

Šefket Arslanagić (Trebinje)

BRZO ODEĐIVANJE MJERNIH BROJEVA TEŽIŠNICA DATOG TROUGLA

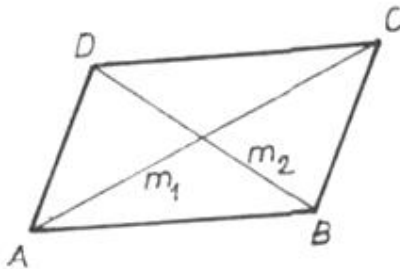
Poznato je:

a) da se kod svakog paralelograma dijagonale međusobno polove i da je svaki četvorougao čije su dijagonale međusobno polove paralelogram;

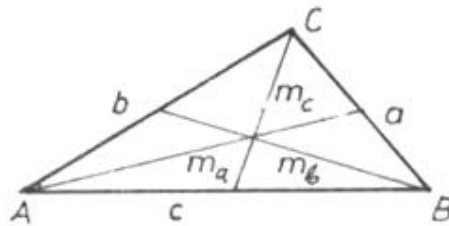
b) da je suma kvadrata mjernih brojeva dijagonala svakog paralelograma jednaka dvostrukoj sumi kvadrata mjernih brojeva njegovih stranica, tj. (s obzirom na sl. 1) da je

$$(1) \quad m_1^2 + m_2^2 = 2(a^2 + b^2);$$

c) da se sve tri težišnice datog trougla sijeku u jednoj tački — težištu trougla — koja dijeli svaku od njih (sl. 2) u odnosu 2;1



Sl. 1



Sl. 2

Na osnovu ovih činjenica mogu se veoma efektno izračunati mjerni brojevi težišnica m_a , m_b , m_c u funkciji od mjernih brojeva trougla i, obratno, mjerni brojevi stranica a , b , c u funkciji od mjernih brojeva težišnica m_a , m_b , m_c trougla.

1. Izračunajmo mjerni broj težišnice m_c .

Udvostručimo težišnicu CD (sl. 3) datog trougla do tačke P na pravoj CD i formirajmo četvorougao $APBC$, koji je paralelogram, jer mu se dijagonale međusobno polove.

Primenjujući formulu (1) na ovaj paralelogram, dobijamo:

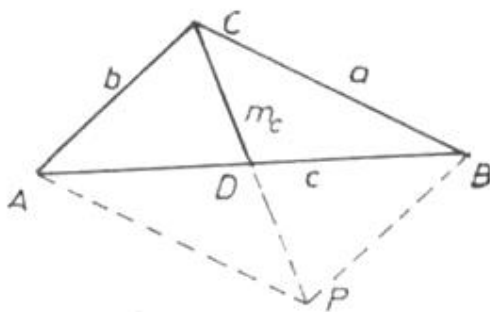
$$CP^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2), \text{ tj. } (2m_c)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Odatle dobijamo: $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, odnosno

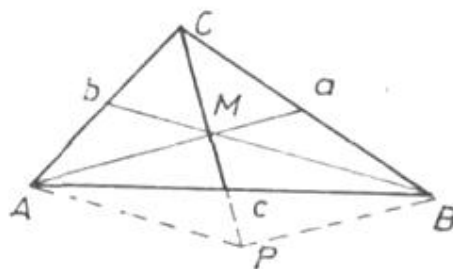
$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Analogno dobijamo i da je

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}; \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$



Sl. 3



Sl. 4

2. Izračunajmo sad mjerni broj stranice c .

Neka M težište trougla ABC (sl. 4). Tada je $AM = \frac{2}{3} m_a$,

$$BM = \frac{2}{3} m_b, \quad DM = \frac{1}{3} m_c.$$

Produžimo duž MD preko D za $DP = \frac{1}{3} m_c$. Tada će dobijeni četvorougao $APBM$ biti paralelogram, jer se njegove dijagonale međusobno polove.

S obzirom na formulu (1) imamo;

$$AB^2 + MP^2 = 2AM^2 + 2BM^2, \text{ tj. } c^2 + \frac{4}{9} m_c^2 = 2 \cdot \frac{4}{9} m_a^2 + 2 \cdot \frac{4}{9} m_b^2.$$

Odatle dobijamo; $c^2 = \frac{4}{9} (2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2)$, odnosno

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

Analogno dobijamo i da je

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} \quad \text{i} \quad b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}.$$

Zadaci

1. Neka su poznate katete pravouglog trougla ABC . Izračunati dužine njegovih težišnica neposredno i na osnovu izvedenih obrazaca.
2. Neka su poznate stranice a i b trougla ABC i njegoa težnica m_c . Izračunati dužinu stranice c .
3. Kakva veza postoji među stranicama a , b i c trougla ABC ako su težišnice m_a i m_c međusobno normalne?