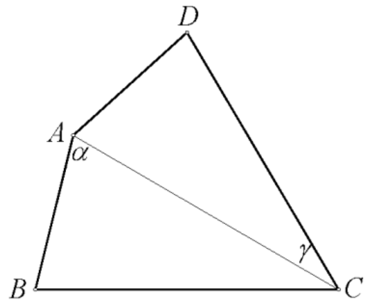
XVIII олимпијада

1. Даден е конвексен четириаголник со плоштина $32\,cm^2$ и збир на должините на две негови спротивни страни и една дијагонала, еднаков на $16\,cm$. Определи ги сите вредности кои може да ги има должината на другата дијагонала.

Решение. Нека во четириаголникот $ABCD$

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CD}=16. \qquad (1)$$



Неговата плоштина е еднаква на

$$2P=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha+\overline{AC}\cdot\overline{CD}\sin\gamma,$$

каде што $\alpha=\measuredangle CAB$ и $\gamma=\measuredangle ACD$. Понатаму, точна е оценката

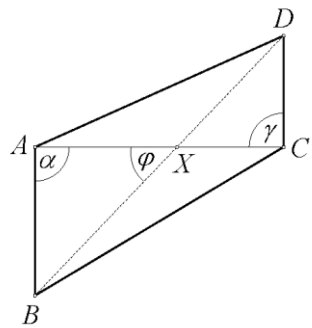
$$2P\le\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{AC}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}(\overline{AB}+\overline{CD}),$$

па од (1) имаме

$$2P\le\overline{AC}(16-\overline{AC}),$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha=\gamma=90^\circ$. Изразот $x(16-x)$ прима најголема вредност 64 (за $x=8$), па затоа

$$2P\le 64. \qquad (2)$$



Според условот од задачата во (2) важи знак за равенство, па затоа $\overline{AC}=8$ и $\alpha=\gamma=90^\circ$. Понатаму, $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{CD}$, а тоа е можно ако аголот $\measuredangle AXB=\varphi$ меѓу AC и BD е еднаков на 45°. Тогаш

$$\overline{BD}=\overline{AB}\sqrt{2}+\overline{CD}\sqrt{2}=(\overline{AB}+\overline{CD})\sqrt{2}=8\sqrt{2}\,cm.$$

2. Нека

$$P_1(x)=x^2-2,\; P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x)), \text{ за } k=2,3,...$$

Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ сите корени на равенката $P_n(x)=x$ се реални и меѓусебно различни броеви.

Решение. Лесно се забележува дека $P_n(x)$ е полином со степен 2^n. Ќе докажеме дека секое реално решение на $P_n(x)=x$ е од интервалот $(-2,2]$, за да потоа докажеме дека сите корени на разгледуваната равенка се реални и различни.

Нека $x>2$, т.е. $x=2+t$, за некој $t>0$. Тогаш, последователно добиваме

$$P_1(x) = 2 + 4t + t^2 > 2 + 4t$$
$$P_2(x) = [P_1(x)]^2 - 2 > (2 + 4t)^2 - 2 > 2 + 4^2 t$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = [P_{n-1}(x)]^2 - 2 > (2 + 4^{n-1}t)^2 - 2 = 2 + 4^n t > x,$$

За $x < -2$, т.е. $x = -2 - t$ па $P_1(x) = 2 + 4t + t^2 > 2 + 4t > 2$. Како и погоре се докажува дека $P_n(x) > 2$. Затоа $x < -2$ не може да биде решение на равенката $P_n(x) = x$. За $x = -2$, $P_n(x) > 0$, па $x = -2$ не може да биде решение на равенката.

Сега можеме да претпоставиме дека $x = 2\cos\alpha,\ \alpha \in [0, \pi)$. Имаме

$$P_1(x) = x^2 - 2 = 4\cos^2\alpha - 2 = 2\cos 2\alpha$$
$$P_2(x) = P_1(P_1(x)) = 4\cos^2 2\alpha - 2 = 2\cos 2^2\alpha$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x)) = 2\cos 2^n\alpha$$

што значи дека почетната равенка го добива обликот $\cos 2^n\alpha = \cos\alpha$.

Графикот на функцијата $f(\alpha) = \cos 2^n\alpha$ го сече графикот на функцијата $f(\alpha) = \cos\alpha$ на интервалот $[0, \pi)$ во 2^n различни точки α_i, $i = 1, 2, ..., 2^n$. На секоја од тие точки соодветствува по едно реално решение $x_i = 2\cos\alpha_i$. Такви решенија има 2^n и сите тие се реални и различни.

3. Кутија во облик на квадар може потполно да се исполни со коцки со должина на раб 1. Ако во неа се ставаат коцки чиј волумен е еднаков на 2, така што нивните рабови се паралелни со рабовите на кутијата, тогаш максималниот можен број на такви коцки потполнува точно 40% од волуменот на кутијата. Најди ги димензиите на сите кутии со тоа својство.

Решение. Очигледно е дека димензиите на секоја кутија со наведеното својство се природни броеви. Да ги означиме со m, n и p ($m \geq n \geq p$). Рабовите на коцка со волумен 2 се $\sqrt[3]{2}$ и во кутијата може да се сместат најмногу $[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}][\frac{n}{\sqrt[3]{2}}][\frac{p}{\sqrt[3]{2}}]$ коцки. Волуменот на овие коцки е два пати поголем од бројот на коцките и тој е $0,4mnp$. На тој начи задачата се сведува на решавање во множеството природни броеви на равенката

$$2[\tfrac{m}{\sqrt[3]{2}}][\tfrac{n}{\sqrt[3]{2}}][\tfrac{p}{\sqrt[3]{2}}] = 0,4mnp,$$

т.е. на равенката $\frac{mnp}{[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}][\frac{n}{\sqrt[3]{2}}][\frac{p}{\sqrt[3]{2}}]} = 5$, односно

$$f(m)f(n)f(p)=5,\ f(x)=\frac{x}{[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}]}.$$

Непосредно се пресметува дека

$$f(2)=2,\ f(3)=\tfrac{3}{2},\ f(4)=\tfrac{4}{3},\ f(5)=\tfrac{5}{3},\ f(6)=\tfrac{3}{2},$$

а за $x>6$ добиваме

$$f(x)=\frac{x}{[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}]}<\frac{x}{\frac{x}{\sqrt[3]{2}}-1}=\frac{x\sqrt[3]{2}}{x-\sqrt[3]{2}}<\frac{3}{2}=f(6).$$

Но, бидејќи $(\frac{3}{2})^3<5$, за производот $f(m)f(n)f(p)$ да биде 5, мора еден од множителите да биде 2 или $\frac{5}{3}$. Лесно се проверува дека едниот од множителите мора да биде 2 и тоа точно еднаш, а останатите два множители да се $\frac{5}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Видовме дека $2=f(2), \frac{5}{3}=f(5)$ и $\frac{3}{2}=f(6)$, па затоа сите можни димензии се $2\times3\times5$ и $2\times5\times6$.

4. Најди го најголемиот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на 1976.

Решение. Со N да го означиме најголемиот таков број. Нека

$$N=a_1a_2...a_n \text{ и } a_1+a_2+...+a_n=1976.$$

Ќе докажеме дека $a_i\le4$. Ако за некој i е исполнето $a_i\ge5$, тогаш наместо a_i можеме даземеме 2 или a_i-2, па во тој случај добиваме поголем производ, а збирот на множителите ќе остане непроменет. Последното следува од $2(a_i-2)>a_i$ и $2+(a_i-2)=a_i$. Исто така наместо четири земаме две двојки. Затоа $N=2^k3^l$ при што $2k+3l=1976$. Од $2^3<3^2$ и $2+2+2=3+3$, следува дека $k\in\{0,1,2\}$. Конечно, од $1976=3\cdot658+2$, добиваме $k=1$ и $N=2\cdot3^{658}$.

5. Даден е систем од p равенки со $q=2p$ непознати

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1q}x_q&=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2q}x_q&=0\\&\dots\dots\dots\\a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+...+a_{pq}x_q&=0\end{aligned}$$

во кој $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$ $(i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,q)$. Докажи дека постои решение $(x_1,x_2,...,x_q)$ на овој систем, такво што:

а) секој x_j $(j=1,2,...,q)$ е цел број,

б) барем за еден j $(1\le j\le q)$ важи $x_j\ne0$, и

в) за секој $j=1,2,...,q$ важи $|x_j|\le q$.

Решение. За секоја $q-$торка $(y_1, y_2, ..., y_q)$ цели броеви можеме да определиме $p-$торка цели броеви $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p)$ со формулите

$$\beta_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 ... + a_{iq}y_q, \; i = 1, 2, ..., p. \tag{1}$$

При тоа, ако $|y_i| \leq p$, тогаш

$$|\beta_i| \leq |a_{i1}| \cdot |y_1| + |a_{i2}| \cdot |y_2| + ... + |a_{iq}| \cdot |y_q| \leq |y_1| + |y_2| + ... + |y_q| \leq qp.$$

Вкупниот број на $q-$торки $(y_1, y_2, ..., y_q)$ од цели броеви такви што $|y_j| \leq p$ (за $j = 1, 2, ..., q$) е еднаков на

$$(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2 + 4p + 1)^p.$$

Бројот на сите $p-$торки $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p)$ такви што $|\beta_i| \leq qp$ (за $i = 1, 2, ..., p$) е еднаков на $(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$.

Бидејќи

$$(2p+1)^q = (4p^2 + 4p + 1)^p > (4p^2 + 1)^p = (2pq+1)^p,$$

од принципот на Дирихле следува дека постојат две различни $q-$торки $(y_1, y_2, ..., y_q)$ и $(z_1, z_2, ..., z_q)$ кои со формулата (1) определуваат иста $p-$торка. Лесно се проверува дека $(x_1, x_2, ..., x_q)$, $x_j = y_j - z_j$ е решение на дадениот систем кое ги задоволува условите (a), (b) и (c).

6. Низата $u_0, u_1, ...$ е дефинирана со

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}, \; u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Докажи дека за секој $n = 1, 2, ...$ важи

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

Решение. Ќе докажеме дека

$$u_n = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}},$$

за секој $n = 0, 1, ...$ Равенството ќе го докажеме со математичка индукција по n.

За $n = 0$ и $n = 1$ тврдењето е точно. Ако тврдењето е точно за $n = k-1$ и $n = k$, тогаш

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (2^{\frac{2^k - (-1)^k}{3}} + 2^{-\frac{2^k - (-1)^k}{3}})(2^{2\frac{2^{k-1} - (-1)^{k-1}}{3}} + 2^{-2\frac{2^{k-1} - (-1)^{k-1}}{3}}) - \frac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^k - (-1)^k + 2^k - 2(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{\frac{2^k - (-1)^k - 2^k + 2(-1)^{k-1}}{3}} + \\ &\quad + 2^{\frac{-2^k + (-1)^k + 2^k - 2(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{\frac{-2^k + (-1)^k - 2^k + 2(-1)^{k-1}}{3}} - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}+2^{\frac{-2^{k+1}+(-1)^{k+1}}{3}}-\frac{5}{2}$$
$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}},$$

бидејќи $2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}=\frac{5}{2}$, т.е. тврдењето е точно и за $n=k+1$.

За $n>0$ вториот собирок во

$$u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

е помал од еден и $2^n-(-1)^n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$, па затоа $[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$