Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2005/06 година

Теорија скупова

***мр Небојша Икодиновић,* Крагујевац**

Сигурно сте већ доста пута чули и прочитали да је *скуп* основни математички појам. Међутим, математика је много старија од скупова, па је прецизније и боље рећи да је скуп основни појам савремене математике, будући да је то постао релативно скоро, у XX веку. Да је заиста тако сведоче и чињенице да данас скоро да не постоји математички текст у коме се, на овакав или онакав начин, не помиње скуп и да скоро сва математичка тврђења, у најширем смислу, заправо изражавају нека својства скупова.

Знања о скуповима стичемо неформално и интуитивно, кроз учење и увежбавање математике. Прво се упознајемо са скуповним релацијама $\in, =, \subset$, затим са скуповним операцијама $\cup, \cap, \setminus, '$ и, најзад, са коришћењем „оператора окупљања“ $\{x \mid S(x)\}$ чије је значење: скуп свих објеката x који имају особину S, тј. таквих да важи $S(x)$. Иако нам се испрва чини да се задавањем било ког својства може формирати скуп објеката који имају то својство, ипак овакво окупљање није увек изводиво. Посматрајмо својство S: *не бити сам себи елемент*, тј. нека је $X = \{x \mid x \notin x\}$. Дакле, X је скуп свих објеката x који нису сами себи елементи. Према тзв. *закону искључења трећег* знамо да је сваки објекат или елемент самог себе или то није; ово важи и за X: или $X \in X$ или $X \notin X$. Међутим, ако $X \in X$, онда он има својство које имају сви његови елементи па $X \notin X$ што је немогуће. У случају да $X \notin X$, онда он има задато својство па мора припадати самом себи, тј. $X \in X$ што је немогуће. Према томе, обе претпоставке, а једна мора бити тачна, воде у противречност! Овај парадоксални резултат се зове *Раселов парадокс* у част енглеског филозофа и математичара Бертрана Расела који га је почетком XX века извео из радова оснивача теорије скупова *Георга Кантора*. Претходни пример, а може се направити још сличних, указује да наша интуиција у вези са скупом није поуздан водич у овој области. Неопходна је једна строга, аксиоматска теорија скупова која ће прецизно одредити правила грађења „исправних“ скупова и њихова својства.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Први рад из теорије скупова Кантор објављује 1873. У њему доказује да рационалних бројева има колико и природних. Из дијаграма на слици лево очигледно је да се сви рационални бројеви могу поређати у бесконачну табелу по растућим броиоцима (врсте) и растућим имениоцима (колоне). Онда је лако пребројати све рационалне бројеве природним (што значи поређати у низ) тако што пребројавање иде по растућем збиру имениоца и бројиоца. Може се и експлицитно навести функција којом се разломци пребројавају: ако су m и n бројилац и именилац разломка $\frac{m}{n}$, онда је његово место у низу одређено формулом $\frac{(m+1)(m+n-1)}{2}$.

У овом Канторовом тексту се први пут појављује израз *пребројив*, којим се означавају скупови који могу бити стављени у обострано-једнозначну кореспонденцију са скупом природних бројева. У истом чланку Кантор доказује да је скуп свих *алгебарских** бројева такође пребројив. Крајем 1873. године Кантор чувеним *дијагоналним аргументом* доказује да скуп *реалних* бројева није пребројив. Ако би скуп реалних бројева био пребројив, то би значило да сви реални бројеви, рецимо из интервала $(0,1)$, могу поређати у низ: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Ако формирамо децималне записе сваког од реалних бројева у низу, добијамо бесконачну табелу.

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
a_1 = 0, & d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} & \ldots \\
a_2 = 0, & d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} & \ldots \\
\vdots & & & & & \\
a_n = 0, & d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} & \ldots \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

Формирајмо број $a = 0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$ који се од a_1 разликује на првој децимали ($d_1 \neq d_{11}$) и узмимо да је $d_1 \neq 9$ †, од a_2 на другој децимали ($d_2 \neq d_{22}, d_2 \neq 9$), од a_3 на трећој и тако даље ($d_n \neq d_{nn}, d_n \neq 9$). Очигледно је a реалан број из интервала $(0,1)$ различит од свих бројева у низу $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Према томе, *реални бројеви из интервала* $(0,1)$, *па ни сви* реални бројеви, не могу се поређати у низ.

Савремена теорија скупова, коју ћемо овом приликом приказати, настаје почетком XX века када су немачки математичари *Цермело* $(1871-1953)$ и *Френкел* $(1891-1965)$ дали систем аксиома за теорију скупова назван $\mathbf{ZF}$ по почетним словима њихових презимена. Сасвим слично систему аксиома геометрије који не даје дефиниције *тачке* и *праве* већ описује шта можемо учинити са овим објектима, и у овом случају теорија $\mathbf{ZF}$ не одговора на питање „Шта је скуп?“, већ аксиоматизује наша (интуитивно стечена) знања о скуповима. Другим речима, $\mathbf{ZF}$ изражава својства скупова једним прецизним математичко-логичким језиком.

Следећи нашу интуитивну представу о скуповима као објектима који имају *елементе* основну улогу има својство *бити елемент* односно релација $\in$. Важно је нагласити да сами скупови такође могу бити елементи других скупова; на пример, скуп свих правих једне равни је скуп скупова (тачака). У математици се скупови чији су сви елементи такође скупови највише проучавају. Показало се да су они у већини математичких теорија сасвим довољни и да никакви други објекти нису потребни. Практично, испоставља се да је довољно узети празан скуп као полазни објекат помоћу кога је могуће изградити све остале скупове.

У оквиру прегледа самих аксиома описаћемо и како се помоћу њих уводе неки основни математички појмови у нади да ћемо бар мало дочарати поступак заснивања стандардне математике у оквиру теорије $\mathbf{ZF}$.

Аксиома екстензије *Скупови x и y су једнаки ако и само ако имају исте елементе*, тј. $x = y \Leftrightarrow (\forall v)(v \in x \Leftrightarrow v \in y)$. У овој аксиоми препознајемо формулу која се у неформалним разматрањима назива дефиницијом једнакости скупова. У овом случају, ову аксиому треба схватити као формулу која повезује основне релације $=$ и $\in$, и представља критеријум за једнакост скупова. Поред ове две основне важна је и релација „бити подскуп“ :

* Бројева који су корени полинома са целобројним коефицијентима.

† да би се избегло појављивање истих бројева који имају два децимална записа попут $0,199999999\ldots$ и $0,2$

$x \subset y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall v)\,(v \in x \Rightarrow v \in y)$. Није тешко показати да важи еквиваленција: $x = y \Leftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x$.

Аксиома празног скупа *Постоји скуп који нема елемената,* тј. $(\exists x)\,(\forall v) \neg v \in x$. Ова аксиома, заједно са претходном, нам омогућава да дефинишемо *празан скуп*: $x = \emptyset \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall v) \neg v \in x$ (према Аксиоми празног скупа овакав скуп x постоји, док је према Аксиоми екстензије он јединствен). Може се показати да за сваки скуп x важи: $\emptyset \subset x$.

Аксиома пара *За свака два скупа x и y постоји скуп z чији су једини елементи x и y,* тј. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall v)\,(v \in z \Leftrightarrow v = x \vee v = y)$. Из Аксиоме пара и Аксиоме екстензије следи исправност дефиниције: $z = \{x, y\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall v)\,(v \in z \Leftrightarrow v = x \vee v = y)$. Овим смо дефинисали један бинарни опарацијски знак $\{\cdot,\cdot\}$, и тиме теорију скупова уз већ дефинисану константу $\emptyset$ обогатили још и једном операцијом, тј. правилом формирања скупова. На основу ове аксиоме можемо утврдити постојање многих скупова: једночлан скуп (тзв. *синглтон*) $\{x\}$ је скуп $\{x, x\}$; такође уређен пар (x, y) се дефинише као скуп $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Тако, поред празног скупа сада можемо да дефинишемо и, међусобно резличите[‡], скупове $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$ као и $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ Није тешко показати да је $(a, b) = (x, y)$ ако и само ако је $a = x$ и $b = y$.

Аксиома партитивног скупа *За сваки скуп x постоји скуп y свих његових подскупова,* тј. $(\forall x)(\exists y)(\forall v)\,(v \in y \Leftrightarrow v \subset x)$. За скуп y уводимо ознаку $\mathcal{P}(x)$ дефиницијом: $y = \mathcal{P}(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall v)\,(v \in y \Leftrightarrow v \subset x)$. И ова дефиниција је, слично као и претходна, коректна. На основу Аксиоме партитивног скупа, $\mathcal{P}(x)$ постоји за сваки скуп x, а на основу Аксиоме екстензије он је јединствен. Овим је у теорију скупова уведен унарни операцијски знак $\mathcal{P}(\cdot)$.

Аксиома подскупа (сепарације) *За сваки скуп x и свако својство S постоји подскуп y скупа x који садржи тачно оне елементе v који задовољавају S,* тј.

$$(\forall x)(\exists y)(\forall v)\,(v \in y \Leftrightarrow v \in x \wedge S(v)).$$

Ова аксиома тврди постојање (за свако својство S) скупа свих v за које важи $S(v)$ али **који припадају** x; ово је у ствари аксиома окупљања. Она не може изазвати Раселов парадокс јер се према њој окупљање врши само у оквиру неког већ датог скупа, тј. уведено је ограничење које спречава произвољна окупљања. Према Аксиоми подскупа и Аксиоми екстензије скуп y је јединствен па је дефиниција $y = \{v \mid v \in x \wedge S(v)\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall v)\,(v \in y \Leftrightarrow v \in x \wedge S(v))$ исправна. Њоме се строго уводи $\{\ \mid\ \}$, тј. оператор окупљања. Сада лако уводимо скуповне операције: пресек, $x \cap y \overset{\text{def}}{=} \{v \mid v \in x \wedge v \in y\}$, и разлику, $x \setminus y \overset{\text{def}}{=} \{v \mid v \in x \wedge v \notin y\}$, два скупа. Међутим, ову аксиому не можемо искористити при дефинисању уније, будући да су и пресек и разлика два скупа подскупови једног од њих, а унија то није.

Аксиома уније *За сваки скуп x постоји скуп y који садржи све елементе елемената скупа x,* тј. $(\forall x)(\exists y)(\forall v)\,(v \in y \Leftrightarrow (\exists z)\,(v \in z \wedge z \in x))$. Овај скуп y се означава са $\cup x$ или $\cup_{v \in x} v$. Уз помоћ ове аксиоме можемо, специјално, стићи до уније два скупа. Према Аксиоми пара за свака два скупа x и y постоји скуп $\{x, y\}$. Према претходној аксиоми постоји унија скупа $\{x, y\}$, тј. $\cup\{x, y\}$ или $x \cup y$. Овај скуп је скуп свих елемената скупова x и y.

Користећи до сада уведене аксиоме, могу се дефинисати стандардни математички појмови: помоћу аксиома уније, партитивног скупа и сепарације може се дефинисати Декартов производ $x \times y$ скупова x и y: $x \times y \overset{\text{def}}{=} \{(u, v) \mid u \in x \wedge v \in y\}$. Нећемо строго оправдавати

[‡] На пример, скупови $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$ су различити јер $\emptyset$ нема елементе, док их $\{\emptyset\}$ има.

ову дефиницију, али приметимо да је $x \times y \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. Заиста, из $(a, b) \in x \times y$, следи да $a \in x$ и $b \in y$, па $a, b \in x \cup y$, односно $\{a\}, \{a, b\} \subset x \cup y$, тј. $\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(x \cup y)$. Дакле, $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(x \cup y)$, па $\{\{a\}, \{a, b\}\} = (a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. На основу до сада уведених аксиома, за задати скуп x, могу се формулисати и појмови као што су *релација еквиваленције* скупа x, *релација поретка* скупа x и слично. Такође, уводи се и један од најзначајнијих појмова математике-појам *функције*. Кажемо да је **скуп** f **функција скупа** a **у скуп** b, и пишемо $f : a \to b$, ако и само ако је $f \subset a \times b$ и за сваки x из a постоји јединствен y из b такав да $(x, y) \in f$, тј.

$$f : a \to b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1^\circ & f \subset a \times b, \\ 2^\circ & (\forall x \in a)(\exists y \in b)\,(x, y) \in f, \\ 3^\circ & (\forall x \in a)(\forall y \in b)(\forall z \in b)\,((x, y) \in f \land (x, z) \in f \Rightarrow y = z). \end{cases}$$

Уобичајено је да се уместо $(x, y) \in f$ пише $f(x) = y$. Такође, дефинишемо и следеће веома важне врсте функција: **1-1**-функције (тзв. *инјекције*), **на**-функције (тзв. *сирјекције*), као и обострано-једнозначне функције (тзв. *бијекције*).

Уведене врсте функција користимо, између осталог, за дефиницију бесконачних скупова: *скуп x је бесконачан ако и само ако постоји бар једна* **1-1**-*функција* $f : x \xrightarrow{1-1} x$ *која није* **на**. На основу до сада уведених аксиома не може се показати да бесконачан скуп постоји.

Аксиома бесконачности *Постоји скуп који није празан и који са сваким својим елементом y садржи још један елемент $y \cup \{y\}$, различит од y*, тј.

$$(\exists x)\,(\emptyset \in x \land (\forall y)\,(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Овом аксиомом се тврди да постоји бесконачан скуп. Скуп x је баш такав - „нема краја“, тј. x са сваким својим елементом y садржи још један елемент $y \cup \{y\}$ различит од y; тако елементи скупа x су: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$

Аксиома замене интуитивно тврди да ако неке од елемената скупа x заменимо произвољним скуповима, сваки елемент једним скупом, резултат такве замене јесте скуп. Са овом аксиомом се завршава списак аксиома који формализује својства скупова на која се свакодневно позивамо у свим областима математике. Уобичајено је да се теорија базирана на овима аксиомама назива *наивна теорија скупова*. Наведене аксиоме теорије скупова утврђују углавном опште познате чињенице које и мататематичар неупућен у ову теорију често користи.

Теорија **ZF** садржи још једну аксиому, **Аксиому регуларности**, која превасходно има теоријски значај и служи да елиминише одређене патолошке објекте; она обезбеђује да се не могу појавити циклуси облика $x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x_0$ или бесконачни опадајући низови облика $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$ или скуп x такав да је $x = \{x\}$.

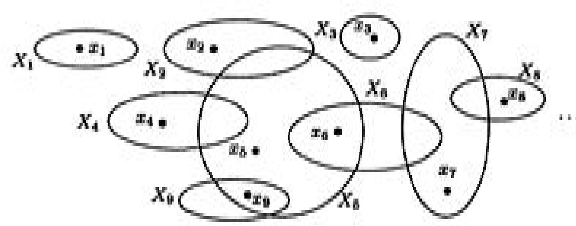
У **ZF** се могу дефинисати све уобичајене математичке структуре бројева (нама нарочито важни примери бесконачних скупова). На пример, дефиниција природних бројева је: $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\{0\}, \{\{0\}\}\}$, $3 = \{0, 1, 2\}, \ldots, n + 1 = n \cup \{n\}$; дакле, сваки природан број је (коначан!) скуп свих претходних природних бројева: $n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\}$. Захваљујући аксиоми бесконачности и аксиоми сепарације, постоји и (бесконачан!) скуп свих природних бројева $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, односно $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$[§]. Уобичајено строго уређење $<$ скупа природних бројева је, при овим дефиницијама, преозначена релација $\in$: $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$. Полазећи од природних бројева, конструишемо

[§] ако вам се више свиђа!

и све остале врсте бројева, тј. (бесконачне) скупове целих $\mathbb{Z}$, рационалних $\mathbb{Q}$, реалних $\mathbb{R}$, комплексних $\mathbb{C}$ бројева.

Осим аксиома теорије **ZF** у математицисе користи и тзв. Аксиома избора. Ова аксиома се разликује од осталих по томе што тврди постојање одређеног скупа који истовремено и не дефинише. На пример, аксиоме подскупа, пара, уније, партитивног скупа, бесконачности и замене експлицитно дефинишу скупове чије постојање тврде. Из тих разлога, Аксиома избора има посебно место у теорији скупова и математици уопште. Занимљиво је да већина математичара само овај скуповни принцип назива аксиомом (јер не представља „очигледну чињеницу"), а све друге аксиоме се у свакодневној математици уопште и не спомињу. Наиме, при разним конструкцијама срећемо следећи проблем:

дата је колекција (синоним за скуп!) $\{X_i \mid i \in I\}$ непразних скупова и потребно је из сваког од њих изабрати по елемент и формирати *скуп представника*, тзв. *изборни скуп*, у коме ће сваки X_i бити заступљен неким својим елементом (представником) x_i.



$C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \dots\}$

Аксиома избора *За сваку колекцију скупова постоји скуп који садржи по тачно један елемент сваког скупа из колекције.*

Аксиому избора често означавамо са (AC)¶, док се са **ZFC** означава теорија која се добија када аксиомама **ZF** додамо (AC). У неким једноставним случајевима постојање изборног скупа се може доказати и у теорији **ZF**; на пример, за колекцију једночланих скупова или за сваку коначну колекцију непразних скупова. Међутим, постојање изборног скупа неке бесконачне колекције се не може доказати чак ни уз претпоставку да је сваки елемент те колекције коначан скуп. Велики делови савремене математике изгледали би сасвим другачије без Аксиоме избора (нарочито у топологији, алгебри, функционалној анализи, теорији мере). Чак и тако елементарна ствар као што је еквиваленција, у реалној анализи, двеју дефиниција граничне вредности (преко низова и преко околина) непосредно зависи од Аксиоме избора. Интересантно је поменути да „постоји математика" у којој Аксиома избора не важи и у којој, на пример, те две дефиниције граничне вредности нису еквивалентне. Ипак велики број математичара се позива на ову аксиому. Позивањем на ову аксиому, поред великог броја значајних математичких резултата, добијамо и читав низ резултата који противрече нашој геометријској интуицији. Неки од њих изгледали су тако да је један број математичара озбиљно посумњао у оправданост прихватања ове аксиоме. Пример таквог резултата, до кога су дошли Хауздорф, Банах и Тарски, је *разлагање јединичне лопте на коначан број (пет) делова од којих се, кретањем у простору, могу склопити две јединичне лопте.*

Теорија **ZFC** нам пружа могућност да упоређујемо и бесконачне скупове по њиховој величини или по „броју" елемената ако се за меру узме могућност успостављања обострано-једнозначне функције‖. Тако, за произвољне скупове x и y кажемо да су *једнаки по величини* или *исте кардиналности* или *еквипотентни*, и пишемо $|x| = |y|$ (или $x \sim y$), ако **постоји** скуп f који је обострано-једнозначна функција скупа x **на** скуп y, тј. постоји f тако да је

¶Скраћеница (AC) потиче од енглеског назива Axiom of Choice.

‖Дефинисање бијекције међу скуповима је апстрахован процес пребројавања елемената неког коначног скупа.

$f : x \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} y$. Лако се доказује да за произвољне скупове x, y, z важи: $|x| = |x|$; $|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x|$; $|x| = |y| \wedge |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z|$. Слично, кажемо да је скуп x *мање кардиналности* од скупа y, и пишемо $|x| \leqslant |y|$ (или $x \preccurlyeq y$), ако и само ако **постоји** скуп f који је **1-1**-функција скупа x у скуп y, тј. постоји f тако да је $f : x \xrightarrow{\text{1-1}} y$. Лако се види да из $x \subset y$ следи да је $|x| \leqslant |y|$. Такође, *помоћу аксиома* **ZF**, *може се доказати: из* $|x| \leqslant |y|$ *и* $|y| \leqslant |x|$ *следи да је* $|x| = |y|$. Ово тврђење се назива Шредер-Бернштајнова теорема. *Строги* поредак по кардиналности међу скупова уводимо на уобичајен начин: $|x| < |y|$ ако и само ако $|x| \leqslant |y|$ и $|x| \neq |y|$. Ако је x прави подскуп неког коначног скупа y ($x \subset y$ и $x \neq y$), тада је $|x| < |y|$. Може се показати: *скуп y је бесконачан ако и само ако постоји прави подскуп x скупа y такав да је $|x| = |y|$.* Скуп $\mathbb{N}$ је бесконачан: скуп парних бројева $2\mathbb{N}$ је прави подскуп од $\mathbb{N}$ и важи $|2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$; $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$.

Веома значајно тврђење **ZF** теорије је и да: *за сваки скуп x,* $|x| < |\mathcal{P}(x)|$ (тј. $|x| \leqslant |\mathcal{P}(x)|$ и $|x| \neq |\mathcal{P}(x)|$). Да је $|x| \leqslant |\mathcal{P}(x)|$ није тешко показати: $f : x \xrightarrow{\text{1-1}} \mathcal{P}(x)$, $f(a) = \{a\}$, $a \in x$. Међутим, било која фукција скупа x у $\mathcal{P}(x)$ није **на**, тј. не постоји обострано-једнозначна функција скупа x **на** скуп $\mathcal{P}(x)$. Заиста, ако је $g : x \to \mathcal{P}(x)$ било која функција, тада скуп $y = \{v \mid v \in x \wedge v \notin g(v)\}$ није g-слика ниједног елемента из x. У супротном, ако би постојао v из x такав да је $g(v) = y$, имали бисмо да $v \in y$ ако и само ако $v \notin y$, што је немогуће. Овај доказ је стар преко сто година. Важна непосредна последица овог тврђења је да не постоји скуп свих скупова: ако би постојао такав скуп V, тада бисмо имали да је $\mathcal{P}(V) \subset V$ (јер је сваки подскуп од V истовремено и елемент V) па и $|\mathcal{P}(V)| \leqslant |V|$. Такође, сви једначлани скупови не образују скуп: ако би K био скуп свих једночланих скупова, тада би за сваки скуп x било $x \in \{x\} \in K$, тј. $x \in \cup K$, па би скуп $\cup K$ садржо све скупове. Интересантно је, такође, размотрити какве последице има неједнакост $|x| < |\mathcal{P}(x)|$, уколико је x бесконачан скуп. Као што смо већ поменули, упоређивање скупова бројева по кардиналности је главни „кривац“ настанка теорије скупова јер се њеним првим резултатима сматрају Канторове теореме: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ и $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Слободније речено, последња неједнакост нам говори да постоји нека врста бесконачности вишег реда, тј. да и од бесконачних скупова има строго „бројнијих“, будући да је скуп $\mathbb{N}$ бесконачан. Шта више, користећи доказану неједнакост $|x| < |\mathcal{P}(x)|$, можемо конструисати бесконачан, строго растући по кардиналности, низ бесконачних скупова:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \ldots < |\underbrace{\mathcal{P}(\cdots \mathcal{P}(\mathcal{P}}_{n}(\mathbb{N}))\cdots)| < \ldots$$

Кажемо да је бесконачан скуп x *пребројив* ако и само ако је $|x| = |\mathbb{N}|$; остале бесконачне скупове називао *непребројивим*. Горњи низ је сведок бескрајне скале бесконачности које су непребројиве. Како је $\mathbb{R}$ непребројив скуп природно је поставити питање: „Да ли у горњем низу бесконачних скупова постоји неки који је еквипотентан скупу реалних бројева $\mathbb{R}$?“. Може се показати да је $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. За скуп x који је исте кардиналности као $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (тј. $\mathbb{R}$) кажемо да је кардиналности *континуума*. Дуго је математичаре мучило питање: „Да ли постоји скуп x такав да је $|\mathbb{N}| < |x| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$?“. Исказ

Не постоји скуп x такав да је $|\mathbb{N}| < |x| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

зове се **Хипотеза континуума** и означава се са **CH**. У теорији **ZFC** не може се доказати ни постојање ни непостојање таквог скупа x, па је однос **CH** према овом систему аксиома једнак односу V Еуклидовог постулата према систему аксиома апсолутне геометрије. Дакле, и **CH** и $\neg$ **CH** се може додати систему **ZFC**.

Слично природним бројевима који нам служе за одређивање величине неког коначног скупа (на пример, $|\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}| = 3$), уз помоћ Аксиоме избора може се дефинисати бесконачно много скупова, тзв. *(трансфинитних) кардиналних бројева* или краће *кардинала*, који служе за изражавање величине, односно „бројности", бесконачних скупова. Један бесконачан кардинал, у ознаци $\aleph_0$ (читамо: алеф нула), одређује скуп природних бројева ω и карактерише пребројиве скупове; на пример, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Најмањи непребројив кардинал, тј. први кардинал већи од $\aleph_0$, означавамо са $\aleph_1$, најмањи већи од њега са $\aleph_2$, и слично даље**. Иако сви кардинали не образују скуп, аритметичке операције (сабирање, множење, степеновање, бесконачне суме и производи) се могу, у извесном смислу, проширити и на ове „бесконачне бројеве" те је у оквиру теорије **ZFC** развијена тзв. *кардинална аритметика*. Тако је, на пример, за сваки природан број n: $n+\aleph_0 = n\cdot\aleph_0 = \aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$, $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, и тако даље. Приметимо да је проблем континуума „елементаран" проблем кардиналне аритметике: којем од алефа је једнак кардиналан број континуума, тј. ком алефу је једнако $2^{\aleph_0}$ $(= |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|)$? Хипотеза континуума јесте да је: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Подсетимо се да нам теорија **ZFC** даје само неједнакост $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Дакле, иако довољно јака (и погодна) да се у њој могу изразити практично сви значајни математички принципи††, теорија **ZFC** ипак нема одговоре на један број важних и природних питања (**CH**). Новији резултати из теорије скупова и математичке логике показују да је наше математичко искуство још увек недовољно да би се дали одговори на многа слична питања.

На крају, да ли се јединична лопта **стварно** може разложити на пет делова од којих се могу склопити две такве лопте?

Задаци

1. Нека је x дати скуп. Који од скупова $\{\{x\}, \emptyset\}$, $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$, $\{x\} \cup x$, $\emptyset \cup x$, $\emptyset \cup \{x\}$ садржи x као свој елемент, а који као свој подскуп?
2. Одредити: (а) $\cup\cup\{\{\{1,2\},\{1\}\},\{\{0,1\}\}\}$; (б) $\mathcal{P}(\cup\{\{\emptyset\},\emptyset\})$.
3. Ако је $\rho \subset x \times x$, доказати да је $\cup\cup\rho \subset x$.
4. Који од скупова: $f = \{(0,0),(1,0),(2,0)\}$, $g = \{(0,1),(0,1),(1,1),(2,1),(2,0)\}$, $h = \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ представља функцију скупа $\{0,1,2\}$ у скуп $\{0,1\}$?
5. * Доказати да је:
(а) $|\mathbb{N} \times \{1,3,5\}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$;
(б) $(0,1)| = |[-1,2)| = |[7,9]| = |(-\infty,2]| = |(2,+\infty)| = |\mathbb{R} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{R}|$.

Литература

[1.] М. Божић: *Преглед историје и филозофије математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002.

[2.] С. Вујошевић: *Математичка логика*, ЦИД, Подгорица, 1996.

[3.] P. R. Halmos: *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, New York Inc., 1974.

** до $\aleph_\omega$; затим следе $\aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \ldots$

†† Постоје и други начини прецизног заснивања математике који су еквивалентни са поменутим заснивањем у теорији скупова; један њих је у оквиру теорије категорија.