(\text{mod}\,5)$ и $d\equiv 0(\text{mod}\,5)$, а потоа од $2c+d=5y$ следува дека $c\equiv 0(\text{mod}\,5)$. Според тоа, важи $5\,|\,\text{NZD}(a,b,c,d)$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека единствено решение на почетната равенка е $a=b=c=d=0$.

30. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3+y^3=x^2+42xy+y^2.$$

Решение. Нека $d=\text{NZD}(x,y)$. Тогаш $x=ad,\ y=bd$, каде $d\in\mathbb{N}$, и $\text{NZD}(a,b)=1$. Имаме

$$\begin{aligned}x^3+y^3=x^2+42xy+y^2 \quad&\Leftrightarrow\quad d^3(a^3+b^3)=d^2(a^2+42ab+b^2)\\ &\Leftrightarrow\quad d(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^2+42ab+b^2\\ &\Leftrightarrow\quad (da+db-1)(a^2-ab+b^2)=43ab.\end{aligned}$$

Ја воведуваме замената $c=da+db-1\in\mathbb{N}$, со што ја добиваме равенката $a^2c-abc+b^2c=43ab$, од која следува

$$\left.\begin{aligned}b|ca^2 &\Rightarrow b|c\\ a|cb^2 &\Rightarrow a|c\end{aligned}\right\}\Rightarrow (ab)|c$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad c=mab,\ m\in\mathbb{N}^+\\ &\Rightarrow\quad m(a^2-ab+b^2)=43\\ &\Rightarrow\quad (a^2-ab+b^2)\,|\,43\\ &\Leftrightarrow\quad a^2-ab+b^2=1 \text{ или } a^2-ab+b^2=43.\end{aligned}$$

Ако $a^2-ab+b^2=1$, тогаш

$$(a-b)^2 = 1-ab \geq 0 \Rightarrow a=b=1,\ 2d=44,\ (x,y)=(22,22).$$

Ако $a^2-ab+b^2=43,$ тогаш заради симетрија можеме да претпоставиме дека $x \geq y$, што значи $a \geq b$, па затоа

$$43 = a^2-ab+b^2 \geq ab \geq b^2 \Rightarrow b \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Ако $b=1,$ тогаш $a=7,\ d=1,$ па затоа $(x,y)=(7,1)$ или $(x,y)=(1,7).$

Ако $b=6,$ тогаш $a=7,$ но $d=\frac{43}{13} \notin \mathbb{N}.$

Лесно се проверува дека за $b \in \{2,3,4,5\}$ не постои природен број a таков што $a^2-ab+b^2=43$.

Конечно, решенија на задачата се $(x,\ y) \in \{(1,7),(7,1),(22,22)\}.$

31. Дали постои правоаголен триаголник чии должини на катетите се природни броеви, а неговата хипотенуза има должина 2016^{2017}. Одговорот да се образложи!

Решение. Нека претпоставиме дека таков триаголник постои, т.е. дека постојат природни броеви a и b такви што

$$a^2+b^2=(2016^{2017})^2.$$

Бидејќи $2016=2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ од претходното равенство следува

$$a^2+b^2=2^{20170} \cdot 3^{8068} \cdot 7^{4034}. \qquad (1)$$

При делење со 4 квадрат на природен број дава остаток 0 или 1, па како десната страна на последното равенство е делива со 4, добиваме дека броевите a и b се парни. Со аналогни размислувања добиваме дека двете страни на равенството треба да се деливи со 4^n, па како $2^{20170}=4^{10085}$, заклучуваме дека $a=2^{10085}m,\ b=2^{10085}n$. Сега равенството (1) го добива обликот

$$m^2+n^2=3^{8068} \cdot 7^{4034}. \qquad (2)$$

Значи, $3 \mid m^2+n^2$, па оттука со едноставни разгледувања добиваме дека $3 \mid m$ и $3 \mid n$, од што на потполно иста начин ако и погоре добиваме дека $m=3^{4034}u,\ n=3^{4034}v$. Сега равенството (2) го добива обликот

$$u^2+v^2=7^{4034}.$$

Аналогно заклучуваме дека $u=7^{2017}s,\ v=7^{2017}t$, па затоа од последното равенство добиваме $s^2+t^2=1$, што не е можно во множеството природни броеви. Според тоа, не постои правоаголен триаголник со саканото својство.

32. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3 - y^3 = 999\,. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Од $x, y \in \mathbb{N}$ и $x^3 - y^3 > 0$ следува $x > y$. Нека $x = y + d$, $d \in \mathbb{N}$. Со замена во (1), после идентични трансформации добиваме

$$d^3 + 3d(d^2 + yd) = 999\,,$$

од каде следува дека $d\,|\,999$, $3\,|\,d$ и $d^3 < 999$. Според тоа, $d < 10$ и како $3\,|\,d$ имаме $d = 3$ или $d = 9$.

За $d = 3$ добиваме

$$27 + 9(y^2 + 3y) = 999\text{, т.е. } y^2 + 3y - 108 = 0\,.$$

Значи,

$$(y-9)(y+12) = 0$$

и како $y \in \mathbb{N}$, наоѓаме $y = 9$, па затоа $x = y + 3 = 12$.

За $d = 9$ добиваме

$$729 + 27(y^2 + 9y) = 999\text{, т.е. } y^2 + 9y - 10 = 0\,.$$

Значи,

$$(y-1)(y+10) = 0$$

и како $y \in \mathbb{N}$, наоѓаме $y = 1$, па затоа $x = y + 9 = 10$.

Конечно, бараните решенија се $(x, y) \in \{(12,9),(10,1)\}$.

Втор начин. Равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3^3 \cdot 37\,.$$

Бидејќи 37 е прост број и 37 е делител на десната страна, следува дека тој е делител и на левата страна. Но, $37 > 27$ и

$$x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy > x - y\,,$$

па затоа 37 е делител на $x^2 + xy + y^2$. Можни се следниве случаи:

i) $x - y = 1, x^2 + xy + y^2 = 999$. Тогаш $999 = (x-y)^2 + 3xy$, па затоа $3\,|\,x - y = 1$, што не е можно.

ii) $x - y = 3, x^2 + xy + y^2 = 333$, од каде следува $(2y+3)^2 = 21^2$, па затоа $y = 9, x = 12$.

iii) $x-y=9, x^2+xy+y^2=111$, од каде следува $(2y+9)^2=11^2$, па затоа $y=1, x=10$.

iv) $x-y=27, x^2+xy+y^2=37$, од каде добиваме

$$37=x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy>27^2,$$

што е противречност.

Конечно, бараните решенија се $(x,y)\in\{(12,9),(10,1)\}$.

33. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$z^2+1=xy(xy+2y-2x-4).$$

Решение. Воведуваме смени $x=u-1, y=v+1$ и добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката $z^2+1=(u^2-1)(v^2-1)$.Лесно се покажува дека u,v и z се парни. Понатаму, ако $|u|>1$, тогаш u^2-1 има прост делител p таков што $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Затоа $z^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ што не е можно (познато е дека ако p е прост број таков што $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ и p е делител на a^2+b^2, тогаш p е делител и на x и на y). Според тоа, $u=0$. Аналогно се добива дека $v=0$. Според тоа, $z=0$ и единствено решение на дадената равенка е $x=-1, y=1, z=0$.

34. Определи го најмалиот природен број n за кој постојат природни броеви a,b и c, ниту еден од кои не е точен квадрат и такви што

$$a^3+b^3+c^3-3abc=2013^n.$$

Решение. Лесно се докажува дека левата страна на даденото равенство е делива со 9, што значи дека равенката нема решение за $n=1$.

Нека $n=2$. Имаме

$$2013^2=(3\cdot 11\cdot 61)^2, 3^2=2^3+1^3 \text{ и } 11\cdot 61=8^3+4^3+1^3+3\cdot 8\cdot 4\cdot 1.$$

Ќе искористиме и дека

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)=u^3+v^3+w^3-3uvw,$$

каде $u=ax+by+cz, v=ay+bz+cx, w=az+bx+cy$. Ако го примениме ова равенство прво за $(8,4,-1)$ и $(4,8,-1)$, а потоа за добиената тројка $(65,0,56)$ и $(2,1,0)$ добиваме

$$65^3+56^3=(11\cdot 61)^2 \text{ и } 130^3+177^3+56^3-3\cdot 130\cdot 177\cdot 56=2013^2.$$

35. Дадени се два заемно прости природни броја m и n. Докажи, дека равенката $x^m u^n + y^m v^n = z^m w^n$ има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.

Решение. Бидејќи m и n се заемно прости броеви, постојат броеви $1 \le k \le n$ и $1 \le l \le m$ такви што $km - nl = 1$. Тогаш за секој $i \in \mathbb{N}$ броевите

$$x = y = 2^m, u = v = 2^{mi}, z = 2^{ni+k}, w = 2^{mi-l}$$

се решенија на дадената равенка.

36. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3 = (x-y)(3xy+1).$$

Решение. *Прв начин.* Ако ставиме $x = y + z$, после смената во дадената равенка ја добиваме равенката

$$z(z^2 - 1) = (-y)^3. \qquad (1)$$

Ако $z > 1$, тогаш $-y > 0$. Бидејќи броевите z и $z^2 - 1$ се заемно прости, следува дека $z = a^3$ и $z^2 - 1 = b^3$, каде $a, b \in \mathbb{N}$. Оттука добиваме $(a^2)^3 - b^3 = 1$, што не е можно (докажи!). Ако $z < -1$, ставаме $t = -z$ и (1) го прима видот $t(t^2 - 1) = y^3$, па според претходно изнесеното повторно немаме решение. Според тоа, $z = 0, z = \pm 1, y = 0$ и добиваме дека решенија на дадената равенка се $(x, y) = (0,0), (1,0), (-1,0)$.

Втор начин. Нека $x \ne 0, x \ne y$. Бидејќи броевите x и $3xy + 1$ се заемно прости добиваме, дека x е делител на $x - y$, т.е. x е делител на y. Ставаме $x = ky$, каде $k \in \mathbb{Z}$. Заменуваме во дадената равенка и добиваме $(1-k)(3ky^2 + 1) = x^2$. Ако $k > 1$ или $k < 0$, десната страна на последната равенка е негативна, што не е можно. За $k = 0,1$ ги добиваме решенијата $(x, y) = (0,0), (1,0), (-1,0)$.

37. Определи ги сите решенија на равенката $p - x^4 = 4$ каде p е прост број, а x е цел број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} p = x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = ((x-1)^2 + 1)((x+1)^2 + 1). \end{aligned}$$

Броевите на десната страна на низата равенства се позитивни и како простиот број p има два делители можни се два случаја.

1) $(x-1)^2+1=1$, од каде добиваме $x=1$ и $p=5$.

2) $(x+1)^2+1=1$, од каде добиваме $x=-1$ и $p=5$.

Според тоа, единствени решенија се $(x,p)\in\{(-1,5),(1,5)\}$.

38. Нека p е прост број. Определи ги сите цели броеви x и y такви што

$$(2x+y)^3=p^2x(x+y)^2.$$

Решение. Нека $2x+y=A$ и $x+y=B$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $A^3=p^2B^2(A-B)$, од каде следува дека $p\,|\,A$. Нека $A=pA_1$, каде A_1 е цел број. Тогаш $pA_1^3=B^2(pA_1-B)$, од каде следува дека $p\,|\,B$ (во спротивно левата страна не е делива со p). Нека $B=pB_1$, каде B_1 е цел број. Тогаш ја добиваме равенката $A_1^3=B_1^2(pA_1-B_1)$, која е од ист вид како равенката $A^3=p^2B^2(A-B)$, па затоа можеме да ја продолжиме постапката. Јасно, ако $A\neq 0$ постапката продолжува бесконечно, т.е. A треба да биде произволен број пати делив со p, што не е можно. Според тоа, $A=B=0$, од каде добиваме $x=y=0$.

39. Нека $a,b\in\mathbb{Z}$ и $k\in\mathbb{N}$. Докажи, дека ако равенката $a^kx-b^ky=a-b$ има решение подреден пар (x,y) од последователни цели броеви, тогаш $|a-b|$ е точен $k-$ти степен.

Решение. Нека равенката има решение од видот $(x,x+1)$. Тогаш

$$a-b=a^kx-b^k(x+1)$$

$$b^k=(a-b)[-1+x(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1})]. \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека броевите

$$a-b \text{ и } -1+x(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1})$$

имаат заеднички прост делител p. Тогаш $p\,|\,b^k$, па затоа $p\,|\,b$. Но, $p\,|\,a-b$, што значи дека $p\,|\,a$. Сега, од $p\,|\,a$, $p\,|\,b$ и

$$p\,|\,-1+x(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1})$$

следува $p\,|\,1$, што е противречност. Значи,

$$a-b \text{ и } -1+x(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1})$$

се заемно прости, па од (1) следува дека секој од овие два броја е $k-$ ти степен со точност до знак.

40. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2=2017^2.$$

Решение. Нека x, y е решение на дадената равенка. Бидејќи 2017 е непарен број, заклучуваме дека x и y се со различна парност. Нека $y=2k$, каде k е природен број. Тогаш

$$4k^2=2017^2-x^2=(2017-x)(2017+x).$$

Ако $d>1$ е заеднички делител на $2017-x$ и $2017+x$, тогаш d е делител и на $(2017-x)+(2017+x)=2\cdot 2017$. Но, 2017 е прост број и заклучуваме, дека $d=2$, бидејќи $d=2017$ не е можно (зошто?). Тогаш $2017-x=2m$ и $2017+x=2n$, каде m и n се заемно прости броеви. Имаме $k^2=mn,$ од каде следува, дека m и n се точни квадрати, т.е. $m=a^2$ и $n=b^2$. Според тоа, $k=ab$ и $y=2ab$. Од равенствата $2017-x=2m=2a^2$ и $2017+x=2n=2b^2$ после одземање на првото од второто наоѓаме $x=b^2-a^2$. Оттука

$$2017^2=x^2+y^2=(b^2-a^2)+4a^2b^2=a^4+b^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2$$

и значи $a^2+b^2=2017$.

Ќе ја решиме равенката $a^2+b^2=2017$. Забележуваме, дека бројот 2017 дава остаток 1 при делење со 3. Оттука следува, дека еден од броевите a и b со сигурност е делив со 3. Освен тоа, бројот 2017 дава остаток 2 при делење со 5. Тоа е можно само ако остатоците на a^2 и b^2 при делење со 5 се еднакви на 1. Нека a е делив со 3. Тогаш можните вредности на a се: 6, 9, 21, 24, 36 и 39, бидејќи $44^2<2017<45^2$ (се зема предвид дека остатокот на a^2 при делење со 5 е 1). Од нив само 9 е решение. Останатите можности се отфрлаат со проверка. Непосредно следува, дека $9^2+44^2=2017$, т.е. $b=44$. Според тоа претставувањето на 2017 како збир на два квадрати е единствено. Сега лесно наоѓаме, дека $x=44^2-9^2=1855$ и $y=2\cdot 44\cdot 9=792$. Провери, дека $1855^2+792^2=2017^2$.

41. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството

$$a^3+4a=b^2.$$

Докажи, дека бројот a е од видот $2t^2, t\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека u^2 е најголемиот точен квадрат кој е делител на a и нека $a=qu^2$, при што сите прости множители на q се различни. Тогаш $qu^2(q^2u^4+4)=b^2$, па затоа $u^2\,|\,b^2$, од каде заклучуваме дека $u\,|\,b$. Нека $b=ru$. Ако замениме во последното равенство добиваме

$$q(q^2u^4+4)=r^2.$$

Бидејќи сите прости множители на q се различни, од $q\,|\,r^2$ следува дека $q\,|\,r$, што значи дека $q^2\,|\,r^2$, т.е. $q\,|\,q^2u^4+4$. Според тоа, $q+4$, па затоа $q=1$ или $q=2$. За $q=1$ важи $u^4+4=r^2$, што не е можно, бидејќи не постојат два точни квадрати кои се разликуваат за 4. Значи, $q=2$ за секој a и b кои го задоволуваат даденото равенство.

Забелешка. Може да се докаже, дека во множеството природни броеви $(a,b)=(2,4)$ е единствено решение на равенката $a^3+4a=b^2$.

42. Определи природен број n за кој постои цел број x таков што

$$499\cdot(1997^n+1)=x^2+x.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$1996\cdot(1997^n+1)=4x^2+4x$$
$$(1997-1)(1997^n+1)+1=4x^2+4x+1$$
$$1997\cdot(1997^n-1997^{n-1}+1)=(2x+1)^2.$$

За $n=1$ добиваме $1997^2=(2x+1)^2$, од каде наоѓаме $x=998$. Значи, $n=1$ е решение на задачата. Нека претпоставиме дека $n>1$. Бројот 1997 е прост, па затоа од $1997\,|\,(2x+1)^2$ следува дека $1997\,|\,2x+1$, што значи дека $1997^2\,|\,(2x+1)^2$. Последното значи дека

$$1997^2\,|\,1997\cdot(1997^n-1997^{n-1}+1), \text{ т.е. } 1997\,|\,(1997^n-1997^{n-1}+1)$$

што не е можно бидејќи од $n>1$ следува $1997\,|\,(1997^n-1997^{n-1})$. Значи, за $n>1$ равенката нема решение, па затоа единствен природен број кој ги задоволува условите на задачата е $n=1$.

43. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2+u^2=3(x+y+z+u).$$

Решение. Ако дадената равенка ја помножиме со 4 и додадеме на двете страни 36, после средувањето ја добиваме еквивалентната равенка

$$(2x-3)^2+(2y-3)^2+(2z-3)^2+(2u-3)^2=36.$$

Единствени квадрати на непарни броеви кои се помали од 36 се 25, 9 и1. Бројот 36, како збир на четири собирци кои се еднакви на 1, 9 или 25 може да се запише на два начина и тоа: $9+9+9+9$ и $25+9+1+1$. Значи, едно решение е

$$(2x-3)^2=(2y-3)^2=(2z-3)^2=(2u-3)^2=9,$$

од каде бидејќи $2n-3\geq -1$ за секој природен број n добиваме $2x-3=2y-3=2z-3=2u-3=3$, односно $x=y=z=u=3$.

Во случајот кога 36 е запишан како $25+9+1+1$, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека

$$(2x-3)^2=25, (2y-3)^2=9, (2z-3)^2=(2u-3)^2=1.$$

Сега од $2n-3\geq -1$, за секој природен број n следува $2x-3=5$, $2y-3=3$, односно $x=4, y=3$, а за $2z-3$ и $2u-3$ можни вредности се 1 и -1, односно z и u може да се еднакви на 2 или 1.

Конечно, сите решенија на задачата се: $(3,3,3,3)$ и сите пермутации на подредените четворки $(5,3,2,2), (5,3,2,1)$ и $(5,3,1,1)$.

44. Определи го најмалиот природен број k за кој равенката

$$x_1^2+x_2^2+...+x_k^2=2007$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Очигледно $k>1$, бидејќи бројот 2007 не е точен квадрат. Ако $k=2$ од $x_1^2+x_2^2=2007$ следува, дека еден од броевите x_1 и x_2 е парен, а другиот е непарен. Но квадратите на парните броеви се деливи со 4, а квадратите на непарните броеви при делење со 4 даваат остаток 1. Бидејќи при деленње со 4 бројот 2007 дава остаток 3, следува дека k не е 2. Нека k = 3. Тогаш или трите броја се непарни, или едниот е непарен, а другите два се парни. Ако трите броја се непарни, тогаш секој од квадратите на тие броеви дава остаток 1 при делење со 8 и збирот на тие остатоци е 3, а бројот 2007 дава остаток 7 при делење со 8, што е противречност. Ако еден од броевите е непарен, а другите два се парни, тогаш како во случајот $k=2$ при делење со 4 лево ќе имаме остаток 1, а десно остаток 3, што повторно не е можно. Нека $k=4$. Бидејќи $2007=9\cdot 223$, доволно е да го претставиме бројот 223 като збир од квадрати на четири природни броја. Имаме

$$223=11^2+10^2+1^2+1^2,$$

од каде следува

$$2007=33^2+30^2+3^2+3^2.$$

Конечно, бараниот најмал број е $k=4$.

Забелешка. Може и $2007=42^2+13^2+7^2+5^2$.

45. Даден е природен број n. Определи ги сите подредени четворки цели броеви (x_1,x_2,x_3,x_4) такви што

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4^n.$$

Решение. Нека $n=1$. Тогаш дадената равека го добива обликот $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4$, од каде следува дека

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\{&(\pm 2,0,0,0),(0,\pm 2,0,0),(0,0,\pm 2,0),\\&(0,0,0,\pm 2),(\pm 1,\pm 1,\pm 1,\pm 1)\}\end{aligned}.$$

Нека претпоставиме дека $n\geq 2$. Тогаш

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4^n=16\cdot 4^{n-2}\equiv 0(\bmod 8). \qquad (1)$$

Но, за секој природен број x важи $x^2\equiv 0,1$ или $4(\bmod 8)$, па затоа за да збирот биде парен меѓу остатоците може да има само парен број единици. Но, тогаш

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\equiv 2,4,6 \text{ или } 10(\bmod 8),$$

што противречи на (1). Според тоа, ниту еден од броевите x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2 не е конгруентен со 1 по модул 8, па заклучуваме дека броевите x_1,x_2,x_3,x_4 се парни , т.е.

$$x_1=2k_1,\ x_2=2k_2,\ x_3=2k_3,\ x_4=2k_4,$$

Ако замениме во почетната равенка добиваме и добиената равенка ја поделиме со 4 ја добиваме равенката

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2=4^{n-1}.$$

за некои цели броеви k_1,k_2,k_3,k_4. Ако $n-1\geq 2$, тогаш од претходно изнесеното следува дека броевите k_1,k_2,k_3,k_4 мора да се парни. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека

$$x_1 = 2^{n-1}m_1,\ x_2 = 2^{n-1}m_2,\ x_3 = 2^{n-1}m_3,\ x_4 = 2^{n-1}m_4\,,$$

за некои цели броеви m_1, m_2, m_3, m_4. Со замена во почетната равенка, после скратувањето со 4^{n-1} ја добиваме равенката

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = 4\,,$$

за која претходно покажавме дека единствени решенија се

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \{(\pm2,0,0,0),\ (0,\pm2,0,0),\ (0,0,\pm2,0),\ (0,0,0,\pm2),\ (\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)\}.$$

Конечно, од досега изнесенот следува дека единствени решенија на почетната равенка се

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(\pm2^n,0,0,0),(0,\pm2^n,0,0),(0,0,\pm2^n,0),(0,0,0,\pm2^n),(\pm2^{n-1},\pm2^{n-1},\pm2^{n-1},\pm2^{n-1})\}$$

46. Во множеството цели броеви, реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2016^3 - 1\,.$$

Решение. За $x = 2k$ важи

$$x^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{16}\,.$$

За $x = 2k+1$, важи

$$x^4 - 1 = 8k(k+1)(2k^2 + 2k + 1) \equiv 0 \pmod{16}\,,$$

односно $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Според тоа, за секои $x_1, x_2, \ldots, x_{14} \in \mathbb{Z}$ важи

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 \equiv m \pmod{16}\,,\ 0 \le m \le 14\,. \tag{1}$$

Од друга страна,

$$2016^3 - 1 \equiv 15 \pmod{16}\,, \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) следува дека дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

47. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599\,.$$

Решение. За $x = 2k$ имаме $x^4 = 16k^2 \equiv 0 \pmod{16}$. За $x = 2k+1$ добиваме

$$x^4 - 1 = 8k(k+1)(2k^2 + 2k + 1) \equiv 0 \pmod{16}\,.$$

Бидејќи $1599 \equiv 15 \pmod{16}$, дадената равенка нема решение во множеството $\mathbb{Z}$. Имено збирот на левата страна при делење со 16 не може да даде остаток 15 за било кои четиринаесет цели броеви.

48. Докажи, дека равенката

$$x^2+2y^2+98z^2=\underbrace{77...7}_{2005}$$

нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека дадената равенка има решение (a,b,c). Тогаш 7 е делител на a^2+2b^2. Јасно, ако еден од броевите a или b е делив со 7, тогаш и другиот е делив со 7. Ако ниту еден од броевите a и b не е делив со 7, добиваме противречност, бидејќи тогаш остатоците при делење со 7 на квадратите и удвоебите квадрати се 1, 2 и 4, а збирот на било кои два од нив не е делив со 7.

Според тоа, a и b се деливи со 7. Но, тогаш левата страна е делива со 7^2, па затоа бројот $\underbrace{11...1}_{2005}$ треба да е делив со 7. Меѓутоа, последното не е точно, бидејќи бројот 111111 е делив со 7 и $2005=6\cdot 334+1$. Конечно, од претходно изнесеното следува дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

49. Докажи, дека ако a,b и c се цели броеви такви што бројот

$$\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$$

е точен квадрат на цел број, тогаш $a=b=c$.

Решение. Нека $\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}=d^2$, каде $d\in\mathbb{Z}$. Ако земеме $x=a-b,\ y=b-c$ и $z=c-a$, тогаш

$$x+y+z=0,\quad x^2+y^2+z^2=4d^2. \tag{1}$$

Бидејќи квадрат на цел број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, од (1) следува дека x,y и z се парни броеви. Нека $x_1=\frac{x}{2},\ y_1=\frac{y}{2}$ и $z_1=\frac{z}{2}$. Тогаш

$$x_1+y_1+z_1=0,\ x_1^2+y_1^2+z_1^2=d^2,$$

и како и претходно заклучуваме дека x_1,y_1,z_1 и d се парни броеви. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека x,y и z се делат со 2^k за секој природен број k. Последното е можно ако и само ако $x=y=z=0$, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

50. Дадена е равенката $|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=n$, каде x,y,z се цели и n е природен број.

а) Докажи дека равенката има решение за секој непарен природен број n
.

б) Определи ги сите природни броеви m за кои равенката нема решение за $n=2^m$.

Решение. а) Да забележиме, дека бројот $|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|$ е парен ако и само ако x,y,z се со еднаква парност. Навистина, ако x,y,z се парни, тогаш бројот $|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|$ ќе се дели со 4, а ако x,y,z се непарни, тогаш лесно се проверува дека бројот $|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|$ повторно ќе се дели со 4.

Ако $n=4k+1$, каде k е ненегативен цел број, тогаш за броевите $x=k+1, y=z=k$ левата страна на равенката е еднаква на $|2k+1|+2|k|=4k+1$, што значи дека $x=k+1, y=z=k$ е решение на равенката за $n=4k+1$.

Ако $n=4k-1$, каде k е природен број, тогаш за броевите $x=k-1, y=z=k$ левата страна на равенката е еднаква на $|-2k+1|+2|k|=4k-1$, што значи дека $x=k-1, y=z=k$ е решение на равенката за $n=4k-1$.

б) Да забележиме дека ако броевите x,y,z се решение на равенката за $n=2^m$, тогаш броевите $2x,2y,2z$ се решение на равенката за $n=2^{m+2}$.

Бидејќи равенката

$$|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=4=2^2$$

има решение $x=2, y=z=0$, заклучуваме дека равенката има решение за $n=16,64,...,2^{2s},...$, каде $s\geq 2$ е произволен природен број. Бидејќи равенката

$$|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=32=2^5$$

има решение $x=5, y=z=1$, заклучуваме дека таа ќе има решение за $n=128,512,...,2^{2s+1},...$, каде $s\geq 3$ е произволен природен број.

Останува да ги разгледаме равенките

$|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=2$ и $|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=8$.

Ако бројот $|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|$ е парен, тогаш тој се дели со 4, па затоа заклучуваме дека равенката

$$|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=2$$

нема решение во множеството цели броеви. Според тоа, $m=1$ е решение на задачата.

Да ја разгледаме равенката

$$|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=8.$$

Од неравенството $|a|+|b|+|c|\geq|a+b+c|$, кое е точно за секои реални броеви a,b,c следува

$$|x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx|\leq 8$$

$$|(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2|\leq 16$$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leq 16.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x\geq y\geq z$. Тогаш $(x-y)^2\leq 16$ и ако искористиме дека x,y,z се со еднаква парност, добиваме дека $x-y=4, x-y=2$ или $x-y=0$. Ако $x-y=4$, тогаш за да е точно неравенството

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leq 16$,

треба да е $y-z=z-x=0$, што не е можно. Ако $x-y=2$, тогаш треба да е $y-z=2$ или $y-z=0$. Ако $y-z=2$, тогаш $x-z=4$, што противречи на

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leq 16.$$

Ако $y-z=0$, тогаш $y=z=x-2$, па затоа

$$|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=4(|x-1|+|x-2|)\neq 8,$$

за секој $x\in\mathbb{Z}$. Ако $y=x$, тогаш за z ги имаме можностите $z=y$, $z=y-2$, $z=y-4$, кои се разгледуваат аналогно. Повторно не добиваме решение на равенката

$$|x^2-yz|+|y^2-zx|+|z^2-xy|=8,$$

што значи дека $m=3$ е решение на задачата.

51. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $7p+1$ е квадрат на природен број.

Решение. Нека $7p+1=n^2$, $n\in\mathbb{N}$. Следи дека, $7p=(n-1)(n+1)$, па бидејќи сите природни делители на бројот $7p$ се 1, 7, p и $7p$, тоа значи $n-1=1$ или $n-1=7$ или $n+1=1$ или $n+1=7$. Следи дека, $n\in\{2,8,0,6\}$, па со проверка се добива дека единствено решение е $n=6$, односно $p=5$.

52. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2-3p-1$ е точен куб на природен број.

Решение. Од равенството

$$2p^2-3p-1=n^3 \qquad (1)$$

добиваме $n^3 \le 2p^2-3p-1 \le 2p^2 \le p^3$, па затоа $n<p$, т.е. $n+1\le p$.

Ако $p=n+1$, тогаш од (1) добиваме $n^3-2n^2-n+2=0$, од каде наоѓаме $(n-2)(n-1)(n+1)=0$. Значи, $n\in\{1,2\}$, па затоа $p\in\{2,3\}$.

Ако $p>n+1$, тогаш од (1) следува

$$p(2p-3)=(n+1)(n^2-n+1) \qquad (2)$$

и бидејќи $p>n+1$ и p е прост број следува дека p е делител на n^2-n+1. Тогаш

$$n^2-n+1=kp \qquad (3)$$

за некој природен број k. Од (2) и (3) добиваме $2p=k(n+1)+3$ и ако во (3) замениме $p=\frac{k(n+1)+3}{2}$ добиваме

$$2n^2-(k^2+2)n-(k^2+3k-2)=0.$$

Дискриминантата на оваа квадратна равенка $D=k^4+12k^2+24^2-12$ треба да е точен квадрат. Ако $k\ge 9$, тогаш

$$(k^2+6)^2<k^4+12k^2+24^2-12<(k^2+7)^2$$

и D не може да биде точен квадрат. Според тоа, $1\le k\le 8$ и со непосредна проверка се покажува дека ниту едно од овие броеви не дава решение.

Конечно, бараните прости броеви се 2 и 3.

53. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $p\,|\,30q-1$ и $q\,|\,30p-1$.

Решение. Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(pq,30)=1$, т.е. $p,q\ne 2,3,5$. Од условот лесно се добива дека $pq\,|\,30(p+q)-1$. Оттука заклучуваме дека постои природен број n таков што $\mathrm{NZD}(n,30)=1$ и за кој важи

$$pqn=30(p+q)-1. \qquad (1)$$

Ќе ги разгледаме следниве случаи:

1) $n=1$ и равенката (1) го добива видот $pq=30(p+q)-1$, т.е.

$$(p-30)(q-30)=899=29\cdot 31=1\cdot 899.$$

Оттука ги добиваме решенијата

$$(p,q)\in\{(59,61),(61,59),(31,929),(929,31)\}.$$

2) $n>1$, од каде следува $n\geq 7$. Сега имаме

$$7pq\leq npq=30(p+q)-1<30pq.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме $p\leq q$ и ако последната неравенка ја поделиме со $30pq$ добиваме

$$\frac{7}{30}<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{2}{p}.$$

Оттука следува $p\leq\frac{60}{7}<9$, а како $p\geq 7$, заклучуваме дека $p=7$. Сега од $q\,|\,7\cdot 30-1=209=11\cdot 19$ следува $q=11$ или $q=19$. Но, $7\,|\,30\cdot 11-1=329=7\cdot 47$ и $7\nmid 30\cdot 19-1=569$, па затоа решение е само $q=11$. Значи, решенија се $(p,q)\in\{(7,11),(11,7)\}$.

Конечно, решенија на задачата се

$$(p,q)\in\{(7,11),(11,7),(59,61),(61,59),(31,929),(929,31)\}.$$

54. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^3-q^7=p-q.$$

Решение. Бидејќи

$$p^3-1>p^3-p=q^7-q=q(q^6-q)>q^6-1,$$

добиваме $p>q^2$. Оттука и до равенството

$$p(p-1)(p+1)=q(q-1)(q+1)(q^2-q+1)(q^2+q+1) \qquad (1)$$

следува дека $p\,|\,q^2+q+1$. Ако $p\neq q^2+q+1$, тогаш $q^2<p\leq\frac{q^2+q+1}{2}$, т.е. $q^2<q+1$, што е противречност. Значи, $p=q^2+q+1$ и ако замениме во (1), после упростувањето добиваме

$$q^3-3q^2+q-3=0$$

$$q^2(q-3)+(q-3)=0$$

$$(q-3)(q^2+1)=0.$$

Оттука, $q=3$, па затоа $p=3^2+3+1=13$.

55. Определи ги сите природни броеви a, b и c, за кои е исполнето равенството

$$a!b!=a!+b!+c!.$$

Решение. Повеќе пати ќе ги искористиме очигледните тврдења:

За секои два природни броја m *и* n*, важи* $m!|n!$ *ако и само ако* $m\le n$.
За секои три природни броеви k , m *и* n*, од кои* k *е најмалиот, важи* $\frac{m!}{k!}|\frac{n!}{k!}$ *ако и само ако* $m\le n$.

Нека $a!b!=a!+b!+c!$. Без ограничување на општоста можеме даземеме, дека $a\le b$. Тогаш $a!|b!$ и следствено $a!|c!$, т.е. $a\le c$. Сега равенството $a!b!=a!+b!+c!$ е еквивалентно на $b!=1+\frac{b!}{a!}+\frac{c!}{a!}$. Во случајов $b!\ge 3$, од каде следува $b\ge 3$. Ќе разгледаме два случаја:

1. случај. $c\le b$. Тогаш $c!|b!$ и $\frac{c!}{a!}|\frac{b!}{a!}$, од каде следува $\frac{c!}{a!}|1$, т.е. $c!=a!$. Значи, $b!=2+\frac{b!}{a!}$, па затоа $\frac{b!}{a!}|2$, т.е. $\frac{b!}{a!}=1$ или $\frac{b!}{a!}=2$. Имаме $b!=3$ или $b!=4$, што не е точно за ниту еден природен број b и затоа случајот $c\le b$ е невозможен.

2. случај. $b<c$. Аналогно на првиот случај добиваме $a!=b!$ и $b!=2+\frac{c!}{b!}$. Бидејќи $b\ge 3$, важи $3|b!$. Од друга страна 3 не е делител на 2, па значи 3 не е делител на $\frac{c!}{b!}$. Оттука $c\le b+2$, бидејќи во спротивно $\frac{c!}{b!}=(b+1)(b+2)(b+3)...c$, а $3|(b+1)(b+2)(b+3)$. Значи, $c=b+1$ или $c=b+2$. Ако $c=b+1$, тогаш $b!=3+b$ и во случајов $b|3$, па затоа $b=3$. Ако $c=b+2$ имаме

$$\frac{c!}{b!}=(b+1)(b+2)=b^2+3b+2 \text{ и } b!=2+\frac{c!}{b!}=b^2+3b+4.$$

Така $b|4$ и бидејќи $b\ge 3$, тогаш $b=4$, што не е можно, бидејќи

$$4!=24\ne 4+12+16.$$

Добиваме, дека единствената можност е $a=b=3$ и $c=4$, што е и бараниот одговор, бидејќи $3!3!=36=3!+3!+4!$.

56. Определи ги сите прости броеви p и q такви што

$$(2p-q)^2=17p-10q\,.$$

Решение. Нека земеме $2p-q=t$. Тогаш $q=2p-t$ и ако замениме во дадената равенка добиваме $t^2=17p-20p+10t$, т.е. $3p=t(10-t)$. Оттука следува дека $3|t$ или $3|10-t$.

Ако $3|t$, тогаш $t=3s$, па затоа $3p=3s(10-3s)$, т.е. $p=s(10-3s)$. Но, p е прост број, па последното е можно само ако s или $10-3s$ по апсолутна вредност е еднаков на 1.

Ако $s=1$, тогаш $p=7$, па е $t=3$ и добиваме $q=2\cdot 7-3=11$.
Ако $s=-1$, тогаш $p=-13$, што противречи на претпоставката дека p е прост број.
Ако $10-3s=1$, тогаш $s=3$, па затоа $p=3$. Тогаш $t=1$ и $q=5$.
Ако $10-3s=-1$, тогаш $3s=11$, што не е можно.
Ако $3|10-t$, тогаш $t=3k+1$, па затоа $3p=3(3k+1)(3-k)$, од каде следува $p=(3k+1)(3-k)$. Но, p е прост број, па последното е можно само ако $3k+1$ или $3-k$ по апсолутна вредност е еднаков на 1.
Ако $3k+1=1$, тогаш $k=0$, па затоа $p=3$ и како $t=1$ добиваме $q=5$.
Ако $3k+1=-1$, тогаш $3k=-2$, што не е можно.
Ако $3-k=1$, тогаш $k=2$, па затоа $p=7$ и како $t=7$ добиваме $q=7$.
Ако $3-k=-1$, тогаш $k=4$, па затоа $p=-13$, што противречи на претпоставката дека p е прост број.
Конечно, $(p,q)\in\{(3,5),(7,7),(7,11)\}$.

57. Определи ги сите парови прости броеви p и q такви што

$$p^6-q^9=p^3q^3+1.$$

Решение. Нека парот p и q е решение на задачата. Јасно, $p>q$, па затоа $p\geq 3$. Ако $p=3$, тогаш $q^9+27q^3=728$, од каде следува дека $q^3|728=2^3\cdot 7\cdot 13$. Но, q е прост број, па затоа единствена можност е $q=2$. Со непосредна проверка се добива дека парот $p=3,q=2$ е решение на задачата.
Нека $p>3$. Даденото равенство можеме да го запишеме во видот $p^6-p^3q^3=q^9+1$ или

$$p^3(p^3-q^3)=(q^3+1)(q^6-q^3+1)+3.$$

Понатаму, од равенството

$$q^6-q^3+1=(q^3+1)(q^3-2)+3$$

следува дека $\text{NZD}(q^6-q^3+1,q^3+1)\leq 3$ и како $p>3$, заклучуваме дека точно еден од броевите q^6-q^3+1 и q^3+1 ќе се дели со p, а другиот ќе е заемно прост со p. Но, тогаш бројот кој се дели со p ќе се дели и со p^3. Бидејќи p и q се прости броеви и $p>3, p>q$, следува дека $p\geq q+2$, а оттука следува дека $p^3>q^3+1$, па затоа

q^3+1 не се дели со p^3. Според тоа, q^6-q^3+1 се дели со p^3, а q^3+1 и p^3 се заемно прости, што значи дека q^3+1 е делител на $p^3-q^3=p^3+1-(q^3+1)$, т.е. q^3+1 е делител на p^3+1. Нека $q^6-q^3+1=kp^3$, за некој природен број k. Тогаш

$$k(p^3+1)=q^6-q^3+1+k=(q^3+1)(q^3-2)+3+k$$

од каде следува дека q^3+1 е делител на $k+3$, па затоа $k\geq q\quad -2$. Но, од $p^6-q^9>0$ имаме $p^6>q^8$, па затоа $p^3>q^4$, што значи дека

$$q^6-q^3+1=kp^3>(q^3-2)q^4,$$

што не е можно за $q\geq 2$ бидејќи

$$\begin{aligned} q^7-2q^4&=qq^6-2q^4>2q^6-2q^4=q^6+q^6-2q^4 \\ &=q^6+q^2q^4-2q^4\geq q^6+4q^4-2q^4>q^6 \end{aligned}.$$

Според тоа, единствени решенија на задачата се $p=3, q=2$.

58. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^3-q^5=(p+q)^2.$$

Решение. Ако $p\equiv q\equiv 1 \pmod 3$, тогаш

$$p^3-q^5\equiv 1^3-1^5\equiv 0 \pmod 3 \text{ и } (p+q)^2\equiv(1+1)^2\equiv 1 \pmod 3,$$

што значи дека за вакви прости броеви равенката не може да биде задоволена.

Ако $p\equiv q\equiv 2 \pmod 3$, тогаш

$$p^3-q^5\equiv 2^3-2^5\equiv 0 \pmod 3 \text{ и } (p+q)^2\equiv(2+2)^2\equiv 1 \pmod 3,$$

што значи дека за вакви прости броеви равенката не може да биде задоволена.

Ако $p\equiv 1 \pmod 3$ и $q\equiv 2 \pmod 3$, тогаш

$$p^3-q^5\equiv 1^3-2^5\equiv 2 \pmod 3 \text{ и } (p+q)^2\equiv(1+2)^2\equiv 0 \pmod 3,$$

што значи дека за вакви прости броеви равенката не може да биде задоволена.

Ако $p\equiv 2 \pmod 3$ и $q\equiv 1 \pmod 3$, тогаш

$$p^3-q^5\equiv 2^3-1^5\equiv 1 \pmod 3 \text{ и } (p+q)^2\equiv(2+1)^2\equiv 0 \pmod 3,$$

што значи дека за вакви прости броеви равенката не може да биде задоволена.

Останува да ги разгледаме случаите кога еден од броевите p или q е еднаков на 3.

Ако $p=3$, тогаш $3^3-q^5=(3+q)^2>0$, т.е. $q^5<27$. Но, $q^5\geq 2^5=32$, па затоа во овој случај равенката нема решение.

Ако $q=3$, тогаш $p^3-243=(p+3)^2$, т.е. $(p-7)(p^2+6p+36)=0$. Бидејќи $p^2+6p+36=(p+3)^2+27>27$ во множеството прости броеви решение на последната равенка е $p=7$.

Конечно, единствено решение на дадената равенка е $p=7,q=3$.

59. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$r(p-q)=5q-p$.

Од последната равенка следува $p\neq q$ и

$$r=\frac{4q}{p-q}-1. \qquad (1)$$

Бидејќи r е природен број, заклучуваме дека $p-q\,|\,4q$. Но, q е прост број, па затоа $p-q=q,2q$ или $4q$, тогаш $p=2q,3q$ или $5q$, што противречи на фактот дека p и q се прости броеви. Оддеелно ќе ги разгледаме останатите случаи.

Ако $p-q=1$, тогаш $p=3,q=2$ и (1) следува $r=7$.

Ако $p-q=2$, тогаш $p=q+2$ и $r=2q-1$. Ако $q\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $p=q+2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа бидејќи p е прост број добиваме $p=3$. Но, тогаш $q=1$, па затоа овој случај отпаѓа. Ако $q\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $r=2q-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа $r=3$. Но, тогаш $q=2$ и $p=4$, па затоа и овој случај отпаѓа. Ако $q=3$, тогаш $p=r=5$ и ова е уште едно решение на задачата.

Ако $p-q=4$, тогаш $p=q+4$ и $r=q-1$. Од $r=q-1$ следува $r=2$ и $q=3$, па затоа $p=7$.

Конечно, решени на дадената равенка е

$$(p,q,r)\in\{(3,2,7),(5,3,5),(7,3,2)\}.$$

60. Определи го најмалиот прост број p за кој равенката

$$p(31x^2-x+24)=6y^3$$

нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Ако $p=2$, равенката има облик $31x^2-x=3(y^3-8)$ и очигледно решение е $x=0,\ y=2$.

Ако $p=3$, равенката има облик $31x^2-x+24=2y^3$. За $x=1$ добиваме $2y^3=54$, од каде добиваме $y=3$.

За $p=5$ равенката има облик $5\cdot(31x^2-x+24)=6y^3$, што значи дека треба $5\,|\,y$. За $y=5$ добиваме $31x^2-x=2\cdot 63$, т.е. $(x+2)(31x-63)=0$, од каде наоѓаме $x=-2$. Значи, $x=-2,\ y=5$ е решение на равенката.

Нека $p=7$. За да равенката има решение потребно е $7\,|\,y$, т.е. треба да е $y=7t,\ t\in\mathbb{Z}$. Сега равенката го добива обликот $31x^2-x+24=6\cdot 49t^3$, што значи дека треба $31x^2-x+24$ да се дели со 49. Но, $31x^2-x+24=31(x+1)^2-7(9x+1)$ и за да $7\,|\,31x^2-x+24$ потребно е $7\,|\,x+1$. Но, тогаш $49\,|\,31(x+1)^2$, што значи дека за да $49\,|\,31x^2-x+24$, треба $49\,|\,7(9x+1)$, т.е. $9x+1$ да се дели со 7. Не е можно истовремено $x+1$ и $9x+1$ да се делат со 7, бидејќи $9(x+1)-(9x+1)=8$, Според тоа, за $p=7$ дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

61. Докажи, дека равенката $m^2=n^5-4$ нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Од условот следува дека n е природен број и $n\geq 2$, т.е. доволно е да бараме решенија во множеството рприодни броеви. Лесно се проверува дека можните остатоци на квадрат на еден природен број при делење со 11 се 0, 1, 3, 4, 5 и 9, т.е. $m^2\equiv 0,1,3,4,5,9 (\mathrm{mod}\,11)$. Аналогно $n^5\equiv 0,1,10(\mathrm{mod}\,11)$, па затоа $n^5-4\equiv 6,7,8(\mathrm{mod}\,11)$. Од горните конгруенции следува дека $m^2\not\equiv n^5-4(\mathrm{mod}\,11)$, што значи дека дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

62. Определи ги сите природни броеви $x,\ y$ и n, за кои е точно равенството

$$x^2+8xy+2x+12y^2-3=p^n,$$

каде p е прост број.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} x^2+8xy+2x+12y^2-3 &= x^2+2x(4y+1)+12y^2-3 \\ &= (x+4y+1)^2-(4y+1)^2+12y^2-3 \\ &= (x+4y+1)^2-4(y^2+2y+1) \\ &= (x+6y+3)(x+2y-1), \end{aligned}$$

и даденото равенство го добива видот $(x+6y+3)(x+2y-1)=p^n$. Бидејќи x и y се природни броеви важи $x+6y+3>1$ и $x+2y-1>1$, што значи дека и двата броја $x+6y+3$ и $x+2y-1$ треба да се степени на бројот p. Од друга страна

$$x+6y+3-(x+2y-1)=4y+4>0, \text{ т.е. } x+6y+3>x+2y-1,$$

па затоа $x+2y-1$ треба да е делител на $x+6y+3$ (и двата броја се степени на p). Заклучуваме, дека е исполнето неравенството $x+6y+3\geq p(x+2y-1)$. За $p\geq 5$ имаме

$$x+6y+3\geq p(x+2y-1)\geq 5(x+2y-1),$$

па затоа $4(x-1)+4(y-1)\leq 0$. Последното е можно само ако $x=y=1$. Во исто време случајот $x=y=1$ не води до решение на задачата, бидејќи тогаш даденото равенство прима вид $20=p^n$, што не е можно. Така $p<5$, т.е. $p=3$ или $p=2$. Освен тоа

$$x+6y+3<5(x+2y-1).$$

За $p=3$ имаме $x+6y+3=3(x+2y-1)$, т.е. $x=3$. Сега даденото равенство прима вид $12(y+1)^2=p^n$, што не е можно, бидејќи левата страна се дели на простите броеви 2 и 3. Нека $p=2$. Тогаш $x+6y+3=2(x+2y-1)$ или $x+6y+3=4(x+2y-1)$. Во првиот случај добиваме $x=2y+5$ и даденото равенство прима вид $32(y+1)^2=2^n$. Оттука е јасно, дека $y+1=2^k$ за некој природен број k. Тогаш $2^5\cdot 2^{2k}=2^n$, т.е. $n=2k+5$. Така ги добиваме решенијата $x=2^{k+1}+3$, $y=2^k-1$, $p=2$ и $n=2k+5$, каде k е произволен природен број. Во вториот случај $x+6y+3=4(x+2y-1)$ имаме $3x+2y=7$ и како x и y са природни броеви добиваме дека $x=1$ и $y=2$. Ако замениме во даденото равенство добиваме $2^n=64$ и го наоѓаме решението $x=1$, $y=2$, $p=2$ и $n=6$, кое е различно од веќе најдените решенија.

63. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{x^2+y^2}{z!}=\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $y \geq x$. Ако $x=y$, тогаш $x^2 x!=z!$, па затоа $z \geq x$. Последната равенка нема решенија за $z \geq x+2$, бидејќи левата страна е помала од десната, а во случаите $z=x$ и $z=x+1$ лесно се добива решението $x=y=z=1$.

Нека $y>x$, што значи $y \geq 2$. Ако равенката ја помножиме со $y!$ добиваме

$$\frac{y!(x^2+y^2)}{z!}=1+y(y-1)...(x+1). \qquad (1)$$

Ако $y>z$, тогаш левата страна на (1) е делива со y, па затоа $y|1$, што е противречност. Според тоа, $y \leq z$.

Случај 1. За $y=z$ имаме $x^2+y^2=1+y(y-1)...(x+1)$. Ако $y \geq x+3$, тогаш $y \geq 4$ и

$$(y-3)^2+y^2 \geq x^2+y^2 \geq 1+y(y-1)(y-2),$$

па затоа $y^3-5y^2+8y-8 \leq 0$, т.е. $y^2(y-5)+8(y-1) \leq 0$. Лесно се гледа дека последното не важи за $y \geq 5$, а $y=4$ не дава решение. Значи, $x+1 \leq y \leq x+2$. Така ги добиваме равенките $2x^2+x-1=0$ и $2(x^2+2x+2)=1+(x+1)(x+2)$, кои очигледно немаат решенија во множеството природни броеви.

Случај 2. За $y<z$ имаме $\frac{x^2+y^2}{z(z-1)...(y+1)}=1+y(y-1)...(x+1)$. Јасно, ако $y \geq x+3$, тогаш горните оценки се уште посилни, што значи дека повторно имаме $x+1 \leq y \leq x+2$. Ако $y=x+2 \geq 3$, добиваме $z \geq 4$ и значи

$$\frac{x^2+(x+2)^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2}{z(z-1)...(y+1)}=1+(x+1)(x+2).$$

Оттука $2x^2+4x+4 \geq 4x^2+12x+12$, што не е можно. Останува да го разгледаме случајот $y=x+1$, при што $\frac{x^2+(x+1)^2}{z(z-1)...(x+2)}=x+2$. Ако во именителот на дропката на последната равенка има два множители, тогаш таа е помала или еднаква на $\frac{2x^2+2x+1}{x^2+5x+6}<2$. Значи, $z=x+2$ и $2x^2+2x+1=(x+2)^2$, од каде наоѓаме $x=3$. Сега $y=4$ и $z=5$. Конечно, решенија на почетната равенка се $(x,y,z)=(1,1,1),(3,4,5)$ и $(4,3,5)$.

64. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x+y^2+(\mathrm{NZD}(x,y))^2=xy\cdot\mathrm{NZD}(x,y). \quad (1)$$

Решение. Нека $z=\mathrm{NZD}(x,y)$, каде $x=az$, $y=bz$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Заменуваме во равенката (1) и ја добиваме равенката

$$a+b^2z+z=abz^2. \quad (2)$$

Десната страна на равенка (2) е делива со z и два од собирците од левата страна се деливи со z, па затоа $z\,|\,a$. Според тоа, постои природен број c таков што $a=cz$. Заменуваме во равенката и ја добиваме равенката $cz+b^2z+z=cbz^3$, т.е. равенката $c+b^2+1=cbz^2$, која е еквивалентна со равенката

$$b^2+1=c(bz^2-1). \quad (3)$$

Јасно, $bz^2\neq1$, бидејќи во спротивно од (2) следува $b^2+1=0$, што не е можно. Значи, $c=\frac{b^2+1}{bz^2-1}$ и ако последната равенка ја помножиме со z^2 добиваме

$$cz^2=\frac{b^2z^2+z^2}{bz^2-1}=b+\frac{b+z^2}{bz^2-1}.$$

Бидејќи cz^2 е природен број, од последната равенка следува дека и $\frac{b+z^2}{bz^2-1}$ е природен број. Според тоа, $bz^2-1\leq b+z^2$, односно

$$(z^2-1)(b-1)\leq2 \quad (4)$$

Ако $b=1$, тогаш $c=\frac{2}{z^2-1}$ од каде следува дека $z^2=2$ или $z^2=3$, што не е можно. Ако $b=2$, тогаш $c=\frac{5}{2z^2-1}$. Ако $2z^2-1=1$, тогаш $z=1$, од каде наоѓаме $c=5$, $a=5$, односно $x=5$ и $y=2$. Ако $2z^2-1=5$, тогаш $z^2=3$, што не е можно. Ако $b=3$, тогаш $c=\frac{10}{3z^2-1}$. Случаите

$$3z^2-1=1,\ 3z^2-1=5 \text{ и } 3z^2-1=10$$

не се можни. Ако $3z^2-1=2$, тогаш $z=1$. Следува дека $c=5$, $a=5$, односно $x=5$ и $y=3$. Ако $b>3$, тогаш од (4) следува $z=1$. Во случајов

$$c=\frac{b^2+1}{b-1}=b+1+\frac{2}{b-1},$$

од каде добиваме $b=2$ или $b=3$, што противречи на $b>3$.
Конечно, решенија на дадената равенка се $(x,y)=\{(5,2),(5,3)\}$.

65. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$(p+q)^p=(q-p)^{2q-1}. \qquad (1)$$

Решение. Случајот $q-p=1$ не е можен, бидејќи $(q+p)^p>1$, за секои прости броеви p и q.

Нека r е прост делител на $q-p$, тогаш r е делител и на $q+p$, па затоа тој е делител броевите

$2q=(q+p)+(q-p)$ и $2p=(q+p)-(q-p)$.

Според тоа, $p=q=r$ или $r=2$. Случајот $p=q$ не е можен, бидејќи тогаш десната страна на (1) ќе биде еднаква на 0, а левата ќе биде број поголем од 0. Значи, мора да важи $q-p=2^k$ и $q+p=2^l$ за некои позитивни цели броеви k и l. Од

$$q=\frac{(q+p)+(q-p)}{2}=2^{l-1}+2^{k-1},$$

следува дека за $k>1$, ќе важи $2\,|\,q$, што е можно само за $q=2$. Тогаш

$$(q-p)^{2q-1}<0<(p+q)^p,$$

па затоа $k=1$. Тоа значи дека $q-p=2$. Од друга страна добиваме

$$lp=2q-1=2p+3,$$

па затоа $3\,|\,p$, т.е. $p=3$ и $q=5$. Лесно се проверува дека овие броеви ја задоволуваат равенката (1).

66. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^4+1=6^z.$$

Решение. Очигледно е дека $z\ge 0$. Ако $z\ge 2$, тогаш

$$x^2+y^4+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

односно

$$x^2+y^4\equiv 3(\mathrm{mod}\,4),$$

што не е можно бидејќи остатоци на квадрати на цели броеви при делење со 4 се 0 или 1. Според тоа $0 \le z < 2$.

Ако $z = 0$, тогаш $x = y = 0$.

Ако $z = 1$, тогаш $x^2 + y^4 = 5$, односно

$$(x, y) = \{(2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)\}.$$

Значи,

$$(x, y, z) = \{(0,0,0), (2,1,1), (-2,1,1), (2,-1,1), (-2,-1,1)\}$$

се решенијата на дадената равенка.

67. Во множеството цели ненегативни броеви реши ја равенката

$$7^x - 2 \cdot 5^y = -1.$$

Решение. За $y \le 3$ ги добиваме решенијата (0,0) и (2,2). Нека $y > 3$. Разгледувајќи ги остатоците по модул 4 заклучуваме дека x е парен, а разгледувајќи ги остатоците по моул 3 заклучуваме дека y е парен. Значи, $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ x_1, y_1 \in \mathbb{N},\ y_1 > 1$. Од таблицата на остатоците

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$49^n \pmod{125}$	49	26	24	51	–1	–49	–26	–24	–51	1

заклучуваме дека мора да важи $x_1 = 10x_2 + 5,\ x_2 \in \mathbb{N}$.

Сега равенката го добива видот

$$49^{10x_2+5} + 1 = 2 \cdot 25^{y_1}, \text{ т.е. } (49^5)^{2x_2+1} + 1 = 2 \cdot 25^{y_1},$$

од каде следува дека бројот $49^5 + 1 = (49+1)(49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1)$ мора да е делител на бројот $2 \cdot 25^{y_1}$. Значи, $49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1$ треба да е степен на бројот 25, што не е точно, бидејќи

$$49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1 \equiv (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Значи, единствени решенија на дадената равенка се (0,0) и (2,2).

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3^x - 5^y = z^2.$$

Решение. Прво да забележиме дека $2 \mid z$, па затоа

$$4 \mid z^2 = 3^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 \pmod 4,$$

од каде следува дека x е парен број, т.е. $x = 2k$. Сега равенката го добива видот

$$(3^k - z)(3^k + z) = 5^y,$$

па затоа $3^k - z = 5^n$ и $3^k + z = 5^{y-n}$, за некој цел број $n \ge 0$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $5^n + 5^{y-n} = 2 \cdot 3^k$ и бидејќи $2 \cdot 3^k$ не е делив со 5, следува дека $n = 0$, односно

$$1 + 5^y = 2 \cdot 3^k.$$

Нека претпоставиме дека $k \ge 2$. Тогаш $9 \mid 5^y + 1$, од каде следува $y \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 6)$. Но, тогаш $2 \cdot 3^k = 5^y + 1 \equiv 5^3 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$, што не е можно. Според тоа, $k \le 1$, од каде следува дека единствено решение на дадената равенка е $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

69. Во множеството природни броеви решија равенката $n^3 - 3^m = 2015$.

Решение. Имаме $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Понатаму, од $3^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 13)$ следува $3^{3k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 13)$, $3^{3k+1} \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 13)$ и $3^{3k+2} \equiv 9 (\mathrm{mod}\, 13)$. Од овие можности остаток за n^3 при делење со 13 е само 1, па затоа $m = 3k$. Тогаш

$$5 \cdot 13 \cdot 31 = n^3 - (3^k)^3 = (n - 3^k)(n^2 + 3^k n + 3^{2k}).$$

Од друга страна,

$$(n - 3^k)^2 < n^2 + 3^k n + 3^{2k},$$

па затоа треба да ги провериме само случаите

$$n - 3^k = 1,\ n^2 + 3^k n + 3^{2k} = 2015 \text{ и } n - 3^k = 5, n^2 + 3^k n + 3^{2k} = 403.$$

Ако го изразиме n преку 3^k и замениме, добиваме квадратни равенки по n. Лесно се добива дека решение имаме само во вториот случај: $n = 14, k = 2$, што значи дека дадената равенка има единствено решение $n = 14, m = 6$.

70. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3 - 5x + 28 = 2^y (2^y + 1).$$

Решение. Да разгледаме деливост со 7. Левата страна на равенката може да дава остатоци 0, 2, 3, 4 и 5, а десната 2 и 6. Според тоа, и двете страни даваат остаток 2 при делење со 7, а тоа е можно само ако y е делив со 3. Нека $y = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ и равенката да ја запишеме во видот

$$x^3 - 4^{3k} = 2^{3k} + 5x - 28 \text{, т.е. } (x - 4^k)(x^2 + 4^k x + 4^{2k}) = 2^{3k} + 5x - 28.$$

Ако $x < 4^k$, левата страна на последната равенка е негативна, па затоа

$0 > 2^{3k} + 5x - 28 \geq 5x - 20$, од каде следува $x < 4$. Со непосредна проверка се покажува дека за $x = 1, 2, 3$ равенката нема решенија.

Ако $x > 4^k$, тогаш

$$x^3 - 4^{3k} \geq x^2 + 4^k x + 4^{2k} \geq x^2 + 4x + 2^{4k} > 5x + 2^{3k} > 2^{3k} + 5x - 28,$$

што значи дека и во овој случај задачата нема решение.

Останува случајот $x = 4^k$, при што ја добиваме равенката $2^{3k} + 5 \cdot 4^k = 28$, чие единствено решение е $k = 1$. Според тоа, $x = 4, y = 3$ е единствено решение на дадената равенка.

Забелешка. Ако се бара равенката (1) да се реши во множеството $\mathbb{Z}$, тогаш прво треба да забележиме дека за $x \leq -4$ левата страна на равенката е негативна, а десната е позитивна. Понатаму, со непосредна проверка се докажува дека случаите $x = -3, -2, -1$ и 0 не водат до решение. Исто така, случајот $y = 0$ не води до решение, а ако $y < 0$, тогаш левата страна на равенката е цел, а десната страна не е цел број. Според тоа, x и y се природни броеви и сега постапуваме како при решавањето на дадената равенка во множеството природни броеви.

71. За природните броеви M и n е познато дека бројот M е делив со сите природни броеви од 1 до n, но не е делив со $n+1, n+2$ и $n+3$. Определи ги сите можни вредности на n.

Решение. Ќе докажеме дека дека $n+1, n+2$ и $n+3$ се степени (евентуално први) на прости броеви. Нека претпоставимедека некој од овие броеви може да се претстави во облик ab, каде $a \geq 2, b \geq 2$ и $\text{NZD}(a,b) = 1$. Бидејќи ab не е делител на M заклучуваме дека a или b не е делител на M. Нека a не е делител на M. Тогаш од условот следува дека $ab - a \leq 2$, што не е можно.

Според тоа, $n+1, n+2$ и $n+3$ се степени на прости броеви. Понатаму, барем еден од нив е парен, па затоа е еднаков на 2^x. Еден од овие броеви е делив со 3, па затоа е еднаков на 3^y. Заради парноста важи $2^x = 3^y \pm 1$.

Случај 1. Нека $2^x = 3^y + 1$. Имаме $2^x \equiv 1 (\text{mod}\, 3)$ кога x е парен број и $2^x \equiv 2 (\text{mod}\, 3)$ кога x е непарен број. Значи, $x = 2z$ и $(2^z - 1)(2^z + 1) = 3^y$

Тогаш $2^z - 1$ и $2^z + 1$ се степени на бројот 3, што е можно само за

$z=1, 3^y=3, 2^x=4$, од каде следува $n=1$ или $n=2$. Последното е можно за $M=1$ или $M=2$, соодветно.

Случај 2. Нека $2^x=3^y-1$. За $x=1$ го добиваме едното од претходно најдените решенија за n, Сега нека $x\ge 2$. Имаме $3^y\equiv 1 (\bmod 4)$ ако y е парен и $3^y\equiv 3(\bmod 4)$ ако y е непарен. Според тоа, $y=2z$ и $2^x=(3^z-1)(3^z+1)$. Тогаш 3^z-1 и 3^z+1 се степени на 2, што е можно само за $z=1$, $3^y=9$, $2^x=8$, од каде добиваме $n=6$ или $n=7$. Одговорот $n=6$ е можен при $M=60$. За $n=7$ добиваме $n+3=10$, кој не е степен на прост број.

72. Определи ги сите природни броеви a,b,c такви што

$$a+b+c=15$$
$$(a-3)^2+(b-5)^2+(c-7)^2=540.$$

Решение. Воведуваме замени $a-3=x, b-5=y, c-7=z$ и добиваме $x+y+z=0$ и $x^3+y^3+z^3=540$. Ако го искористиме познатиот идентитет

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

тогаш од $x+y+z=0$ следува $x^3+y^3+z^3=3xyz=540$, т.е.

$$xyz=180 \text{ и } x+y+z=0.$$

Бидејќи $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, не може два од броевите x,y,z да се парни, бидејќи тогаш третиот ќе биде непарен, што противречи на условот $x+y+z=0$. Аналого се добива дека само еден од броевите x,y,z е делив со 3. Сега е јасно дека

$$(x,y,z)\in\{(-4,-5,9),(-5,-4,9),(9,-5,-4),(9,-4,-5),(-5,9,-4),(-4,9,-5)\},$$

од каде добиваме

$$(a,b,c)\in\{(-1,0,16),(-2,1,16),(12,0,3),(12,1,2),(-2,14,3),(-1,14,2)\}.$$

73. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2^x3^y+5^z=7^t. \qquad (1)$$

Решение. Од дадената равенка разгледувајќи по модул 3 добиваме $5^z\equiv 1 \pmod 3$, што значи дека $z=2c, c\in\mathbb{N}$. Понатаму, јасно е дека $t\ge 2$. Ако $t=2d+1,\ d\in\mathbb{N}$, тогаш равенката (1) го добива обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d .$$

Ако $x \geq 2$, тогаш разгледувајќи по модул 4 добиваме $1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, што е противречност. Ако $x = 1$, добиваме

$$2 \cdot 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$$

и разгледувајќи по модул 24 добиваме

$$2 \cdot 3^y + 1 \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 24),$$

од што следува дека $24 \mid 6(3^{y-1} - 1)$, т.е. $4 \mid (3^{y-1} - 1)$, што значи дека $y - 1$ е парен број. Тогаш $y = 2b + 1, b \in \mathbb{N}$ и добиваме дека

$$6 \cdot 9^b + 25^c = 7 \cdot 49^d .$$

Ако во последната равенка разгледуваме по модул 5 добиваме $(-1)^b \equiv 2(-1)^d (\mathrm{mod}\, 5)$, што не е можно за било кои $b, d \in \mathbb{N}$. Од досега изнесеното следува дека t е парен број, т.е. $t = 2d, d \in \mathbb{N}$.

Според тоа, равенката (1) можеме да ја запишеме во обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 49^d ,$$

односно

$$(7^d - 5^c)(7^d + 5^c) = 2^x 3^y .$$

Но, $\mathrm{NZD}(7^d - 5^c, 7^d + 5^c) = 2$ и $7^d + 5^c > 2$ следува дека се можни следниве три случаи:

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2^{x-1} \\ 7^d + 5^c = 2 \cdot 3^y \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \cdot 3^y \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} 3^y \end{cases} \tag{4}$$

Од системот (2) добиваме

$$7^d = 2^{x-2} + 3^y$$

и ако разгледаме по модул 3, добиваме $2^{x-2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, од што следува дека $x - 2$ е парен број, т.е. $x = 2a + 2$, $a \in \mathbb{N}_0$, каде $a > 0$, бидејќи за $a = 0$ од претходната равенка следува $7^d = 1 + 3^y$, што не е можно (непарен број еднаков на парен број). Според тоа,

$7^d - 5^c = 2\cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 4 добиваме $7^d \equiv 1(\bmod 4)$, па затоа $d = 2e, e \in \mathbb{N}$. Тоа значи дека

$$49^e - 5^c = 2\cdot 4^a,$$

па ако разгледаме по модул 8 добиваме $5^c \equiv 1(\bmod 8)$, од што следува дека $c = 2f,\ f \in \mathbb{N}$. Според тоа, $49^e - 25^f = 2\cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 3 добиваме $0 \equiv 2(\bmod 3)$, што е противречност. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Да го разгледаме системот (3). Од $2^{x-1} = 7^d + 5^c \ge 12$ следува $x \ge 5$. Тогаш

$$7^d + 5^c \equiv 0(\bmod 4),\ \text{т.е. } 3^d + 1 \equiv 0(\bmod 4),$$

па затоа d е непарен број. Но, $7^d = 5^c + 2\cdot 3^y \ge 11$, па затоа $d \ge 2$ и затоа $d = 2e+1,\ \ e \in \mathbb{N}$. Како и во претходниот случај од $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ разгледувајќи по модул е добиваме $x = 2a+2$ и како $x \ge 5$ добиваме $a \ge 2$. Според тоа, $7^d = 4^a + 3^y$, т.е. $7\cdot 49^e = 4^a + 3^y$ и ако разгледаме по модул 8 добиваме $7 \equiv 3^y\ (\bmod 8)$, бидејќи 3^y е конгруентен со 1 по модул 8 ако y е парен, односно со 3 ако y е непарен. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (3) нема решенија во множеството природни броеви.

Од системот (4) следува $7^d = 5^c + 2$, што значи дека цифрата на единиците на бројот 7^d е 1, што е можно само ако $d = 4k+1, k \in \mathbb{N}$. Ако $c \ge 2$, тогаш разгледувајќи го $7^{4k+1} = 5^c + 2$ по модул 25 добиваме $7 \equiv 2(\bmod 25)$, што не е можно. За $c = 1$ добиваме $d = 1$ и решение на задачата е $x = 3, y = 1, z = t = 2$.

74. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$2^a \cdot 3^b + 9 = c^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2^a \cdot 3^b = (c-3)(c+3). \tag{1}$$

Ако $b = 0$, тогаш лесно следува дека $a = 4$ и $c = 5$.

Ако $b > 0$, добиваме $3 \mid c^2$, т.е. $9 \mid c^2$. Значи, $9 \mid 2^a \cdot 3^b$, па затоа $b > 1$. Нека $c = 3y$. Заменуваме во (1) и добиваме $(y-1)(y+1) = 2^a \cdot 3^{b-2}$.

Ако $a=0$, тогаш лесно се добива дека $b=3$ и $c=6$. Ако $a\geq 1$, тогаш $y-1$ и $y+1$ се парни броеви, па затоа $4|2^a\cdot 3^{b-2}$, т.е. $a\geq 2$. Сега равенката го добива видот

$$\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y+1}{2}=2^{a-2}\cdot 3^{b-2}.$$

Бидејќи $\frac{y-1}{2}$ и $\frac{y+1}{2}$ се последователни броеви, тие се заемно прости, па затоа се степени на 2 и 3. Нека $m=a-2$ и $n=b-2$. Можни се два случаја.

Прв случај. Ако $\frac{y-1}{2}=2^m$ и $\frac{y+1}{2}=3^n$, тогаш $2^m-3^n=1$, па затоа $m>n$. Ако $n=0$, тогаш $m=1$ и $a=3,b=2$ и $c=9$. Ако $n>0$, тогаш разгледувајќи по модул 3 заклучуваме дека m е парен број. Нека $m=2t$. Тогаш $(2^t-1)(2^t+1)=3^n$, па како $(2^t+1)-(2^t-1)=2$ заклучуваме дека $2^t-1=1$ и $2^t+1=3^n$. Значи, $t=1,m=2,n=1$ и $a=4,b=3,c=21$.

Втор случај. Ако $\frac{y-1}{2}=3^n$ и $\frac{y+1}{2}=2^m$, тогаш $3^n-2^m=1$. Јасно, $m>0$. Ако $m=1$ добиваме $n=1$ и $a=3,b=3,c=15$. Ако $m>1$, тогаш разгледувајќи ја претходната равенка по модул 4 заклучуваме дека n е парен број. Нека $n=2t$, од каде наоѓаме $(3^t-1)(3^t+1)=2^m$. Бидејќи $(3^t+1)-(3^t-1)=2$, мора да важи $3^t-1=2$ и $3^t+1=2^{b-1}$, од каде следува $t=1,n=2,m=3$ и $a=5,b=4,c=51$.

Непосредно се проверува најдените тројки (a,b,c) навистина се решенија на дадената равенка.

75. Во множеството цели ненегативни броеви реши ја равенката

$$9^x-3^x=y^4+2y^3+y^2+2y.$$

Решение. За $x=0$ добиваме

$$0=y^4+2y^3+y^2+2y=y(y^3+2y^2+y+2)=y(y+2)(y^2+1),$$

од каде наоѓаме $y=0$ или $y=-2$. Значи, $x=y=0$ е едно решение.

Нека $x>0$. Воведуваме замена $3^x=t$ и ја добиваме равенката

$$t^2-t=y^4+2y^3+y^2+2y,$$

која е еквивалентна на равенката

$$(2t-1)^2=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1.$$

Ако искористиме дека

$$(2y^2+2y)^2<4y^4+8y^3+4y^2+8y+1\le(2y^2+2y+1)^2,$$

добиваме дека

$$(2y^2+2y)^2<(2t-1)^2\le(2y^2+2y+1)^2,$$

при што десното неравенство преминува во равенство ако и само ако $y^2=y$. Значи, $(2t-1)^2=(2y^2+2y+1)^2$, па затоа $y^2=y$. Според тоа, $y=0$ или $y=1$. За $y=0$ добиваме $(2t-1)^2=1$, т.е. $t=0$ или $t=1$, што не е можно бидејќи за $x>0$ важи $t=3^x\ge3$. Ако $y=1$, тогаш $(2t-1)^2=25$, па затоа $t=3$ или $t=-2$. Јасно, единствена можност е $t=3=3^x$, од каде следува $x=1$. Според тоа, второ решение е $x=y=1$.

76. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$7^a=4^b+5^c+6^d.$$

Решение. Нека $d>0$. Тогаш од

$$7^a\equiv1(\bmod 3),\ 4^b\equiv1(\bmod 3)\ \text{и}\ 6^d\equiv0(\bmod 3)$$

следува $5^c\equiv7^a-4^b-6^d\equiv0(\bmod 3)$, што не е можно. Според тоа, $d=0$ и треба да ја решиме равенката

$$7^a=4^b+5^c+1.$$

Ако $b>0$, тогаш десната страна на последната равенка е парен број, а левата страна е непарен број, што не е можно. Затоа $b=0$ и треба да ја решиме равенката

$$7^a=5^c+2.$$

Јасно, $c>0$, а ако $c\ge2$, тогаш $5^c+2\equiv2(\bmod 25)$, а додека

$$7^{4k}\equiv1(\bmod 25),\ 7^{4k+1}\equiv7(\bmod 25),$$

$$7^{4k+2}\equiv24(\bmod 25),\ 7^{4k+3}\equiv18(\bmod 25),$$

т.е. $7^a\not\equiv2(\bmod 25)$. Значи, $c=1$ и добиваме $7^a=7$, од каде наоѓаме $a=1$.

Конечно, решение на равенката е $a=c=1, b=d=0$.

77. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $x^{5-x}=(6-x)^{1-x}$.

Решение Непосредно се проверува дека меѓу броевите $1,2,3,4,5$ и 6 само 1 и 5 ја задоволуваат дадената равенка. Да претпоставиме дека некој природен број $x>6$ е решение на дадената равенка. Јасно, x е непарен број, т.е. $x=2k+1,\ k\geq 3$. Со замена во равенката имаме $(2k+1)^{4-2k}=(5-2k)^{-2k}$ или $(1+\frac{6}{2k-5})^{k-2}=(2k-5)^2$. Значи мора $\frac{6}{2k-5}$ да е цел број, односно мора да важи $2k-5\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$. Броевите ±2 и ±6 се парни, па затоа не даваат реение, за броевите -1 и -3 се добива $x=2k+1<7$. Остануваат уште $2k-5=1$ и $2k-5=3$, од каде добиваме $x=2k+1=7$ и $x=2k+1=9$. Со проверка се добива дека $x=9$ е решение, а $x=7$ не е решение. Значи решенијата се $x_1=1, x_2=5, x_3=9$.

78. Определи ги сите природни броеви n , за кои бројот 2^n+65 е точен квадрат на природен број.

Решение. Нека $2^n+65=t^2$, каде t е природен број кој не се дели со 5. Бидејќи непарните степени на 2 даваат остатоци 2 и 3 при делење со 5 и $2^n\equiv t^2\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,5)$, добиваме дека n е парен број. Според тоа,

$$65=t^2-2^n=(t-2^{\frac{n}{2}})(t+2^{\frac{n}{2}})$$

од каде добиваме

1) $t-2^{\frac{n}{2}}=1, t+2^{\frac{n}{2}}=65$, т.е. $n=10$,

2) $t-2^{\frac{n}{2}}=5, t+2^{\frac{n}{2}}=13$, т.е. $n=4$.

79. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x^y-2^z=1$.

Решение Нека (x,y,z) е решение на дадената равенка. Лесно се гледа дека не може да биде $y\leq 0$ и дека при $y=1$ секоја тројка

$$(2^z+1,1,z),\ z\in\{0,1,2,3\ldots\}$$

е решение на дадената равенка. Нека $y>1$. Тогаш важи $|x|>1,\ z>1$ и освен тоа x е непарен број. Притоа

$$(x-1)(x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x+1)=2^z. \qquad (1)$$

Но, $x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x+1$ е парен број, па затоа $y-1=2k+1$, каде k е ненегативен цел број. Сега (1) го добива обликот

$$(x-1)(x+1)(x^{y-2}+x^{y-4}+\ldots+x+1)=2^z.$$

Бројот $(x-1)(x+1)$ е степен на бројот 2 со природен експонент ако и само ако $x\in\{-3,3\}$. За $x=3$ добиваме $9^k+9^{k-1}+\ldots+1=2^{z-3}$, т.е.

$$2^z = 9^{k+1} - 1 = (3^{k+1} - 1)(3^{k+1} + 1),$$

односно $k = 0, y = 2, z = 3$, што значи решение е тројката $(3,2,3)$. За $x = -3$ го добиваме решението $(-3,2,3)$.

Конечно, решенијата на дадената равенка се

$$(3,2,3),\ (-3,2,3) \text{ и } (2^z + 1, 1, z),\ z \in \{0,1,2,3\ldots\}.$$

80. Најди ги сите цели броеви x, y, z такви, што $x^2(x^2 + y) = y^{z+1}$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(2x^2 + y)^2 = y^2 + 4y^{z+1}.$$

Лесно се проверува дека оваа равенка нема решение за $z \le -1$.

За $z = 0$ десната страна е еднаква на $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$, па истата може да биде квадрат на цел број само ако $y = 0$ или $y = -4$. Првата можност дава решение (0,0,0), а за втората можност нема целобројно решение x.

Нека $z \ge 1$. Дадената равенка ќе ја запишоме во облик

$$(2x^2 + y)^2 = y^2(1 + 4y^{z-1}).$$

Според тоа, $1 + 4y^{z-1}$ мора да е квадрат на цел број. Значи, $1 + 4y^{z-1}$ мора да е непарен, т.е. $1 + 4y^{z-1} = (2v+1)^2$, односно $y^{z-1} = v(v+1)$. Последното равенство е можно само ако $v = 0$ и за $z = 2$. За $v = 0$ имаме $x = 0, y = 0$, што значи сите тројки.

$$(0,0,z),\ z \ge 0 \qquad (1)$$

се решенија на равенката. За $z = 2$ добиваме $y = v(v+1)$. Со замена во равенката добиваме $x^2 = v^2(v+1)$, т.е. v мора да е од облик $v = t^2 - 1$, $t \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$. Со непосредна проверка добиваме дека сите тројки од облик

$$(t^3 - t, t^4 - t^2, 2),\ t \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}. \qquad (2)$$

се решенија на дадената равенка.

Значи, решенијата на равенката се дадени со (1) и (2).

81. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $2^x + 2^y + 2^z = 2336$.

Решение. Ако една подредена тројка природни броеви е решение на равенката, тогаш и секоја нејзина пермутација е исто така решение на равенката.

Нека x, y, z е решение на равенката во множеството $\mathbb{N}$. Ќе докажеме дека $x \neq y \neq z \neq x$. Нека $x = y$. Можни се следниве случаеви

1) $z = x$, 2) $z < x$, 3) $z = x+1$ или 4) $z > x+1$.

При тоа имаме

1) Ако $z = x$, тогаш $2^x + 2^y + 2^z = 3 \cdot 2^x$ е делив со 3, а 2336 не е делив со 3.
2) Нека $z < x$, т.е. $x = z + k$, за некој природен број k. Тогаш
$$2^x + 2^y + 2^z = 2^z(2 \cdot 2^k + 1) = 2336 = 2^5 \cdot 73,$$
но 73 не е од облик од $2 \cdot 2^k + 1$.
3) Ако $z = x+1$, тогаш 2336 е делив со 73 а $2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+2}$ не е делив со 73
4) Нека $z > x+1$, т.е. $z = x+1+k$, за $k \in \mathbb{N}$, тогаш
$$2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+1}(1+2^k)$$
не е делив со 2336 од исти причини како во 2).

Значи $z < y < z$, односно $y = x + p,\ z = y + s = x + p + s$. Добиваме
$$2^x + 2^y + 2^z = 2^x(1+2^p(1+2^s)) = 2^5(1+2^3(1+2^3)) = 2336,$$
односно $x = 5, y = 8$ и $z = 11$. Според тоа, сите решенија на равенката се пермутации на тројката $(5,8,11)$.

82. Во множеството на целите броеви реши ја равенката
$$2^a + 8b^2 - 3^c = 283.$$

Решение. Лесно се докажува дека $a, c \geq 0$. Бидејќи 3^c дава остаток 1 или 3 при делење со 8, заклучуваме дека $0 \leq a \leq 2$. Ако $a = 0$ или $a = 1$, тогаш соодветно се добива дека 2 е делител на 3^c или 8 е делител на $3^c + 1$, што е противречност. Нека $a = 2$, т.е. $8b^2 - 3^c = 279$. Случаите $c = 0,1$ не се можни, па затоа $c \geq 2$. Тогаш $3 | b$ и ако ставиме $b = 3d$ добиваме $8d^2 - 3^{c-2} = 31$. Ако $c \geq 3$, тогаш $3 | d^2 + 1$, што е противречност. Според тоа, $c = 2$ и $d = \pm 2$. Конечно, $a = 2, b = \pm 6$ и $c = 2$.

83. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката
$$3^y = 2^x + 5. \tag{1}$$

Решение. Јасно, равенката нема решение за кое $x = 1$ или $y = 1$.

Понатаму, $x=2, y=2$ е решение на дадената равенка. Ќе докажеме дека равенката нема други решенија.

Нека претпоставиме, дека $x>2, y>2$ е друго решение на равенката (1). Тогаш $2^x+5\equiv 5(\bmod 8)$. Ако y е парен број, т.е. $y=2k$, тогаш

$$3^y=3^{2k}=9^k\equiv 1(\bmod 8),$$

што значи дека ово случај не е можен. Ако y е непарен број, т.е. $y=2k+1$, тогаш

$$3^y=3^{2k+1}=3\cdot 9^k\equiv 3(\bmod 8),$$

па значи и овој случај не е можен.

Конечно, $x=2, y=2$ е единствено решение на равенката (1).

84. Во множество ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$5^x\cdot 7^y+4=3^z.$$

Решение. Нека (x,y,z) е решение на дадената равенка. Ако $x=0$, тогаш $7^y+4=3^z$. Но

$$7^y+4\equiv 1+1\equiv 2(\bmod 3), \text{ а } 3^z\equiv 0(\bmod 3).$$

Значи, $x>1$. Според тоа, $3^z=5^x\cdot 7^y+4\equiv 4(\bmod 5)$, што значи $z=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Сега дадената равенка можеме да ја запишиме во облик

$$5^x\cdot 7^y=(3^k-2)(3^k+2).$$

Последната равенка има единствено решение $x=1,\ y=0, z=2$.

85. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$3^{2a+1}b^2+1=2^c.$$

Решение. Да го разгледаме прво случајот $a\geq 0$. Јасно $c\geq 0$ при што $c=0$ повлекува $b=0$. Добиваме дека решенија се $(a,0,0)$ за произволен ненегативен цел број a. Од равенството

$$3^{2a+1}b^2+1=2^c$$

следува дека b е непарен цел број. Левата страна можеме да ја запишеме во следниов облик

$$3^{2a+1}b^2+1=(3^{2a+1}+1)b^2-(b-1)(b+1).$$

За десната страна од последниот израз да забележиме дека $(b-1)(b+1)$ е делив со 8, додека $(3^{2a+1}+1)b^2$ е делив со 4 но не и со 8. Затоа $2^c=4$, т.е. $c=2$. Но, тогаш $3^{2a+1}b^2=3$, па $a=0$ и $b=\pm 1$.

Да го разгледаме сега случајот $a<0$. Повторно $c\geq 0$ при што $c=0$ повлекува $b=0$ и тогаш a може да е произволен негативен цел број. Затоа да се ограничиме на случајот $c>0$. Дореши ја равенкатаволно е да го разгледаме случајот $b>0$. Ставајќи $d=-a$, диофантовата равенка од условот на задачата добива облик

$$(2^c-1)3^{2d-1}=b^2,$$

при што b, c и d се природни броеви. Значи b е делив со 3, од што следува дека c е парен број. Така $b=3^d x$, $c=2y$, за некои природни броеви x и y. Диофантовата равенка се сведува до облик

$$4^{y-1}+4^{y-2}+\cdots+1=x^2.$$

Ова повлекува $x=y=1$. Имено, за $y\geq 2$ би добиле дека $x^2\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$, што не е можно. Значи во овој случај единствените решенија се $(a,3^{-a},2)$, каде a е произволен негативен цел број.

Множеството M од сите решенија на диофантовата равенка од условот на задачата може да се опише на следниов начин:

$$M=\{(a,0,0)|\ a\in\mathbb{Z}\}\cup\{(a,\pm 3^{-a},2)|\,a\in\mathbb{Z}^-\cup\{0\}\}.$$

86. Да се најдат сите парови природни броеви (m,n) такви што

$$m^n-n^m=3.$$

Решение. На почеток да забележиме дека m и n се со различна парност. Ако m и n се со иста парност, тогаш m^n-n^m е парен број, па не може да има вредност 3.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. m е непарен а n е парен број.

Тогаш $m^n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, од каде добиваме

$$n^m=m^n-3\equiv 1-3=-2\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4). \qquad (*)$$

Од друга страна $n=2k$ и ако $m>1$, тогаш $n^m=(2k)^m=2^m k^m$ и

$$n^m-2=2^m k^m-2=2(2^{m-1}k^m-1)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ n),$$

што е спротивно на (*). Значи $m=1$, па според тоа $m^n=1-n^m\leq 0<3$. Во овој случај равенката нема решение.

Случај 2. m е парен а n е непарен.

Од претпоставката $m=2p$ и $n=2k+1$ каде k и p се природни броеви. Тогаш

$$n^m - 1 = (2k+1)^{2p} - 1 = [(2k+1)^2]^p - 1^p$$
$$= [(2k+1)^2 - 1][(2k+1)^{2(p-1)} + (2k+1)^{2(p-2)} + \ldots + (2k+1)^2 + 1]$$
$$= 4k(k+1)B$$

Значи, $n^m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 8)$ од каде што добиваме

$$m^n = 3 + n^m \equiv 3+1 \,(\mathrm{mod}\, 8) \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\, 8). \qquad (**)$$

Ќе покажеме дека $n=1$. Ако $n>2$, тогаш

$$m^n - 4 = (2p)^n - 4 = 2^n p^n - 4 = 4(2^{n-2} p^n - 1) \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 8).$$

Заради добиената спротивност со (**) $n \le 2$ и бидејќи n е непарен добиваме $n=1$.

Сега јасно е дека $m=4$ и единствено решение на равенката е $m=4, n=1$.

87. Нека m и n се заемно прости природни броеви. Докажи, дека равенката $x^m u^n + y^m v^n = z^m w^n$ има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Бидејќи m и n се заемно прости броеви, постојат природни броеви $1 \le k \le n$ и $1 \le l \le m$ такви, што $km - nl = 1$. Тогаш за секој $i \in \mathbb{N}$ броевите

$$x = y = 2^{ni}, u = v = 2^{mi}, z = 2^{ni+k}, w = 2^{mi-l},$$

даваат решенија на дадена равенка.

88. Определи ги сите природни броеви x, y, z такви што

$$x > y+1,\ y > z+1 \text{ и } \tfrac{1}{x+1} + \tfrac{2}{y+2} + \tfrac{3}{z+3} = 1.$$

Решение. Од неравенствата следува дека $x+1 > y+2 > z+3$. Сега од

$$1 = \tfrac{1}{x+1} + \tfrac{1}{y+2} + \tfrac{3}{z+3} < \tfrac{1}{z+3} + \tfrac{2}{z+3} + \tfrac{3}{z+3} = \tfrac{6}{z+3}$$

следува $z+3<6$, т.е. $z<3$. Значи $z=1$ или $z=2$. Нека $z=2$. Тогаш

$$\tfrac{1}{x+1} + \tfrac{2}{y+2} = \tfrac{2}{5},$$

па затоа $\frac{2}{5} < \frac{3}{y+2}$ т.е. $y+2<7,5$, односно $6 \le y+2 \le 7$ бидејќи $y+2 > z+3 = 5$. За $y+2=6$ имаме $y=4$, па е $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$ што значи $x=14, y=4$ и $z=2$. За $y+2=7$ имаме $y=5$, па е $\frac{1}{x+1} = \frac{4}{35}$ и оваа равенка нема решение по x во множеството на природните броеви. Нека $z=1$. Тогаш

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

и како $\frac{3}{y+2}>\frac{1}{4}$ добиваме $y+2<12$. Но, $y+2>z+3=4$, па затоа имаме $5\le y+2\le 11$ т.е. $3\le y\le 9$. Со непосредна проверка наоѓаме уште две решенија

$$x=35,\ y=7,\ z=1 \ \text{ и } \ x=19,\ y=8,\ z=1.$$

89. Докажи, дека равенката $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, $p\in\mathbb{N}$ има единствено решение во множеството $\mathbb{N}$ ако и само ако p е прост број.

Решение. Ако парот (x,y) е решение на равенката тогаш $\frac{1}{x}>\frac{1}{p}$, односно $x<p$. Значи, за $p=1$ равенката нема решение.
Нека $p>1$. Ако постои решение во $\mathbb{N}$, тогаш $x=p-k$, за $0<k<p$, од што следува $\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p}=\frac{1}{p}$, т.е. $y=\frac{p(p-k)}{k}$. За $k=1$ имаме $x=p-1$, $y=p(p-1)$. Ако p е прост број, тогаш за секој $1<k<p$ имаме $\mathrm{NZD}(p,k)=1$ и $\mathrm{NZD}(p-k,k)=1$. Според тоа, $y=\frac{p(p-k)}{k}\notin\mathbb{N}$, т.е. решението $x=p-1,\ \ y=p(p-1)$ е единствено.
Обратно, ако p не е прост број, т.е. $p=mn$, $m\ne 1\ne n$ и парот x_1,y_1 е решение на равенката, тогаш и парот $x_2=p-m,\ y_2=n(p-m)$ е решение на равенката.

90. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека ако равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{n}$ има решение по x и y во множеството $\mathbb{N}$, тогаш n има барем еден делител од облик $4k-1, k\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека n е непарен број и x,y е решение на дадената равенка. Тогаш $n=\frac{4xy}{x+y}$. Бидејќи n е непарен, добиваме $4\,|\,(x+y)$, т.е. x и y се со иста парност. Ако x и y се парни ставаме $x=2x_1, y=2y_1$ и добиваме $n=\frac{8x_1y_1}{x_1+y_1}$. Ако повторно x_1 и y_1 се парни броеви, го применуваме истото размислување итн. Во краен случај го добиваме претставувањето $n=\frac{2^m x_r y_r}{x_r+y_r}$, каде x_r и y_r се непарни, а $m\ge 2$. Нека p е прост број кој е делител на $x_r y_r$ и x_r+y_r. Тогаш

$p \mid x_r$ и $p \mid y_r$, па затоа $n = \frac{2^m px'y'}{x'+y'}$, каде $x_r = px', y_r = py'$. После евентуално неколкукратно повторување на оваа операција го добиваме претставувањето $n = \frac{2^m p_1 p_2 \dots p_s x_0 y_0}{x_0 + y_0}$, каде $p_i, i = 1, \dots, s$ се прости броеви, x_0, y_0 се непарни броеви, $m \geq 2$ и $\text{NZD}(x_0 y_0, x_0 + y_0) = 1$. Според тоа, добиваме

1) $x_0 y_0 \mid n$,

2) Бидејќи n е непарен природен број добиваме $2^m \mid (x_0 + y_0)$.

Бидејќи $m \geq 2$ од 2) следува дека $4 \mid (x_0 + y_0)$ и како x_0 и y_0 се непарни добиваме дека едниот од нив е од облик $4k - 1$, а другиот е од облик $4k + 1$. Од досега изнесеното и од 1) следува тврдењето на задачата.

91. За кои природни броеви m равенката

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m, \tag{1}$$

во множеството $\mathbb{Z}$ има има решение (x, y, z) такво што броевите x, y и z се по парови заемно прости.

Решение. Јасно, ако (x, y, z) е решение на равенката (1), тогаш $x, y, z \neq 0$. Понатаму, равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$x^2 z + y^2 z + z^2 y = mxyz, \tag{2}$$

каде $x, y, z \neq 0$ се по парови заемно прости броеви. Од (2) следува дека $y \mid x^2 z$. Понатаму, од $\text{NZD}(x, y) = \text{NZD}(z, y) = 1$ следува $\text{NZD}(x^2 z, y) = 1$, па затоа од $y \mid x^2 z$ добиваме $y = \pm 1$. Аналогно се добива $x = \pm 1, z = \pm 1$.

Ако броевите x, y и z имаат исти знаци, тогаш од (1) следува $m = 3$, а ако два од броевите x, y и z се позитивни и еден е негативен, тогаш од (1) следува $m = -1 \notin \mathbb{N}$.

Конечно, единствен природен број кој го задоволува условот на задачата е $m = 3$.

92. Докажи, дека равенката

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1 \tag{1}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}=3\cdot 1=3,$$

од што заклучуваме, дека равенката (1) нема решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Забелешка. Од решението на претходната задача следува дека и равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$. Понат $x^2y=y^2z=z^2x=n, n\in\mathbb{N}$ аму, бидејќи меѓу аритметичката и геометриската средина знак за равенство важи само ако собирците се еднакви, т.е. $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=1$, заклучуваме дека равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3,$$

во множеството $\mathbb{N}$ има бесконечно многу решенија $x=y=z=k, k\in\mathbb{N}$. Не знаеме дали равенката $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=4$, има решенија во множеството $\mathbb{N}$, но знаеме дека во множеството $\mathbb{N}$ едно решение на равенката $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=5$ е $x=1, y=2, z=4$, а за равенката $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=6$ такво решение е $x=2, y=12, \ z=9$.

93. Докажи, дека за $m=1$ и $m=3$ равенката

$$x^3+y^3+z^3=mxyz \tag{1}$$

нема решенија во множеството $\mathbb{N}$ и определи ги сите нејзини решенија за $m=3$.

Решение. Во множеството $\mathbb{N}$ равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$\frac{x^2y}{y^2z}+\frac{y^2z}{z^2x}+\frac{z^2x}{x^2y}=m. \tag{2}$$

Од претхпдната задача следува дека за $m=1$ и $m=2$ равенката (2) нема решение во множеството $\mathbb{N}$, па затоа и еквивалентната на неа равенка (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$. Понатаму, за $m=3$ равенката (2), т.е. равенката (1) има решенија за кои . Но, тогаш

$(x^2y)(y^2z)(z^2x)=n^3$, т.е. $xyz=n$ и како $x^2y=y^2z=z^2x=n$, од последните равенства следува $x=y=z$.

Од претходно изнесеното следува дека за $m=3$ сите решенија на равенката (1) се дадени со $x=y=z=k, k\in\mathbb{N}$.

94. Докажи, дека равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{z}{x} \tag{1}$$

нема решенија во множеството $\mathbb{N}$ ако и само ако равенката

$$u^3+v^3=w^3 \tag{2}$$

нема решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека претпоставиме дека равенката (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$. Ако равенката (2) има решение во множеството , т.е. ако постојат u,v,w такви што важи $u^3+v^3=w^3$, тогаш ставајќи $x=u^2v,\ y=v^2w,\ z=w^2u$ добиваме

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{u^2v}{v^2w}+\frac{v^2w}{w^2u}=\frac{u^3+v^3}{uvw}=\frac{w^3}{uvw}=\frac{w^2u}{u^2v}=\frac{z}{x},$$

што противречи на претпоставката.

Нека сега претпоставиме дека равенката (1) има решение во множеството $\mathbb{N}$, т.е. дека постојата x,y,z такви што $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$. Ако последното равенство го помножиме со xyz добиваме $x^2z+y^2x=z^2y$. Ставаме $a=x^2z, b=y^2x$ и добиваме $z^2y=a+b$ и $ab(a+b)=(xyz)^3$. Нека $d=\mathrm{NZD}(a,b)$ и $a=da_1$, $b=db_1$, $\mathrm{NZD}(a_1,b_1)=1$. Имаме,

$$a+b=d(a_1+b_1) \text{ и } ab(a+b)=a_1b_1(a_1+b_1)d^3,$$

па затоа $d^3\,|\,(xyz)^3$, т.е. $d\,|\,xyz$ и $xyz=dt, t\in\mathbb{N}$. Значи, $a_1b_1(a_1+b_1)=t^3$, а бидејќи a_1,b_1 и a_1+b_1 се по парови заемно прости добиваме $a_1=u^3, b_1=v^3$ и $a_1+b_1=w^3$, каде $u,v,w\in\mathbb{N}$. Според тоа, $u^3+v^3=a_1+b_1=w^3$, т.е. равенката (2) има решение. Од претходно изнесеното следува, дека ако равенката (2) нема решение, тогаш и равенката (1) нема решение.

Забелешка. Познато е дека равенката (2) нема решение во множеството , па од претходната задача следува дека и равенката (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

95. Докажи, дека равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=1 \tag{1}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$, но има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{t}\cdot\frac{t}{x}}=4\cdot 1=4\,,$$

од што заклучуваме, дека равенката (1) нема решенија во множеството $\mathbb{N}$.

За да докажеме дека равенката (1) има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{Z}$ доволно е да провериме дека броевите

$$x=-n^2,\ y=n^2(n^2-1),\ z=(n^2-1)^2,\ t=-n(n^2-1),\ n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$$

ја задоволуваат равенката (1).

Забелешка. Од решението на претходната задача следува дека и равенките

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m,\ m=1,2$$

немаат решение во множеството $\mathbb{N}$. Понатаму, бидејќи меѓу аритметичката и геометриската средина знак за равенство важи само ако собирците се еднакви, т.е. $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{t}=\frac{t}{x}=1$, заклучуваме дека равенката

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=4\,,$$

во множеството $\mathbb{N}$ има бесконечно многу решенија

$$x=y=z=t=k, k\in\mathbb{N}\,.$$

II.4 МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. Определи ги сите прости броеви p такви што $p\,|\,2^p+1$.

Решение. Ако p е прост број, тогаш од теоремата на Ферма следува $p\,|\,2^p-2$. Ако $p\,|\,2^p+1$, тогаш $p\,|\,3$, па затоа единствен прост број кој го задоволува условот на заадачата е $p=3$.

2. Најди го остатокот од делењето на бројот $(85^{74}+19^{99})^{16}$ со 13.

Решение. Бидејќи 13 е прост број и $13\nmid 85$ од теоремата на Ферма следува $85^{12}\equiv 1(\bmod 13)$, па затоа $85^{72}\equiv 1(\bmod 13)$. Од друга страна $85\equiv 7(\bmod 13)$ и $85^2\equiv 49\equiv -3(\bmod 13)$. Значи, $85^{74}\equiv -3(\bmod 13)$. Аналогно, $19^{12}\equiv 1(\bmod 13)$, па затоа $19^{96}\equiv 1(\bmod 13)$. Но,

$$19\equiv 6(\bmod 13),\ 19^2\equiv 36\equiv -3(\bmod 13) \text{ и } 19^3\equiv -3\cdot 6\equiv -5(\bmod 13),$$

од каде добиваме дека $19^{99}\equiv -5(\bmod 13)$. Од досега изнесеното следува

$$85^{74}+19^{99}\equiv -8\equiv 5(\bmod 13).$$

Но, $5^2\equiv -1(\bmod 13)$, па затоа $5^{16}\equiv 1(\bmod 13)$, т.е.

$$(85^{74}+19^{99})^{16}\equiv 1(\bmod 13).$$

3. Ако a е цел број таков што $\text{NZD}(a,35)=1$, тогаш бројот

$$A=(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$

се дели со 35. Докажи!

Решение. Бидејќи $5\nmid a$ и 5 е прост број од теоремата на Ферма следува $a^4\equiv 1(\bmod 5)$, т.е. $5\,|\,(a^4-1)$ и затоа $5\,|\,A$. Понатаму, имаме

$$\begin{aligned}A&=(a^4-1)(a^4+15a^2+1)=(a^4-1)(a^4+14a^2+a^2+1)\\&=14a^2(a^4-1)+(a^2-1)(a^2+1)(a^4+a^2+1)\\&=14a^2(a^4-1)+(a^6-1)(a^2+1)\end{aligned}$$

Бидејќи $7\nmid a$, повторно од теоремата на Ферма следува $a^6\equiv 1(\bmod 7)$ Така $7\,|\,(a^6-1)$ и $7\,|\,14$, па затоа $7\,|\,A$. Конечно, од $5\,|\,A$, $7\,|\,A$ и $\text{NZD}(5,7)=1$ следува $35\,|\,A$.

4. Ако a е цел број кој не се дели со 3, тогаш $a^{13}-a\equiv 0(\bmod 2^{13}-2)$. Докажи!

Решение. Имаме: $2^{13}-2=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$. Бидејќи множителите се заемно прости доволно е да докажеме дека се исполнети конгруенциите

$$a^3-a\equiv 0(\bmod m),\ \text{за } m=2,9,5,7 \text{ и } 13.$$

За $m=2,5,7$ и 13 точноста на последните конгруенции следува од теоремата на Ферма. Навистина, ако $m\,|\,a$, тогаш очигледно $a^{13}-a\equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$. Ако $\mathrm{NZD}(a,m)=1$, тогаш $a^{m-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, од каде степенувајќи со степен $\frac{12}{m-1}$ добиваме $a^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, па затоа $a^{13}\equiv a(\mathrm{mod}\, m)$. Останува да го разгледаме случајот $m=9$. Бидејќи a не се дели со 3, имаме $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$, т.е. $a^2=1+3k$, $k\in\mathbb{Z}$. Оттука, $a^6=1+9k+27k^2+27k^3\equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$, па затоа $a^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$, т.е. $a^{13}\equiv a(\mathrm{mod}\, 9)$.

5. Ако $11\nmid \mathrm{NZD}(m,n)$, тогаш броевите $m^5\pm 2n^5$ не се делат со 11. Докажи!

Решение. Од условот на задачата следува дека со бројот 11 се дели најмногу еден од броевите m и n. Нека претпоставиме дека

$$m^5\pm 2n^5\equiv 0(\mathrm{mod}\, 11).$$

Тогаш $m^5\equiv\mp 2n^5(\mathrm{mod}\, 11)$, па затоа $m^{10}\equiv 4n^{10}(\mathrm{mod}\, 11)$. Според тоа, ако 11 е делител на m или n, од последната конгруенција следува дека 11 е делител и на другиот број, што е противречност. Според тоа, $11\nmid m$ и $11\nmid n$. Но, тогаш од теоремата на Ферма следува

$$1\equiv m^{10}\equiv 4n^{10}\equiv 4(\mathrm{mod}\, 11),$$

што е противречност.

6. Докажи дека секој прост број p е делител на бесконечно многу броеви од видот 2^n-n.

Решение. Ако $p=2$, тогаш за $n=2k$ броевите од видот $2^{2k}-2k$ се деливи со $p=2$. Нека претпоставиме дека p е непарен прост број. Бидејќи $\mathrm{NZD}(2,p)=1$ според малата теорема на Ферма, добиваме дека $2^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)$. Тогаш за било кој природен број m важи $(2^{p-1})^m\equiv 1^m\ (\mathrm{mod}\ p)$, односно

$$2^{m(p-1)}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p). \qquad (1)$$

Нека m е природен број таков што $m\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ p)$. Тогаш

$$m(p-1)\equiv -1(p-1)=1\,(\mathrm{mod}\ p) \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека

$$2^{m(p-1)}-m(p-1)\equiv 0\ (\text{mod}\ p).$$

Броеви m кои го исполнуваат условот $m\equiv -1\,(\text{mod}\ p)$ има бесконечно многу. Бидејќи $m\equiv -1\,(\text{mod}\ p)$ добиваме дека $p\,|\,(m+1)$, односно дека $m=pk-1$ за некој природен број k. Обратно, секој број од видот $m=pk-1$ го исполнува условот $m\equiv -1\,(\text{mod}\ p)$.

Множеството $\{n=(pk-1)(p-1)\,|\ k\in\mathbb{N}\}$ е бесконечно множество на природни броеви за кои е исполнет условот $p\,|\,(2^n-n)$.

7. Докажи го или негирај го тврдењето: За секој природен број $n\geq 2$ остатокот при делењето на 2^{2^n} со 2^n-1 е степен на бројот 4.

Решение. Со r да го означиме остатокот од делењето на 2^n со n. Тогаш $2^n=nk+r$ за некој природен број k и $0\leq r<n$. Според тоа,

$$2^{2^n}=2^{nk+r}\equiv 2^r\,(\text{mod}\,2^n-1)$$

и $2^r<2^n-1$, што значи дека 2^r е остатокот од делењето на 2^{2^n} со 2^n-1. Ако r е парен број, тогаш 2^r е степен на бројот 4.

За да го оповргнеме тврдењето треба да најдеме n за кој соодветниот r е непарен. Јасно, ако n е парен, тогаш $r=2^n-kn$ исто така е парен број. Ако n е непарен прост број, тогаш од малата теорема на Ферма следува $2^n\equiv 2(\text{mod}\,n)$, т.е. $r\equiv 2^n\equiv 2(\text{mod}\,n)$. Бидејќи $r<n$ добиваме $r=2$.

Според тоа, треба да бараме контрапример кога n е непарен сложен број. За $n=25$ лесно се пресметува дека

$$2^{25}=2^{10}\cdot 2^5\equiv(-1)^2\cdot 2^5\equiv 2^5\equiv 7(\text{mod}\,25),$$

што значи дека 2^7 е остаток при делењето на $2^{2^{25}}$ со $2^{25}-1$.

8. Определи ги сите прости броеви p такви што

$$13\,|\,(2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5).$$

Решение. Ако $p=2$, тогаш $2^{2^2}+3^{2^2}+4^{2^2}-5=16+81+256-5=348$ и $13\nmid 348$.

Ако $p=3$, тогаш

$$2^{3^2}+3^{3^2}+4^{3^2}-5=512+27^3+512^2-5\equiv 5+1^3+5^2-5\equiv 0(\text{mod}\,6),$$

па значи $p=3$ е решение.

Ако $p>3$, тогаш $p=6k\pm1$, па затоа

$$p^2=36k^2\pm36k+1=12(3k^2\pm1)+1=12l+1,$$

за некои $k,l\in\mathbb{N}$. Од малата теорема на Ферма следува

$$2^{12}\equiv3^{12}\equiv4^{12}\equiv1(\text{mod}13),$$

од што следува

$$2^{12l}\equiv3^{12l}\equiv4^{12l}\equiv1(\text{mod}13),\text{ за } l\in\mathbb{N}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5&=2^{12l+1}+3^{12l+1}+4^{12l+1}-5\\&=2\cdot2^{12l}+3\cdot3^{12l}+4\cdot4^{12l}-5\\&\equiv2+3+4-5\equiv4(\text{mod}13)\end{aligned}$$

па затоа во овој случај нема решение.

Конечно, единствено решение е $p=3$.

9. Нека $x,y\in\mathbb{Z}$. Докажи, дека $\frac{4x^2+1}{y^2+2}\notin\mathbb{Z}$.

Решение. Ако $\frac{4x^2+1}{y^2+2}\in\mathbb{Z}$, тогаш y е непарен број, т.е. $y=2k+1$.

Според тоа,

$$y^2+2=4k(k+1)+3=4\cdot2l+3,\ l\in\mathbb{N}_0.$$

Понатаму, производ на два броја од видот $4u+1$ е број од истиот вид, па затоа прост број p од видот $4n+3, n\in\mathbb{N}_0$ кој е делител на y^2+2.

Но, $\frac{4x^2+1}{y^2+2}\in\mathbb{Z}$, па заклучуваме дека p е делител на $4x^2+1$.

Последното не е можно, бидејќи тогаш ќе важи

$$4x^2\equiv-1(\text{mod }p),$$

односно

$$(4x^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{2n+1}\equiv-1(\text{mod }p),$$

што е противречност, бидејќи според малата теорема на Ферма имаме

$$(4x^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(2x)^{p-1}\equiv1(\text{mod }p).$$

10. Докажи, дека бројот $2^n+3^n+5^n+6^n$ не е точен куб за ниту еден природен број n.

Решение. Од малата теорема на Ферма следува

$$2^6 \equiv 3^6 \equiv 5^6 \equiv 6^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) .$$

Оттука добиваме

Ако $n = 6k$, тогаш $2^n + 3^n + 5^n + 6^n \equiv 1 + 1 + 1 + 1 = 4(\mathrm{mod}\, 7)$.

Ако $n = 6k + 1$, тогаш $2^n + 3^n + 5^n + 6^n \equiv 2 + 3 + 5 + 6 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 7)$.

Ако $n = 6k + 2$, тогаш $2^n + 3^n + 5^n + 6^n \equiv 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 7)$.

Ако $n = 6k + 3$, тогаш $2^n + 3^n + 5^n + 6^n \equiv 2^3 + 3^3 + 5^3 + 6^3 \equiv 5(\mathrm{mod}\, 7)$.

Ако $n = 6k + 4$, тогаш $2^n + 3^n + 5^n + 6^n \equiv 2^4 + 3^4 + 5^4 + 6^4 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 7)$.

Ако $n = 6k + 5$, тогаш $2^n + 3^n + 5^n + 6^n \equiv 2^5 + 3^5 + 5^5 + 6^5 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 7)$.

Според тоа, бројот $2^n + 3^n + 5^n + 6^n$ при делење со 7 може да дава само остатоци 2, 4 или 5. Од друга страна

$$(7k)^3 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7) ,$$

$$(7k+1)^3 \equiv (7k+2)^3 \equiv (7k+4)^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 7) ,$$

$$(7k+3)^3 \equiv (7k+5)^3 \equiv (7k+6)^3 \equiv 6(\mathrm{mod}\, 7) ,$$

т.е. точен куб на природен број при делење со 7 дава остатоци 0, 1 или 6. Сега тврдењето на задачата следува од факто дека 0, 1 и 6 се разликуваат по модул 7 од 2, 4 и 5,

11. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се подели на две дисјунктни подмножества такви што производите на елементите во двете подмножества се еднакви.

Решение. Меѓу шест последователни броеви најмногу еден може да биде делив со 7. Ако некој од броевите $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ е делив со 7, тогаш поделбата на множеството на две дисјунктни подмножества со еднакви производи не е можна, бидејќи еден од производите ќе биде делив со 7, а другиот не. Според тоа, меѓу разгледуваните броеви нема делив со 7 и $n = 7k + 1$, за некој ненегативе цел број k .

Нека претпоставиме дека бараната поделба е можна и нека x е производот на броевите во секое од подмножествата. Тогаш

$$\begin{aligned} x^2 &= (7k+1)(7k+2)(7k+3)(7k+4)(7k+5)(7k+6) \\ &= 7M + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 6(\mathrm{mod}\, 7), \end{aligned}$$

од каде следува дека $x^6 \equiv 6^6 \equiv 6 \pmod 7$. Но, $\mathrm{NZD}(x,7)=1$ и 7 е прост број, па од малата теорема на Ферма следува дека $x^6 \equiv 1 \pmod 7$. Од последните две конгруенции добиваме дека $1 \equiv x^6 \equiv 6 \pmod 7$, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека не постои природен број n за кој е можна бараната поделба на множеството $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$.

12. Определи ги сите различни прости броеви p, q и r такви што

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26. \tag{1}$$

Решение. Прво да забележиме дека ако простите броеви q и r се различни од 3, тогаш $q^2 \equiv r^2 \equiv 1 \pmod 3$, па левата страна на (1) е конгруентна со 0 по модул 3, што не е можно бидејќи 26 не се дели со 3. Значи, $q=3$ или $r=3$.

Прв случај. Нека $q=3$. Тогаш од (1) следува

$$3p^4 - 4r^2 = 431. \tag{2}$$

Ако $p \neq 5$, од малата теорема на Ферма следува $p^4 \equiv 1 \pmod 5$, што значи $3-4r^2 \equiv 1 \pmod 5$, односно $r^2 + 2 \equiv 0 \pmod 5$. Последнта конгруенција не е можна, бидејќи остатоците при делење со 5 на квадратите на природните броеви припаѓаат на множеството $\{0,1,4\}$. Затоа, $p=5$ и $r=19$.

Втор случај. Нека $r=3$. Тогаш од (1) следува

$$3p^4 - 5q^4 = 62. \tag{3}$$

Ако $p \neq 5$, повторно $p^4 \equiv 1 \pmod 5$ и тогаш $5q^4 \equiv 1 \pmod 5$, што не е можно.

Конечно, единствени прости броеви за кои важи (1) се $p=5$, $q=3$, $r=19$.

13. Нека n е непарен природен број поголем од 1. Докажи, дека бројот $3^n + 1$ не е делив со n.

Решение. Нека претпоставиме дека постои непарен природен број n поголем од 1 таков што $n \mid 3^n + 1$. Нека p е најмалиот прост делител на бројот n. Тогаш $p \mid 3^n + 1$, т.е.

$$3^n \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p),$$

па затоа

$$3^{2n} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p).$$

Од малата теорема на Ферма следува

$$3^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p).$$

Сега, од последните две конгруенции заклучуваме дека

$$3^{\mathrm{NZD}(2n,p-1)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p). \qquad (1)$$

Бидејќи n е непарен добиваме дека $p-1$ е парен број, а според претпоставката бројот p е најмалиот прост делител на бројот n, па затоа $\mathrm{NZD}(n, p-1) = 1$. Тоа значи, дека $\mathrm{NZD}(2n, p-1) = 2$. Сега од (1) следува дека $3^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $p \mid 8$, што не е можно, бидејќи p е непарен природен број. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

14. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (a,b,c) такви што бројот

$$N = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$$

е степен на бројот 2016.

Решение. Нека a,b,c се цели броеви и n е ненегативен цел број такви што

$$(a-b)(b-c)(c-a) + 4 = 2 \cdot 2016^n.$$

Воведуваме смена $a-b=-x, b-c=-y$, со што горната равенка го добива видот

$$xy(x+y) + 4 = 2 \cdot 2016^n. \qquad (1)$$

Ако $n>0$, тогаш десната страна на (1) е делива со 7, па затоа последователно се добива

$$xy(x+y) + 4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$$
$$3xy(x+y) \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$$

т.е.

$$(x+y)^3 - x^3 - y^3 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \qquad (2)$$

Од малата теорема на Ферма следува дека за секој це број k важи $k^3 \equiv -1, 0, 1 (\mathrm{mod}\, 7)$. Последното значи дека во (2) некој од собирците

$(x+y)^3, x^3, y^3$ е делив со 7, што значи дека некој од броевите $x+y$, x, y е делив со 7, што е противречност.

Според тоа, $n=0$ и со замена во (1), ја добиваме равенката $xy(x+y)+4=2$, т.е. равенката $xy(x+y)=-2$. Во множеството цели броеви решенија на последната равенка се $(x,y)\in\{(-1,-1),(2,-1),(-1,2)\}$, што значи дека решенија на почетната равенка се

$$(a,b,c)=(k+2,k+1,k),\ k\in\mathbb{Z}$$

и сите нивни циклични пермутации.

15. Определи го најмалиот природен број n за кој равенката

$$2x^2+2xy+5y^2=2015n$$

има решение во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+2y)^2+(x-y)^2=31\cdot 65n. \qquad (1)$$

Левата страна на (1) е делива со простиот 31, за кој важи $31\equiv 3 \pmod 4$. Понатаму, од малата теорема на Ферма следува дека $31\,|\,x+2y$ и $31\,|\,x-y$. Последното значи дека $31\,|\,3y$ и како $\mathrm{NZD}(31,3)=1$ добиваме $31\,|\,y$, па затоа $31\,|\,x$. Според тоа, $x=31a,\ y=31b$, па ако замениме во (1) добиваме дека и двете страни на равенката се деливи со 31. Според тоа, $n=31m$, од каде ја добиваме равенката

$$(a-2b)^2+(a-b)^2=65m. \qquad (2)$$

Бидејќи

$$65=7^2+4^2=8^2+1^2$$

и тоа се единствените претставувања на бројот 65 како збир на два квадрати на природни броеви, добиваме дека најмалиот природен број за кој равенката (2) има решение е $m=1$. Понатаму, ако ги земеме предвид знаците и фактот дека $a-2b-(a-b)=-3b$ е делив со 3, ги добиваме следните решенија на равенката (2):

$a-2b$	7	–7	4	–4	8	–8	1	–1
$a-b$	4	–4	7	–7	–1	1	–8	8
a	5	–5	6	–6	2	–2	–5	5
b	1	–1	–1	1	3	–3	3	–3

Конечно, $n=31$ и решенијата се

$$(x,y)\in\{(155,31),(-155,-31),(186,-31),(-186,31),$$
$$(62,93),(-62,-93),(-155,93),(155,-93)\}.$$

16. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$x^y - y^x = xy^2 - 19 \ .$$

Решение. Од малата теорема на Ферма следува $x^y \equiv x(\bmod y)$, па од дадената равенка добиваме $x\equiv -19(\bmod y)$, т.е. $y\,|\,x+19$. Слично, со сведување по модул x добиваме $x\,|\,y-19$. Бидејќи равенката нема решение за $x=y$, од овде следува дека $xy\,|\,x-y+19$. Притоа $x-y+19=0$ не е можно, бидејќи тогаш x мора да биде парен, т.е. $x=2$, но тогаш $y=21$ не е прост број. Значи,

$$xy \le |x-y+19| < x+y+19 \text{, т.е. } (x-1)(y-1)<20 \ .$$

Останува да испитаме неколку случаи: 1) $x=2, y\le 19$; 2) $x=3, y\le 7$; 3) $y=3, 5\le x\le 7$ или 4) $y=2, 5\le x\le 19$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $(2,3)$ и $(2,7)$ се единствени решенија на дадената равенка.

17. Нека p е прост број. Докажи, дека $7p+3^p-4$ не е точен квадрат.

Решение. За $p=2$ имаме $7\cdot 2+3^2-4=19$ и тоа не е точен квадрат. За $p=3$ имаме $7\cdot 3+3^3-4=44$ и тоа не е точен квадрат.

Нека претпоставиме дека за некој прост број $p>3$ бројот $7p+3^p-4$ е точен квадрат, т.е. $7p+3^p-4=n^2$.

Ако p е прост број од видот $4k+1$, тогаш

$$n^2 = 7p+3^p-4 = 7(4k+1)+3^{4k+1}-4 \equiv 3\cdot 1+3-4 \equiv 2(\bmod 4)\ ,$$

што не е можно, бидејќи за секој природен број x важи $x^2\equiv 0$ или $1(\bmod 4)$.

Ако p е прост број од видот $4k+3$ и $p>3$, тогаш $\mathrm{NZD}(p,3)=1$ и од малата теорема на Ферма следува $3^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$. Затоа

$$n^2 = 7p+3^p-4 \equiv 0+3\cdot 3^{p-1}-4 \equiv 3-4 \equiv -1(\bmod p)\ .$$

Ако ја степенуваме оваа конгруенција на $2k+1$ добиваме

$$(n^2)^{2k+1} = n^{4k+2} \equiv -1(\bmod p)\ .$$

Јасно, $p \nmid n$, бидејќи во спротивно ќе важи $p \mid 3^p - 4$, т.е. $p \mid (3-4) = -1$, што не е можно. Значи, $\text{NZD}(p,n) = 1$, па од малата теорема на Ферма следува дека

$$n^{p-1} = n^{4k+2} \equiv 1 (\text{mod}\, p).$$

Сега од последните две конгруенции следува $2 \equiv 0 (\text{mod}\, p)$, што е противречност.

Конечно, бидејќи сите прости броеви поголеми од 3 се или од видот $4k+1$ или од видот $4k+3$, од претходните разгледувања следува тврдењето на задачата.

18. Докажи, дека равенката

$$x^{2006} - 4y^{2006} - 2006 = 4y^{2007} + 2007y$$

нема решенија во множеството природни броеви.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$x^{2006} + 1 = 4y^{2007} + 4y^{2006} + 2007y + 2007$$

$$x^{2006} + 1 = 4y^{2006}(y+1) = 2007(y+1)$$

$$x^{2006} + 1 = (4y^{2006} + 2007)(y+1).$$

Понатаму, производ на два броја од видот $4k+1$ е број од истиот вид, па од $4y^{2006} + 2007 \equiv 3 (\text{mod}\, 4)$ следува дека бројот $4y^{2006} + 2007$ има прост делител од видот $4k+3$. Значи, $4k+3 \mid x^{2006} + 1$, па затоа $x^{2006} \equiv -1 (\text{mod}\, 4k+3)$, од што следува

$$(x^{2006})^{2k+1} \equiv -1 (\text{mod}\, 4k+3).$$

Од друга страна, бидејќи за простиот број $4k+3$ и бројот x^{1003} важи $\text{NZD}(x^{1003}, 4k+3) = 1$, од малата теорема на Ферма следува

$$(x^{2006})^{2k+1} = (x^{1003})^{4k+2} \equiv 1 (\text{mod}\, 4k+3).$$

Сега, од последните две конгруенции добиваме $2 \equiv 0 (\text{mod}\, 4k+3)$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека почетната равека нема решение во множеството природни броеви.

19. Нека се $p_1 < p_2 < \ldots < p_{31}$ прости броеви. Докажи, дека ако

$$30 \mid (p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{31}^4),$$

тогаш меѓу овие броеви има барем три последователни прости броеви.

Решение. Ако $p_1, p_2, ..., p_{31}$ се непарни, тогаш $p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{31}^4$ е непарен број и не може да биде делив со 30. Затоа $p_1 = 2$.

Ако ниту еден од броевите $p_1, p_2, ..., p_{31}$ не е делив со 3, тогаш $p_i^4 \equiv 1 (\mod 3)$, па затоа

$$p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{31}^4 \equiv 1 (\mod 3),$$

што значи дека $p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{31}^4$ не може да биде делив со 30. Затоа $p_2 = 3$.

Ако ниту еден од броевите $p_1, p_2, ..., p_{31}$ не е делив со 5, тогаш од малата теорема на Ферма следува $p_i^4 \equiv 1 (\mod 5)$, па затоа

$$p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{31}^4 \equiv 1 (\mod 5),$$

што значи дека $p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{31}^4$ не може да биде делив со 30. Затоа $p_2 = 5$.

Конечно, броевите 2, 3 и 5 се три последователни прости броеви, со што тврдењето е докажано.

20. Определи ги сите прости броеви p за кои $p \mid (7^p + 13)$.

Решение. Од условот имаме $7^p \equiv -13 (\mod p)$. Но, $7^p \equiv 7 (\mod p)$, па затоа $-13 \equiv 7^p \equiv 7 (\mod p)$, т.е. $p \mid 20$. Според тоа, можни решенија се $p = 2$ или $p = 5$. Овие два броја се навистина решенија на задачата бидејќи

$$7^2 + 13 \equiv 1 + 1 (\mod 2) \text{ и } 7^5 + 13 \equiv 2^5 + 3 = 35 \equiv 0 (\mod 5).$$

21. Нека p е прост број и $p = 4k + 3, k \in \mathbf{N}$. Ако m и n се цели броеви такви што $m^2 + n^2$ се дели со p, тогаш m и n се делат со p. Докажи!

Решение. Јасно, ако еден од броевите m и n се дели со p, тогаш бидејќи $p \mid (m^2 + n^2)$ добиваме дека и другиот се дели со p. Нека m и n се заемно прости со p. Имаме, $m^2 + n^2 \equiv 0 (\mod p)$, односно $m^2 \equiv -n^2 (\mod p)$. Ако двете страни на последната конгруенција ги степенуваме на $\frac{p-1}{2} = 2k + 1$, добиваме $m^{p-1} \equiv -n^{p-1} (\mod p)$. Но, $m^{p-1} \equiv n^{p-1} \equiv 1 (\mod p)$, па затоа $1 \equiv -1 (\mod p)$, т.е. $p = 2$, што е противречност. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

22. Нека p е прост број и $p=4k+1, k\geq 1$ е природен број. Докажи, дека важи $k^{2k}\equiv 1(\text{mod } p)$.

Решение. Очигледно $\text{NZD}(k,p)=1$ и од теоремата на Ферма следува дека $k^{4k}=k^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$. Значи, $p\,|\,(k^{2k}+1)(k^{2k}-1)$ и доволно е да докажеме дека $p\nmid(k^{2k}+1)$, од што ќе следува дека $p\,|\,(k^{2k}-1)$.

Нека претпоставиме дека $p\,|\,(k^{2k}+1)$. Тогаш $k^{2k}\equiv -1\equiv 4k(\text{mod } p)$ и од $\text{NZD}(k,p)=1$ добиваме дека $k^{2k-1}\equiv 2^2(\text{mod } p)$. Ако двете страни на последната конгруенција ги степенуваме на степен $\frac{p-1}{2}=2k$ добиваме $k^{2k(2k-1)}\equiv 2^{p-1}(\text{mod } p)$. Но, од теоремата на Ферма имаме $2^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$, па затоа $k^{2k(2k-1)}\equiv 1(\text{mod } p)$. Конечно, од последната конгруенција и од $k^{2k}\equiv -1(\text{mod } p)$ добиваме $p=2$, што е противречност. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

23. Определи ги сите прости броеви p, за кои постои природен број n таков да p е делител на 2^n+1 и p е помал од сите прости делители на n.

Решение. Очигледно $p=2$ не е решение, па затоа p и 2 се заемно прости. Од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$. Нека d е најмалиот природен број, за кој $2^d\equiv 1(\text{mod } p)$. Тогаш $1<d\leq p-1$, од каде следува дека секој прост делител на d е помал или еднаков на $p-1$, додека сите прости делители на n се поголеми од p. Последното значи дека d и n се заемно прости. Од друга страна, од $2^n\equiv -1(\text{mod } p)$ следува дека $2^{2n}\equiv 1(\text{mod } p)$. Нека $2n=kd+r, k\in\mathbb{N}$, $0\leq r<d$. Ако $r\neq 0$, тогаш $2^{2n}\equiv 2^{kd+r}\equiv 2^r\equiv 1(\text{mod } p)$, што противречи на минималноста на d. Според тоа, $r=0$ и затоа $d\,|\,2n$. Но, d и n се заемно прости, па затоа $d\,|\,2$ и како $d>1$ добиваме $d=2$. Последното значи дека $p\,|\,2^2-1$, т.е. $p=3$. Бројот $p=3$ е навистина решение на задачата, бидејќи можеме да избереме $n=5$ и условите на задачата ќе бидат исполнети.

24. Докажи, дека за секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}}+19$ е сложен.

Решение. Од малата теорема на Ферма следува дека $2^{10}\equiv 1(\bmod 11)$, па затоа $2^{10n}\equiv 1(\bmod 11)$, што значи дека бројот $2^{10n+1}-2$ се дели со 22, т.е.

$$2^{10n+1}=22k+2,$$

за некој $k\in\mathbb{N}$. Оттука, повторно од теоремата на Ферма следува дека:

$$2^{2^{10n+1}}=2^2(2^{22})^k\equiv 4\cdot 1^k\equiv 4(\bmod 23),$$

па затоа $23\,|\,(2^{2^{10n+1}}+19)$. Конечно, бидејќи $2^{2^{10n+1}}+19>23$, за $n\geq 1$ добиваме дека секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}}+19$ е сложен.

25. Ако p е прост број, тогаш $7p+3^p-4$ не е точен квадрат. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека p е прост број поголем од 3 и

$$m=7p+3^p-4$$

е точен квадрат. Нека $m=n^2$ за некој $n\in\mathbb{N}$. Од малата теорема на Ферма следува

$$m=7p+3^p-4\equiv 3-4\equiv -1(\bmod p).$$

Ако $p=4k+3$, $k\in\mathbb{N}$ тогаш повторно од малата теорема на Ферма добиваме

$$-1\equiv m^{2k+1}\equiv n^{4k+2}=n^{p-1}\equiv 1(\bmod p),$$

што е противречност. Така $p\equiv 1(\bmod 4)$. Тогаш

$$m=7p+3^p-4\equiv 3-1\equiv 2(\bmod 4),$$

што е противречност бидејќи точен квадрат не е конгруентен со 2 по модул 4. За $p=2$ добиваме $m=19$, и за $p=3$ добиваме $m=44$, што значи дека и во двата случаја $m=7p+3^p-4$ не е точен квадрат.

26. Докажи, дека меѓу броевите $(2^{2n}+1)^2+2^2$, каде $n=1,2,...$ има бесконечно многу сложени броеви.

Решение. Такви се, на пример, броевите од дадената низа за кои $n=28k+1$, $k=1,2,3,\dots$. Од малата теорема на Ферма имаме $2^{28}\equiv 1(\bmod 29)$ па за $k=1,2,3,...$ важи $2^{2\cdot 28k}\equiv 1(\bmod 29)$. Значи, за $n=28k+1$ имаме

$$(2^{2n}+1)^2+2^2 \equiv 25+4 \equiv 0 (\bmod 29),$$

т.е $29 | (2^{2n}+1)^2+2^2$ при што бидејќи за секој природен број k важи $n=28k+1 \geq 29$, имаме $(2^{2n}+1)^2+2^2 > 29$. Оттука следува дека броевите $(2^{2n}+1)^2+2^2$, за $n=28k+1$, каде $k=1,2,3,\ldots$ се сложени.

27. Докажи, дека од $5 | (2a^3-3a^2b+2b^3)$ следува дека $5 | a$ и $5 | b$.

Решение. Ако $a \equiv 0 (\bmod 5)$, тогаш од $2a^3-3a^2b+2b^3 \equiv 0 (\bmod 5)$ следува $2b^3 \equiv 0 (\bmod 5)$. Но, $\mathrm{NZD}(2,5)=1$, па затоа $b^3 \equiv 0 (\bmod 5)$ и како 5 е прост број добиваме $b \equiv 0 (\bmod 5)$. Аналогно се докажува дека од $b \equiv 0 (\bmod 5)$ следува $a \equiv 0 (\bmod 5)$.

Нека претпоставиме дека $a \not\equiv 0 (\bmod 5)$ и $b \not\equiv 0 (\bmod 5)$. Имаме,

$$0 \equiv 2a^3-3a^2b+2b^3 \equiv 2a^3+2a^2b+2b^3 \equiv 2(a^3+a^2b+b^3) (\bmod 5)$$

па затоа

$$a^3+a^2b+b^3 \equiv 0 (\bmod 5), \tag{1}$$

од што следува

$$a^4+a^3b+ab^3 \equiv 0 (\bmod 5), \tag{2}$$

$$a^3b+a^2b^2+b^4 \equiv 0 (\bmod 5). \tag{3}$$

Од малата теорема на Ферма следува $a^4 \equiv 1 (\bmod 5)$ и $b^4 \equiv 1 (\bmod 5)$, па затоа од (2) и (3) следува $ab^3 \equiv a^2b^2 (\bmod 5)$ и како $a \not\equiv 0 (\bmod 5)$ и $b \not\equiv 0 (\bmod 5)$ од последната конгруенција добиваме $a \equiv b (\bmod 5)$. Заменуваме во (1) и добиваме $3a^3 \equiv 0 (\bmod 5)$ и како $\mathrm{NZD}(3,5)=1$ имаме $a^3 \equiv 0 (\bmod 5)$. Но, 5 е прост број па од последната конгруенција следува $a \equiv 0 (\bmod 5)$, што е противречност.

28. Да се определи петцифрен природен број n таков што збирот на неговите цифри е минимален и n^3-1 се дели со 2556.

Решение. Бидејќи $2556=2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$ имаме $n^3 \equiv 1 (\bmod 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71)$. Освен тоа, од малата теорема на Ферма следува $n^{70} \equiv 1 (\bmod 71)$, па затоа

$$1 \equiv n \cdot n^{69} \equiv n(n^3)^{23} \equiv n (\bmod 71) \ .$$

Според тоа, $71|n-1$. Од $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ и фактот дека $n^2+n+1=$ $n(n+1)+1$ е непарен број следува дека $4|n-1$. Сега, ако $3\nmid n-1$, тогаш $3|n(n+1)$, па затоа $3\nmid n(n+1)+1$, т.е. $3\nmid n^3-1$, што е противречност. Од досега изнесеното следува дека $n-1$ се дели со 3, 4 и 71, па затоа важи $n=3\cdot 4\cdot 71k+1=852k+1$. Ќе докажеме дека бараниот број со најмал збир на цифрите е бројот $n=852\cdot 25+1=21301$. Бидејќи последната цифра на $852k$ не може да биде 9, доволно е да најдеме петцифрен природен број од видот $852k$ со најмал збир на цифри. Бидејќи тој број се дели со 3, потребно е збирот на цифрите да е делив со 3. Освен тоа, последните две цифри треба да формираат број кој се дели со 4. Ако збирот на цифрите е 3, тогаш единствена можност е тој број да е од видот $\overline{abc20}$, каде $a+b+c=1$, од што следува $a=1, b=c=0$. Но, 10020 не се дели со 71. Сега, ако збирот на цифрите е еднаков на 6, тогаш лесно следува дека бараниот број е 21301.

29. Докажи, дека за секој природен број k постојат бесконечно многу природни броеви n, за кои броевите

$$2^n+3^n-1, 2^n+3^n-2,...,2^n+3^n-k$$

се сложени.

Решение. За даден природен број k избираме доволно голем природен број m, за кој $2^m+3^m-k>1$. Од секој од броевите

$$2^m+3^m-1, 2^m+3^m-2,...,2^m+3^m-k$$

избираме по еден прост делител $p_1, p_2,..., p_k$ и нека

$$n_t=m+t(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1),$$

каде t е прозволен природен број. За секој $i, 1\le i\le k$ ќе докажеме дека

$$2^{n_t}\equiv 2^m (\text{mod}\, p_i).$$

За $p_i=2$ конгруенцијата е очигледна, а за $p_i\ne 2$ од малата теорема на Ферма наоѓаме

$$2^{n_t}\equiv 2^m 2^{t(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)}\equiv 2^m\cdot 1=2^m (\text{mod}\, p_i).$$

Аналогно наоѓаме $3^{n_t}\equiv 3^m (\text{mod}\, p_i)$, па затоа

$$2^{n_t}+3^{n_t}-i\equiv 2^m+3^m-i (\text{mod}\, p_i),$$

при што важи

$$2^{n_t}+3^{n_t}-i>2^m+3^m-i\,.$$

Според тоа, $2^{n_t}+3^{n_t}-i$ е сложен број. Добивме, дека n_t е еден број за кој сите броеви

$$2^n+3^n-1,2^n+3^n-2,...,2^n+3^n-k$$

се сложени. Но, t е произволен природен број, па затоа постојат бесконечно многу такви броеви.

30. Докажи го или оповргни го следново тврдење: За секој природен број $n\ge 2$ остатокот при делењето на 2^{2^n} со 2^n-1 е степен на 4.

Решение. Тврдењето не е точно за $n=25$, при што може да се докаже дека тоа е најмалиот n за кој тврдењето не е точно. Со r да го означиме остатокот од делењето на 2^n со n. Тогаш $2^n=kn+r$ за некој природен број k и $0\le r<n$. Според тоа,

$$2^{2^n}=2^{kn+r}\equiv 2^r\,(\text{mod}\,2^n-1)\,,$$

и $2^r<2^n-1$, што значи дека 2^r е остатокот од делењето на 2^{2^n} со 2^n-1. Ако r е парен, тогаш 2^r е степен на 4. За да го оповргнеме тврдењето треба да најдеме n за кој соодветниот r е непарен. Ако n е парен, тогаш $r=2^n-kn$ исто така е парен. Ако n е непарен прост број, тогаш од теоремата на Ферма следува $2^n\equiv 2(\text{mod}\,n)$. Бидејќи $r<n$, добиваме $r=2$.

Според тоа, треба да бараме контрапример, кога n е непарен сложен број. За $n=25$ лесно пресметуваме

$$2^5=2^{10}2^5\equiv(-1)^2 2^5\equiv 2^5\equiv 7(\text{mod}\,25)\,,$$

што значи дека 2^7 е остатокот од делењето на $2^{2^{25}}$ со $2^{25}-1$.

31. Низата $a_1,a_2,...$ е определена со

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1,\quad (n=1,2,...)\,.$$

Определи ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

Решение. Ќе докажеме дека за секој прост број p постои m таков што $p\,|\,a_m$. За $p\in\{2,3\}$ имаме $p\,|\,a_2=48$. Од друга страна, ако $p>3$, тогаш од теоремата на Ферма следува дека

$$6a_{p-2}=3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6^{p-1}-6\equiv 3+2+1-6=0\,(\text{mod}\,p)\,,$$

т.е. $p \mid a_{p-2}$, со што доказот е завршен.

Според тоа, единствен природен број со саканото својство е бројот 1.

32. Докажи, дека равенката $x^2+5=y^3$ нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Нека (x_0, y_0) е решение на равенката, т.е. $x_0^2+5=y_0^3$. Ако y_0 е парен број, тогаш $x_0^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$ што не е можно. Според тоа y_0 е непарен и тогаш x_0 е парен број.

Нека $y_0 = 4k+3$. Тогаш $x_0^2 = y_0^2 - 5 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, што исто така не е можно.

Останува да го разгледаме случајот кога $y_0 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Равенството $x_0^2+5=\ y_0^3$ го запишуваме во облик $x_0^2+4=(y_0-1)(y_0^2+y_0+1)$. Според тоа, $y_0^2+y_0+1 \mid (\frac{x_0}{2})^2+1$. Освен тоа, бројот $y_0^2+y_0+1$ е од облик $4k+3$, па значи има прост делител p од облик $4i+3$. Бидејќи $p \mid (\frac{x_0}{2})^2+1$ добиваме $(\frac{x_0}{2})^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. Ако последната конгруенција ја степенуваме на степен $\frac{p-1}{2}$ добиваме $(\frac{x_0}{2})^{p-1} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. Од малата теорема на Ферма имаме $(\frac{x_0}{2})^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Од добиената противречност следува дека y_0 не е од облик $4k+1$.

Значи, равенката $x^2+5=y^3$ нема решение во множеството $\mathbb{Z}$.

33. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$x^y - y^x = xy^2 - 19 \ .$$

Решение. Од малата теорема на Ферма следува $x^y \equiv x (\mathrm{mod}\, y)$, па од дадената равенка добиваме $x \equiv -19 (\mathrm{mod}\, y)$, т.е. $y \mid x+19$. Слично, со сведување по модул x добиваме $x \mid y-19$. Бидејќи равенката нема решение за $x=y$, од овде следува дека $xy \mid x-y+19$. Притоа $x-y+19=0$ не е можно, бидејќи тогаш x мора да биде парен, т.е. $x=2$, но тогаш $y=21$ не е прост број. Значи,

$$xy \le |x-y+19| < x+y+19, \text{ т.е. } (x-1)(y-1) < 20 .$$

Останува да испитаме неколку случаи: 1) $x=2, y \le 19$; 2) $x=3, y \le 7$; 3) $y=3, 5 \le x \le 7$ или 4) $y=2, 5 \le x \le 19$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $(2,3)$ и $(2,7)$ се единствени решенија на дадената равенка.

II.5 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Множество од последователни природни броеви содржи точно 10 четврти степени и точно 100 кубови на природни броеви. Докажи, дека ова множество содржи барем 2000 точни квадрати на природни броеви.

Решение. Нека четвртите степени се $n^4,(n+1)^4,...,(n+9)^4$. Тогаш нашето множество ги содржи точните квадрати $(n^2)^2,(n^2+1)^2,$ $...,(n^2+18n+81)^2$, кои ги има точно $18n+82$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $18n+82 \geq 2000$, т.е. $n \geq 107$.

Кубовите во нашето множество се меѓу $(n-1)^{\frac{4}{3}}$ и $(n+10)^{\frac{4}{3}}$, па затоа важи

$$(n+10)^{\frac{4}{3}}-(n-1)^{\frac{4}{3}} \geq 99 .$$

Од друга страна ако го искористиме неравенството на Бернули добиваме

$$(n+10)^{\frac{4}{3}}-(n-1)^{\frac{4}{3}}=(n+10)^{\frac{4}{3}}(1-(\tfrac{n-1}{n+10})^{\frac{4}{3}})=(n+10)^{\frac{4}{3}}(1-\tfrac{11}{n+10})^{\frac{4}{3}})$$

$$\leq (n+10)^{\frac{4}{3}}(1-(1-\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{11}{n+10})=\frac{44(n+10)^{\frac{1}{3}}}{3}.$$

Според тоа, $\frac{44(n+10)^{\frac{1}{3}}}{3} \geq 99$, т.е. $n \geq (\frac{27}{4})^3-10>6^3-10=206$, со шт тврдењето е докажано.

2. Определи ги сите цифри a ($0 \leq a \leq 9$), за кои постои таков природен број n, што последните 2011 цифри на бројот 3^n-1 се еднакви на a.

Решение. Последната цифра на степените на бројот 3 е некоја од цифрите 1, 3, 7 или 9. Следствено a може да биде само некоја од цифрите 0, 2, 6 или 8. Бидејќи 3 и 10^{2011} се заемно прости, следува дека постои таков природен број k, што $3^k \equiv 1(\bmod\ 10^{2011})$ (на пример $k=\varphi(10^{2011})$, каде φ е функцијата на Ојлер). Но, тоа значи, дека последните 2011 цифри на 3^k-1 се нули, т.е. $a=0$ е решение на задачата.

При делење со 8 степените на бројот 3 даваат остатоци 3 или 1 и следствено броевите од видот 3^n-1 ќе даваат остатоци 2 или 0. Тоа значи, дека нема степен на 3, за кој бројот 3^n-1 завршува на повеќе од две двојки. Во спротивен случај би требало да постои n, за кој бројот $(3^n-1)-222$ се дели со 1000, а следствено и со 8. Во исто време 222 дава остаток 6 при делење со 8, додека 3^n-1 дава остаток 2 или 0 и следствено бројот $(3^n-1)-222$ не се дели со 8. Заклучуваме, дека $a=2$ не е решение на задачата.

Ќе докажеме, дека $a=6$ и $a=8$ се решенија. За таа цел да го разгледаме бројот 3^k-1 од случајот $a=0$, кој завршува на 2011 нули. Тогаш и бројот 3^k-1+10^{2011} исто така завршува на 2011 нули. За овој број имаме

$$3^k-1+10^{2011}=3^k+10^{2011}-1=3^k+\underbrace{99\ldots9}_{2011}=3(3^{k-1}+\underset{2011}{33\ldots3})\,.$$

Тоа значи, дека бројот $3^{k-1}+\underset{2011}{33\ldots3}$ завршува на 2011 нули. Оттука лесно следува, дека бројот $3^{k-1}-1$ завршува на 2011 шестки, што значи дека $a=6$ е решение е решение на задачата. Случајот $a=8$ се разгледува на ист начин, при шт користиме дека

$$3^k-1+10^{2011}=3^k+10^{2011}-1=3^k+\underbrace{99\ldots9}_{2011}=9(3^{k-2}+\underset{2011}{11\ldots1})\,.$$

Значи, бројот $3^{k-2}+\underset{2011}{11\ldots1}$ завршува на 2011 нули, од каде веднаш заклучуваме, дека бројот $3^{k-2}-1$ завршува на 2011 осумки.

Конечно, решенијата на задачата се $a=0,$ $a=6$ и $a=8$.

3. На таблата се запишани природните броеви од 1 до 10. Избираме два од запишаните броеви x и y, ги бришиме и на нивно место го запишуваме бројот $\varphi(x+y)$, каде φ е функцијата на Ојлер (т.е. $\varphi(k)$ е бројот на природните броеви, помали или еднакви на k, кои се заемно прости с k; на пример, ако p е прост број, тогаш $\varphi(p)=p-1$).

Опишаната операција ја реализираме, додека на таблата не остане еден број. Определи ја можната најмала вредност на последниот број.

Решение. Да забележиме, дека $\varphi(n)>1$ при $n\geq 3$. За да може последниот број, кој останува на таблата, да е еднаков на 1, треба последните два броја кои останале на таблата да се две единици. Но тоа не може да се случи, бидејќи секој пат при применување на операцијата збирот $x+y$ е барем 3. Еве како можеме да го добиеме бројот 2 како последен број: прво операцијата ја применуваме на паровите (5;7), (6;9) и (8;10), при што добиваме $\varphi(5+7)=4$, $\varphi(6+9)=8$ и $\varphi(8+10)=6$; после што на таблата се запишани броевите имаме 1, 2, 3, 4, 4, 6 и 8; потоа операцијата ја применуваме на $(4;6)\to 4$ и $(4;8)\to 4$, па на таблата остануваат броевите1, 2, 3, 4 и 4; сега од двете четворки добиваме една четворка, т. е. остануваат броевите 1, 2, 3 и 4; конечно после $(1;3)\to 2$ и $(2;4)\to 2$ доаѓаме до 2 и 2, од каде $(2;2)\to 2$.

4. За секој реален број x со $[x]$ го означуваме најголемиот цел број, кој е помал или еднаков на x. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот

$$[\frac{p^2+1}{2}]+[\frac{p^2+2}{3}]+[\frac{p^2+7}{8}]+[\frac{p^2+18}{24}]$$

е прост.

Решение. За $p=2$ имаме

$$[\frac{p^2+1}{2}]+[\frac{p^2+2}{3}]+[\frac{p^2+7}{8}]+[\frac{p^2+18}{24}]=[\frac{5}{2}]+[\frac{6}{3}]+[\frac{11}{8}]+[\frac{22}{24}]=2+2+1+0=5,$$

кој е прост број. Следствено $p=2$ е решение на задачата.

За $p=3$ имаме

$$[\frac{p^2+1}{2}]+[\frac{p^2+2}{3}]+[\frac{p^2+7}{8}]+[\frac{p^2+18}{24}]=[\frac{10}{2}]+[\frac{11}{3}]+[\frac{16}{8}]+[\frac{27}{24}]=5+3+2+1=11,$$

кој исто така е прост број. Следствено и $p=3$ е решение на задачата.

Нека $p\geq 5$ е просто број. Тогач $p^2-1=(p-1)(p+1)$, кој е производ на два последователни парни броја и следствено се дели со 8. Освен тоа разгледуваниот производ се дели и со 3, бидејќи еден од броевите $p-1$ или $p+1$ се дели со 3. Заклучуваме, дека p^2-1 се дели со 24 и следствено $p^2=24k+1$ (k е природен број). Оттук получаваме

$$[\frac{p^2+1}{2}]+[\frac{p^2+2}{3}]+[\frac{p^2+7}{8}]+[\frac{p^2+18}{24}]=[\frac{24k+2}{2}]+[\frac{24k+3}{3}]+[\frac{24k+8}{8}]+[\frac{24k+19}{24}]$$
$$=12k+1+8k+1+2k+1+k$$
$$=3(8k+1).$$

Добиениот број не може да е прост, бидејќи се дели со 3 и е поголем од 3. Така, $p=2$ и $p=3$ се единствените решенија на задачата.

5. На таблата се запишани n природни броеви. Може да се допишуваат само броеви од видот $\frac{a+b}{a-b}$, каде a и b се веќе запишани броеви. Определи го најмалиот природен број n така што додавајќи броеви на погоре опишаниот начин може да се добие било кој природен број. За вака определениот број n определи ги почетните броеви (испитај ги сите можности).

Решение. Бидејќи $a+b>a-b$, на опишаниот начин не можеме да го добиеме бројот 1. Значи, бројот 1 мора да биде запишан. Јасно, само со бројот 1 на опишаниот начин не може да се добијат сите природни броеви. Ќе докажеме дека е доволно да се запишани два броја.

Нека x е вториот број. $\frac{x+1}{x-1}$ е единствениот број кој може да се добие во првиот чекор. Бидејќи важи $\frac{x+1}{x-1}\geq 2$, добиваме дека $x\leq 3$. Според тоа, вториот број е 2 или 3. Ќе ги разгледаме двата случаја.

Прв случај. Нека на таблата се запишани броевите 1 и 2. Од $\frac{2+1}{2-1}=3$ следува дека можеме да го запишеме и бројот 3. Индуктивно ќе докажеме дека на опишаниот начин можеме да го запишеме секој природен број. Нека на таблата се запишани броевите $1,2,...,2k+1$. Тогаш, од

$$\frac{(k+2)+(k+1)}{(k+2)-(k+1)}=2k+3 \text{ и } \frac{(2k+3)+(2k+1)}{(2k+3)-(2k+1)}=2k+2$$

следува дека на опишаниот начин можеме да ги запишеме и броевите $2k+3$ и $2k+2$. Сега од прионципот на математичка индукција следува дека можеме да го запишеме секој природен број.

Втор случај. Нека на таблата се запишани броевите 1 и 3. Од $\frac{3+1}{3-1}=2$ следува дека можеме да го запишеме и бројот 2. Понатаму, разгледувањата се идентични како во првиот случај.

Според тоа, бараниот најмал природен број е $n=2$ и притоа двата запишани броеви се 1 и 2, или 1 и 3.

6. За еден природен број ќе велиме дека е *силен*, ако е делив со квадратот на секој свој прост делител (за бројот 1 ќе сметаме дека е силен). Бројот на силните делители на еден број ќе го нарекуваме *сила* на тој број. Колку последователни природни броеви најмногу можеме да избереме така што ниту еден од нив да нема сила која е делива со
а) 2, б) 3 и в) 2015?

Решение. Еден природен број е силен ако секој негов прост делител е барем на втор степен. Ако каноничното разложување на еден број е $p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$, тогаш неговата сила е еднаква на $s_1 s_2 ... s_k$, бидејќи за степенот на неговиот делител p_k има s_k можни избори $(0,2,..., s_k)$.

а) Ако избереме 8 последователни броеви, тогаш некој од нив ќе биде делив со 2^2, но нема да биде делив со 2^3, па така неговата сила ќе биде делива со 2. Постојат 7 последователни природни броеви, секој од кои има сила која не е делива со 2, на пример 29, 30, 31, 32, 33, 34 и 35.

б) Ако избереме 16 последователни броеви, некој од нив ќе биде делив со 2^3, но нема да биде делив со 2^4, па така неговата сила ќе биде делива со 3. Постојат 15 последователни природни броеви, секој од кои кои има сила која не е делива со 3, на пример 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 и 23.

в) Ако избереме $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5$ последователни броеви, тогаш меѓу нив има број m од видот $m = 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 A$, каде при делење со 30 бројот A дава остаток 1, 7, 13, 17, 23 или 29. Тогаш A не е делив со 2, 3 и 5, па така моќта на m е делива со $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.

Од друга страна интервалот $(31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5, 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5)$ содржи $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5 - 1$ последователни природни броеви. Нека претпоставиме дека меѓу нив постои природен број n чија сила е 2015. Бидејќи $11^5 > 37 \cdot 5^5$, бројот n не може да е од видот $2^{31} \cdot 3^{13} p^5$, каде p е прост број поголем од 7. Од друга страна,

$$5 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 < 31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \text{ и } 11 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 > 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5,$$

па затоа n не може да е делив со $2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$. Исто така, бидејќи $3^{18} > 2^{18} \cdot 37$, бројот n не може да е од видот $3^{31} \cdot 2^{13} \cdot p^5$, каде $p \geq 5$. Сите од останатите можности за добивање на сила 2015 доведуваат до многу поголеми броеви. Значи, можеме да избереме $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5 - 1$

броеви.

7. Докажи, дека сите сложени броеви помали или еднакви на 10^6 може да бидат наредени на кружница така што да нема соседни броеви кои се заемно прости.
Решение. Нека $2 = p_1 < p_2 < ... < p_n < 1000$ се сите прости броеви помали од 1000. Тогаш саканото подредување можеме да го направиме на следниов начин.
Ги запишуваме еден до друг сите сложени броеви помали или еднакви на 10^6 и кои се деливи со p_1 (т.е. сите парни броеви) почнувајќи од $p_1 p_n$ и завршувајќи со $p_1 p_2$. Продолжуваме со сите од преостанати броеви кои се деливи со p_2, завршувајќи со $p_2 p_3$, потоа со сите од преостанатите броеви кои се деливи со p_3, завршувајќи со $p_3 p_4$ итн. На крајот ги запишуваме преостанатите броеви кои се деливи со p_n.
Јасно, секои два соседни броеви во горното подредување имаат заеднички делител кој е меѓу броевите $p_1, p_2, ..., p_n$, т.е. не се заемно прости. Освен тоа, секој сложен број, помал или еднаков од 10^6 има прост делител кој е помал или еднаков на $\sqrt{10^6} = 1000$, т.е. во нашата постапка е запишан на некое место.

8. На почетокот на таблата се запишани 10 последователни природни броеви. Во еден чекор се произволно се избираат два броја (да ги означиме со a и b) и на нивно место се запишуваат броевите $a^2 - 2011b^2$ и ab. После неколку чекори на таблата не останал ниту еден од почетните броеви. Дали е можно новодобиените 10 броеви да се последователни 10 природни броеви (запишани во некаков редослед)?
Решение. Нека претпоставиме, дека после неколку чекори на таблата се запишани десет последователни природни броеви, при што секој од броевите учествувал во барем еден чекор. Ќе ја докажеме следнава лема.
Лема. За секој природен број k, после извршувањето на еден чекор, бројот на броевите, кои се делат со k не се намалува.
Доказ. Ако во операцијата учествувале броевите a и b, еден од кои се дели со k, тогаш и нивниот производ се дели со k. ОСвен тоа, ако и двата броја се делат со k, тогаш и бројот $a^2 - 2011b^2$ се дели со k. ■

Да забележиме, дека во почетната и крајната ситуација има по пет броеви кои се делат со 2 и по еден број, кој се дели со 10. Од лемата следува дека бројот на броевите, кои се делат со 2 (или со 10) не се менува при примената на чекорите.

Нека во почетните 10 броеви a е најмалиот број, кој завршува на 5. Да го разгледаме првиот чекор во кој учествува бројот a. Ако вториот број во овој чекор е b и тој е непарен, тогаш еден од добиените броеви е парен и бројот на парните броеви ќе се зголемува, што не е можно. Значи, b е парен и на таблата се појавува бројот ab кој се дели со 10. Ако притоа b не се дели со 10, тогаш бројот на броевите кои се делат со 10 ќе се зголемува, што не е можно.

Според тоа, бројот b се дели со 10, и тогаш и двата броја во тој чекор ќе се делат со 5. Новите два броја ќе се делат со 25 и според лемата во последните 10 броеви ќе има барем два броја кои се делат со 25. Последното не е можно за 10 последователни природни броеви.

9. Определи ги сите прости броеви p, за кои равенката

$$x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p.$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+y)(xy-p)=5p.$$

Можни се повеќе случаи.

Случај 1. Нека $x+y=1$ и $xy=6p$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-x+6p=0$ нема целобројни решенија.

Случај 2. Нека $x+y=5$ и $xy=2p$. За прости броеви $p\geq 2$ равенката $x^2-5x+2p=0$ има дискриминанта $\Delta=25-8p$. Од неравенството $25-8p\geq 0$ добиваме $p\in\{2,3\}$. За $p=2$ ги добиваме решенијата $(1,4)$ и $(4,1)$. За $p=3$ ги добиваме решенијата $(2,3)$ и $(3,2)$.

Случај 3. Нека $x+y=p$ и $xy=p+5$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-px+p+5=0$ има дискриминанта $\Delta=p^2-4p-20$. Од неравенството $p^2-4p-20\geq 0$ добиваме $p\geq 7$.

Нека $p^2-4p-20=q^2$, каде $1\leq q<p$. Тогаш ја добиваме равенката $(p-2)^2-q^2=24$ која е еквивалентна со равенката

$$(p+q-2)(p-q-2)=24.$$

Јасно е дека броевите $p+q-2$ и $p-q-2$ се парни. Притоа имаме два подслучаи:
а) $p+q-2=12$ и $p-q-2=2$. Непосредно се добива $p=9$ кој не е прост број.
б) $p+q-2=6$ и $p-q-2=4$. Непосредно се добива $p=7$ и $q=1$. Равенката има решенија $(3,4)$ и $(4,3)$.
Случај 4. Нека $x+y=5p$ и $xy=p+1$. Во овој случај не постои $p\in\mathbb{N}$ такво што за x,y се добиваат решенија што се природни броеви.
Конечно, равенката има решенија во множеството природни броеви само за $p\in\{2,3,7\}$.

10. Определи ги сите броеви p, q и r, такви што p и r се прости броеви, q е природен број и важи
$$(p+q+r)^2=2p^2+2q^2+r^2.$$
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$2r(p+q)=(p-q)^2. \tag{1}$$
Бројот r е прост, па затоа r е делител на $p-q$, што значи дека r^2 е делител на десната страна на равенката (1). Тоа значи дека r е делител на $2(p+q)$. Ако $r>2$, тогаш r е делител на $p+q$, па мора r да е делител и на p и на q. Но, p е прост број, па затоа последното е можно ако и само ако $p=r$ и $q=sr$. Ако замениме во (1) ја добиваме равенката
$$2(1+s)=(s-1)^2,$$
т.е. равенката
$$s^2-4s-1=0.$$
Последната равенка нема целобројни решенија, што значи дека за $r>2$ равенката (1) нема решение. Ако $r=2$, тогаш p и q се со иста парност. Како и претходно се покажува дека случајот $p=2$ не е можен, па затоа p и q мора да се непарни. Нека $a\neq 2$ е прост делител на $p+q$. Тогаш a е делител и на $p-q$, па затоа е делител и на p и на q, што е можно само ако $p=a$ и $q=sa$. Сега со замена во (1) наоѓаме

$$4(1+s)=a(s-1)^2,$$

од каде следува

$$as^2-(2a+4)s+(a-4)=0.$$

Решенија на последната равенка се

$$\frac{a+2\pm\sqrt{a^2+4a+4-a^2+4a}}{a}=\frac{a+2\pm2\sqrt{2a+1}}{a}.$$

Ако $\sqrt{2a+1}$ е цел број, тогаш тој е непарен, т.е. $2a+1=4b^2+4b+1$, од каде следува $a=2b(b+1)$, т.е. не е прост број. Значи, $p+q$ и $p-q$ мора да се степени на бројот 2, т.е. $p-q=2^k$ и $p+q=2^{2k-2}$, од каде добиваме $2p=2^k+2^{2k-2}$ и $2q=2^{2k-2}-2^k$. Но, p и q се непарни броеви, па затоа $k=1$, од каде наоѓаме $p+q=1$, што не е можно.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека дадената равенка нема решенија кои ги задоволуваат условите на задачата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
2. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
3. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
4. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
5. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
6. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
7. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
8. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
9. Niven, I., Zuckerman, H. S. An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
10. Sierpinski, W. Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
11. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
12. Аневска, К., Малчески, Р.: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје, 2012
13. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
14. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
15. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
16. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
17. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005

18. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
19. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
20. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
21. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
22. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
23. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
24. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
25. Виноградов, И. М. Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
26. Гроздев, С., Аневска, К.: Боиме броеви, Нумерус, Скопје, 2017
27. Гроздев, С., Малчески, А.: Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
28. Гроздев, С., Малчески, А.: Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2017
29. Гроздев, С.: Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје
30. Гроздев, С.: Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје, 2015
31. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
32. Дуденков, С., Чакърян, К. Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
33. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
34. Кендеров, П., Табов, Й. Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
35. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2012 године, ДМ Србије, 2012
36. Кудреватов, Г. А. Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
37. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
38. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995

39. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
40. Малчески, Р., Аневска, К.: Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје, 2012
41. Малчески, Р., Аневска, К.: Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје, 2016
42. Малчески, Р., Малчески, А. и др.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
43. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К., Маркоски, Ѓ., Стојковска, И.: Избрани задачи од елементарна алгебра (трето издание), СММ, Скопје, 2016
44. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
45. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Решавање на текстуални задачи (трето издание), СММ, Скопје, 2016
46. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: Подготвителни задачи за ЈБМО, БМО и ИМО 2017, СММ, Скопје, 2017
47. Малчески, Р., Малчески, А.: 241 подготвителна задача за АПМО и ЕМК, СММ, Скопје, 2017
48. Малчески, Р., Малчески, А.: 306 подготвителни задачи за математички олимпијади, СММ, Скопје, 2016
49. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
50. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, Сојуз на математичари на Македонија, 2016
51. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
52. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, Сојуз на математичари на Македонија, 2016
53. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
54. Малчески, Р.: За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово, 1998
55. Малчески, Р.: Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
56. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
57. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје, 2012
58. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
59. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
60. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015

61. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А. Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
62. Нагел, Т. Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
63. Серпинский, В. Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
64. Страшевич, С., Боровкин, Е. Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
65. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
66. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000