Osječki matematički list 21 (2021), 151–161

π prije nego se za njega znalo

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

U ovom članku dajemo pregled povijesti broja π u razdoblju kad još nije bila dokazana njegova egzistencija, odnosno pregled rezultata vezanih za površinu i opseg kruga u starim civilizacijama u kojima još nije bila dokazana, često ni jasno iskazana, proporcionalnost između opsega i promjera, odnosno površine i kvadrata polumjera, kruga.

Ključne riječi: π, *krug, kružnica, povijest matematike*

π before it was known

Abstract

This paper is a survey of the early history of number π in the period when its existence was not yet proven. We give an overview of results related to area and circumference of circle in ancient civilisations, when the proportionality between circumference and diameter, and area and squared radius, was not yet proven, often not even clearly stated.

Keywords: π, *circle, history of mathematics*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

1 Uvod

U mnogim površno pisanim tekstovima iz povijesti matematike, uključivo onih u školskim udžbenicima matematike, često ćete naići na rečenice poput „Stari Egipćani π su aproksimirali s 3.16", „U Babilonu se koristila aproksimacija $\pi \approx 3\frac{1}{8}$" i slično. Problem s takvim izjavama nije u tome što u stara vremena još nije postojala oznaka π,[1] a ni u tome što brojevi još nisu bili bilježeni na moderni način — problem je u tome što uglavnom nema jasnih naznaka da su stari narodi bili svjesni proporcionalnosti opsega i promjera kruga, a kod onih kod kojih takve naznake postoje, radilo se o empirijski potvrđenoj, u pravilu samo iz konteksta tekstova shvatljivoj, a nipošto dokazanoj tvrdnji. Cilj je ovoga članka proći kroz pretpovijest broja π, odnosno kroz dostignuća četiriju velikih starih civilizacija. Pa, krenimo od one koju smo „posjetili" u prethodnom broju . . .

2 π u starom Egiptu

Dva glavna izvora o staroegipatskoj matematici su Rhindov (RP) i Moskovski (MP) papirus, koji oba potječu iz doba tzv. Srednjeg kraljevstva, iz prve polovine drugog tisućljeća pr. Kr., a koji su iz moderne perspektive nešto poput zbirki zadataka namijenjenih školama pisara i drugih državnih službenika. Za razliku od modernih zbirki zadataka, ta dva papirusa, kao i općenito sačuvani matematički tekstovi starih civilizacija, ne sadrže objašnjenja, a kamoli dokaze. Štoviše, rješenja se navode kao konstatacije, bez pokušaja (eksplicitne) generalizacije na druge slične zadatke [3, 13].

U oba navedena papirusa možemo naći po nekoliko zadataka koji se tiču računanja površina krugova i volumena valjaka, dakle zadaci kakve bismo danas rješavali koristeći račun s brojem π. Pogledajmo npr. 50. zadatak u RP [4].

Primjer 2.1 (RP50). *Metoda izračuna kružnog zemljišta promjera* 9 khet.[2] *Što mu je površina? Oduzmi devetinu od toga, naime* 1*; ostaje* 8*. Pomnoži* 8 *osam puta; postaje* 64*. To je površina zemljišta.*

Vidimo da je pisac, pisar Ahmes, ovdje koristio sljedeći postupak za računanje površine P kruga poznatog promjera d:

$$d \to d - \frac{1}{9}d = \frac{8}{9}d \to \left(\frac{8}{9}d\right) \cdot \left(\frac{8}{9}d\right) = \frac{64}{81}d^2 = P,$$

[1] Oznaku π za omjer opsega i promjera kruga prvi je koristio Englez William Jones 1706., a njenu uporabu je popularizirao Leonhard Euler 1730-ih godina.

[2] *Khet* je staroegipatska mjerna jedinice duljine, iznosa približno 52.5 m.

odnosno da je postupak ekvivalentan formuli

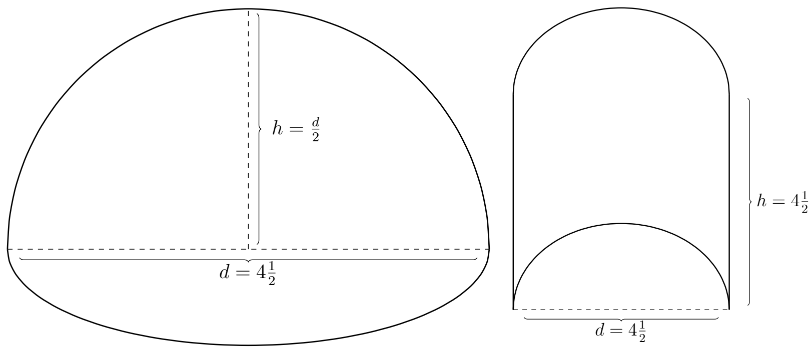
$$P = \frac{64}{81} d^2.$$

Usporedbom s modernom formulom $P = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi$ *vidimo da je ovaj postupak ekvivalentan aproksimaciji*

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3.16.$$

Na isto pravilo svodi se i rješenje zadataka RP41, RP42, RP43 (u kojima se računaju volumeni valjaka poznatog promjera i visine, korektno kao površina baze puta visina) te RP48 (jedinog zadatka u RP koji nema tekst, nego samo račun, a u njemu se uspoređuje površina kruga promjera 9 s površinom opisanog mu kvadrata) [4].

U MP pak nalazimo 10. zadatak u kom se računa, ovisno o interpretaciji (dio izvornika je uništen, a i nije sigurno je li pisar, koji je očito prepisivao stariji izvor, napravio poneku grešku), površina polusfere, površina polukruga ili površina pola plašta valjka (kojemu je visina jednaka promjeru). Ako se radi o posljednjoj, trećoj, interpretaciji, ona sugerira da su stari Egipćani, možda, znali procijeniti i opseg, a ne samo površinu kruga [5, 6].



Slika 1. Dvije od tri interpretacije 10. zadatka u Moskovskom papirusu

Primjer 2.2 (MP10). *Zadana je mjera košare iznosa* $4\frac{1}{2}$*, koja se ovisno o interpretaciji uzima kao polumjer polukruga, kao promjer polusfere (slika 1 lijevo) ili pak kao promjer i visina polucilindra (slika 1 desno). Označimo tu mjeru s* x*.*

U izračunu se prvo oduzima jedna devetina od $9 = 2x$ *pa se dobije* 8*, dakle izračunato je* $\frac{8}{9} \cdot 2x$*.*

To se podijeli s 9 *i dobije* $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$ (*za egipatski zapis razlomaka vidjeti prethodni članak*), *dakle izračunato je* $\frac{8}{81}\cdot 2x$.

To se oduzme od onih $8=\frac{8}{9}d$, *ostane* $7\frac{1}{9}$ *kao* $\frac{8}{9}d-\frac{8}{81}d=\frac{64}{81}\cdot 2x$.

To se pomnoži s $x=4\frac{1}{2}$ *i dobije* 32, *za što autor zaključuje da je tražena površina.*

Budući da bi moderni račun u sva tri slučaja za traženu površinu dao $\frac{\pi}{2}x^2=\frac{81}{8}\pi$, *vidimo da postupak ponovno odgovara aproksimaciji* $\pi\approx\frac{256}{81}$.

Kao što vidimo, iako u starom Egiptu nema riječi o konstanti proporcionalnosti između površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom (ili promjerom), čini se da je ta proporcionalnost (a možda i ona između opsega i promjera kruga) bila donekle implicitno poznata, te su staroegipatski računi vezani za krug ekvivalentni modernoj aproksimaciji $\pi\approx\frac{256}{81}$ (što je samo približno jednako često spominjanih 3.16). Kako su stari Egipćani došli do zaključka da njihovi postupci daju dosta točne rezultat (površina kruga izračunata na staroegipatski način je za samo malo više od 0.6 % veća od točne) nije poznato, ali najvjerojatnije se radilo o empirijski, mjerenjem, potvrđenom pravilu [1, 2, 5, 6, 13].

3 Babilon

Iz očiglednih razloga — glinene pločice su trajnije od papirusa — više je sačuvanih matematičkih i inih povijesnih izvora iz prve polovice 2. tisućljeća pr. Kr. iz Mezopotamije, nego iz Egipta. Posebno puno glinenih pločica matematičkog sadržaja sačuvano je iz razdoblja prvog babilonskog carstva (oko 1900.–1600. g. pr. Kr.), a neke od njih sadrže izračune vezane za površinu i opseg kruga, ili pak volumen valjka. U osnovi, radi se o tekstovima vrlo sličnima već opisanim egipatskim: Zadaci s rješenjima bez argumentacije ili generalizacije postupka, a iz kojih se usporedbom s modernim formulama može zaključiti kojim aproksimacijama broja π odgovaraju njihovi postupci. Za razliku od, čini se, jedinstvene „staroegipatske aproksimacije", neki babilonski izračuni vezani za kružne objekte ekvivalentni su aproksimaciji $\pi\approx 3\frac{1}{8}$, a neki pak aproksimaciji $\pi\approx 3$ [1, 13].

Tako jedna od glinenih pločica nađenih 1936. u Susi (Iran) sadrži nekoliko geometrijskih konstanti, od kojih se jedna može interpretirati na sljedeći način [7].

Primjer 3.1. *Na pločici se uz brojku* 0; 57,36 (*naravno, zapisana simbolima klinastog pisma*) *nalazi i ilustracija kao na slici 2. Stoga se brojka* 0; 57,36 *interpretira kao omjer opsega pravilnog šesterokuta i opisane mu kružnice.*

Suvremenog čitatelja može zbuniti sama brojka. Naime, Babilonci su koristili primarno seksagezimalni (sekundardno dekadski) pozicijski sustav (bez apsolutne pozicije) [3] te se radi o broju

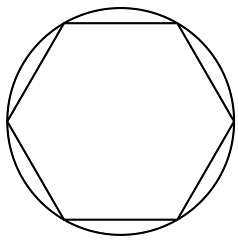
$$0 + \frac{57}{60^1} + \frac{36}{60^2} = \frac{24}{25}.$$

Dakle, ako s O označimo opseg kružnice i s O_6 opseg upisanog mu pravilnog šesterokuta, ta pločica iz moderne perspektive tvrdi da je

$$\frac{24}{25} = \frac{O_6}{O} = \frac{6r}{2r\pi} = \frac{3}{\pi},$$

odnosno odgovara aproksimaciji

$$\pi \approx \frac{75}{24} = 3\frac{1}{8}.$$



Slika 2. Pravilni šesterokut upisan u kružnicu

4 Indija

Najstariji sačuvani izvori o indijskoj matematici sežu u razdoblje Veda (oko 800.–200. g pr. Kr.). Iz tog je razdoblja sačuvano više tekstova poznatih pod nazivom *Sulvasutre* („Pravila konopa"). Radi se o dodacima vjerskim tekstovima, vedama, u kojima se nalaze razna geometrijska pravila vezana za konstrukcije oltara i hramova. U *Sulvasutrama* se mogu naći razni zadaci vezani za kružne objekte. Kad se ti zadaci interpretiraju iz moderne perspektive, vidi se da tadašnjim autorima zasigurno nije bila poznata proporcionalnost površine kruga i kvadrata nad polumjerom, odnosno opsega i promjera, jer ovisno o zadatku preračunavanje i usporedba s modernim egzaktnim formulama dovodi do vrlo različitih aproksimacija broja π u rasponu od 2.99 pa do $\frac{27}{8} = 3.375$ [1, 2, 3, 10, 13].

Primjerice, *Baudhayana Sulvasutra* daje sljedeće pravilo za izračunavanje površine kruga, formulirano kao rješavanje problema kvadrature kruga [9].[3]

Primjer 4.1. *Ako želiš pretvoriti krug u kvadrat, podijeli promjer na osam dijelova i jedan od tih dijelova na dvadeset i devet dijelova. Od tih dvadeset i devet dijelova makni dvadeset i osam te povrh toga šestinu (od preostalog jednog dijela) minus osminu (od šestog dijela).*

Nije rečeno, ali je iz okolnog teksta jasno, da gornji račun daje omjer $s : d$ stranice s kvadrata i promjera kruga iste površine kao kvadrat[4] d, dakle, iz moderne perspektive računa se

$$1 - \frac{1}{8 \cdot 29} \cdot \left(28 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{9785}{11136}.$$

Mi danas znamo da bi to trebalo biti jednako

$$\frac{\sqrt{r^2\pi}}{2r} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

dakle opisano pravilo odgovara aproksimaciji

$$\pi \approx \left(\frac{9785}{5568}\right)^2 = \frac{23804641}{7750656} \approx 3.0713.$$

U kasnijem razdoblju, mnogi veliki indijski matematičari dali su svoje aproksimacije za broj π, vjerojatno već svjesni uključenih proporcionalnosti uslijed kontakta s grčkom i kineskom matematikom. Tako je primjerice Aryabhata (oko 475.–550.) zapisao da se opseg kruga promjera 20000 računa tako da se doda 4 na 100, pomnoži s 8, a onda doda 62000, što odgovara aproksimaciji

$$\pi \approx \frac{62832}{20000} = 3.1416.$$

Nešto kasnije Brahmagupta (oko 598.–668.) zapisao je tekst koji se svodi na aproksimaciju $\pi \approx \sqrt{10}$, koju je već nekoliko stoljeća ranije (kako ćemo opisati u sljedećem odjeljku) otkrio Zhang Heng. No, čak i u tom kasnijem razdoblju indijski matematičari još nisu davali argumente za svoje postupke, a i pravila još — najčešće — nisu eksplicitno izrečena [1, 2, 3, 13].

[3] Kako je dobro poznato, problem kvadrature kruga je problem konstrukcije kvadrata jednake površine kao dani krug. U starogrčkom smislu uvjet konstrukcije je da bude provediva u konačno koraka ravnalom i šestarom te taj problem nije rješiv, no Indijci su razmišljali više praktično, odnosno nisu imali uvjeta formalnih konstrukcija ravnalom i šestarom.

[4] Pravilo neposredno prije ovoga daje „rješenje" inverznog problema, koji se susreće i u nekim drugim *Sulvasutrama*, nalaženja promjera kruga koji je po površini jednak danom kvadratu [9, 10].

5 Kina

Iako je kineska civilizacija stara preko 4000 godina, najstariji sačuvani matematički tekstovi iz Kine potječu iz razdoblja prijelaza era. U to je doba doduše u staroj Grčkoj već bilo dokazano ne samo da su omjeri opsega i promjera kruga, odnosno površine kruga i površine kvadrata nad polumjerom, konstantni (vidi sljedeći odjeljak), nego i da su ti omjeri jednaki, no bar do negdje 500. g. n. e. nije vjerojatno da su starokineski matematičari za to znali. Kao i druge stare civilizacije, stari Kinezi nisu obraćali pozornost na matematičku argumentaciju, već su jednostavno rješavali praktične probleme, ali već rano se u Kini pokazala posebna sklonost numeričkim izračunima. Tako su za potrebe izračunavanja površina i volumena vezanih za kružne objekte otkrili i neke algoritme koji daju dobre aproksimacije broja π [3, 13].

U najpoznatijem starokineskom matematičkom tekstu, *Devet poglavlja - umijeća računanja* (datirano između 200. g. pr. Kr. i 300. g. n. e.), u prvom poglavlju koje se bavi geometrijskim problemima vezanim za mjerenje polja, 31. i 32. zadatak se tiču polja kružnog oblika, a tekst je kako slijedi [11].

Primjer 5.1. *Sad je dano kružno polje, opseg je* 30 bu,[5] *a promjer je* 10 bu. *Reci: Koja je površina? Odgovor:* 75 (*kvadratnih*) bu.

Dano je drugo kružno polje, opseg je 181 bu, *a promjer je* $60\frac{1}{3}$ bu. *Reci: Koja je površina? Odgovor:* 11 (*kvadratnih*) mu $90\frac{1}{12}$ (*kvadratnih*) bu.

Pravilo za kružna polja.

Množenje pola opsega s polumjerom daje površinu kruga u (*kvadratnim*) bu.

Još jedno pravilo: Četvrtina umnoška opsega i promjera.

Još jedno pravilo: Četvrtina umnoška od tri puta kvadrat promjera.

Još jedno pravilo: Kvadrirani opseg podijeljen s dvanaest.

Prvo što je uočljivo u citiranim zadacima je da se mjere kruga zadaju kao opseg i promjer, te promjer u oba slučaja dan kao trećina opsega, što naravno odgovara aproksimaciji $\pi \approx 3$. No, prva dva pravila točno povezuju opseg i promjer kruga s njegovom površinom (stvarno je za svaki krug $P = \frac{O}{2} \cdot r = \frac{O}{4} \cdot d$), dok se treće pravilo $P_3 = \frac{1}{4} \cdot 3d^2$ svodi na $\pi \approx 3$, a četvrto $P_4 = \frac{O^2}{12}$ bi također bilo točno samo da je $\pi = 3$. U svakom slučaju možemo reći da se ovdje nazire svijest o postojanju proporcionalnosti vezanih za opseg i površinu kruga, kao i pokušaj davanja formula, ali i dalje nema dokaza iste i aproksimacije koje se koriste još nisu baš dobre.

U *Devet poglavlja umijeća računanja* nalazimo i pravilo za volumen kugle: Volumen kugle računa se kao $\frac{9}{16}$ volumena kocke opisane toj kugli,

[5] Starokineska mjera duljine, otprilike 1.386 m; 240 bu čini 1 mu.

odnosno tvrdi se da je omjer volumena kocke brida d i kugle promjera d jednak $4^2 : 3^2$. To pravilo kao i treće od pravila iz primjera 5.1 (da se površina kvadrata prema površini upisanog mu kruga odnosi kao $4 : 3$) neko vrijeme su ostala popularna [11, 12, 13]. U sljedećim stoljećima svijest o proporcionalnostima vezanim za krug, odnosno egzistenciji konstante koju danas zovemo π, postala je potpuno jasna i kineska sklonost numeričkim izračunima dovest će do računanja boljih aproksimacija za π.

Astronom i filozof Zhang Heng (78.–139.) je, čini se, prvi nakon *Devet poglavlja umijeća računanja* modificirao ta pravila. On je zaključio da se kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose kao $8 : 5$. Ako to usporedimo s egzaktnim omjerom

$$(d^2)^2 : \left(d^2 \frac{\pi}{4}\right)^2 = 16 : \pi^2,$$

vidimo da to odgovara procjeni $\pi \approx \sqrt{10}$, jednoj od najpoznatijih povijesnih aproksimacija broja π [1, 2].

Stotinjak godina kasnije, Liu Hui (oko 220.–280.) je u svojim komentarima *Devet poglavlja umijeća računanja* (iz kojih saznajemo i za spomenutu Zhang Hengovu aproksimaciju) opisao iterativni postupak analogan kronološki ranijem, ali njemu nepoznatom, Arhimedovom algoritmu (vidi sljedeći odjeljak). Liu Hui je uočio da se takvim postupkom može dobiti proizvoljno točna vrijednost za konstantu koju danas zovemo π (iako je zagovarao korištenje razlomka $\frac{157}{50}$ (to je točno 3.14) za praktične račune). U 5. st. Liu Huijevom metodom Tsu Ch'ung-Chih je dobio aproksimaciju broja π točno na 8 decimalnih znamenki (u Europi će se takva točnost dobiti tek u 16. st.) [1, 2].

6 Umjesto zaključka: Hipokrat, Euklid i Arhimed

Iako su neki od opisanih rezultata vezanih za pretpovijest broja π kasniji od razdoblja klasične, antičke grčke matematike, naveli smo ih do razdoblja za koja se može relativno pouzdano tvrditi da u navedenim civilizacijama nije bilo poznato što su na navedenu temu napravili antički Grci. Ipak, kronološki gledano o konstanti koju danas zovemo π možemo govoriti od 3. st. pr. Kr., kad je Arhimed dokazao svoj znameniti teorem o krugu. Ovdje ćemo se samo kratko osvrnuti na starogrčki doprinos povijesti broja π do uključivo Arhimeda.

Prvi starogrčki matematičar koji je bio svjestan proporcionalnosti između površine kruga i površine kvadrata nad njegovim polumjerom („krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim polumjerima"), a možda je to znao i dokazati, bio je Hipokrat s Hiosa (5. st. pr. Kr). Mnogi njegovi rezultati sadržani su u Euklidovim *Elementima* (ca. 300. pr. Kr.). U XII. knjizi *Elemenata* nalazimo 2. propoziciju: „Krugovi se međusobno odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima". Iako je ta tvrdnja ekvivalentna postojanju konstante proporcionalnosti između površine kruga i površine kvadrata nad njegovim polumjerom, ta se konstanta nigdje ne spominje. Naime, antički grčki matematičari omjer površina kruga i kvadrata nad polumjerom (koji jednostavno nazivaju omjerom kruga i kvadrata) ne bi smatrali brojem,[6] tj. taj se omjer nije poistovjećivao s brojem. Ipak, uz modernu interpretaciju možemo reći da ova Euklidova (vjerojatno Hipokratova) propozicija garantira postojanje konstante proporcionalnosti koju danas nazivamo π — ali samo vezano za površinu kruga [3, 8].

Ključna osoba za povijest broja π bio je Arhimed iz Sirakuze (oko 287.–212.), zbog čega se π ponekad naziva i Arhimedovim brojem. Iako ga ni Arhimed ništa više nego Euklid ne bi smatrao brojem, njegovi su rezultati tako značajni da nakon njega stvarno možemo govoriti o povijesti broja π. Arhimed je dokazao znameniti teorem o krugu, iz kojeg slijedi proporcionalnost opsega i promjera kruga te, uz modernu interpretaciju, da je konstanta proporcionalnosti u oba slučaja jedna te ista. Arhimedov teorem o krugu glasi: „Površina svakog kruga jednaka je površini pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta polumjer kruga, a druga opseg." Dakle, dokazao je

$$P = \frac{1}{2} r\, O.$$

Prema Euklidovoj/Hipokratovoj propoziciji je $P = k\, r^2$ pa je $2k\, r^2 = r\, O$, odnosno $O = 2k\, r$. Dakle, k u formulama $P = k\, r^2$ i $O = k\, d$ je jedan te isti, to je broj kojeg zovemo π.

Nadalje, Arhimed je iterativnom metodom pokazao da je opseg kruga u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera, odnosno

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Arhimedova metoda je sljedeća (koristimo modernu notaciju da bi bila lakše razumljiva).

1. Zadana je kružnica. Upišemo i opišemo joj pravilni šesterokut (to nam je nulta iteracija: $n = 0$).

[6] U klasičnom starogrčkom smislu, brojevi su isključivo prirodni brojevi.

2. Neka je u n-toj iteraciji o_n opseg upisanog, a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica). Tada vrijedi: $o_0 < o_1 < \ldots < o_n < \ldots < o < \ldots < O_n < \ldots < O_1 < O_0$.

3. Arhimed je otkrio i dokazao rekurzivnu vezu među opsezima u dva uzastopna koraka: Svaki sljedeći opseg opisanog mnogokuta je harmonijska sredina opsega upisanog i opisanog mnogokuta iz prethodnog koraka, odnosno vrijedi $O_{n+1} = \frac{2O_n o_n}{O_n + o_n}$. Također, svaki sljedeći opseg upisanog mnogokuta je geometrijska sredina opsega opisanog mnogokuta iz istog koraka i opsega prethodnog upisanog mnogokuta, odnosno $o_{n+1} = \sqrt{o_n O_{n+1}}$.

4. Sad se redom za svaki $n = 0, 1, \ldots$ prvo izračuna O_{n+1} iz prethodnih O_n i o_n, pa o_{n+1} iz upravo izračunatog O_{n+1} i prethodnog o_n. Izračunajmo to samo za prvi korak: Ako je polumjer kruga 1, početne su vrijednosti $o_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$. Iz tog slijedi da je

$$O_1 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}},$$

a onda je

$$o_1 = \sqrt{6 \cdot \frac{24\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}} = 12\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}}.$$

Napomenimo da Arhimed ne samo da nije imao modernu algebrasku notaciju, nego ni notaciju za korijene brojeva (jer ih ne bi smatrao brojevima), nego je odgovarajuće izračune proveo preko razmjera. Tako je došao do $n = 4$, što odgovara upisanom i opisanom pravilnom 96-erokutu i navedenoj procjeni omjera opsega i promjera kruga. Do otkrića moderne teorije redova, odnosno do 17. st., svi kasniji izračuni aproksimacija broja π temeljili su se na ovoj Arhimedovoj metodi [1, 2, 3, 13].

Literatura

[1] P. Beckmann, *A History of π*, St. Martin's Press, 1971.

[2] L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein, *Pi: A Source Book*, Springer, 2004.

[3] F. M. Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*, Springer Spektrum, 2017.

[4] A. B. Chace, H. P. Manning, R. C. Archibald, *The Rhind Mathematical Papyrus*, The Mathematical Association of America, 1927.

[5] L. Cooper, *A new interpretation of Problem 10 of the Moscow Mathematical Papyrus*, Hist. Math. **37** (2010), 11–27.

[6] L. Cooper, *Did Egyptian scribes have an algorithmic means for determining the circumference of a circle?*, Hist. Math. **38** (2011), 455–484.

[7] J. Dyer, *On the Ancient Babylonian Value for Pi*, The Number Warrior (blog), 2008. Pristupljeno 10. 12. 2021.

[8] D. E. Joyce, *Euclid's Elements*, `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/Euclid.html`, pristupljeno 14. 12. 2021.

[9] S. Kichenassamy, *Baudhayana's rule for the quadrature of the circle*, Hist. Math. **33** (2006), 149–183.

[10] MacTutor History of Mathematics Archives, *The Indian Sulbasutras*, `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Indian_sulbasutras/`, pristupljeno 10. 12. 2021.

[11] K. Shen, J. N. Crossley, A. Wah-Cheung Lun, H. Liu, *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, Oxford Univ. Press, 1999.

[12] F. J. Swetz, *The Volume of a Sphere: A Chinese Derivation*, The Mathematics Teacher **88** (1995), 142–145.

[13] H. Wußing, 6000 *Jahre Mathematik*, Springer, 2008.